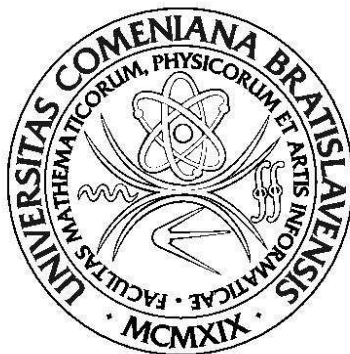


**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO
V BRATISLAVE**



**Analýza citlivosti dynamického akumuláčného
modelu pre druhý pilier dôchodkového systému
na Slovensku**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Tibor Jakubík

Bratislava 2008

Analýza citlivosti dynamického akumuláčného
modelu pre druhý pilier dôchodkového systému
na Slovensku

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Tibor Jakubík

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce
Daniel Ševčovič, Doc., RNDr., CSc.

BRATISLAVA 2008

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že predkladanú diplomovú prácu som vypracoval samostatne, len za pomoci konzultácií, nadobudnutých teoretických znalostí a literatúry uvedenej v zozname.

Pod'akovanie

Úprimne ďakujem diplomovému vedúcemu Doc. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za všestrannú pomoc, množstvo podnetných nápadov a ochotu prejavenu pri vedení diplomovej práce. Moja vďaka patrí i Mgr. Soni Kilianovej.

Rodičom ďakujem za umožnenie štúdia na vysokej škole a za nepretržitú podporu počas štúdia na nej.

Abstrakt

Od Januára 2005, kedy nadobudol účinnosť zákon o sociálnom poistení¹ sa penzijný systém na Slovensku riadi tzv. troj-pilierovým systémom. Cieľom tejto práce je analýza tohto systému, konkrétne druhého piliera dôchodkového systému, následné ozrejmienie dynamického akumuláčného modelu² pre tento pilier a analýza citlivosti daného modelu na rôzne faktory.

Kľúčové slová: druhý pilier, funkcia užitočnosti, averzia voči riziku, dôchodok, Bellmanova rovnica, analýza citlivosti

¹ 461/2003 Zákon o sociálnom poistení - uverejnený v Zbierke zákonov č. 200/2003 strana 3559

² Dynamic Accumulation Model for the Second Pillar of the Slovak Pension System
Igor Melicherčík – Soňa Kilianová – Daniel Ševčovič

Abstract

Since January 2005, as the relevant legislation became operative, the Pension system in Slovakia is operated by three pillar system. This system should secure a stable flow of high pensions to the beneficiaries together with the ability to secure the stability of the Pension system. The goal of this diploma work is to clarify this system, mainly the second pillar of this system and to clarify the Dynamic Accumulation Model³ for this pillar along with its different sensitivity analysis.

Keywords: Slovak Pension System, The Second Pillar, Utility Function, Risk Aversion, Pension, Bellman Equation, Sensitivity Analysis

³ Dynamic Accumulation Model for the Second Pillar of the Slovak Pension System
Igor Melicherčík – Soňa Kilianová – Daniel Ševčík

1	ÚVOD	9
2	PENZIJNÝ SYSTÉM NA SLOVENSKU	9
2.1	Druhý pilier	11
3	MODEL	12
3.1	Funkcia užitočnosti	14
3.1.1	Koncept averzie voči riziku	14
3.2	Numerická aproximačná schéma modelu	19
4	ANALÝZA CITLIVOSTI	20
4.1	Modelový príklad	21
4.1.1	Výsledky modelového príkladu	23
4.2	Rôzne zastúpenie akciovej zložky v Rastovom a Vyváženom fonde	24
4.2.1	Portfólio zastúpené akciovou zložkou v zákonom stanovených horných limitoch	25
4.2.2	Portfólio zastúpené akciovou zložkou s menšími váhami ako je zákonom stanovený limit	25
4.2.3	Súčasný reálny stav portfólia odpozorovaný z mesačných správ spoločností	26
4.3	Korelácia medzi akciovou a dlhopisovou zložkou vo fondoch	27
4.3.1	Záporná korelácia	27
4.3.2	Nulová korelácia	28
4.3.3	Kladná korelácia	29
4.3.4	Mean-variance analýza	29
4.4	Vývoj rastu miezd	31
4.4.1	Poľnohospodárstvo, poľovníctvo	32
4.4.2	Priemyselná výroba	32
4.4.3	Finančné sprostredkovanie	33
4.4.4	Zdravotníctvo, Sociálna pomoc	34
4.5	Sporiteľova averzia voči riziku	35
4.5.1	Veľmi rizikovo averzný sporiteľ	36
4.5.2	Mierne rizikovo averzný sporiteľ	36
4.5.3	Málo rizikovo averzný sporiteľ	37
4.5.4	Rôzne hodnoty averzie voči riziku a rôzne hodnoty %-neho zastúpenia akciovej zložky	37
4.6	Funkcie užitočnosti	39
4.6.1	Zvyšujúca sa relatívna averzia voči riziku (IRRA)	39
4.6.2	Znižujúca sa relatívna averzia voči riziku (DRRA)	41
4.7	Doba sporenia	42
4.7.1	Minimálna doba sporenia	42
4.7.2	Doba sporenia 25 rokov	43
4.7.3	Doba sporenia 35 rokov	43

4.8	Odvody a ich %-na miera	43
4.8.1	Zvýšenie odvodov	44
4.8.2	Zníženie odvodov	44
4.9	Poplatky DSS spojené so sporením	45
4.9.1	Zvýšenie poplatkov	46
4.9.2	Zníženie poplatkov	47
5	ZÁVER	47
	PRÍLOHA	49
	Voľba počtu deliacich bodov.....	49
	Aproximácia hodnôt funkcií.....	50
	POUŽITÁ LITERATÚRA	51

1 Úvod

Cieľom tejto diplomovej práce je ozrejmienie dynamického akumuláčného modelu pre druhý pilier dôchodkového systému na Slovensku [13] a jeho následná analýza citlivosti na vplyvy rôznych faktorov vstupujúcich do tohto modelu.

Štruktúra diplomovej práce je nasledovná: V Kapitole 2 opisujeme penzijný systém, ktorý na Slovensku platí od Januára roku 2005, jeho hlavnú myšlienku, štruktúru a princíp spravodlivého dôchodku, ktorý by mal zabezpečiť druhý pilier dôchodkového systému. V Kapitole 3 popisujeme dynamický akumuláčny model navrhnutý pre tento pilier (jeho pointu, odvodenie a numerické metódy použité v modely). Taktiež popisujeme výsledky modelového príkladu, ktoré predstavujú optimálne správanie sa sporiteľa, výšku jeho dôchodku počas doby sporenia a na konci doby sporenia (pri odchode do dôchodku) a možnú odchýlku od tejto hodnoty. V Kapitole 4 sa venujeme analýze citlivosti daného modelu, pričom meníme rôzne faktory (sporiteľova averzia voči riziku, korelácia medzi akciovou a dlhopisovou zložkou vo fondoch a pod...) vstupujúce do spomínaného modelu, ktoré majú vplyv na optimálne správanie sa sporiteľa. Kapitola 5 obsahuje súhrnné výsledky celej analýzy. V časti Príloha porovnávame rôzne numerické prístupy ich presnosť, výpočtový čas a pod., pričom zdôvodňujeme voľbu vybraných numerických metód spomenutých v Kapitole 3. Literatúra, ktorú som použil pri písaní diplomovej práce, je uvedená na konci tejto práce v časti Použitá literatúra.

2 Penzijný systém na Slovensku

Koncom októbra roku 2003 sa vláda Slovenskej republiky rozhodla prijať reformu dôchodkového systému⁴, cieľom ktorej je zabezpečiť sporiteľovi spravodlivejší dôchodok, ako dôchodok vyplácaný zo Sociálnej poisťovne a odbremeniť štát od záväzkov voči budúcim dôchodcom, ktorých počet vďaka negatívnemu demografickému trendu stále rastie. Z dlhodobého hľadiska, práve negatívny demografický trend (počet ľudí odchádzajúcich do penzie sa neustále zvyšuje oproti počtu ľudí, ktorí prispievajú do systému) je predpokladom neudržateľnosti tzv. priebežného systému (pay as you go system).

Princíp priebežného systému

Pracujúci povinne platia odvody do Sociálnej poisťovne (prvý pilier ~ 18% z hrubej mzdy), ktoré sa hneď vyplatia súčasným dôchodcom, pričom dúfajú v to, že keď oni

⁴ 461/2003 Zákon o sociálnom poistení - (rekonštruované znenie účinné od 1. januára 2008)

budú v dôchodku, ekonomicky aktívne obyvateľstvo im bude financovať starobné dôchodky.

Idea nového systému

Pracujúci si povinne platia odvody do Dôchodkovej správcovskej spoločnosti, v ktorej sa nasporená suma zhodnocuje prostredníctvom jedného z troch fondov:

- Konzervatívny fond
- Vyvážený fond
- Rastový fond

Pracujúci si sporí na vlastnú penziu, ktorú bude poberať v dôchodkovom veku. Avšak pri okamžitom prechode na nový systém, by vznikla medzera medzi sporiteľmi, ktorí dnes platia odvody do Sociálnej poisťovne (sportielia dúfajú vo vyplatenie svojich penzií v budúcnosti prostredníctvom budúcich pracujúcich) a sporiteľmi, ktorí by platili odvody do dôchodkovej správcovskej spoločnosti (sporili by si na vlastné dôchodky). Na vyplatenie dôchodkov prvej skupine sporiteľov by štát nemal peniaze.

Spomínaný problém je jeden z dôvodov, prečo na Slovensku funguje takzvaný troj-pilierový dôchodkový systém. Tento systém vstúpil do platnosti 1. januára 2005, spolu s ďalšími opatreniami a reformami súvisiacimi so sociálnym poistením:

- zmena valorizácie penzií⁵
- zvýšenie vekovej hranice pre nárok na odchod do dôchodku pre obe pohlavia⁶
- spustenie druhého piliera

Princíp troj-pilierového systému

Pracujúci, ktorí ostali v priebežnom systéme povinne platia odvody do

- Sociálnej poisťovne (**prvý pilier**) ~ 18% z hrubej mzdy

Pracujúci, ktorí vstúpili do 2. piliera povinne platia odvody do

- Sociálnej poisťovne (**prvý pilier**) ~ 9% z hrubej mzdy
- Dôchodkovej správcovskej spoločnosti (**druhý pilier**) ~ 9% z hrubej mzdy

⁵ valorizácia na základe rastu reálnych miezd bola nahradená švajčiarskou indexáciou

⁶ pred reformou muži 60 rokov a ženy 54, po reforme obe pohlavia 62 rokov s možným každoročným navýšením o 9 mesiacov

V prípade záujmu obe skupiny dobrovoľne platia odvody do

- Doplnkovej dôchodkovej spoločnosti (**tretí pilier**) ~ zo svojej mzdy sporiteľ platí podľa vlastného uváženia a istou čiastkou zvyčajne prispieva aj zamestnávateľ

Každý ekonomicky aktívny človek na konci svojho produktívneho veku začne poberať starobný dôchodok, z príslušného piliera, v prípade, že splnil zákonom stanovené parametre. Nárok na starobný dôchodok⁷ má poistenec, ktorý

- získal najmenej 15 rokov obdobia dôchodkového poistenia
- dovŕšil dôchodkový vek

2.1 Druhý pilier

Slúži ako alternatíva k prvému pilieru, ktorý z dlhodobého hľadiska nie je udržateľný, práve kvôli negatívnemu demografickému trendu. Je spravovaný Dôchodkovými správcovskými spoločnosťami (ďalej DSS), nad ktorými má dohľad viacero inštitúcií:

- Úrad pre dohľad nad finančným trhom
- Národná banka Slovenska.
- Depozitár
- Vnútoraná kontrola DSS
- Audítora

Na Slovensku v tejto oblasti pôsobí 6 súkromných spoločností. V každej zo spoločností existujú tri fondy, z ktorých jeden si sporiteľ môže vybrať ako investičnú príležitosť pre prípadné zhodnocovanie svojich úspor (odvodov). Fondy sú zložené z dlhopisovej a akciovej časti a to v zákonom stanovenom pomere:

Tabuľka 1 Zákonom povolené limity pre jednotlivé fondy

Typ fondu	Akcie	Dlhopisy a nástroje peňažného trhu
Rastový	≤ 80 %	≥ 20 %
Vyvážený	≤ 50 %	≥ 50 %
Konzervatívny	-	100 %

⁷ Starobný dôchodok je dôchodková dávka, ktorá sa za podmienok ustanovených zákonom č. 461/2003Z. z. v znení neskorších predpisov poskytuje zo starobného poistenia. Účelom starobného dôchodku je zabezpečiť poistencovi príjem v starobe.

Počas doby sporenia, môže sporiteľ investovať svoje úspory len do jedného zo spomínaných fondov, pričom frekvencia rebalancovania medzi fondami nie je obmedzená.

3 Model

Predpokladajme, že sporiteľ odvedie raz ročne τ -časť svojej ročnej mzdy w_t do nejakého fondu $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Označme $s_t, t=1, 2, \dots, T-1$ ako akumulovanú sumu všetkých platieb v čase t , kde T je čas odchodu do dôchodku. Potom rovnica pre rozpočtové ohraničenie vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= s(1+r_t^j) + w_{t+1}\tau, \quad t=1, 2, \dots, T-1, \\ s_1 &= w_1\tau, \end{aligned} \quad (1)$$

kde r_t^j je výnos fondu j v čase $[t, t+1)$. Keď sporiteľ odchádza do dôchodku, chce si zanechať svoj životný štandard, ktorý je na úrovni posledného ročného platu. Z tohto hľadiska nasporená suma s_T v čase odchodu do dôchodku nie je presne to, čo budúceho penzistu zaujíma. Lepším ukazovateľom je pomer nasporenej sumy s_T k poslednému ročnému platu w_t čiže premenná $d_T = s_T / w_T$. S použitím premennej $d_t = s_t / w_t$ môžeme preformulovať rovnicu pre rozpočtové ohraničenie (1):

$$\begin{aligned} d_{t+1} &= F_t(d_t, j), \quad t=1, 2, \dots, T-1, \\ d_1 &= \tau, \end{aligned} \quad (2)$$

kde

$$F_t(d_t, j) = d \frac{1+r_t^j}{1+\rho_t} + \tau, \quad t=1, 2, \dots, T-1, \quad (3)$$

pričom ρ_t (deterministická premenná) je rast mzdy v čase t , ktorý vstupuje do rovnice:

$$w_{t+1} = w_t(1+\rho_t) \quad (4)$$

Predpokladajme, že každý rok má sporiteľ možnosť vybrať si fond $j(t, I_t) \in \{1, 2, \dots, m\}$ kde I_t je množina informácií o historických výnosoch r_t^j a raste mzdy ρ_t v čase $t'=1, 2, \dots, t-1$. Predpokladajme, že história hodnôt rastu mzdy ρ_t má deterministický charakter pre $t=1, 2, \dots, T-1$ a taktiež predpokladajme, že výnosy r_t^j sú nahodné premenné, nezávislé v čase $t=1, 2, \dots, T-1$. Potom jediná relevantná informácia je hodnota d_t . Preto $j(t, I_t) \equiv j(t, d_t)$. Teraz môžeme formulovať problém dynamického stochastického programovania:

$$\max_j = E(u(d_T)) \quad (5)$$

s rozpočtovým ohraničením:

$$\begin{aligned} d_{t+1} &= F_t(d_t, j(t, d_t)), \quad t = 1, 2, \dots, T-1 \\ d_1 &= \tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Maximum je brané cez všetky stratégie $j = j(t, d_t)$, pričom premenná $u(d_T)$ predstavuje funkciu užitočnosti sporiteľa.

S využitím vežového pravidla podmienených pravdepodobností sa dá $E(u(d_T))$ prepísať na:

$$E(u(d_T)) = E(E(u(d_T) | d_t)) = E(E(u(d_T) | d_{t+1}) | d_t)$$

a týmto spôsobom sa dá dopracovať k Bellmanovej rovnici

$$V_t(d) = \max_{j \in \{1, 2, \dots, m\}} E[V_{t+1}(F_t(d, j))] = E[V_{t+1}(F_t(d, j(t, d)))] \quad (7)$$

pre $t = 1, 2, \dots, T-1$, kde

$$V_T(d) = u(d)$$

S využitím rovnice (7) sa k optimálnej stratégii $j(t, d_t)$ dopracujeme rekurentným spôsobom. Táto stratégia vypovedá o sporiteľovej optimálnej voľbe fondu v každom časovom okamihu t pre každú hodnotu úspor d_t .

Predpokladajme, že náhodné výnosy fondov r_t^j sú reprezentované príslušnými funkciami hustoty f_t^j .

$$f_t^j(r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-E(r_t^j))^2}{2\sigma^2}}, \quad (8)$$

pričom zo substitúcie

$$y = (1+r)(1+\rho_t)^{-1} + \tau$$

dostaneme

$$r = (y - \tau) \frac{1 + \rho_t}{d} - 1.$$

Potom rovnicu (7) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned}
 V_t(d) &= \max_{j \in \{1, 2, \dots, m\}} E[V_{t+1}(F_t(d, j))] \\
 &= \max_{j \in \{1, 2, \dots, m\}} \int_R V_{t+1} \left(\frac{d}{1 + \rho_t} (1 + r) + \tau \right) f_t^j(r) dr \\
 &= \max_{j \in \{1, 2, \dots, m\}} \int_R V_{t+1}(y) f_t^j \left(\left(y - \tau \right) \frac{1 + \rho_t}{d} - 1 \right) \frac{1 + \rho_t}{d} dy, \tag{9}
 \end{aligned}$$

$$V_t(d) = \int_R V_{t+1}(y) f_t^{j(t, d)} \left(\left(y - \tau \right) \frac{1 + \rho_t}{d} - 1 \right) \frac{1 + \rho_t}{d} dy \tag{10}$$

kde $j(t, d)$ je argument maxima vo vzťahu (9) a R označuje množinu reálnych čísiel.

3.1 Funkcia užitočnosti

Osobitnú úlohu pri (5)-(6) zohráva sporiteľova funkcia užitočnosti $u(d_t)$. V tejto časti sa pokúsime vysvetliť, prečo je nutné zaoberať sa takýmto pojmom a aká je súvislosť medzi optimálnou voľbou fondu, funkciou užitočnosti a s ňou súvisiacou averziou voči riziku [1, 6].

3.1.1 Koncept averzie voči riziku

Averzia voči riziku v praxi znamená, že pri rozhodovaní sa medzi porovnateľnými výnosmi z jednotlivých fondov, sporiteľ volí ten typ fondu, v ktorom je menšie riziko. Tento koncept sa dá matematicky popísať nasledovne:

Nech s je nejaká náhodná premenná, ktorá môže nadobudnúť hodnoty $\{s_1, s_2\}$, tieto hodnoty môže nadobudnúť s pravdepodobnosťou $\{p, 1-p\}$. Potom stredná hodnota náhodnej premennej s je

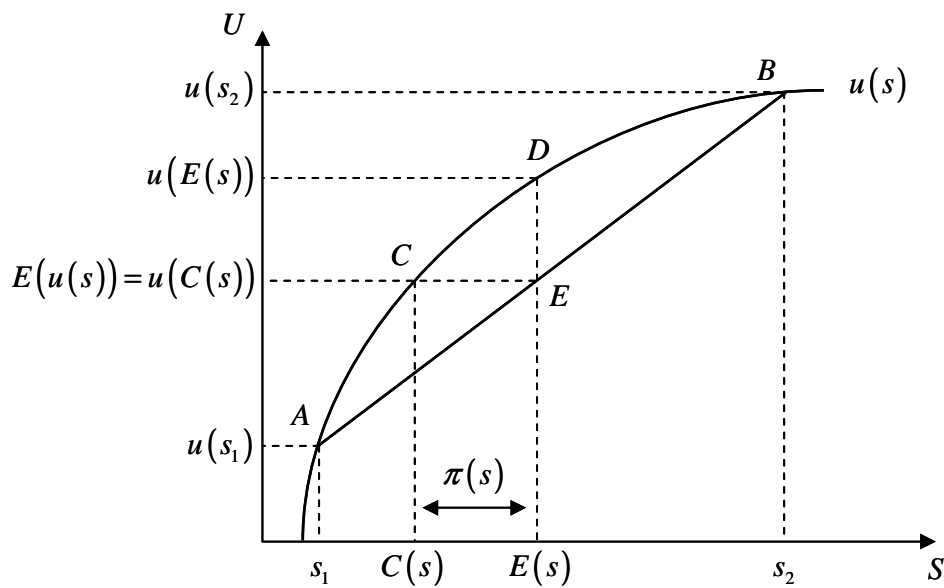
$$E(s) = ps_1 + (1-p)s_2.$$

Nech $u: R \rightarrow R$ je nejaká konkávna funkcia užitočnosti. Stredná hodnota úžitku sa potom dá zapísať v tvare

$$E(u(s)) = pu(s_1) + (1-p)u(s_2). \quad (11)$$

Hodnoty $E(s)$ a $E(u(s))$ sú zobrazené v *Obrázok 1* na x -vej a y -vej osi. Všimnime si, že umiestnenie bodu E na úsečke AB v *Obrázok 1* závisí na pravdepodobnosti p a $1-p$, teda na pravdepodobnosti s akou sa vyskytnú hodnoty s_1 a s_2 .

Obrázok 1



Dôsledkom Jensenovej nerovnosti [8] je nerovnosť

$$u[E(s)] > E(u(s))$$

a teda

$$u[ps_1 + (1-p)s_2] > pu(s_1) + (1-p)u(s_2).$$

Inými slovami, ak máme dve možnosti, z ktorých jedna má výplatu $E(s)$ s istotou (bod D) a druhá možnosť výplatu s_1 s pravdepodobnosťou p alebo s_2 s pravdepodobnosťou $1-p$ (bod E), tak potom úžitok sporiteľ'a, keď si vyberie prvú možnosť je $U[E(s)] = u[E(s)]$ a $U(s_1, s_2, p, 1-p) = pu(s_1) + (1-p)u(s_2)$ keď si vyberie druhú možnosť. Pretože očakávaná výplata $E(s)$ je v oboch prípadoch rovnaká, je jasné, že ak má sporiteľ nejakú averziu voči riziku, tak si zo spomínaných možností vyberie prvú

možnosť, pretože môže získať tú istú výplatu a nemusí podstúpiť žiadne riziko. Jednoducho povedané z tej istej výplaty $E(s)$ má v bode D väčší úžitok ako v bode E. Preto platí nerovnosť $u[E(s)] > E(u(s))$.

Predpokladajme, že existuje tretia možnosť, ktorej výplata je $C(s)$ s istotou. Ako je možné vidieť na *Obrázok 1*, očakávaný úžitok sporiteľa z takejto výplaty je ten istý ako v prípade druhej možnosti, preto

$$u[C(s)] = E(u(s))$$

a teda

$$C(s) = u^{-1}(E(u(s))).$$

Všimnime si však, že výplata ktorú sporiteľ obdrží, ak si zvolí tretiu možnosť je menšia ako výplata, ktorú by získal pri voľbe druhej možnosti

$$C(s) < E(s).$$

Avšak z oboch výplat má rovnaký úžitok a preto by bol pri rozhodovaní sa, ktorú z možností (druhú alebo tretiu) si vybrať, indiferentný. Rozdiel medzi jednotlivými výplatami, môžeme označiť

$$\pi(s) = E(s) - C(s),$$

a nazvať ho *risk-premium*. Risk premium [14] značí maximálnu možnú mieru straty z výplaty $E(s)$, ktorú je sporiteľ ochotný akceptovať pri získaní bezrizikovej výplaty $C(s)$.

Vo všeobecnosti, nech $u: R \rightarrow R$ je nejaká elementárna funkcia užitočnosti. Nech s je náhodná premenná s distribučnou funkciou F_s , pre ktorú platí $F_s(x) = P\{s \leq x\}$. Označme M ako množinu všetkých náhodných premenných. Nech pre nejakú náhodnú premennú $s \in M$ platí, že jej očakávaná hodnota bude

$$E(s) = \int_R x dF_s(x),$$

a nech sporiteľov očakávaný úžitok z hodnoty $E(s)$ je

$$E(u(s)) = \int_R u(x) dF_s(x).$$

Označme $\pi^u(s) = E(s) - C^u(s)$ ako risk premium, pričom index “ u ” značí, že obe premenné (risk premium aj očakávaná výplata $C(s)$) závisia od zvolenej funkcie užitočnosti. Potom sporiteľ je:

- rizikovo averzný ak $C^u(s) \leq E(s)$ alebo ak $\pi^u(s) \geq 0$ pre $\forall s \in M$.
- rizikovo neutrálny ak $C^u(s) = E(s)$ alebo ak $\pi^u(s) = 0$ pre $\forall s \in M$.
- rizikovo obľubujúci ak $C^u(s) > E(s)$ alebo ak $\pi^u(s) < 0$ pre $\forall s \in M$.

Veta:

Nech $u: R \rightarrow R$ je monotónne rastúca funkcia užitočnosti reprezentujúca preferencie pomocou nerovnosti \geq_u na množine M . Potom (i) u je konkávna vtedy a len vtedy, ak nerovnosť \geq_u predstavuje rizikovo averzný profil sporiteľa (ii) u je konvexná vtedy a len vtedy, ak nerovnosť \geq_u predstavuje rizikovo obľubujúci profil sporiteľa (iii) u je lineárna vtedy a len vtedy, ak nerovnosť \geq_u predstavuje rizikovo neutrálny profil sporiteľa.

Dôkaz:

(i) Nech u je konkávna. Potom z definície konkávnosti platí nerovnosť

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y), \quad (12)$$

pre všetky $x, y \in R$ a $\alpha \in (0,1)$. Avšak platí rovnosť $E(s) = \alpha x + (1-\alpha)y$ a tak isto platí i rovnosť $E(u(s)) = \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y)$. Preto nerovnosť (12) implikuje nerovnosť $u(E(s)) \geq E(u(s))$. Z definície $E(u(s)) = u(C^u(s))$ potom vyplýva nerovnosť $u(E(s)) \geq u(C^u(s))$ a pretože u je monotónne rastúca funkcia, tak platí nerovnosť $E(s) \geq C^u(s)$, čo je vlastne definícia averzie voči riziku. Analogicky sa dá dokázať tvrdenie (ii) a (iii).

Takýmto spôsobom môžeme rizikovo averznému sporiteľovi, rizikovo neutrálnemu a rizikovo obľubujúcemu priradiť konkávnu, lineárnu a konvexnú funkciu užitočnosti.

Po ozrejmení si pojmu averzia voči riziku, je prirodzené zodpovedať otázku, ako v praxi veľkosť takejto premennej merať. Odpoveď na túto otázku poskytujú autori John

W. Pratt (1964) a Kenneth J. Arrow (1965) a ich *Arrow-Pratt miera relatívnej averzie voči riziku*, ktorá je definovaná vzťahom:

$$R_u(s) = -su''(s)/u'(s). \quad (13)$$

Táto miera je vzhľadom na sporiteľovu funkciu užitočnosti chápaná ako⁸:

- DRRA ~ znižujúca sa relatívna averzia voči riziku ($R_u(s) \sim$ klesajúca f-cia)
- CRRA ~ konštantná relatívna averzia voči riziku ($R_u(s) \sim$ konštantná f-cia)
- IRRA ~ zvyšujúca sa relatívna averzia voči riziku ($R_u(s) \sim$ rastúca f-cia)

V našom prípade má sporiteľova funkcia užitočnosti tvar:

$$u(d) = \frac{1}{1-a} \left((kd)^{1-a} - 1 \right) \quad \text{pre } a \neq 1 \quad (14)$$

$$u(d) = \ln a \quad \text{pre } a = 1 \quad (15)$$

V nasledujúcich častiach sa budeme zaoberať takým typom sporiteľa, pre ktorého platí, že jeho averzia voči riziku je $a \geq 3$, preto ďalej pracujeme len so vzorcom (14).

Na základe rovnice (13) zistíme o aký typ averzie voči riziku vzhľadom na sporiteľovu funkciu užitočnosti sa jedná. Po zderivovaní rovnice (14) dostávame:

$$u'(d) = \frac{\partial u}{\partial d} = \frac{k^{1-a}}{1-a} (1-a)(d)^{-a} = \frac{k^{1-a}}{(d)^a} \quad \text{a} \quad u''(d) = \frac{\partial^2 u}{\partial d^2} = k^{1-a} (-a)(d)^{-(a+1)} = \frac{(-a)k^{1-a}}{d^{a+1}}$$

teda

$$R_u(d) = -d \left(\frac{(-a)k^{1-a}}{(d)^{a+1}} \right) \frac{(d)^a}{k^{1-a}} = \frac{ad}{d} = a \sim \text{const.},$$

sa jedná o konštantnú relatívnu averziu voči riziku (CRRA). Takáto averzia popisuje typ sporiteľa, ktorý je ochotný držať konštantnú časť svojho kapitálu v akomkoľvek type fondu, pričom hodnota jeho úspor sa môže počas doby sporenia v danom fonde meniť.

⁸ uvedené skratky sú všeobecne zaužívané anglické skratky: DRRA ~ decreasing relative risk aversion, CRRA ~ constant relative risk aversion, IRRA ~ increasing relative risk aversion

3.2 Numerická aproximačná schéma modelu

Táto časť je venovaná numerickej aproximačnej schéme daného modelu. Problém pri počítaní Bellmanovho integrálu (10) je v oscilácií jeho hodnôt. Tento integrál nadobúda tak malé ako i veľké hodnoty. Preto je dobré použiť škálovaciu techniku, ktorá by tieto výkyvy čiastočne eliminovala.

Nech $H_t(d)$ je nejaká funkcia pre $t=1,2,\dots,T$. Škálovaním funkcie $V_t(d)$ pomocou $H_t(d)$ vznikne nová funkcia $W_t(d)$ tvaru

$$W_t(d) = H_t(d)V_t(d)$$

Je jasné, že pôvodná funkcia $V_t(d)$ sa dá z vyššie uvedeného vzťahu vypočítať ako $V_t(d) = W_t(d)/H_t(d)$. Pre časový krok $t=T$ teda platí

$$W_T(d) = H_T(d)V_T(d)$$

kde

$$V_T(d) = u(d) = \frac{1}{1-a} \left((kd)^{1-a} - 1 \right)$$

Pre každý ďalší časový krok $T-1, \dots, 2$ platí

$$\begin{aligned} W_{t-1}(d) &= H_{t-1}(d)V_{t-1}(d) \\ &= \max_{j \in \{1,2,\dots,m\}} \int_R H_{t-1}(d) V_t \left(\frac{d}{1+\rho_t} (1+r) + \tau \right) f_t^j(r) dr \\ &= \max_{j \in \{1,2,\dots,m\}} \int_R \frac{H_{t-1}(d) W_t \left(\frac{d}{1+\rho_t} (1+r) + \tau \right)}{H_t \left(\frac{d}{1+\rho_t} (1+r) + \tau \right)} f_t^j(r) dr \\ &= \max_{j \in \{1,2,\dots,m\}} \int_R \frac{H_{t-1}(d) W_t(y)}{H_t(y)} f_t^j \left(\left((y-\tau) \frac{1+\rho_t}{d} - 1 \right) \frac{1+\rho_t}{d} \right) dy \end{aligned} \quad (16)$$

Funkcia $H_t(d)$ pre $t=T, T-1, \dots, 2, 1$ je počítaná nasledovným rekurentným spôsobom

$$H_T = \frac{1}{\sqrt{1+V_T^2}} \text{ pre } t=T \quad \text{a} \quad H_t = \frac{1}{\sqrt{1+V_{t+1}^2}} \text{ pre } t=T-1, \dots, 2, 1 \quad (17)$$

Pre výpočet hodnôt funkcie $W_t(d)$ sa používa diskrétna voľba parametra d , ktorý závisí od času $t=T, T-1, \dots, 2, 1$, čiže $d \in [d_{\min}, t/2]$, kde $d_{\min} = 0.0891$. Horná hranica $t/2$ je zvolená s ohľadom na maximálnu možnú mieru úspor d k ročnému platu sporiteľa (ročná hrubá mzda w_t). V každom časovom kroku $t=T, T-1, \dots, 2, 1$ je tento interval rovnomerne rozdelený na 200 deliacich bodov.

Pre výpočet hodnôt funkcie $W_t(y)$ a $H_t(y)$ vo vzorci (16) používame po častiach kubický Hermitov interpolačný polynóm v tvare⁹

$$W_t(y) = \frac{3hs^2 - 2s^3}{h^3} W_t(d_{k+1}) + \frac{h^3 - 3hs^2 + 2s^3}{h^3} W_t(d_k) + \frac{s^2(s-h)}{h^2} \sigma_{k+1} + \frac{s^2(s-h)}{h^2} \sigma_k$$

kde $d_k \leq y \leq d_{k+1}$, pričom $s = y - d_k$ je vzdialenosť hľadaného bodu y od krajnej hodnoty d_k , $h = d_{k+1} - d_k$ je dĺžka k -teho intervalu (v našom prípade vždy rovnaký interval o veľkosti

$$n = \frac{t/2 - d_{\min}}{200}$$

v príslušnej časovej vrstve $t=T, T-1, \dots, 1$) a $\sigma_k = \frac{W_t(d_{k+1}) - W_t(d_k)}{d_{k+1} - d_k}$ je sklon priamky prechádzajúcej bodmi $W_t(d_{k+1})$ a $W_t(d_k)$.

Výnosy fondov r_t^j sú z normálneho rozdelenia s konštantnou strednou hodnotou \bar{r}^j v čase t a so štandardnou odchýlkou σ^j , $j=1, \dots, m$. Na výpočet Bellmanovho integrálu (16) je použité Simpsonovo pravidlo s 11 deliacimi bodmi v nasledujúcom tvare

$$\int_{\bar{r}^j - 3\sigma^j}^{\bar{r}^j + 3\sigma^j} f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^{n/2} f(x_{2k-1}) + f(x_n) \right]$$

4 Analýza citlivosti

Daný model budeme testovať na zmeny rôznych faktorov vstupujúcich do tohto modelu. Každá zo simulácií je spravená na vzorke 10 000 sporiteľov. Ináč povedané simulujeme 10 000 možných scenárov, z ktorých na konci zoberieme aritmetický priemer.

⁹ Piecewise cubic Hermite interpolation

Týmto spôsobom budeme skúmať strednú hodnotu nasparennej sumy $E(d_t)$, a možnú odchýlku $D(d_t)$ od nasparennej sumy $E(d_t)$ pre $t = 1, 2, \dots, T$ vzhľadom na:

- Rôzne zastúpenie akciovej zložky v Rastovom a Vyváženom fonde
- Koreláciu medzi akciovou a dlhopisovou zložkou vo fondoch
- Vývoj rastu miezd
- Sporiteľovu averziu voči riziku
- Rôzne funkcie užitočnosti
- Dobu sporenia
- Odvody a ich %-nu mieru
- Poplatky DSS¹⁰ spojené so sporením

Pri každej analýze citlivosti budeme vychádzať z modelového príkladu 4.1, pričom budeme meniť len faktory, súvisiace s daným typom analýzy.

4.1 Modelový príklad

Sporiteľ si sporí na svoj dôchodok v druhom (kapitalizačnom) pilieri dôchodkového systému na Slovensku. (pripomíname že odvádza 9% z hrubej mesačnej mzdy, druhú časť odvodov z hrubej mzdy odvádza do Sociálnej poisťovne, kde bude mať taktiež nárok na dôchodok). Mzda sporiteľa každoročne rastie o index rastu miezd (*Tabuľka 2*).

Tabuľka 2 Rast miezd

obdobie	Rast mzdy (v %) ρ_t
2007-2010	7.0
2011-2015	7.1
2016-2020	6.4
2021-2025	5.9
2026-2030	5.6
2031-2035	5.2
2036-2040	4.9
2041-2046	4.5

Zdroj: Starnutie, zdravotný stav a determinanty výdavkov na zdravie v podmienkach Slovenska [9]

Doba sporenia je 40 rokov, pričom sporiteľ vzhľadom na svoju averziu voči riziku $a = 9$ (consensus podľa [12]) využíva všetky tri typy fondov bez akéhokoľvek legislatívneho

¹⁰ DSS – Dôchodková správcovská spoločnosť

obmedzenia (neriadi sa obmedzeniami 7 resp. 15-ročného zákazu zotrvať pred odchodom do dôchodku v Konzervatívnom resp. Rastovom fonde)¹¹. Výnosnosť jednotlivých fondov je určená na základe %-neho zastúpenia akciovej zložky a %-neho zastúpenia dlhopisovej zložky v príslušnom fonde.

Akciovú zložku predstavuje súbor historických dát S&P Index (Jan 1996-June 2002) s priemerným výnosom $r_S = 0.1028$ a štandardnou odchýlkou $\sigma_S = 0.1690$. Dlhopisovú zložku fondov predstavujú 10-ročné vládne dlhopisy emitované USA (Jan 1996 – June 2002) s priemerným výnosom $r_B = 0.0516$ a štandardnou odchýlkou $\sigma_B = 0.0082$. Podľa empirických štúdií [5, 10] vplýva na vzájomnú koreláciu medzi akciami a dlhopismi, najmä neistota ohľadom očakávanej inflácie spolu s neistotou ohľadom neočakávanej inflácie a reálnej úrokovej miery na trhu. Táto diplomová práca však nemá ambície odhadovať tieto makroekonomické ukazovatele, sústreďuje sa predovšetkým na analýzu citlivosti modelu. Uvažujeme preto odhad korelácie medzi spomínanými zložkami len na základe historických dát. V takom prípade hodnota korelácie je $corr = -0.1151$.

Každá z dôchodkových správcovských spoločností má vo svojom portfóliu (vo svojej ponuke) tri typy fondov, ktorých limity pre jednotlivé %-ne zastúpenia spomínaných zložiek sú uvedené v (Tabuľka 1). Každý z fondov ($F_1 \sim$ Rastový fond, $F_2 \sim$ Vyvážený fond, $F_3 \sim$ Konzervatívny fond) je teda zložený z akciovej časti (S), ktorá je zastúpená $\alpha\%$ a z dlhopisovej časti (B), ktorá je zastúpená $(1-\alpha)\%$. V našom prípade to je v nasledovnom pomere:

$$\begin{aligned} F_1 &= 0.8xS + 0.2xB, \\ F_2 &= 0.5xS + 0.5xB, \\ F_3 &= B. \end{aligned}$$

Výnosy fondov prislúchajúce tomuto rozloženiu sú:

Tabuľka 3 Výnosy fondov

fond	výnos	odchýlka
F_1	$r_1 = 0.0926$	$\sigma_1 = 0.1350$
F_2	$r_2 = 0.0772$	$\sigma_2 = 0.0841$
F_3	$r_3 = 0.0516$	$\sigma_3 = 0.0082$

Výnosy fondov počítame pomocou vzťahu

$$r_j = \alpha r_S + (1 - \alpha) r_B \quad \text{pre } j = 1, \dots, m$$

¹¹ Model popisuje optimálne správanie sa sporiteľa

Odchýlky fondov pomocou vzťahu

$$\sigma_j = \sqrt{\alpha^2 \sigma_S^2 + 2\text{corr}\sigma_S\sigma_B + (1-\alpha)^2 \sigma_B^2} \quad \text{pre } j=1, \dots, m$$

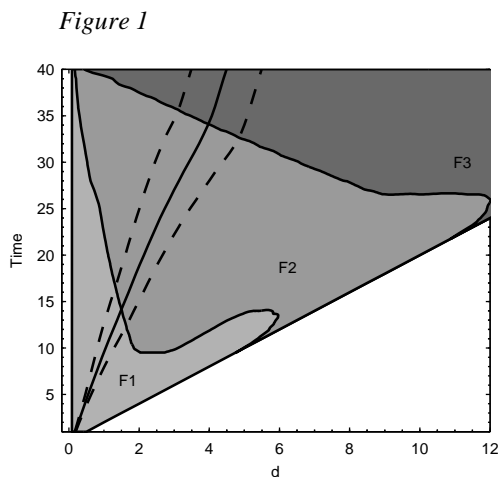
Fondy sú spravované dôchodkovými správcovskými spoločnosťami, ktoré si za tieto služby každý mesiac účtujú poplatky (odplatu za správu fondu, odplatu za vedenie osobného dôchodkového účtu).

- Odplata za správu fondu (1% z mesačného vkladu sporiteľa)
- Odplata za vedenie osobného dôchodkového účtu (0.07% priemernej mesačnej čistej hodnoty majetku)

Z tohto dôvodu je v podstate skutočná miera odvodov do II. Piliera $\tau = 8.91\%$ ($= 9\% * 0.99$). Odplatu za vedenie osobného dôchodkového účtu (hodnotu 0.84% p.a.) odpočítame od výnosov uvedených v *Tabuľka 3*.

Naším cieľom je odhadnúť strednú hodnotu nasporenej sumy $E(d_T)$ na konci obdobia T a možnú odchýlku $D(d_T)$ od hodnoty $E(d_T)$.

4.1.1 Výsledky modelového príkladu



Tabuľka 4

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
4.44	1.02	14	34

	akcie	dlhopisy
F_1	80%	20%
F_2	50%	50%
F_3	-	100%

Sporiteľova nasporená suma na konci obdobia ($T = 40$), by mala byť vo výške 4.44 násobku jeho poslednej ročnej hrubej mzdy. Táto hodnota sa však vzhľadom na volatilitu akciových trhov môže pohybovať v intervale $[3.42, 5.46]$. Sporiteľ využije pri svojom sporení si na dôchodok všetky tri typy fondov. Vo fonde F_1 si sporí 14 rokov, potom prestúpi do F_2 , kde zotrvá nasledujúcich 20 rokov. Na koniec prestúpi do tretieho fondu

F_3 , v ktorom ostane až do odchodu do dôchodku. Takáto stratégia je v súlade s intuíciou, pretože averzia voči riziku sa so zvyšujúcou nasporenou sumou a znižujúcim sa časom odchodu do dôchodku zvyšuje. Výsledky čiastočne potvrdzujú aj správnosť legislatívnych obmedzení, ktoré zakazujú sporiteľovi sporiť si 15, resp. 7 rokov pred odchodom do dôchodku v Rastovom, resp. Vyváženom fonde.

4.2 Rôzne zastúpenie akciovej zložky v Rastovom a Vyváženom fonde

Štátom dané obmedzenia (*Tabuľka 1*) nie sú zatiaľ v praxi dôchodkovými správcovskými spoločnosťami plne využívané. V nasledujúcej tabuľke poskytujeme prehľad o štruktúre jednotlivých portfólií v správcovských spoločnostiach a ich fondoch.

Tabuľka 5 Prehľad rozloženia finančných prostriedkov (v %)

	AXA		CSOB		AEGON		ING		ALIANZ		VUB	
	S	B	S	B	S	B	S	B	S	B	S	B
F_1	22.40	77.60	21.05	78.05	27.29	72.71	20.20	79.8	22.7	77.3	22.27	77.73
F_2	17.40	82.60	17.14	82.86	23.34	76.66	14.80	85.2	17.4	82.6	16.99	83.01
F_3	0	100	0	100	0	100	0	100	0	100	0	100

Pozn.: F_1 ~ Rastový fond

F_2 ~ Vyvážený fond

F_3 ~ Konzervatívny fond

S ~ %ne zastúpenie akcií v danom fonde

B ~ %ne zastúpenie dlhopisov, prostriedkov peňažného trhu a iných aktív v danom fonde

Zdroj: Mesačné správy dôchodkových správcovských spoločností k 31.01.2008

Výnosy jednotlivých fondov prislúchajúce rozloženiu, ktoré je uvedené v *Tabuľka 5* sú nasledovné:

Tabuľka 6 Prehľad výnosov v období od 02.02.2007 do 01.02.2008 (v %)

	AXA	CSOB	AEGON	ING	ALIANZ	VUB
F_1	0.969	-0.009	1.634	0.514	0.410	1.148
F_2	1.758	0.411	2.246	1.713	1.247	1.865
F_3	4.043	3.878	3.988	3.966	4.279	3.936

Pozn.: F_1 ~ Rastový fond

F_2 ~ Vyvážený fond

F_3 ~ Konzervatívny fond

Zdroj: Asociácia dôchodkových správcovských spoločností, prehľad údajov o dôchodkových fondoch

Vo všeobecnosti sa dá povedať, že dôchodkové správcovské spoločnosti na Slovensku majú svoje portfólia rozložené nasledovným spôsobom:

Tabuľka 7 Všeobecný prehľad rozloženia finančných prostriedkov

Typ fondu	Akcie	Dlhopisy a nástroje peňažného trhu
Rastový	22.65 %	77.35 %
Vyvážený	17.85 %	82.15 %
Konzervatívny	-	100 %

Poznámka: Výpočítané ako aritmetický priemer hodnôt z *Tabuľka 5*

V simuláciach skúmame správanie sa nasporenej sumy $E(d_t)$ a jej možnej odchýlky $D(d_t)$ v troch scenároch:

- Portfólio zastúpené akciovou zložkou v zákonom stanovených horných limitoch (modelový príklad)
- Portfólio zastúpené akciovou zložkou s menšími váhami ako je zákonom stanovený limit
- Súčasný reálny stav portfólia odpozorovaný z mesačných správ dôchodkových správcovských spoločností

4.2.1 Portfólio zastúpené akciovou zložkou v zákonom stanovených horných limitoch

Nakoľko sa jedná o modelový príklad 4.1, výsledky a ich interpretácia sú uvedené v časti 4.1.1.

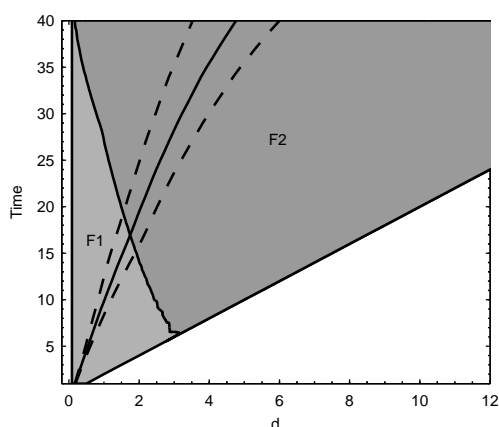
4.2.2 Portfólio zastúpené akciovou zložkou s menšími váhami ako je zákonom stanovený limit

Váhu akciovej zložky v Rastovom a Vyváženom fonde sme znižovali proporcionálne s ohľadom na sporiteľovu funkciu užitočnosti a jeho averziu voči riziku (nemá zmysel uvažovať varianty takého typu, kedy by Vyvážený fond mal väčšie zastúpenie akcií ako Rastový a pod.). Na vyjadrenie %-neho zastúpenia akciovej zložky vo Vyváženom fonde (F_2) sme použili vzťah

$$\alpha' = \frac{5}{8} \alpha,$$

kde α je %-ne zastúpenie akciovej zložky v Rastovom fonde (F_1).

Obrázok 2



Tabuľka 8

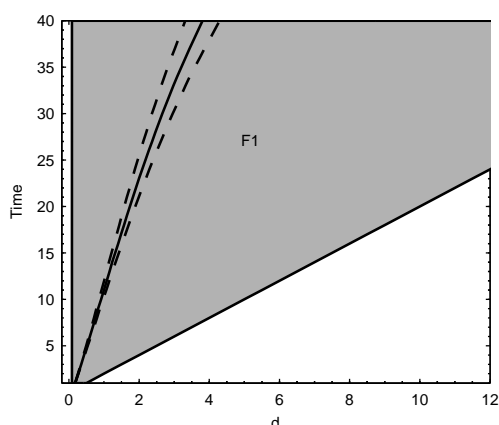
Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
4.59	1.17	17	-

	akcie	dlhopisy
F_1	65%	35%
F_2	40.63%	58.37%
F_3	-	100%

Dôvod, prečo je stredná hodnota nasporenej sumy väčšia ako v prípade 4.2.1 ~ 4.1.1 i napriek menšiemu %-nemu zastúpeniu akciovej zložky v oboch fondoch, je zotrvanie sporiteľa vo Vyváženom fonde počas väčšej časti doby sporenia. To však vzhľadom na legislatívne obmedzenia nie je reálna možnosť, a tak by sporiteľ 7 rokov pred odchodom do dôchodku musel prestúpiť do Konzervatívneho fondu – dôsledok spomínaného prestupu by sa prejavil na výške $E(d_T)$ (stredná hodnota nasporenej sumy by sa znížila, keďže Konzervatívny fond má najmenší potenciál zhodnocovania kapitálu). Simulácia však predstavuje optimálne správanie sa sporiteľa odhliadnuc od legislatívnych obmedzení.

4.2.3 Súčasný reálny stav portfólia odpozorovaný z mesačných správ spoločností

Obrázok 3



Tabuľka 9

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
3.69	0.47	-	-

	akcie	dlhopisy
F_1	22.65%	77.25%
F_2	17.85%	82.15%
F_3	-	100%

Intuitívne je jasné, že pri malom zastúpení akciovej zložky v jednotlivých typoch fondov, bude konečná nasporená suma, resp. jej stredná hodnota nižšia, ako v prípade

4.2.1 a 4.2.2. Simulácia túto hypotézu potvrdila. Stredná hodnota nasporenej sumy vo výške 3.69 násobku posledného hrubého ročného platu sporiteľa je dôsledkom malého %-neho zastúpenia akciovej zložky (zložka s najvyšším potenciálnym zhodnocovaním kapitálu) v oboch fondoch. Dá sa však predpokladať, že v budúcnosti budú jednotlivé dôchodkové správcovske spoločnosti zvyšovať podiel investícií smerujúcich do kapitálového trhu, čo by sa malo prejaviť na vyššej strednej hodnote nasporenej sumy na konci sporiaceho obdobia.

4.3 Korelácia medzi akciovou a dlhopisovou zložkou vo fondoch

Z historických dát odhadnutá korelácia $corr = -0.1151$ svedčí o veľmi malej závislosti vo vývoji cien akcií a vývoji cien vládnych dlhopisov. V teórii a praxi je všeobecne zaužívané klasifikovať typ korelácie medzi vzorkami dát nasledovne [4]:

Tabuľka 10 Typy korelácie

Korelácia	Záporná	Kladná
Malá	$[-0.29, -0.10]$	$[0.10, 0.29]$
Stredná	$[-0.49, -0.30]$	$[0.30, 0.49]$
Veľká	$[-1, -0.5]$	$[0.5, 1]$

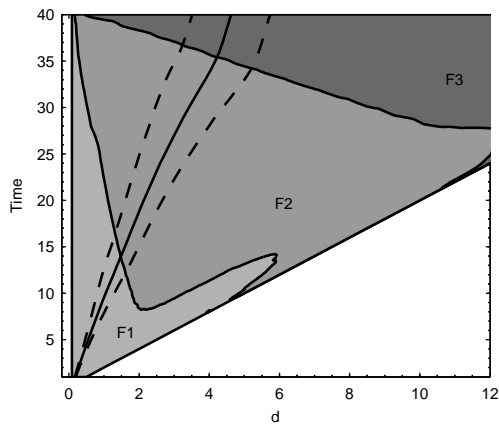
V simuláciach sa budeme zaoberať tromi scenármi, v ktorých korelácia medzi akciovou a dlhopisovou zložkou vo všetkých fondoch bude

- Záporná ($corr = -0.45$)
- Nulová ($corr = 0$)
- Kladná ($corr = 0.45$)

4.3.1 Záporná korelácia

Znamená, že so zvyšujúcou sa výkonnosťou akciovej zložky (ceny akcií stúpajú) klesá výkonnosť dlhopisovej zložky v portfóliu, resp. v jednotlivých fondoch (ceny dlhopisov klesajú). Na druhej strane so znižujúcou sa výkonnosťou akciovej zložky, rastie výkonnosť dlhopisovej zložky.

Obrázok 4



Tabuľka 11

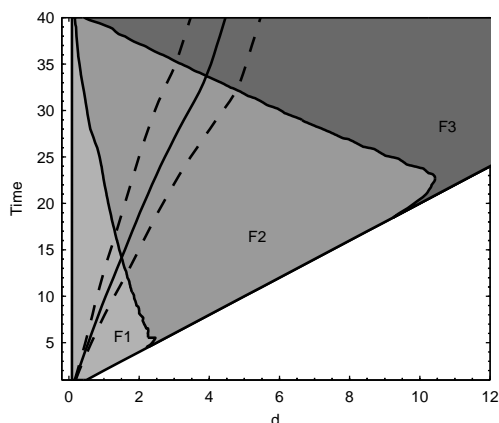
Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
4.58	1.11	14	35

Sporiteľova stredná hodnota nasporenej sumy v čase odchodu do dôchodku, pri maximálnom možnom %-nom zastúpení akciovej zložky v jednotlivých fondoch, je vo výške 4.58 násobku posledného ročného platu sporiteľa. Táto hodnota sa však môže pohybovať v intervale $[3.47, 5.69]$.

4.3.2 Nulová korelácia

V tomto prípade vzorka dát nemá žiaden spoločný trend, ktorý by čiastočne odhaľoval ich vzájomné správanie sa na kapitálovom trhu.

Obrázok 5



Tabuľka 12

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
4.38	0.99	14	33

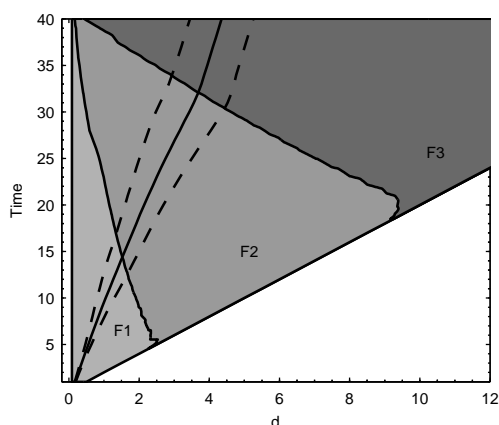
Ako je možné vidieť z výsledkov, nulová korelácia medzi akciovou a dlhopisovou zložkou vedie k väčšej diverzifikácii portfólia a teda k zníženiu rizika spojeného s investovaním do jednotlivých fondov. V porovnaní s prípadom 4.3.1 sa disperzia zmenšila z 1.11 na 0.99, avšak sporiteľ z tejto výhody veľa ťažiť nemôže, pretože stredná hodnota

nasporenej sumy na konci obdobia je nižšia ako v prípade 4.3.1. Pri tejto simulácii totiž neplatí, že prípadné straty na akciovej zložke vo fonde (pokles cien akcií) by boli mierne kompenzované vyššími výnosmi na strane dlhopisovej zložky vo fonde. Samozrejme, že istú mieru zodpovednosti na tejto skutočnosti nesie i skorší prestup sporiteľa do najmenej rizikového fondu.

4.3.3 Kladná korelácia

Znamená spoločný rast, príp pokles. Teda, keď rastie výkonnosť akciovej zložky (ceny akcií rastú), rastie i výkonnosť dlhopisovej zložky v danom fonde (ceny dlhopisov rastú). Naopak, ak klesá výkonnosť akciovej zložky (ceny akcií klesajú), klesá aj výkonnosť dlhopisovej zložky (ceny dlhopisov klesajú).

Obrázok 6



Tabuľka 13

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
4.27	0.90	15	32

Sporiteľovo zotrvanie v Rastovom fonde o jeden rok viac a vo Vyváženom o tri roky menej ako v prípade 4.3.1, má za následok zníženie potenciálneho rizika (volatility) spojeného so sporením si v takomto systéme. Takáto stratégia investovania spolu s vlastnosťou kladnej korelácie medzi akciovou zložkou a dlhopisovou zložkou má však za následok i mierne zníženie strednej hodnoty nasporenej sumy na konci obdobia.

4.3.4 Mean-variance analýza

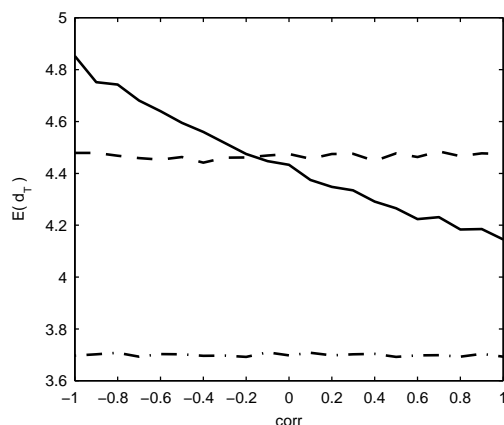
Z hľadiska korelácie medzi akciovou a dlhopisovou zložkou a teda aj možnej väčšej (menšej) diverzifikácie portfólia, je zaujímavé pozrieť sa na túto problematiku formou mean-variance analýzy. Pre všetky tri prípady uvedené v *Tabuľka 14* sa snažíme interpretovať výsledky strednej hodnoty nasporenej sumy, ako aj jej možnej odchýlky na konci doby sporenia vzhľadom na spomínanú koreláciu.

Tabuľka 14 Zastúpenia akciovej zložky v rôznych prípadoch

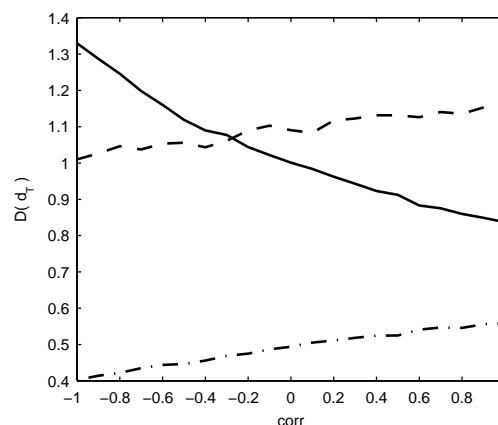
	Prípad 1	Prípad 2	Prípad 3
F_1	80%	60%	23%
F_2	50%	37.5%	17%
F_3	0%	0%	0%

Poznámka : kvôli prehľadnosti uvádzame len %-ne zastúpenie akciovej zložky (označ. α), dlhopisová zložka je zastúpená $(1 - \alpha)$ %

Obrázok 7



Obrázok 8



Z prípadu 1 je pre rastúce hodnoty kladnej korelácie medzi akciovou a dlhopisovou zložkou (akcie sa správajú podobne ako dlhopisy) možné vidieť, ako klesá stredná hodnota nasporenej sumy na konci obdobia spolu s jej odchýlkou. Dôvod je práve ten, že v tomto prípade sa fondy stávajú viac rizikovými a tak sporiteľ vzhľadom na svoju averziu voči riziku ($a=9$) skôr prestúpi do menej rizikového fondu, čím sa čiastočne pripraví o možnosť relatívne lepšie zhodnotiť svoje investované prostriedky.

V prípade 2 a 3 je vidieť ako málo závisí stredná hodnota nasporenej sumy na konci obdobia od korelácie medzi spomínanými zložkami. Dôvod je ten, že sporiteľ vzhľadom na malé %-ne zastúpenie akcií vo fondoch a jeho vzťahu k riziku v podstate neprestupuje medzi fondami (v prípade 3 zostáva počas celej doby sporenia v Akciovom fonde). Ak neexistujú prestupy medzi fondami, výška strednej hodnoty nasporenej sumy nezávisí od korelácie

4.4 Vývoj rastu miezd

Mzdy v hospodárstve, resp. v jednotlivých odvetviach nerastú rovnakým tempom. Preto je rozumné zodpovedať otázku, aký vplyv bude mať tento faktor na sporiteľov dôchodok. Zo všetkých odvetví¹², sme si ako vzorku vybrali štyri rôzne skupiny, pre ktoré sme odhadli rasty miezd v budúcich rokoch:

- Poľnohospodárstvo, poľovníctvo (i)
- Priemyselná výroba (ii)
- Finančné sprostredkovanie (iii)
- Zdravotníctvo, sociálna pomoc (iv)

Ako premennú sme zvolili medián rastu hrubej mesačnej mzdy, čo v praxi znamená, že polovica ľudí v danom odvetví sa nachádza napravo a polovica naľavo od daného stredu (mediánu).

Tabuľka 15 Medián hrubej mesačnej mzdy – spolu (v SK)

	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
i	7,874	7,940	8,191	8,975	10,159	10,521	11,493	12,727	13,514
ii	8,808	9,155	9,813	11,267	12,339	12,788	13,740	14,825	15,522
iii	12,984	12,089	13,068	16,423	18,090	19,793	23,842	24,929	27,242
iv	8,191	8,047	8,208	9,568	10,747	10,816	11,420	12,366	13,600

Poznámka: podľa výberového zisťovania o štruktúre miezd

Zdroj: Slovstat

Tabuľka 16 y/y zmena (v %)

	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	priemer
i	0.84	3.16	9.57	13.19	3.56	9.24	10.47	6.18	7.06
ii	3.94	7.19	14.82	9.51	3.64	7.44	7.90	4.70	7.39
iii	-6.89	8.10	25.67	10.15	9.41	20.46	4.56	9.28	10.09
iv	-1.76	2.00	16.57	12.32	0.64	5.58	8.28	9.98	6.70

V simuláciach uvažujeme, že rast miezd v jednotlivých odvetviach bude globálne zodpovedať približne rastu, ktorý je uvedený v *Tabuľka 2*. To znamená, že rast miezd prispôbujeme tak, aby počas obdobia $T = 40$ rokov mzda približne zodpovedala uvedenému priemeru v *Tabuľka 2*.

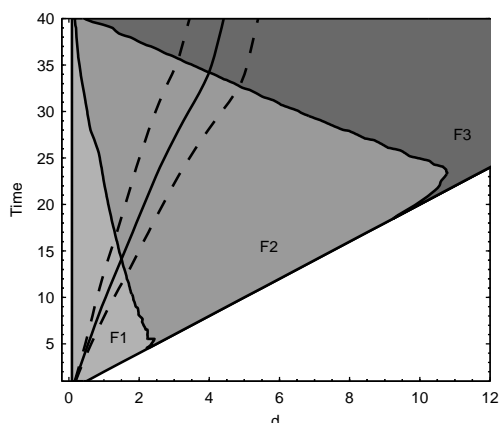
¹² Slovstat – Štruktúra podľa ekonomických činností (OKEČ)

4.4.1 Poľnohospodárstvo, poľovníctvo

Tabuľka 17 Odhadovaný rast mzdy pre poľnohospodárstvo a poľovníctvo (v %)

	2007-2010	2011-2015	2016-2020	2021-2025	2026-2030	2031-2035	2036-2040	2041-2046
ρ_t	7.06	7.22	6.25	5.81	5.75	5.15	4.85	4.87

Obrázok 9



Tabuľka 18

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_t)$	$D(d_t)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
4.37	1.01	14	34

Zamestnanosť¹³ v tomto odvetví v roku 2007 bola na úrovni 83 800 osôb. Sporitelia, ktorí sa rozhodnú sporiť si v druhom pilieri dôchodkového systému počas doby $T = 40$ rokov by mali mať na konci tohto obdobia nasporenú sumu vo výške približne 4.37 násobku ich posledného ročného platu. Vychádzajúc z predpokladu rastu mzdy uvedeného v Tabuľka 19 a z mediánu hrubej mesačnej mzdy pre rok 2006 z Tabuľka 15, by mal sporiteľ na svojom dôchodkovom účte mať približne 6 789 262 Sk.

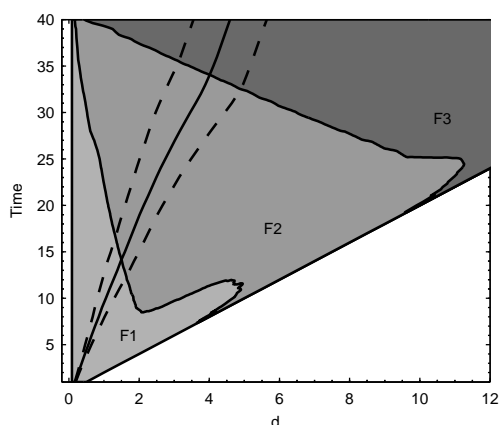
4.4.2 Priemyselná výroba

Tabuľka 19 Odhadovaný rast mzdy pre priemyselnú výrobu (v %)

	2007-2010	2011-2015	2016-2020	2021-2025	2026-2030	2031-2035	2036-2040	2041-2046
ρ_t	6.85	6.99	6.55	5.98	5.54	5.07	4.90	4.22

¹³ Zdroj: Slovstat - zamestnanci podľa ekonomických činností (OKEČ)
Poznámka: podľa metodiky VZPS (Výberové zisťovanie pracovných síl)

Obrázok 10



Tabuľka 20

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
4.49	1.03	14	34

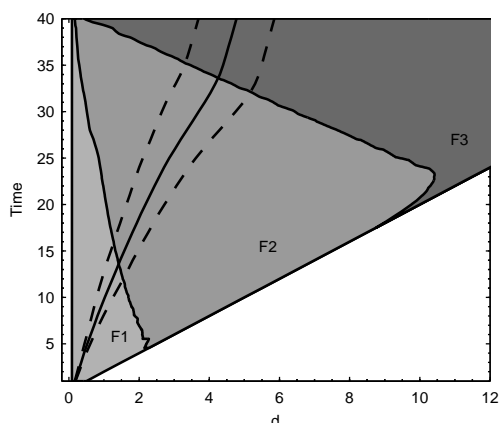
V priemysle v roku 2007 bolo zamestnaných 597 400 osôb. Sporitelia, ktorí sa rozhodnú sporiť si v druhom piliery dôchodkového systému počas doby $T = 40$ rokov by mali mať na konci tohto obdobia nasporenú sumu vo výške približne 4.49 násobku ich posledného ročného platu. Za predpokladu rastu mzdy uvedeného v *Tabuľka 19* a z mediánu hrubej mesačnej mzdy pre rok 2006 z *Tabuľka 15*, by sporiteľ mal mať na konci sporiaceho obdobia na svojom dôchodkovom účte približne 7 658 418 Sk. Za túto čiastku si bude môcť u jednej z poisťovní poskytujúcich balík služieb pre dôchodcov kúpiť dôchodok.

4.4.3 Finančné sprostredkovanie

Tabuľka 21 Odhadovaný rast mzdy pre finančné sprostredkovanie (v %)

	2007-2010	2011-2015	2016-2020	2021-2025	2026-2030	2031-2035	2036-2040	2041-2046
ρ_t	10.09	7.15	6.19	5.30	4.99	4.27	4.44	4.65

Obrázok 11



Tabuľka 22

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
4.48	1.07	14	33

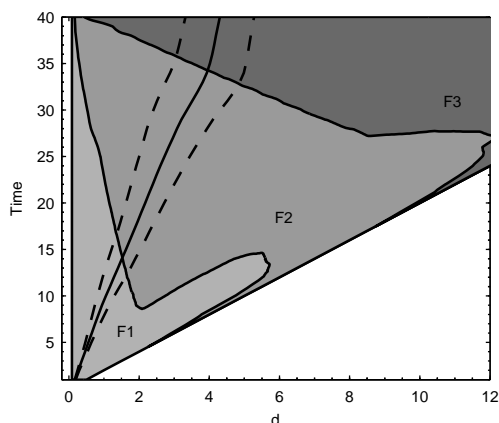
V posledných rokoch toto odvetvie hospodárstva zaznamenalo v priemere najväčší rast mediánu hrubej mesačnej mzdy. Tento trend by však z dlhodobého hľadiska nemal ďalej pokračovať a postupne by sa mal priblížiť priemernému rastu v hospodárstve. V tomto odvetví bolo zamestnaných v roku 2007 celkovo 36 700 osôb. Stredná hodnota nasporenej sumy vo výške 4.48 násobku poslednej ročnej mzdy sporiteľa sa približne rovná simulácií uvedenej v časti 4.4.2, avšak vzhľadom na rozdielny medián hrubej mesačnej mzdy v *Tabuľka 15* sa nasporená suma v tomto prípade bude pohybovať okolo 13 631 728 Sk. Za túto sumu si bude môcť u jednej z poisťovní poskytujúcich balík služieb pre dôchodcov kúpiť dôchodok. Samozrejme za predpokladu, že sporiteľ splní zákonom stanovené podmienky, potrebné pre uznanie nároku na čerpanie starobného dôchodkom.

4.4.4 Zdravotníctvo, Sociálna pomoc

Tabuľka 23 Odhadovaný rast mzdy pre zdravotníctvo a sociálnu pomoc (v %)

	2007-2010	2011-2015	2016-2020	2021-2025	2026-2030	2031-2035	2036-2040	2041-2046
ρ_t	6.50	7.35	5.95	5.79	5.89	5.65	4.80	5.22

Obrázok 12



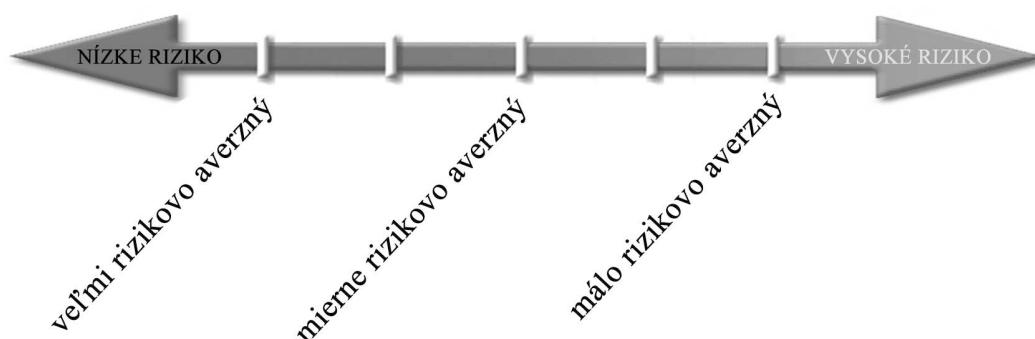
Tabuľka 24

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_t)$	$D(d_t)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
4.27	0.99	14	34

Sektor, ktorý zaznamenáva jeden z dlhodobo najnižších mediánov hrubej mesačnej mzdy. V zdravotníctve v roku 2007 bolo zamestnaných 146 200 osôb. Podobne ako pri predchádzajúcich simuláciách vychádzajúc z mediánu hrubej mesačnej mzdy pre daný sektor z *Tabuľka 15* a z rastu mzdy uvedeného v *Tabuľka 23*, by sporiteľ po 40 tich rokoch sporenia mal mať na svojom účte v jednej z dôchodkových správcovských spoločností približne 6 796 505 Sk. Za túto sumu si bude môcť u jednej z poisťovní poskytujúcich balík služieb pre dôchodcov kúpiť dôchodok.

4.5 Sporiteľova averzia voči riziku

Ako bolo spomenuté v odseku 3.1.1 rizikový profil investora, resp. sporiteľa dokáže do značnej miery ovplyvniť budúcu strednú hodnotu nasporenej sumy, nakoľko tento faktor ovplyvňuje sporiteľove rozhodovanie sa pri voľbe príslušného fondu (napr. sporiteľ s vysokou averziou voči riziku bude preferovať fond s nízkym rizikovým stupňom, čiže fond, kde má dlhopisová zložka (považovaná za bezrizikovú zložku) vysoké zastúpenie. V našom prípade to je Konzervatívny fond ~ F_3). Graficky by sme typ sporiteľa vzhľadom na jeho averziu voči riziku mohli znázorniť nasledovne:



V nasledujúcej časti poskytujeme stručný prehľad vývoja strednej hodnoty nasporenej sumy $E(d_t)$ a jej odchýlky $D(d_t)$ vzhľadom na nižšie uvedené rizikové profily sporiteľa.

- veľmi rizikovo averzný sporiteľ (averzia voči riziku $a = 12$)
- mierne rizikovo averzný sporiteľ (averzia voči riziku $a = 8$)
- málo rizikovo averzný sporiteľ (averzia voči riziku $a = 3$)

Z dôvodu malého %-neho zastúpenia akciovej zložky v jednotlivých fondoch, ktoré spravujú dôchodkové správcovské spoločnosti, budeme analyzovať sporiteľovu averziu voči riziku na tzv. štanadartnom scenári¹⁴, aby sme vedeli dostatočne rozlíšiť vplyv tohto faktoru na daný model.

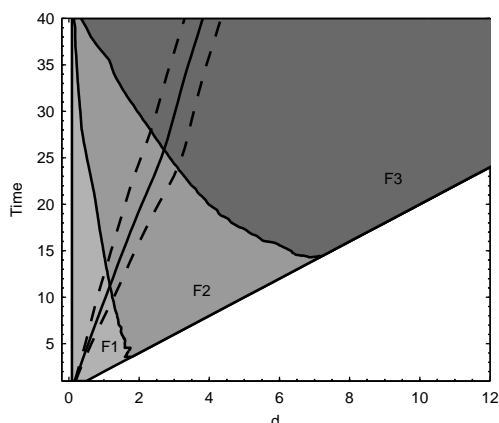
Na záver sa pokúsime zanalyzovať sporiteľovu nasporenú sumu na konci obdobia pre rôzne hodnoty averzie voči riziku a pre rôzne hodnoty %-neho zastúpenia akciovej zložky.

¹⁴ maximálne horné hranice limitov %-neho zastúpenia akciovej zložky vo fondoch F_1 a F_2

4.5.1 Veľmi rizikovo averzný sporiteľ

Preferuje bezpečnejší typ investície, akou je v tomto prípade Konzervatívny (F_3), príp. Vyvážený fond (F_2). Sporiteľ nerád riskuje, resp. jeho ochota podstúpiť vysoké riziko za účelom získania potenciálne vysokého výnosu je pomerne malá.

Obrázok 13



Tabuľka 25

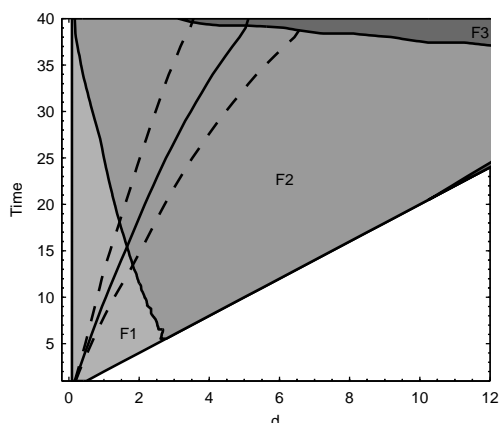
Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
3.77	0.52	11	26

Simulácia to jasne potvrdzuje. Doba, ktorú sporiteľ strávi v akciovom fonde je o 3 roky kratšia ako v prípade modelového príkladu 4.1.1. Sporiteľ taktiež podstatne skôr pred odchodom do dôchodku zmení Vyvážený fond za Konzervatívny fond. V porovnaní s príkladom 4.1.1 je to o 8 rokov skôr. Taktiež riziko, akému je sporiteľ vystavený je v porovnaní s príkladom 4.1.1 o 50% nižšie. Opatnosť zo strany sporiteľa sa premietne i do strednej hodnoty nasporenej sumy na konci obdobia, ktorá klesne na úroveň 3.77 násobok posledného ročného platu.

4.5.2 Mierne rizikovo averzný sporiteľ

Je ochotný podstúpiť vyššie riziko na úkor získania vyššieho výnosu.

Obrázok 14



Tabuľka 26

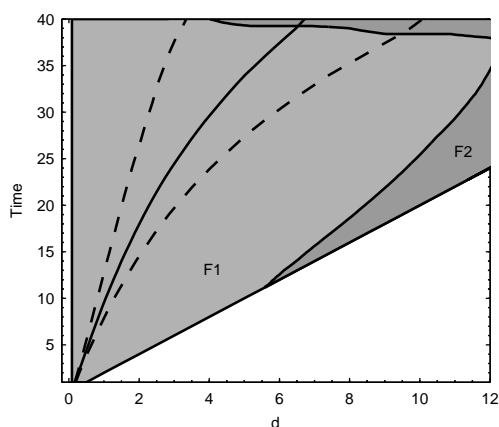
Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
5.03	1.56	15	39

Simulácia podobná modelovému príkladu 4.1, pričom mierna zmena averzie voči riziku (z $a=9$ na $a=8$) má za dôsledok dlhšie zotrvanie sporiteľa v rizikovejších fondoch, čoho výsledkom je vyššia hodnota $E(d_T)$ spolu s vyššou hodnotou $D(d_T)$.

4.5.3 Málo rizikovo averzný sporiteľ

Je ochotný investovať (sporiť si) vo veľmi volatilných fondoch za účelom získania potenciálne vysokého výnosu.

Obrázok 15



Tabuľka 27

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
6.46	3.25	39	-

Tento typ investora by pri maximálnej možnej miere zastúpenia akciovej zložky v oboch fondoch prestúpil len rok pred odchodom do dôchodku z Akciového fondu do Vyváženého fondu. Stredná hodnota nasporenej sumy $E(d_T)$ o veľkosti 6.46 násobku poslednej ročnej hrubej mzdy w_t zodpovedá takejto investičnej stratégii. Za povšimnutie však stojí i volatilita, ktorej je sporiteľ vystavený. Môže stratiť (alebo získať) takmer polovicu zo strednej hodnoty nasporenej sumy.

4.5.4 Rôzne hodnoty averzie voči riziku a rôzne hodnoty %-neho zastúpenia akciovej zložky v jednotlivých fondoch

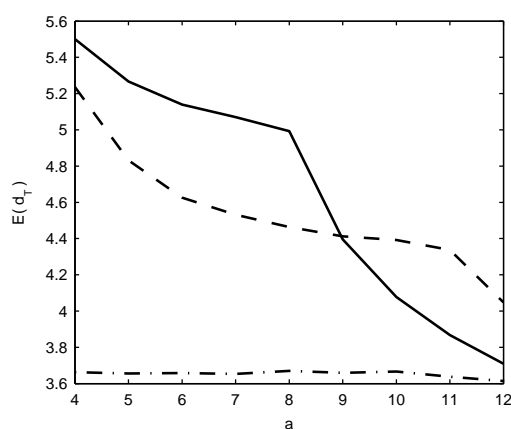
Sporiteľov rizikový profil porovnáme s nasporenou sumou v situáciách, keď zloženie jednotlivých fondov bude

Tabuľka 28 Zastúpenia akciovej zložky v rôznych prípadoch

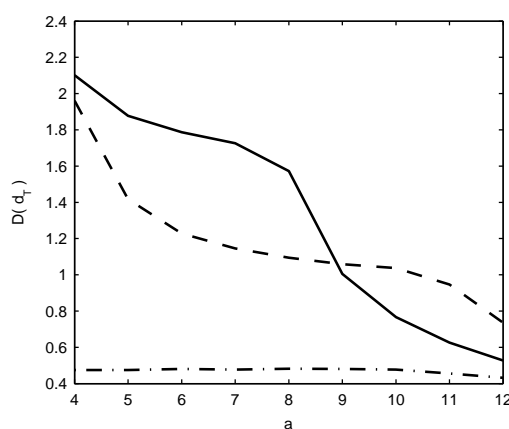
	Prípád 1	Prípád 2	Prípád 3
	-	--	- · -
F_1	80%	60%	23%
F_2	50%	37.5%	17%
F_3	0%	0%	0%

Poznámka : kvôli prehľadnosti uvádzame len %-ne zastúpenie akciovej zložky (označ. α), dlhopisová zložka je zastúpená $(1 - \alpha)$ %

Obrázok 16



Obrázok 17



Pri porovnaní prípadu 1 a 2 stojí za povšimnutie fakt, že rizikovo averzný sporiteľ (averzia voči riziku $\sim a > 9$) by uvítal, ak by %-ne zloženie akciovej zložky v jednotlivých fondoch bolo ako v prípade 2 a to z toho dôvodu, že by sa v takom prípade mohol rozhodovať medzi všetkými tromi typmi fondov. Zloženie fondov ako v prípade 1 mu vzhľadom na jeho rizikový profil nevyhovuje, pretože akciový fond a teda fond s najvyšším potenciálnym výnosom je pre neho nedostupný (kvôli svojej averzii voči riziku nie je ochotný podstúpiť riziko spojené s investovaním do Akciového fondu). Z tohto dôvodu má v prípade 1 takýto typ sporiteľa na výber len dva fondy, čo sa v konečnom dôsledku podľa simulácie prejaví na výške jeho nasporenej sumy d_T . Keďže sa rozhodoval len medzi dvomi fondami, jeho dôchodok bude nižší, ako keď by mal na výber tri fondy (Prípád 2).

Na druhej strane rizikovo obľubujúci sporiteľ (averzia voči riziku $\sim a < 9$), by uvítal ak by fondy boli zastúpené akciovou zložkou v takom pomere ako tomu je v Prípade 1.

Pri súčasnom zastúpení akciovej zložky v jednotlivých fondoch¹⁵ (Prípád 3), rizikový profil sporiteľa nehrá podstatnú úlohu pri rozhodovaní sa v akom fonde si sporiť na dôchodok. Dá sa teda povedať, že sporiteľ pri takom stave nemá možnosť ovplyvniť

¹⁵ odporozované z mesačných správ dôchodkových správcovských spoločností

budúcu výšku svojho dôchodku vzhľadom na jeho averziu voči riziku (nerozhoduje sa medzi prestupmi v jednotlivých fondoch, ale zotrúva v Akciovom fonde počas celej doby sporenia ~ situácia popísaná v sekcii 4.2.3).

4.6 Funkcie užitočnosti

Ako sme spomenuli v časti 3.1.1 sporiteľova averzia voči riziku sa dá merať pomocou *Arrow-Pratt miery relatívnej averzie voči riziku*, ktorá je definovaná vzťahom (13). Na základe tejto miery a jej vlastností (IRRA, CRRA, DRRA) sme sa rozhodli namodelovať rôzne typy funkcií užitočnosti pre sporiteľa.

4.6.1 Zvyšujúca sa relatívna averzia voči riziku (IRRA)

Nech *Arrow-Pratt miera relatívnej averzie voči riziku* funkcie užitočnosti sporiteľa je v tvare

$$R_u(s) = -su''(s)/u'(s) = as^\beta, \quad (18)$$

pričom pre $\beta > 0$ rovnica (18) spĺňa podmienku, že táto miera je rastúca a teda, že sa jedná o zvyšujúcu sa mieru averzie voči riziku. Potom na základe rovnice (18) musí platiť:

$$-su''(s) = as^\beta u'(s)$$

po zavedení substitúcie $u'(s) = y$ a použití elementárnych riadkových operácií dostávame tvar

$$\frac{y'}{y} = as^{\beta-1}$$

po zintegrovaní

$$\int \frac{y'}{y} = \int -as^{\beta-1}$$

$$\ln y = -a \frac{s^\beta}{\beta} + c$$

a následnej úprave máme tvar

$$y(s) = e^{-\frac{a}{\beta}s^\beta} + c. \quad (19)$$

Pre jednoduchosť uvažujme $\beta = 1$ potom rovnica (19) sa dá napísať v tvare

$$y(s) = e^{-as} + c.$$

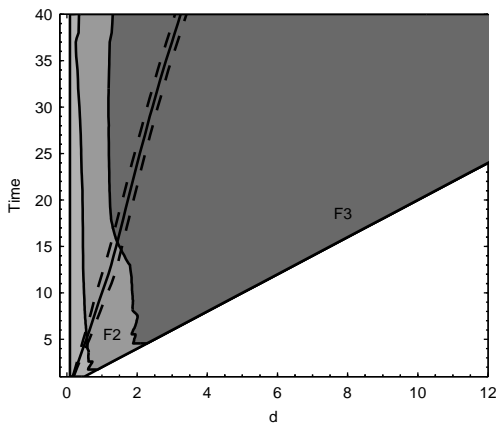
Z dôvodu zavedenia substitúcie pri rovnici (18) je konečný tvar sporiteľovej funkcie užitočnosti

$$u(s) = -\frac{1}{a} e^{-as} \quad (20)$$

pre $a > 0$, $c = 0$.

Majme teda pre tento prípad sporiteľovu funkciu užitočnosti zadefinovanú vzťahom (20). Zvyšujúca sa miera averzie voči riziku v praxi znamená, že sporiteľ je s rastúcou hodnotou svojich úspor ochotný držať menšiu časť svojho kapitálu v rizikových investíciach.

Obrázok 18



Tabuľka 29

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_r)$	$D(d_r)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
3.16	0.16	5	13

Skorý prestup (po piatich rokoch) z Rastového fondu (F_1) do Vyváženého (F_2) a neskôr (po 13tich rokoch) z Vyváženého do Konzervatívneho fondu (F_3) má za následok veľmi malú volatilitu, ktorej je sporiteľ počas doby sporenia vystavený (vo fondoch, pre ktoré je charakteristická vyššia volatilita si sporiteľ sporiť krátku dobu). Spomínané prestupy majú taktiež vplyv na strednú hodnotu nasporenej sumy počas obdobia a na konci obdobia, pretože sporiteľ využíva pomerne krátku dobu možnosť sporiť si vo fonde s najvyšším potenciálnym výnosom a teda sa pripravuje o možnosť získať vyšší výnos a tým lepšie zhodnotiť svoje investované prostriedky.

4.6.2 Znižujúca sa relatívna averzia voči riziku (DRRA)

Podobným spôsobom ako v prípade 4.6.1 sme sa dopracovali i k nasledujúcej sporiteľovej funkcii užitočnosti

$$u(s) = (-a) \frac{e^{as}}{s^2} \quad (21)$$

Podľa rovnice (13) dostávame

$$u'(s) = \frac{\partial u}{\partial d} = e^{as} \left(\frac{2a}{s^3} - \frac{a^2}{s^2} \right) \quad \text{a} \quad u''(s) = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = -e^{as} \left(\frac{a^3}{s^2} - \frac{4a^2}{s^3} - \frac{6a}{s^4} \right)$$

teda

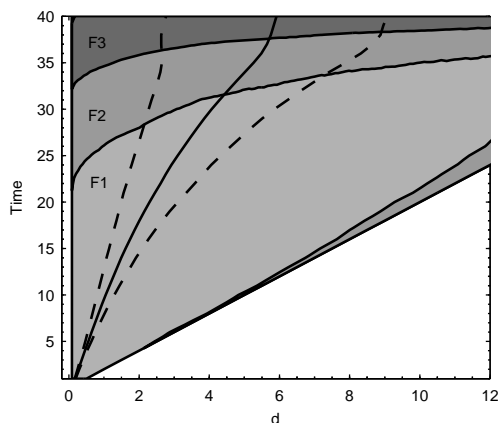
$$R_u(s) = -su''(s)/u'(s) = \frac{a^2 s^2 - 4as + 6}{2 - as}$$

pričom platí

$$\frac{\partial R_u(s)}{\partial s} = -\frac{a(a^2 s^2 - 4as + 2)}{(as - 2)^2} < 0 \quad \text{pre} \quad a > 0 \quad \wedge \quad as \neq 2$$

a teda môžeme povedať, že sa jedná o znižujúcu sa relatívnu averziu voči riziku. Tento typ averzie popisuje sporiteľ, ktorý pri zvyšujúcej sa hodnote svojich úspor, je ochotný držať väčšiu časť svojho kapitálu v rizikových investíciách, v tomto prípade v rizikových fondoch (Akciový fond F_1 , prípadne Vyvážený fond F_2). Pripomíname čitateľovi, že %-ne zastúpenie akciovej zložky v jednotlivých fondoch je nastavené na hodnoty uvedené v *Tabuľka 1*. Jedná sa o maximálne možné zastúpenie akciovej zložky v danom type fondu.

Obrázok 19



Tabuľka 30

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_r)$	$D(d_r)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
5.83	3.16	31	37

4.7 Doba sporenia

Sporiteľ striktne nemusí sporiť 40 rokov. Zákonom stanovená je len dolná hranica sporenia si na dôchodok. Táto doba sporenia si v II pilieri dôchodkového systému je stanovená na 15 rokov. Majme tri scenáre

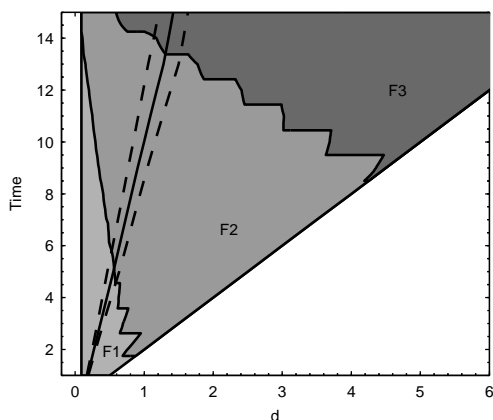
- Minimálna doba sporenia¹⁶ ($T = 15$ rokov)
- Doba sporenia $T = 25$ rokov
- Doba sporenia $T = 35$ rokov

Tak ako v ostatných prípadoch i v tomto nás zaujíma stredná hodnota nasporenej sumy $E(d_T)$ na konci príslušného obdobia a odchýlka $D(d_T)$, ktorá sa vzťahuje na $E(d_T)$.

4.7.1 Minimálna doba sporenia

Sporiteľ si sporiť 15 rokov na svoj dôchodok: Inak povedané je 15 rokov dôchodkovo poistený a tým pádom mu za predpokladu, že dovíši dôchodkový vek vzniká nárok na starobný dôchodok.

Obrázok 20



Tabuľka 31

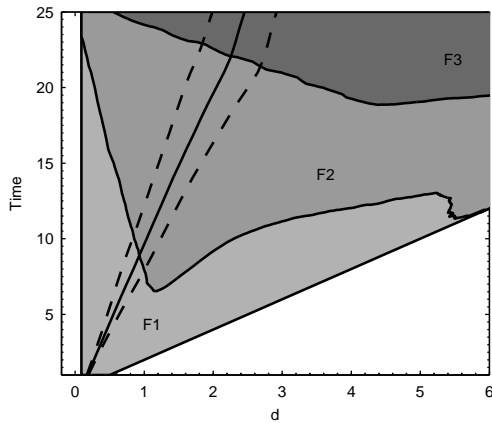
Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
1.35	0.21	5	13

Za povšimnutie stojí sklon krivky, ktorý je pri porovnaní s bežným prípadom (doba sporenia 40 rokov) výrazne menší. Je to zapríčinené krátkou dobou sporenia, kvôli ktorej je sporiteľ v podstate čiastočne ukrátený o možnosť zhodnocovať si nasporené prostriedky v daných fondoch a taktiež neprispieva do systému tak dlho a v takej miere ako v prípade 4.1.

¹⁶ 461/2003 Zákon o sociálnom poistení - (rekonštruované znenie účinné od 1. januára 2008)

4.7.2 Doba sporenia 25 rokov

Obrázok 21

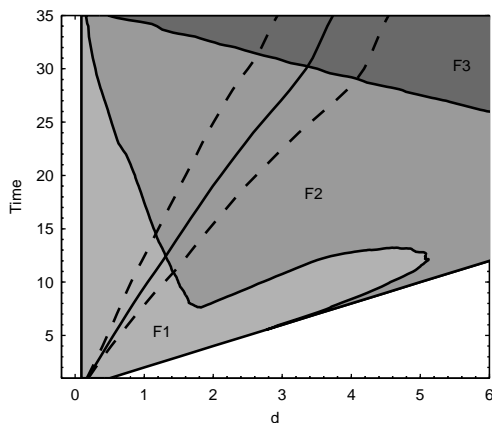


Tabuľka 32

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
2.39	0.47	9	22

4.7.3 Doba sporenia 35 rokov

Obrázok 22



Tabuľka 33

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
3.73	0.80	13	30

Zo simulácií 4.7.1, 4.7.2 a 04.7.3 je možné vidieť ako vplýva doba sporenia na veľkosť strednej hodnoty nasporenej sumy a na jej možnú odchýlku.

4.8 Odvody a ich %-na miera

V tejto časti sa zameriame na analýzu daného modelu, pri zmene %-nej miery odvodov, ktoré sporiteľ odvádza zo svojej hrubej mesačnej mzdy na svoj účet, ktorý je v správe v jednej z dôchodkových správcovských spoločností. Nasledujúce scenáre

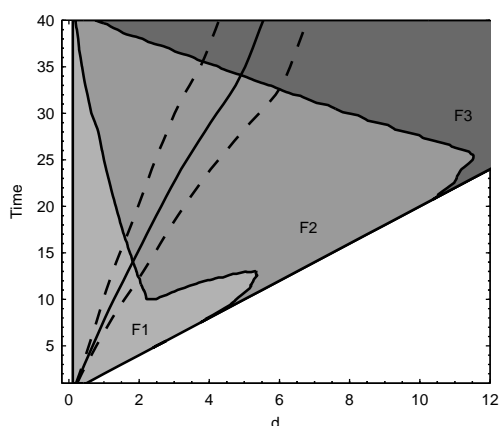
- Zvýšenie odvodov
- Zníženie odvodov

porovnáme s výsledkami z modelového príkladu (4.1.1). Spomínané zvyšovanie (znižovanie) odvodov modelujeme na úrovni skutočných odvodov, čiže na úrovni tých odvodov, ktoré sa zhodnocujú na sporiteľovom účte (pripomíname, že odvody na úrovni $\tau = 9\%$ (modelový príklad 4.1) sú očistené o poplatok za vedenie osobného dôchodkového účtu, ktorý si sťahuje príslušná dôchodková správcovská spoločnosť z každého mesačného odvodu).

4.8.1 Zýšenie odvodov

Predpokladajme zvýšenie skutočných odvodov o 2% (z $\tau = 8.91\%$ na $\tau = 10.91\%$). Tento krok by mal viesť k vyššej strednej hodnote nasporenej sumy $E(d_T)$ na konci obdobia $T = 40$ v porovnaní s výsledkami 4.1.1 modelového príkladu 4.1. Dôvod je jednoduchý, sporiteľ odvádza väčšiu časť zo svojej mesačnej hrubej mzdy na svoj účet.

Obrázok 23



Tabuľka 34

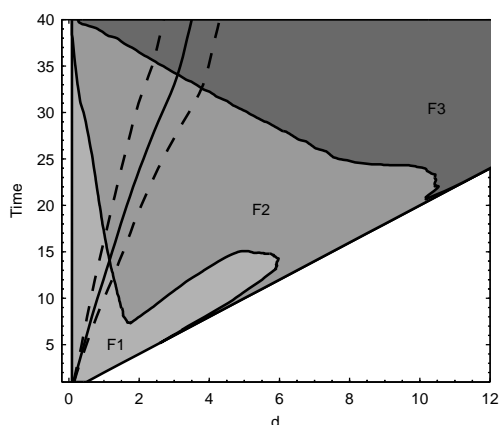
Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
5.44	1.26	14	34

Simulácia intuitívne chápanie danej zmeny potvrdila.

4.8.2 Zníženie odvodov

Predpokladajme zníženie skutočných odvodov o 2% (z $\tau = 8.91\%$ na $\tau = 6.91\%$). Efekt takéhoto opatrenia (kroku), by mal byť presne opačný ako v prípade 4.8.1, čiže sporiteľ by mal mať nasporenú nižšiu sumu (nižší násobok poslednej hrubej mesačnej mzdy) ako v modelovom príklade 4.1.

Obrázok 24



Tabuľka 35

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
3.41	0.79	15	34

Stredná hodnota nasporenej sumy na konci obdobia je menšia ako v prípade modelového príkladu 4.1 a jeho výsledkov uvedených v časti 4.1.1, čo je v súlade s našim predpokladom o efekte, ktorý spomínané zníženie odvodov zapríčini.

4.9 Poplatky DSS spojené so sporením

Poplatky účtované dôchodkovou správcovskou spoločnosťou sú vo väčšine prípadov rovnaké pre všetky tri typy fondov, sú účtované na mesačnej báze a sú rozdelené nasledovne:

- Odplata za správu fondu ~ (i)
 - nesmie presiahnuť 0,065 % priemernej mesačnej čistej hodnoty majetku v dôchodkovom fonde. To neplatí v období troch rokov odo dňa začatia vykonávania činnosti, ktorá je obsahom povolenia na vznik a činnosť dôchodkovej správcovskej spoločnosti, počas ktorého odplata dôchodkovej správcovskej spoločnosti nesmie presiahnuť 0,075 % priemernej mesačnej čistej hodnoty majetku v dôchodkovom fonde
- Odplata za vedenie osobného dôchodkového účtu ~ (ii)
 - účtovaná v % zo sumy mesačného príspevku

Tabuľka 36 Prehľad poplatkov v príslušných fondoch (v %)

	AXA	CSOB ¹⁾	AEGON ¹⁾	ING ¹⁾	ALIANZ	VUB
(i)	0.075	0.075	0.075	0.075	0.070	0.075
(ii)	1	1	1	1	1	1

Poznámka: 1) konzervatívny dôchodkový fond ~ 0.070

Source: Mesačné správy spoločností k 31.1.2008 a príslušné web stránky

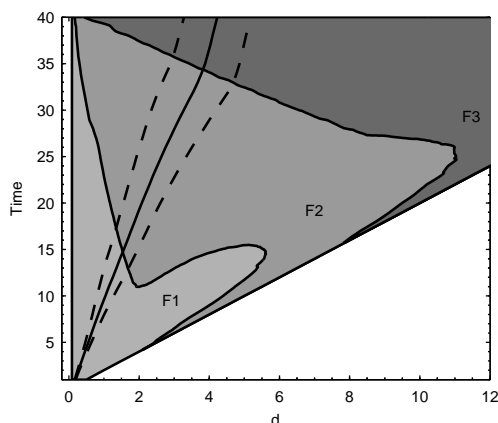
Predpokladajme, že zmenou legislatívy sa poplatky spojené so sporením v druhom pilieri dôchodkového systému zmenia. Uvažujme dva prípady:

- Zvýšenie poplatkov
 - Odplata za správu fondu sa zvýši o polovicu
 - Odplata za vedenie osobného dôchodkového účtu sa zvýši o polovicu
- Zníženie poplatkov
 - Odplata za správu fondu sa zníži o polovicu
 - Odplata za vedenie osobného dôchodkového účtu sa zníži o polovicu

4.9.1 Zvýšenie poplatkov

Tento krok má za následok zníženie skutočných odvodov, ktoré sporiteľ odvádza každý mesiac do systému z $\tau = 8.91\%$ na $\tau \doteq 8.87\%$ ($= 9\% * 0.985$) a taktiež zníženie potenciálnych výnosov jednotlivých fondov¹⁷

Obrázok 25



Tabuľka 37

Mean $E(d_T)$	Std.dev $D(d_T)$	Switch $F_1 - F_2$	Switch $F_2 - F_3$
4.16	0.94	15	34

Note :

	akcie	dlhopisy	výnos
F_1	80%	20%	$r_1 = 0.0799$
F_2	50%	50%	$r_2 = 0.0646$
F_3	-	100%	$r_3 = 0.0390$

Note:

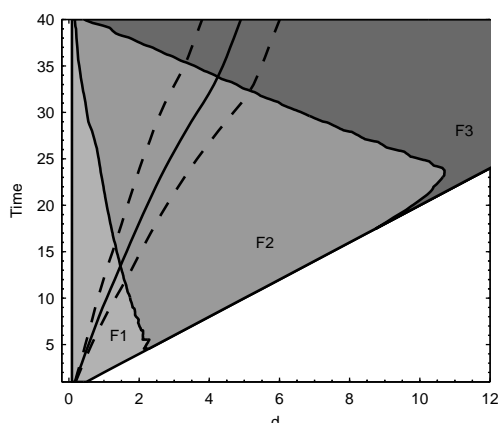
Výsledkom takéhoto kroku je nižšia stredná hodnota nasporenej sumy $E(d_T)$ vzhľadom na poslednú ročnú hrubú mzdu sporiteľa, ako pri poplatkoch uvedených v Tabuľka 36 (výsledné hodnoty prislúchajúce k Tabuľka 36, teda $E(d_T)$ a $D(d_T)$ sú uvedené v časti 4.1.1). V jednoduchosti povedané dôchodkové správcovské spoločnosti si v tomto prípade ukroja väčšiu časť zo sporiteľových finančných prostriedkov vo forme vyšších poplatkov ako tomu je v prípade 4.1.1.

¹⁷ k zníženiu v tom zmysle, že od pôvodných výnosov (Tabuľka 2) odpočítavame vyššiu hodnotu ako v štandardnom scenári (4.1), čo sa týka poplatkov

4.9.2 Zníženie poplatkov

Tento krok má presne opačný efekt ako krok v odesku 4.9.1. Vede k zvýšeniu sporiteľových skutočných odvodov, ako aj k zvýšeniu potenciálnej výkonnosti fondu¹⁸

Obrázok 26



Tabuľka 38

Mean $E(d_T)$	Std.dev $D(d_T)$	Switch $F_1 - F_2$	Switch $F_2 - F_3$
4.79	1.10	14	34

Note :

	akcie	dlhopisy	výnos
F_1	80%	20%	$r_1 = 0.0883$
F_2	50%	50%	$r_2 = 0.0730$
F_3	-	100%	$r_3 = 0.0474$

Note:

5 Záver

Na základe analýz citlivosti 4.1 až 4.9 sme preverili správanie sa dynamického akumuláčného modelu navrhnutého autormi Melicherčík, Kilianová, Ševčovič. Výsledky potvrdili intuitívne chápanie jednotlivých zmien faktorov vstupujúcich do daného modelu. Všetky spomínané analýzy sú robené na základe zmeny príslušného faktora, pričom ostatné faktory vstupujúce do modelu sú v súlade s modelovým príkladom uvedeným v časti 4.1.

V časti 4.2 sme sa venovali analýze citlivosti daného modelu na rôzne zastúpenie akciovej a dlhopisovej zložky v danom type fondov, ktoré má v správe jedna z dôchodkových správcofských spoločností pôsobiaca v tejto oblasti na Slovensku. Záver plynúci z analýz v časti 4.2 je, že so znižujúcim sa podielom akciovej zložky v jednotlivých fondoch sa znižuje výška strednej hodnoty nasporenej sumy na konci obdobia v porovnaní s posledným ročným platom sporiteľa a taktiež sa znižuje volatilita (možná fluktuácia) nasporenej sumy počas obdobia sporenia. V časti 4.3 sme sa venovali korelácii medzi akciovou a dlhopisovou zložkou v daných fondoch. Skúmali sme tri možné varianty korelácie (zápornú, nulovú a kladnú). Výsledky ukazujú, že pri zápornej korelácii, je sporiteľova stredná hodnota nasporenej sumy na konci obdobia najvyššia. Naopak pri kladnej korelácii je najnižšia. Nulová korelácia zabezpečí sporiteľovi

¹⁸ k zvýšeniu v tom zmysle, že od pôvodných výnosov (Tabuľka 2) odpočítavame nižšiu hodnotu ako v štandardnom scenári (4.1), čo sa týka poplatkov

najlepšiu diverzifikáciu portfólia, nakoľko zložky z ktorých pozostávajú jednotlivé fondy nevykazujú známku žiadnej vzájomnej závislosti. Z toho dôvodu je možná odchýlka od strednej hodnoty nasporenej sumy najmenšia spomedzi všetkých troch možností. V časti 4.4 sa venujeme vybraným sektorom slovenského hospodárstva (poľnohospodárstvu, priemyselná výroba, finančnému sprostredkovaniu, zdravotníctvu a soc. pomoci), možnej predikcii miezd v spomínaných sektoroch na základe predikcii pre celé hospodárstvo uvedených v *Tabuľka 2* a vplyvu týchto predikcii na sporiteľov dôchodok. V časti 4.5 sa venujeme sporiteľovej averzii voči riziku a jej vplyvu na strednú hodnotu nasporenej sumy počas doby sporenia. Výsledkom tejto časti je prudký nárast v strednej hodnote nasporenej sumy na konci obdobia v prípade, že sporiteľ je málo rizikovo averzný (rád riskuje) a výrazný pokles v strednej hodnote nasporenej sumy v prípade, že sporiteľ je veľmi rizikovo averzný (nerád riskuje). Prudký nárast a výrazný pokles sa taktiež týka možnej odchýlky od nasporenej sumy v oboch prípadoch. V časti 4.6 sme sa venovali rôznym typom relatívnych averzií voči riziku, konkrétne zvyšujúcej sa relatívnej averzií voči riziku (IRRA) a znižujúcej sa relatívnej averzií voči riziku (DRRA). V časti 4.7 sa venujeme dobe sporenia, a jej vplyvu na sporiteľovu strednú hodnotu nasporenej sumy počas doby a na konci doby sporenia. Výsledky sú plne v súlade s intuíciou a síce, že pri kratšej dobe sporenia je výsledná stredná hodnota nasporenej sumy na konci obdobia nižšia ako pri dlhej dobe sporenia. Taktiež sklon kriviek (v prípade krátkej doby sporenia malý sklon, v prípade dlhej doby sporenia veľký sklon) zodpovedá možnostiam sporiteľa ako dlho môže využívať jednotlivé fondy. V časti 4.8 sa venujeme prípadnému zvýšeniu (zníženiu) skutočných odvodov do II. piliera a ich vplyvu na $E(d_T)$ a $D(d_T)$. Obe analýzy potvrdili intuitívne chápanie zmien tohto faktoru, ktorý vstupuje do modelu. Ukázali sme, že so zvýšením (znížením) skutočných odvodov rastie (klesá) stredná hodnota nasporenej sumy na konci obdobia. V časti 4.9 analyzujeme citlivosť strednej hodnoty nasporenej sumy na výšku poplatkov súvisiacich so sporením si v II. pilieri dôchodkového systému (poplatky spojené s vedením dôchodkového účtu a poplatky spojené s odplatom za správu fondov). Zvýšenie poplatkov má za následok zníženie potenciálneho výnosu daných fondov a zníženie možných skutočných odvodov do systému a tým aj zníženie možnej strednej hodnoty nasporenej sumy vzhľadom na posledný ročný plat sporiteľa. Naopak zníženie poplatkov je dôsledkom zvýšenia výkonnosti fondov a zvýšenia odvodov do systému a tým pádom dochádza aj k zvýšeniu strednej hodnoty nasporenej sumy na konci obdobia vzhľadom na posledný ročný plat sporiteľa. V časti Príloha sme sa pokúsili ozrejmiť niektoré numerické prístupy zvolené pre výpočty spolu s porovnaním s alternatívnymi prístupmi, ktoré si v prípade záujmu čitateľ môže pri prípadnom programovaní celého modelu zvoliť.

Príloha

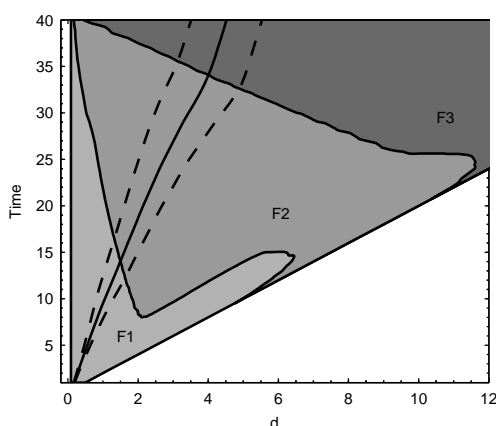
V tejto časti sa venujeme porovnávaniu zložitosti výpočtov z hľadiska použitia rôznych numerických prístupov, ich presnosti a využitia pri našich výpočtoch.

Voľba počtu deliacich bodov d

Nezodpovedaná ostala otázka voľby 200 deliacich bodov v každej časovej vrstve intervalu $[d_{\min}, t/2]$. Na výsledkoch sa snažíme zdôvodniť, prečo stačí pre potreby nášho výpočtu voľba 200 deliacich bodov. Faktory vstupujúce do modelu sú nakalibrované v súlade s modelovým príkladom uvedeným v časti 4.1.

200 deliacich bodov

Obrázok 27



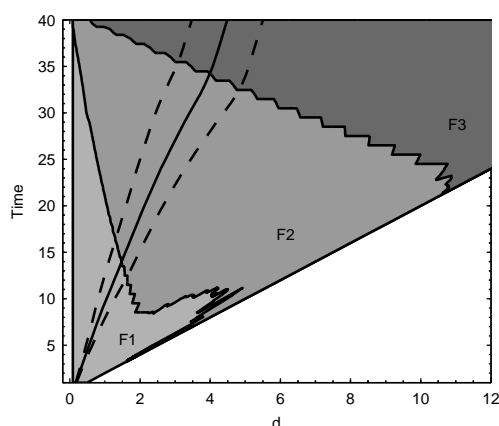
Tabuľka 39

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_r)$	$D(d_r)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
4.441	1.012	14	34

$$\frac{\text{Výpočtový čas}}{t = 59.44 \text{ sec}}$$

1000 deliacich bodov

Obrázok 28



Tabuľka 40

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_r)$	$D(d_r)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
4.408	1.014	14	34

$$\frac{\text{Výpočtový čas}}{t = 606.09 \text{ sec}}$$

Ako je možné vidieť pri porovnaní strednej hodnoty nasporenej sumy na konci obdobia uvedenej v *Tabuľka 41* a *Tabuľka 40*, odchýlka medzi jednotlivými simuláciami je 0.033 násobok ročného platu sporiteľa. Vzhľadom na výpočtový čas, ktorý je pri simulácii s 1000 deliacimi bodmi 606.09 sekúnd a horizont v akom si sporiteľ sporí na dôchodok, sme sa rozhodli rozdeliť interval na 200 deliacich bodov a tým ušetriť značnú časť výpočtového času (rozdiel 0.033 násobku posledného ročného platu nehrá

v horizontne 40 rokov podstatnú úlohu). Nepresnosti vytvorené na strane menšieho počtu deliacich bodov v danej časovej vrstve v intervale $[d_{\min}, t/2]$ kompenzujeme aproximačnou schémou, ktorú využívame pri optimálnej voľbe fondu (pozri Aproximácia hodnôt funkcií alebo sekciu 3.2).

Aproximácia hodnôt funkcií

Problém pri vyčíslení hodnôt vo vzorci (16) je v tom, že hodnoty funkcií $W_t(y)$ a $H_t(y)$ z predošlej časovej vrstvy poznáme v bodoch d a nie v bodoch y . To je dôvod, prečo musíme použiť aproximačnú schému na získanie čo možno najpresnejších hodnôt v bodoch y za pomoci hodnôt v bodoch d . Na získanie týchto hodnôt sme použili po častiach kubický Hermitov interpolačný polynóm (Prístup 1) v tvare

$$W_t(y) = \frac{3hs^2 - 2s^3}{h^3} W_t(d_{k+1}) + \frac{h^3 - 3hs^2 + 2s^3}{h^3} W_t(d_k) + \frac{s^2(s-h)}{h^2} \sigma_{k+1} + \frac{s^2(s-h)}{h^2} \sigma_k,$$

ktorý je detailne popísaný v časti 3.2 (ten istý vzorec platí aj pre získanie hodnôt $H_t(y)$ za pomoci hodnôt $H_t(d)$). Tento postup sa dá použiť pre interpoláciu (získanie hodnôt v rámci intervalu $[d_{\min}, t/2]$) ako aj pre extrapoláciu (získanie hodnôt mimo intervalu $[d_{\min}, t/2]$).

Alternatívny prístup (Prístup 2) je použitie nasledovnej aproximácie pre interpoláciu:

$$W_t(y) = \theta W_t(d_k) + (1-\theta) W_t(d_{k+1}),$$

kde parameter θ predstavuje vzdialenosť bodu y od krajného bodu d_k v príslušnej časovej vrstve t v intervale $[d_{\min}, t/2]$, ináč povedané

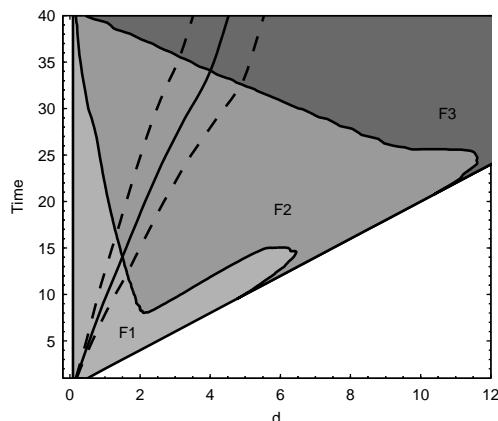
$$\theta = \frac{y - d_k}{d_k - d_{k+1}}$$

V prípade extrapolácie (ak sa nachádzame mimo intervalu $[d_{\min}, t/2]$ v príslušnej časovej vrstve $t = 1, \dots, T$) zoberieme ako aproximovanú hodnotu $W_t(y) = W_t(d_{\min})$ ak sa bod y nachádza naľavo od intervalu $[d_{\min}, t/2]$ a hodnotu $W_t(y) = W_t(t/2)$ ak sa bod y nachádza napravo od intervalu $[d_{\min}, t/2]$.

Pre porovnanie oboch prístupov pripájame k výsledkom aj výpočtovú zložitosť daných algoritmov. Faktory vstupujúce do modelu sú nakalibrované v súlade s modelovým príkladom uvedeným v časti 4.1.

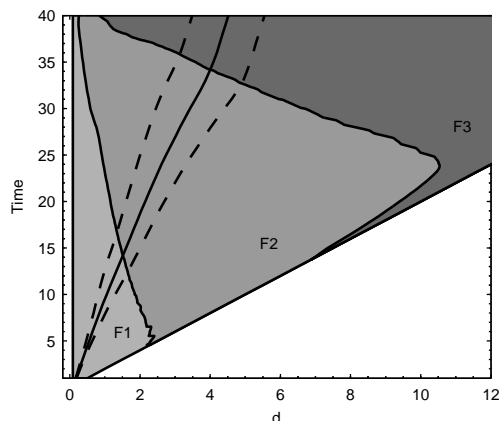
Prístup 1

Obrázok 29



Prístup 2

Obrázok 30



Tabuľka 41

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
4.442	1.013	14	34

$$\frac{\text{Výpočtový čas}}{t = 59.76 \text{ sec}}$$

Tabuľka 42

Mean	Std.dev	Switch	Switch
$E(d_T)$	$D(d_T)$	$F_1 - F_2$	$F_2 - F_3$
4.435	1.029	14	34

$$\frac{\text{Výpočtový čas}}{t = 30.65 \text{ sec}}$$

Prístup 1 sme si zvolili z dôvodu čiastočnej kompenzácie nepresností zapríčinených voľbou 200 deliacich bodov. Rozdiel v daných prístupoch je viditeľný na spôsobe určenia optimálnej hodnoty fondu v každom deliacom bode intervalu $[d_{\min}, t/2]$.

Použitá literatúra

1. Arrow K. J., *Aspects of the theory of risk-bearing*, Yrjo Hahnsson Foundation, Helsinki, 1965.
2. Bodie Z., *On the risk of stocks in the long run.*, Financial Analysts Journal **51** (1995), 18-22.
3. Bodie Z., Detemple J. B., Otruba S. and Walter S., *Optimal consumption-portfolio choices and retirement planning.*, Journal of Economic Dynamics & Control **28** (2003), 1115-1148.
4. Cohen J., *Statistical power analysis for the behavioral sciences (2nd ed.)*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey 07642, 1988.
5. David A. and Veronesi P., *Inflation and earnings uncertainty and volatility forecasts: A structural form approach*, Chicago GSB Research Paper (2008).

6. Friedman M. and Savage L. P., *The utility analysis of choices involving risk*, Journal of Political Economy **56** (1948), 279-304.
7. Friend I. and Blume M. E., *The demand for risky assets*, The American Economic Review **65** (1975), no. 5, 900-922.
8. Jensen and Valdemar J. L. W., *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Mathematica **30** (1906), 175-193.
9. Kvetan V., Páleník V., Mlýnek M. and Radvanský M., *Starnutie, zdravotný stav a determinanty výdavkov na zdravie v podmienkach Slovenska*, (2007).
10. Li L., *Macroeconomic factors and the correlation of stock and bond returns*, Yale ICF Working Paper No. 02-46 (2002).
11. Markowitz H., *The utility of wealth*, Journal of Political Economy **60** (1952), 151-158.
12. Mehra R. and Prescott E., *The equity premium: A puzzle*, Journal of Monetary Economics **15** (1985), 145-161.
13. Melicherčík I., Kilianová S. and Ševčovič D., *Dynamic accumulation model for the second pillar of the Slovak pension system*, Finance a úvěr - Czech Journal Of Economics and Finance **56** (2006), 11-12.
14. Pratt J. W., *Risk aversion in the small and in the large*, Econometrica **32** (1964), 122-136.
15. Tobin J., *Liquidity preference as a behavior toward risk*, Review of Economic Studies **25** (1958), no. 65-86.