Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Cournotovský trh s tajnou informáciou

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Peter Janiga

Bratislava 2008

Cournotovský trh s tajnou informáciou

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Peter Janiga

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci záverečnej práce

Doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.

Bratislava 2008

Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne, iba s pomocou literatúry uvedenej v zozname, konzultácií s vedúcim diplomovej práce a vedomostí získaných počas štúdia

Peter Janiga

V Bratislave dňa 28. apríla 2008

Týmto sa chcem poďakovať vedúcemu svojej diplomovej práce Doc. RNDr. Jánovi Pekárovi , PhD., za všestrannú odbornú pomoc, množstvo cenných pripomienok a rád, ako aj za ochotu a podporu prejavenú pri vedení práce.

ABSTRAKT

Dvojstupňový model informačných prírastkov má nerealistický predpoklad zverejnenia stratégie po prvej fáze. Je len ťažko predstaviteľné ako firmy prinútiť zverejniť svoju stratégiu, a taktiež ak ju zverejnia, aká dôveryhodná je táto informácia. Preto sa uvažuje jednostupňový model odvodený od dvojstupňového, kde predpoklad zverejnenia stratégie po prvej fáze nie je uvažovaný. V tejto práci je analyzovaný jednostupňový model a porovnaný s výsledkami pre dvojstupňový. V jednostupňovom modeli budú firmy „nakupovať" menej informácií ako v dvojstupňovom. Pre prípad heterogénneho duopolu sú ukázané rozdiely v závislosti od parametrov a teda aj fakt, že firmy inak určujú svoje stratégie pre jednotlivé modely.

Kľúčové slová: oligopol, Bayesove ekvilibrium, teória hier, zakúpenie informácií, Cournotovský trh

Obsah

1. Úvod 6
2. Trhy 8
3. Teória hier 13
3.1. Úvod do teórie hier 13
3.2. Základné pojmy z teórie hier a jej delenie 14
3.3. Cournotov duopol z pohľadu teórie hier 18
4. Cournotovsky trh s tajnou informáciou 19
4.1. Model 19
4.2. Ekvilibrium spojitej hry 22
4.3. Homogénne firmy 26
4.4. Blahobyt 29
4.5. Heterogénny duopol 34
5. Záver 41
6. Literatúra 42

1. Úvod

Teória hier ako samostatné odvetvie aplikovanej matematiky sa začala rozvíjať v tridsiatych rokoch dvadsiateho storočia a prvá vážnejšia publikácia je z roku 1944 *The Theory of Games and Economic Behaviour.* Časom sa teória hier stala veľmi dôležitou súčasťou ekonómie a ekonomických modelov o čom svedči aj osem nobelových cien udelených za teóriu hier. Cournotovský trh bol popísaný v diele *Researches into Mathematical Principles of Wealth* z roku 1838 od Augustina Cournot, francúzskeho matematika, ekonóma a filozofa. Ide o model firiem, ktoré volia množstvo produkcie na trhu. Firmy si sú rovné čo sa týka vplyvu na trhu, teda žiadna nemá dominantné postavenie.

V tejto diplomovej práci si v úvodnej kapitole predstavíme aké trhy poznáme, ich rozdiely, v čom sa líšia. V druhej kapitole si povieme o teórií hier a zadefinujeme si rôzne ekvilibriá potrebné pre ďalšiu prácu.

V tretej kapitole, môžeme ju nazvať aj hlavnou, keďže sa v nej budeme venovať hlavnému problému tejto diplomovej práce a to Cournotovskému trhu s tajnou informáciou. Budeme uvažovať jednostupňový a dvojstupňový stochastický informačný model. Ide o to, že firmy nemajú presnú informáciu o inverznej dopytovej funkcií a „kupujú" si informácie o trhu. V dvojstupňovom modely, ktorým sa zaoberalo už viacero publikácií, spomeňme aspoň Ponssard [10], Vives [12] a Hwang [4],[5] sa firmy v prvej fáze rozhodujú, koľko investovať do trhu a v druhej fáze, aké množstvo budú produkovať. Tieto rozhodnutia robia firmy aj v jednostupňovom modeli, rozdiel je v tom, že v dvojstupňovom modeli sa po prvej fáze zverejnia informácie, respektíve stratégie ostatných firiem. Teda v dvojstupňovom modeli sa firmy rozhodujú koľko investujú do prieskumu trhu s tým, že následne bude zverejnené koľko investovali a dostanú aj „zakúpený" signál o trhu a na základe týchto informácií určia výšku svojej produkcie. V jednostupňovom modeli sa firma rozhoduje o výške investícií do prieskumu trhu a následne na základe „zakúpeného" signálu určí výšku svojej produkcie. Jednostupňovým modelom sa ako prvý zaoberali Hauk a Hurkens v publikácií *Secret Information Acquisition in Cournot Markets.* Dôvod prečo uvažovať aj jednostupňový model je veľmi jednoduchý a to taký, že v praxi je nemožné si predstaviť firmy, ktoré by zverejňovali svoje stratégie. Teda dvojstupňový model, ktorý predpokladá zverejnenie informácií po prvej fáze je z tohto pohľadu nereálny. Taktiež keby aj firmy zverejnili svoje stratégie, tak je otázne do akej miery je možné im veriť. Ďalej budeme analyzovať tieto modely, porovnávať ich a hľadať ich ekvilibriové stratégie. Taktiež budeme uvažovať rôzne situácie na trhu, a to či už trh s homogénnymi firmami alebo heterogénny duopol.

2. Trhy

Každý trh s určitým tovarom sa vyznačuje nejakou svojou charakteristikou. V minulosti sa veľa známych matematikov a ekonóm zaoberalo trhmi a snažilo sa ich matematicky popísať. Keďže už na prvý pohľad vidno, že asi bude rozdiel či hovoríme o trhu s minerálnymi vodami, kde je konkurencia veľká a prameňov je po celom svete veľa alebo hovoríme o trhu s autami, kde existuje niekoľko svetových značiek alebo o trhu s ropou, ktorý je úplne špecifický. Preto máme aj rôzne modely, ktoré popisujú rôzne situácie na trhu, či už počet firiem, relatívnu veľkosť firiem alebo rôzne podmienky vstupu na trh.

Dokonalá konkurencia

Jedná sa o trh kde je veľa (nekonečne) predávajúcich, kupujúcich, a každý z nich je malý a „nemá význam“, teda nikto ako individualita, či už kupujúci alebo predávajúci nevie ovplyvniť trh. Hovoríme o trhu kde firmy vyrábajú homogénny produkt, taktiež predpokladáme nulové transakčné náklady, teda kupujúcemu je jedno od koho výrobok kúpi a je mu taktiež jedno ako ďaleko za tým bude musieť ísť, teda sa riadi výhradne iba cenou. Ďalším predpokladom je dokonalá informácia, teda kupujúci vie o tovare to, čo predávajúci a voľný vstup a odchod z trhu predávajúcim. O takomto trhu hovoríme ako o dokonale konkurenčnom trhu. Po analýze takéhoto trhu dostaneme, že ceny výrobkov sa rovnajú hraničným nákladom, ktoré sa taktiež rovnajú priemerným nákladom a trh je efektívny.

Monopol

Tento trh sa vyznačuje tým, že na trhu je len jedna firma. Teda dopyt je daný a ponuku, teda cenu a množstvo produkcie na trhu si určuje jedna firma. Keďže sa firma správa racionálne, teda snaží sa maximalizovať svoj zisk, produkuje také množstvo pri takej cene aby sa hraničné náklady rovnali hraničným príjmom. Trh je špecifický tým, že vzniká vysoká neefektivita, privysoké ceny, nízka produkcia a abnormálne vysoký zisk. Na trhu môžu vznikať prirodzené monopoly, vtedy keď vstupné náklady na trh sú veľmi vysoké, napríklad Slovenský plynárenský priemysel, alebo Slovenské elektrárne, kde by bolo asi veľmi finančne náročné pre konkurenciu vybudovať či už nové plynovody alebo elektrické rozvody. Neprirodzené sú keď nie je „prirodzený“ dôvod na jeho vznik, teda vývojom sa stane, že nejaká firma ovládne nejaký trh a či už cenami alebo iným spôsobom bráni vstupu na trh konkurencií. Vlády sa snažia proti monopolom brániť napríklad reguláciou cien.

Monopolistická konkurencia

Tento trh je veľmi podobný dokonale konkurenčnému trhu, rozdiel je iba v tom, že firmy nevyrábajú homogénne výrobky, ale rôzne. Teda každá firma sa vyznačuje svojou značkou, čo zohráva úlohu aj pre kupujúceho, ktorý sa rozhoduje na základe ceny a taktiež značky. Veľmi dobrým príkladom je trh pív alebo vín, kde si je kupujúci ochotný priplatiť za značku, ale samozrejme tiež len po určitú výšku. Tým, že značka zohráva úlohu na tomto trhu, dáva podnet aj pre vznik reklamy. Na rozdiel od dokonale konkurenčného trhu, firma môže byť v krátkodobom horizonte zisková, ale z dlhodobého hľadiska neexistuje zisk. Cena na trhu je rovná priemerným nákladom, ale hraničné náklady sú nižšie, teda trh nie je efektívny.

Cournotov oligopol (duopol)

V našej práci sa budeme ďalej zaoberať Cournotovským trhom, preto si o ňom povieme trošku viac. Augustin Cournot, francúzsky filozof, matematik a ekonóm napísal v roku 1838 dielo s názvom Výskumy v matematických princípoch bohatstva (Researches into Mathematical Principles of Wealth). V tomto diele sa zaoberal už spomínaným monopolom, dokonale konkurenčným trhom taktiež i známym Cournotovskym duopolom. Zaviedol dopytovú funkciu, o ktorej predpokladal, že je spojitá a klesajúca. Taktiež zaviedol nákladovú funkciu. V tomto diele sa dopracoval k už spomínanému výsledku, že v monopole si výrobca vyberá také množstvo produkcie, že hraničné náklady sa rovnajú hraničným príjmom.

Cournotov duopol je zostavený ako matematický model s dvomi konkurenčnými výrobcami homogénneho produktu. Správanie sa oboch výrobcov ovplyvňuje trh a teda i ziskovosť toho druhého. Model je zostavený tak, že každý z výrobcov rozhoduje o množstve produkcie, ktorá maximalizuje jeho zisk, vzhľadom aj na rozhodnutie jeho konkurenta. Cournot získal riešenie a taktiež ukázal, že toto ekvilibrium môže byť získané ako priesečník dvoch reakčných kriviek. Neskôr s rozvojom teórie hier bolo ukázané, čo je prezentované aj v nasledujúcej kapitole, že po preformulovaní na nekooperatívnu hru s množstvami ako so strategickými rozhodnutiami dostávame, že Cournotovo riešenie duopolu nie je nič iné ako Nashovo ekvilibrium.

Ďalší výsledok čo dokázal v tomto diele je, že čím je počet firiem na trhu väčší, tým je aj cena nižšia a produkované množstvo vyššie.

Uvažujme teraz Cournotov duopol:

Máme 2 firmy kde p je cena a q je množstvo. Cena je závislá od rozhodnutí oboch výrobcov koľko budú vyrábať, teda máme $p = P(q_1 + q_2)$. Nech $C_i(q_i)$ je nákladová funkcia firmy *i.* Každá firma sa snaží maximalizovať svoj zisk, a preto dostávame zisk každej firmy:

$$\pi_i = P(q_1 + q_2) * q_i - C_i(q_i)$$

Čo maximalizujeme a dostávame:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = \frac{\partial P(q_1 + q_2)}{\partial q_i} * q_i + P(q_1 + q_2) - \frac{\partial C_i(q_i)}{\partial q_i} = 0$$

Z toho je veľmi jednoduché pre konkrétne nákladové funkcie a funkciu ceny na trhu overiť, že sa jedná o maximum a vyjadriť ekvilibriové množstvá.

Pre konkrétnu nákladovú funkciu v tvare $C_i(q_i) = c * q_i$ a inverznú dopytovú funkciu v tvare $P(q_1 + q_2) = a - b * (q_1 + q_2)$ dostávame výsledok:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3b} \tag{1}$$

Keďže my sa budeme zaoberať oligopolom aj s počtom firiem vyšším ako 2, v skratke si popíšme takýto trh.

Na trhu je viac ako jedna firma. Firmy sa správajú nezávisle, teda nekooperujú medzi sebou. Každá firma je významná pre trh a vie ho ovplyvniť. Počet firiem na trhu je fixne daný a teda ani nepristupujú a ani neodchádzajú firmy z trhu. Firmy súťažia tak , že volia množstvo produkcie a to simultánne, teda žiadna firma nie je zvýhodnená nejakou informáciou navyše. Každá firma sa správa racionálne a teda sa snaží maximalizovať svoj zisk.

Stackelbergov oligopol (duopol)

Taktiež nazývaný aj stackelbergov „vodcovský“ model. Je pomenovaný podľa nemeckého ekonóma Heinrich Freiherr von Stackelberga, ktorý v roku 1934 napísal dielo „Market Structure and Equilibrium“ kde sa venoval aj tomuto modelu. Jedná sa o model veľmi podobný Cournotovmu, kde firmy rozhodujú aké množstvo budú produkovať. Na rozdiel od Cournotovho, firmy nemajú rovnaké postavenie na trhu, ale jedna firma je dominantná a ostatné firmy reagujú na jej rozhodnutie. Samozrejme dominantná firma vie o svojom postavení na trhu a taktiež jej rozhodnutie je také, že predpokladá, že firmy budú ovplyvnené jej rozhodnutím. Typickým príkladom pre firmu, ktorá dominuje trhu a ostatné sa prispôsobujú jej správaniu je Slovnaft. Teda v Stackelbergovom duopole firmy nehrajú simultánnu hru, ale jedna firmy sa rozhodne v prvej fáze, a následne na základe jej rozhodnutia sa rozhodujú ostatné firmy na trhu. Podobne ako pre Cournotov duopol dostaneme nasledovné aj pre tento, kde firma 1 je dominantná a pre firmu 2 nasledovný výraz, ktorý maximalizuje jej zisk.

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \frac{\partial P(q_1 + q_2)}{\partial q_2} * q_2 + P(q_1 + q_2) - \frac{\partial C_2(q_2)}{\partial q_2} = 0$$

Firma 2 je ovplyvnená rozhodnutím firmy 1, a z toho dostávame zisk firmy 1 v nasledovnom tvare:

$$\pi_1 = P(q_1 + q_2(q_1)) * q_1 - C_1(q_1),$$

ktorý keď maximalizujeme tak dostávame:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \frac{\partial P(q_1 + q_2)}{\partial q_2} * \frac{\partial q_2(q_1)}{\partial q_1} * q_1 + P(q_1 + q_2(q_1)) - \frac{\partial C_1(q_1)}{\partial q_1} = 0.$$

Už na prvý pohľad vidno, že rozhodnutia v predošlých dvoch duopoloch sa líšia. Pre konkrétne nákladové funkcie a funkciu ceny nie je problém overiť, že sa jedná o maximum a určiť ekvilibriové množstvá výroby.

Bertrandov oligopol (duopol)

Tento model je pomenovaný po francúzskom matematikovi Joseph Louis Francois Bertrandovi. Od skôr spomínaných modelov sa líši v tom, že firmy určujú cenu a na základe tej množstvo. Základné charakteristiky modelu sú nasledovné. Počet firiem na trhu produkujúcich homogénny výrobok je aspoň dva. Firmy nekooperujú. Firmy majú rovnaké hraničné náklady, ktoré sú konštantné. Dopytová krivka je lineárna. Firmy volia ceny a to simultánne a na základe tohto rozhodnutia potom určia podľa dopytovej krivky výšku produkcie. Kupujúci sa rozhoduje výhradne na základe ceny, pri zhode cien sa dopyt rozdelí rovnako. Výsledkom tohto modelu je, že ceny budú ako na dokonale konkurenčnom trhu, teda cena výrobku sa bude rovnať hraničným nákladom.

3. Teória hier

3.1. Úvod do teórie hier

História teórie hier siaha ďaleko do minulosti keď sa ľudia zamýšľali nad rôznymi kartovými hrami a podobne, avšak teória hier ako vedná disciplína alebo odvetvie aplikovanej matematiky neexistovala až do roku 1928 keď začal publikovať niekoľko prác John von Neumann, ktoré vyvrcholili dielom *The Theory of Games and Economic Behaviour* z roku 1944, čím sa teória hier dostala do povedomia. Uplatnenie teórie hier je veľmi rozsiahle, od aplikovanej matematiky a ekonómie, cez biológiu až po filozofiu a sociológiu. V súčasnosti je teória hier známa medzi laickou verejnosťou najmä zásluhou filmu *A Beautiful Mind,* ktorá opisuje život asi najviac spájaného človeka v súvislosti s teóriou hier Johna Nasha. Z teórie hier bolo doposiaľ udelených osem Nobelových cien, čo tiež svedčí o obľube a významnosti tohto odboru.

Ako názorný príklad si uvedieme asi najznámejší príklad z teórie hier *Väzňova dilema,* na ktorom sa dá aj teória hier veľmi ľahko pochopiť.
Uvažujme dvoch zločincov, ktorých polícia zatkla. Každého dá do samostatnej cely. Ani jednému nevie dokázať, že išlo o ozbrojenú lúpež a preto na to potrebuje aby sa aspoň jeden z nich priznal. Môžu nastať tri rôzne situácie, buď sa neprizná ani jeden, v tom prípade dostanú obaja 2 roky väzenia iba za lúpež. Ak sa priznajú obaja, v tom prípade dostanú obaja po 8 rokov. A v treťom prípade sa prizná jeden a ako poľahčujúcu okolnosť dostane 1 rok a ten čo sa neprizná dostane 15 rokov väzenia. Na prvý pohľad sa môže zdať, že sa obaja nepriznajú a dostanú po 2 roky, čo je minimálny súčet. Z pohľadu teórie hier sa priznajú obaja, keďže každý z väzňov sa na to pozerá tak, že čo je pre neho najlepšia reakcia na priznanie sa, a taktiež nepriznanie sa druhého väzňa. Keďže v oboch prípadoch dostane menej rokov keď sa prizná, tak sa obaja priznajú a dostanú po 8 rokov väzenia.

3.2. Základné pojmy z teórie hier a jej delenie

V teórií hier sa môžu hry deliť podľa rôznych kritérií. Jedným z kritérií je podľa informovanosti hráčov. Poznáme napríklad hry s úplnou informáciou, kde všetci hráči majú o sebe všetky informácie a majú jasne danú funkciu výplat na rozdiel od hier s neúplnou informáciou, kde niektoré informácie sú nedostupné pre všetkých hráčov. Ďalej môžeme hry rozdeliť na hry s dokonalou informáciou, kde každý hráč vie, kde sa v danom okamihu hry nachádza. A hry s nedokonalou informáciou, kde hráč nemusí vedieť, kde sa v danom okamihu hry nachádza. Ďalej sa v hre môže vyskytovať náhoda, taktiež nazývaná aj príroda, podľa čoho tiež delíme hry na hry s istotou a hry s neistotou. Posledným spomínaným kritériom sú hry so symetrickou informáciou, kde každý hráč ma rovnakú informáciu. V asymetrických hrách môžu mať niektorý z hráčov informačnú výhodu.

Ďalším kritériom môže byť spôsob rozhodovania sa hráčov. A to sú buď simultánne alebo sekvenčné (dynamické) hry. My budeme v našom modeli uvažovať simultánne sa rozhodovanie hráčov (firiem), teda všetci hráči (firmy) sa rozhodujú naraz. Pri sekvenčných (dynamických) hrách sa hráči striedajú v ťahoch.

Ďalej rozlišujeme dve formy zápisu hry a to v normálnom (strategickom) tvare a v extenzívnom tvare.

Definícia: trojicu $G = (N, S, \{u_i\})$ nazývame hrou v normálom (strategickom) tvare, kde

$N = \{1,2...n\}$ je množina hráčov,

$S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ je profil stratégií pričom S_i je množina stratégií hráča *i,*

$u_i : S \to R$ je funkcia výplat hráča *i.*

Definícia: Hrou v extenzívnej forme Γ nazývame šesticu $\{I, (x, \succ), \iota(.), A(.), P, u\}$ kde:

$I = \{N,1,2...\}$ je množina hráčov, kde N je hráč náhoda (príroda),

$(x, \succ)$ je herný strom daný množnou vrcholov a reláciou predchádzania,

$\iota(.)$ je zobrazenie $x \to I$, ktoré každému rozhodovaciemu vrcholu stromu priradí hráča, ktorý sa v ňom rozhoduje,

$A(.)$ - $A(h)$ je množina všetkých akcií, ktoré má hráč k dispozícií v informačnej množine h,

P je rozdelenie množiny všetkých vrcholov na informačné množiny,

u je funkcia výplat.

Definícia: Statickou Bayesovou hrou v strategickej forme nazývame päticu $(I, \{A_i\}_{i\in I}, \{T_i\}_{i\in I}, \{u_i\}_{i\in I}, \{\mu_i\}_{i\in I})$, kde

$I = \{1,2...n\}$ je množina hráčov,

$A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ je profil akcií, kde A_i je profil hráča *i,*

$T = T_1 \times T_2 \times ... \times T_n$ je množina profilov typov hráčov, kde T_i je množina typov hráča *i,*

$u_i : A \times T \to R$ je funkcia výplat hráča *i,*

$\mu_i : T_i \to \Delta(T_{-i})$ je presvedčenie hráča *i* o rozdelení na množine komplementárnych profilov typov.

V teórií hier rozlišujeme tri stratégie a to čisté, zmiešané alebo behaviorálne. Hráč hrá čisté stratégie ak volí svoju stratégiu s_i z množiny stratégií S_i bez akejkoľvek náhodnosti. Hráč hrá zmiešanú stratégiu ak hrá jednotlivé stratégie s určitou pravdepodobnosťou. Behaviorálna stratégia priraďuje každej informačnej množine rozdelenie s určitými pravdepodobnosťami

V ďalšej časti práce budeme využívať pojem reakcia hráča, respektíve najlepšia reakcia hráča alebo reakčná funkcia (krivka), taktiež budeme hľadať Nashove ekvilibrium, Bayesovo Nashovo ekvilibrium a dokonalé Bayesovo Nashovo ekvilibrium .

Definícia: Hovoríme, že stratégia $s_i^* \in S_i$ hráča *i* je najlepšou jeho reakciou na komplementárny profil stratégií $s_{-i} \in S_{-i}$ práve vtedy,

ak $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ pre všetky $s_i \in S_i$,

alebo ekvivalentne $s_i^* \in \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$.

Definícia: Multifunkciu definovanú nasledovne

$$BR_i(s_{-i}) = \{s_i^* \in S_i : s_i^* \in \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})\}$$

voláme reakčná multifunkcia hráča *i.*

Definícia: Profil stratégií $s^* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*)$ hry v strategickom tvare voláme Nashove ekvilibrium v čistých stratégiách práve vtedy, ak pre každého hráča $i = 1...n$ platí:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \text{ pre všetky } s_i \in S_i \ ,$$

alebo ekvivalentne $s_i^* \in \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*)$,

alebo ekvivalentne $s^* \in BR_i(s_{-i}^*)$.

Jednoducho povedané, Nashove ekvilibrium hry, je také ekvilibrium, kde ani jeden hráč nemôže získať tým, že len on sám zmení stratégiu.

Definícia: Profil stratégií v statickej Bayesovej hre $(s_1^*(.), s_2^*(.), ..., s_n^*(.))$ nazývame Bayesovým Nashovým ekvilibriom pre každého hráča a pre každý jeho typ, ak platí:

$$\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \mu_i(t_{-i} \mid t_i) u_i(t_i, s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i})) \geq \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \mu_i(t_{-i} \mid t_i) u_i(t_i, a_i, s_{-i}^*(t_{-i})) \text{ pre všetky } a_i \in A_i \, .$$

Inak povedané, Bayesove Nashove ekvilibrium hry je také, ktoré maximalizuje očakávaný zisk (výplatu) hráča, za predpokladu existencie svojho presvedčenia o ostatných hráčoch, ich profiloch a stratégiách, ktoré budú hrať. Aby sme si mohli definovať dokonalé Bayesovo Nashovo ekvilibrium, musíme si najprv definovať kedy je profil stratégií sekvenčne racionálny.

Definícia: Profil stratégií s nazývame sekvenčne racionálnym vzhľadom na systém presvedčení μ, ak s vyberie v každej rozhodovacej množine racionálnu akciu.

Definícia: Profil stratégií s^* a systém presvedčení μ tvoria dokonalé Bayesovo Nashovo ekvilibrium, ak spĺňajú:

- Hra má systém presvedčení, teda v každej informačnej množine má hráč, ktorý sa v nej rozhoduje, dobre definované presvedčenie μ.
- Všetky informačné množiny na ekvilibriovej ceste, a vždy keď je to možné aj pre ostatné, sú konzistentné s Bayesovým pravidlom.
- Vzhľadom na dané presvedčenie, stratégie hráčov musia byť sekvenčne racionálne.

3.3. Cournotov duopol z pohľadu teórie hier

Uvažujme príklad ako v kapitole o trhoch s Cournotovým duopolom.

$N = \{firma1, firma2\}$ - hráči

$S_1 = S_2 = [0, \infty]$ - stratégie

$P(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$ - inverzná dopytová funkcia

$C_i(q_i) = c * q_i$ - nákladová funkcia

Máme úžitkovú funkciu v tvare: $u_i(q_1, q_2) = P(q_1 + q_2) * q_i - c * q_i$

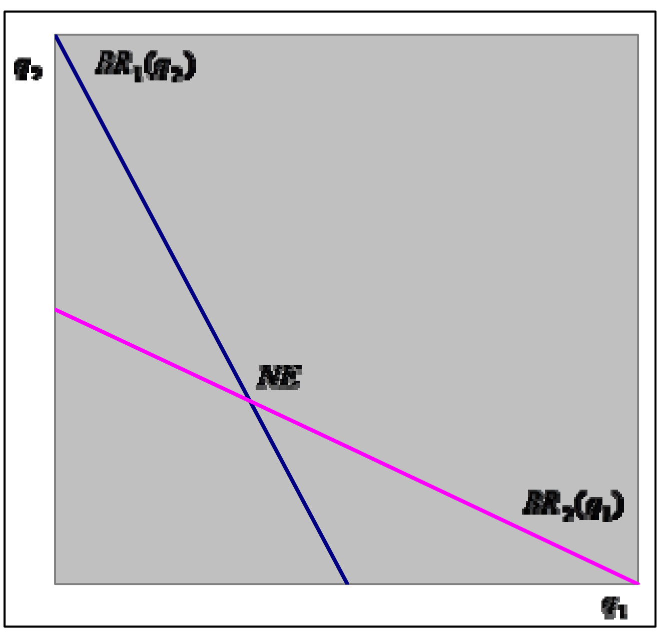
Hľadáme najlepšiu reakčnú funkciu hráčov a to nasledovne:

$$\max_{q \ \in S_1} u_i(q_1, q_2) = \max_{q_1 \in S_1} (a - b(q_1 + q_2) - c) * q_i)$$

Z čoho dostávame nasledovné reakčné funkcie:

$$BR_1(q_2) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2}{2} \quad \text{a} \quad BR_2(q_1) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2},$$

z čoho dostávame samozrejme to isté riešenie ako sme dostali v predchádzajúcej časti tejto práce, výraz (1) a to je $q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3b}$. Riešenie sa dá nájsť aj graficky ako priesečník reakčných funkcií, kde priesečník je Nashove ekvilibrium. Toto riešenie si môžeme pozrieť na obrázku dole.



Obr.1: Grafické riešenie Cournotovho duopolu

4. Cournotovsky trh s tajnou informáciou

4.1. Model

Pre problematiku získavania informácií či už na trhu, v našom prípade Cournotovskom, alebo pre prípad aukcie, existuje a bolo publikovaných veľa rôznych modelov. Keď hovoríme o aukcií a o dvojstupňovom modeli, tak spomeňme napríklad od Milgroma [6], kde v prvej fáze získame informáciu o cene a v druhej sa rozhodneme o výške svojej ponuky. Uvažujeme model informačných prírastkov v Cournotovskom trhu. Pre problematiku trhu spomeňme model od Ockenfelsa z roku 1989, ktorý je podobný modelu použitému nami až na to, že v jeho modeli sa nejedná o spojitú hru, ale výška produktivity má binárne rozdelenie. Ďalší odlišný model je od Chang a Lee [2], ktorý sa líši v tom, že firmy vyrábajú rôzne výrobky, čiže nie homogénne ako v našom použitom modeli.

Nami použitý model je vlastne zovšeobecnenie modelov Ponssard [10], Vives [12] a Hwang [4] a vychádza z článku Hauk a Hurkens [3].

Uvažujeme stochastický model „informačných prírastkov" teda model kde sa firma rozhoduje koľko investovať do prieskumu trhu aby získala čo najpresnejšiu informáciu, ktorú využije pri rozhodovaní o svojej produkcií a tak optimalizovala svoje správanie sa na Cournotovskom trhu.

Majme $n \geq 2$ počet firiem na trhu. Inverzná dopytová funkcia je v tvare:

$$p = \theta - \beta_n \sum_{j=1}^{n} x_j \ ,$$

kde x_j je produkcia firmy *j*, $\beta_n > 0$ je konštanta a θ je náhodný parameter so strednou hodnotou μ a disperziou σ^2 a prirodzene budeme predpokladať, že má normálne rozdelenie. Firma *i* má kvadratickú nákladová funkciu v tvare:

$$C_i(x_i) = c_i x_i + \lambda_i x_i^2, \qquad c_i, \lambda_i \geq 0 .$$

Firma *i* získava signál $s_i = \theta + \varepsilon_i$ kde ε_i sú náhodné odchýlky so strednou hodnotou 0 a varianciou v_i a $Cov(\theta, \varepsilon_i) = 0$. $1/v_i$ je presnosť signálu. Signály prijaté firmami sú nezávislé podmienené od θ a okrem predpokladáme, že $E(\theta \mid s_i)$ je podmienené s_i. Tento predpoklad nám dáva, že

$$E(\theta \mid s_i) = E(s_j \mid s_i) = \mu + t_i(s_i - \mu),$$

$$\text{kde } t_i = \sigma^2 / (\sigma^2 + v_i).$$

Všimnime si, že zatiaľ čo v_i dosahuje hodnoty od 0 do nekonečna, t_i od 1 po 0. Preto pre zľahčenie budeme ďalej pracovať s t_i. Predpokladáme, že firma si môže kúpiť c-krát $1/v_i$ informácií o trhu a z toho dostávame, že náklady na informácie sú

$$C(t_i) = \frac{ct_i}{\sigma^2(1-t_i)}.$$

V čom sa budeme líšiť od modelov použitých od Vives, Hwanga a Ponssarda je to, že zatiaľ čo oni uvažujú len dvojstupňový model, my budeme uvažovať aj o jednostupňovom modely. Dôvod použitia jednostupňového modelu vyplynie z nasledovného popísania jednotlivých modelov. Rozoberme si teraz jednotlivé modely a ich stratégie.

V dvojstupňovom modeli sa firmy v prvej fáze rozhodnú koľko investovať do informácií. Výška investícií jednotlivých firiem sa stane v druhej fáze verejnou informáciou a na základe tejto informácie a „zakúpeného“ signálu každá firma určí výšku svojej produkcie v druhej fáze. Na základe tohto môžeme stratégiu firmy zapísať ako dvojicu $(t_i, y_i(\cdot,\cdot))$, kde t_i vyjadruje presnosť informácií a $y_i(t, s_i)$ opisuje výšku produkcie závislej od „zakúpeného“ signálu a od presnosti, pre ktorú sa rozhodli ostatné firmy.

Na rozdiel od dvojstupňového sa firmy v jednostupňovom modeli rozhodujú koľko investovať do presnosti informácie. A následne na základe „zakúpeného“ signálu sa rozhodnú o výške svojej produkcie. Teda nemajú informáciu o ostatných firmách a ich rozhodnutiach v prvej fáze ako je to u dvojstupňového modelu. Na základe tohto môžeme stratégiu firmy zapísať ako dvojicu $(t_i, x_i(\cdot))$, kde t_i vyjadruje presnosť informácie a $x_i(s_i)$ opisuje výšku produkcie na základe „zakúpeného“ signál a nie je závislá od výšky investícií do informácie, pre ktorú sa rozhodli ostatné firmy.

Vráťme sa späť k dôvodu prečo uvažujeme aj jednostupňový model a nie len dvojstupňový. V dvojstupňovom modeli majú po prvej fáze firmy „povinnosť“ zverejniť svoje rozhodnutie a tento predpoklad je nereálny a nesprávny keďže je nereálne donútiť firmu aby zverejňovala svoje strategické rozhodnutia a keby aj zverejnila tak nikde nie je zaručené, že nezverejnila nepresné informácie a len zavádza konkurenciu. Preto uvažujeme jednostupňový model, ktorý sa zdá byť oveľa realistickejší.

4.2. Ekvilibrium spojitej hry

Na nájdenie dokonalého Bayesovho Nashovho ekvilibria pre dvojstupňový model nám stačí použiť substitúciu výplat $\pi_i(t) - C(t_i)$, pomocou ktorej redukujeme dvojstupňovú hru kde volíme iba výšku presnosti informácií. Z tohto dostávame reakčné funkcie pre jednotlivé firmy, kde ekvilibrium nájdeme ako priesečník týchto reakčných funkcií. Ak je riešenie vnútorné tak ho dostaneme z riešenia sústavy rovníc, ktorú dostaneme po zderivovaní predošlého výrazu rovného 0:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial t_i} = C'(t_i) \text{ pre všetky } i.$$

Keďže pre jednostupňový model vyberáme simultánne presnosť informácie t_i a množstvo produkcie x_i, teda stratégia každej firmy je dvojica, nemáme možnosť pracovať s reakčnou funkciou, avšak môžeme použiť prístup splnenia prvej podmienky. Kľúčové je si všimnúť, že ak dvojica (t, x) je čisté Nashovo ekvilibrium jednostupňovej hry, tak musí byť x ekvilibriom druhého stupňa dvojstupňovej hry pre zvolené t. Toto nám značne redukuje počet kandidátov na riešenie jednostupňovej hry. Z toho máme, že k analýze oboch modelov sa musíme najprv zamerať na spojité hry druhého stupňa dvojstupňového modelu.

Majme vektor $t = (t_1 ..., t_n)$ presnosti informácií a uvažujme spojitú hru druhého stupňa. Nech je fixná stratégia $x_j(s_j) = a_j(s_j - \mu) + b_j$ pre všetky $j \neq i$. Potom najlepšou reakciou firmy i, je taká, ktorá maximalizuje jej podmienený očakávaný zisk:

$$E\left(x_i(s_i)(\theta - \beta_n \sum_{j \neq i} x_j(s_j) - c_i - (\lambda_i + \beta_n) x_i(s_i)) \mid s_i \right).$$

Teda hľadáme takú stratégiu $x_i(s_i)$ ako deriváciu predošlého očakávaného zisku rovnú 0. Z čoho dostaneme:

$$x_i(s_i) = \frac{E(\theta \mid s_i) - \beta_n \sum_{j \neq i} E(x_j(s_j) \mid s_i) - c_i}{2(\lambda_i + \beta_n)} =$$

$$= \frac{\mu + t_i(s_i - \mu) - \beta_n \sum_{j \neq i} E(a_j(s_j - \mu) + b_j \mid s_i) - c_i}{2(\lambda_i + \beta_n)} =$$

$$= \frac{\mu + t_i(s_i - \mu) - \beta_n \sum_{j \neq i} a_j(E(s_j \mid s_i) - \mu) + b_j - c_i}{2(\lambda_i + \beta_n)} =$$

$$= \frac{\mu + t_i(s_i - \mu) - \beta_n \sum_{j \neq i} (a_j t_i(s_i - \mu) + b_j) - c_i}{2(\lambda_i + \beta_n)} =$$

$$= b_i + \overline{a}_i t_i(s_i - \mu), \qquad (2)$$

kde $$b_i = \frac{\mu - \beta_n \sum_{j \neq i} b_j - c_i}{2(\lambda_i + \beta_n)} \quad \text{a} \quad \overline{a}_i = \frac{1 - \beta_n \sum_{j \neq i} a_j}{2(\lambda_i + \beta_n)}. \qquad (3)$$

Po dosadení (3) do (2) a po miernych úpravách dostaneme, že očakávaný zisk podmienený signálom s_i je rovný $(\lambda_i + \beta_n)(x_i(s_i))^2$. Nepodmienený zisk môžeme počítať nasledovne:

$$\begin{aligned}
\pi_i(t) &= E\big((\lambda_i + \beta_n)(x_i(s_i))^2\big) \\
&= (\lambda_i + \beta_n)([E(x_i(s_i))]^2 + Var(x_i(s_i))) \\
&= (\lambda_i + \beta_n)(b_i^2 + Var(b_i + \overline{a}_i t_i(\theta + \varepsilon_i - \mu)) \text{-} \\
&= (\lambda_i + \beta_n)(b_i^2 + \overline{a}_i^2 t_i^2 Var(\theta + \varepsilon_i - \mu)) \\
&= (\lambda_i + \beta_n)(b_i^2 + \overline{a}_i^2 t_i^2 (\sigma^2 + v_i)) \\
&= (\lambda_i + \beta_n)(b_i^2 + \overline{a}_i^2 t_i \sigma^2).
\end{aligned}$$

Z výrazov (2) a (3) môžeme vypočítať ekvilibriovú stratégiu a zapísať ju následne:

$$x_i(s_i) = b_i^e + \overline{a}_i^e[t] t_i(s_i - \mu),$$

kde $$2(\lambda_i + \beta_n) b_i^e = \mu - c_i - \beta_n \sum_{j \neq i} b_j^e \qquad i=1,\dots,n \qquad (4)$$

$$2(\lambda_i + \beta_n)\bar{a}_i^e[t] = 1 - \beta_n \sum_{j \neq i} t_j \bar{a}_j^e[t] \qquad i=1,\dots,n \tag{5}$$

Systém (4) a (5) ma práve jedno riešenie. Dôkaz tohto tvrdenia je v článku od Hauk a Hurkens [3].

Teraz uvažujme dvojstupňový model. Dokonalé Bayesovo ekvilibrium je $(t^*, y^*(\cdot,\cdot))$ a musí byť splnené, že $y^*(t,\cdot)$ je jediné Nashovo ekvilibium druhej fázy pre všetky *t*. Teda máme $y_i^*(t, s_i) = b_i^e + a_i^e[t]t_i(s_i - \mu)$ pre všetky *t*. Ďalej predpokladáme, že žiadna firma nemá dôvod na zmenu informácií. Za predpokladu vnútorného riešenia dostaneme $\frac{\partial \pi_i(t^*)}{\partial t_i} = C'(t_i^*)$ čo môžeme na základe predošlých výsledkov a po úpravách prepísať na:

$$(\lambda_i + \beta_n)\sigma^2((\bar{a}_i^e[t^*])^2 + 2t_i^*\bar{a}_i^e[t^*](\frac{\partial \bar{a}_i^e}{\partial t_i}) = C'(t_i^*)\,. \tag{6}$$

Prejdime na jednostupňový model. Nech $(\bar{t}, \bar{x}(\cdot))$ je čisté ekvilibrium tak potom $\bar{x}(\cdot)$ musí byť ekvilibrium druhého stupňa dvojstupňovej hry. Túto stratégiu môžeme taktiež zapísať ako $x_i(s_i) = b_i^e + \bar{a}_i^e[\bar{t}]\bar{t}_i(s_i - \mu)$. Podmienkou podobne ako sme spomenuli aj pri dvojstupňovom modeli je aby žiadna firma nemala dôvod na vybočenie. Zmena oproti dvojstupňovému modelu je, že firma môže zmeniť výšku informácií a aj produkciu v jednej fáze. Ak firma zmení výšku informácie z $\bar{t}_i$ na t_i tak stratégia bude vyzerať ako $x_i(s_i) = b_i^e + \bar{a}_i^e[\bar{t}]t_i(s_i - \mu)$ a z toho si môžeme všimnúť, že $\bar{a}_i^e[\bar{t}]$ závisí od $\bar{t}$ a nie od t_i. Ďalej dostávame opäť za predpokladu vnútorného riešenia nasledovné:

$$(\lambda_i + \beta_n)\sigma^2(\bar{a}_i^e[\bar{t}])^2 = C'(\bar{t}_i)\,. \tag{7}$$

Tu je viditeľne splnená podmienka druhého rádu pre maximum, keďže ľavá strana nie je závislá od t_i a nákladová funkcia je rýdzokonvexná. Toto sme vo všeobecnosti nepreukázali pre dvojstupňový model, ale pre prípady, ktorými sa budeme zaoberať to bolo už ukázané pre homogénne firmy Vives [12] a pre heterogénne firmy Hwang [4].

Z výsledkov (6) a (7) vidíme, že pre jednostupňovú a dvojstupňovú hru nedostávame rovnaké riešenia (pokiaľ sú vnútorné). Z výrazu (5) môžeme dostať:

$$2(\lambda_i + \beta_n)\overline{a}_i^e[t]) + \beta_n t_j \overline{a}_j^e[t] = 2(\lambda_j + \beta_n)\overline{a}_j^e[t] + \beta_n t_i \overline{a}_i^e[t],$$

z čoho vidno, že nemôže byť žiadne $\overline{a}_i^e[t] \leq 0$. Ak budeme pokračovať ďalej, tak po zderivovaní dostaneme:

$$-\beta_n \overline{a}_i^e[t] + (2(\lambda_i + \beta_n) - t_i\beta_n)\frac{\partial \overline{a}_i^e[t]}{\partial t_i} = (2(\lambda_j + \beta_n) - t_j\beta_n)\frac{\partial \overline{a}_j^e[t]}{\partial t_i},$$

z čoho máme, ak by bolo $\partial \overline{a}_i^e / \partial t_i \leq 0$, potom by pre všetky j platilo $\partial \overline{a}_j^e / \partial t_j < 0$ a to nesúhlasí s výrazom (5). Preto máme, že $\partial \overline{a}_i^e / \partial t_i > 0$ a z toho následne záver, že riešenie dvojstupňovej hry vedie k vyššej úrovni informovanosti firiem. Ďalší výsledok podľa Hauk a Hurkenson [3] je, že ekvilibriové výplaty v dvojstupňovom modely sú ostro menšie ako v jednostupňovom, pokiaľ nie je nulová informovanosť.

Z predchádzajúcich záverov vyplýva, že firmy ak môžu, si vyberú hrať jednostupňovú hru. Avšak tu vzniká problém, ktorý môžeme prirovnať problému väzňovej dilemy, keďže vždy existuje nejaký spôsob ako sa informovať o konkurencií a čiastočne poznať jej stratégiu a najlepšia reakcia na to je mať lepšiu informáciu o trhu než konkurencia. Teda každá z firiem sa snaží byť informovanejšia a teda mať výhodu a aj zvýšiť svoj zisk. Tento fakt vedie k tomu, že firmy sa dostanú časom do úrovne informácií ekvilibria dvojstupňovej hry a ich zisk bude nižší.

4.3. Homogénne firmy

Uvažujme homogénne firmy, teda $\lambda_i = \lambda$ a $c_i = 0$ pre všetky *i*. Podľa Vives [12] Ekvilibrium musí byť symetrické, $x_i(s_i) = x(s_i)$ pre všetky *i,* odkedy je nákladová funkcia rýdzo konvexná a identická pre všetky firmy a signály sú nezávisle a identicky rozdelené. Fakt, že ekvlilibrium je pre všetky firmy symetrické je ľahko pozorovateľný keďže systém má len jedno riešenie a z toho vidíme, že pre homogénne firmy je symetrické. Položme $\hat{t}$ vektor informácií kde $\hat{t}_j = t^*$ pre všetky $j \neq i$. Uvažujme ekvilibrium $x(\cdot)$ druhého stupňa dvojstupňovej hry. Zo systému vieme, že ekvilibriová stratégia existuje. Máme $x_i(s_i) = b_i^e + \overline{a}_i^e[\hat{t}]\hat{t}_i(s_i - \mu)$ kde b_i^e dostaneme nasledovne z $b_j^e = b_i^e$, $c_i = 0$ a z výrazu (4) po úpravách:

$$b_i^e = \frac{\mu}{2\lambda + (n+1)\beta_n} \tag{8}$$

a $\overline{a}_i^e$ dostaneme obdobne ako pre b_i^e a z výrazu (5) rovné:

$$\overline{a}_i^e[\hat{t}] = \frac{2(\lambda + \beta_n) - \beta_n t^*}{2(\lambda + \beta_n)(2(\lambda + \beta_n) + \beta_n(n-2)t^*) - \beta_n^2(n-1)t^*\hat{t}_i}$$

a z toho dostávame

$$a_i^e[\hat{t}]_{\hat{t}_j = t^*} = 1/(2(\lambda + \beta_n) + (n-1)t^*\beta_n) \tag{9}$$

a taktiež po zderivovaní

$$\left(\frac{\partial \overline{a}_i^e[\hat{t}]}{\partial t_i}\right)_{\hat{t}_i = t^*} = \frac{\beta_n^2(n-1)t^*}{(2(\lambda + \beta_n) - \beta_n t^*)(2(\lambda + \beta_n) + (n-1)\beta_n t^*)^2}\,. \tag{10}$$

Úroveň informácií budeme hľadať za podmienky kladného riešenia ako $MPV_2(t^*) = C'(t^*)$, kde MPV opisuje hraničnú hodnotu firmy ak zvýši svoju úroveň informácií ak všetky ostatné firmy zachovajú svoju úroveň, čo dostaneme dosadením výrazov (9) a (10) do výrazu (6) a po následných úpravách v nasledovnom tvare:

$$MPV_2(t) = \sigma^2(\lambda + \beta_n)\frac{2(\lambda + \beta_n)(1 + (n-1)\gamma) + (n-1)\gamma t\beta_n}{(2(\lambda + \beta_n)(1 + (n-1)\gamma) - (n-1)\gamma t\beta_n)^3}$$

kde $$\gamma = \frac{t\beta_n}{2(\lambda + \beta_n) - t\beta_n}.$$

Nevieme dostať t^* ako explicitné riešenie, vieme dostať výsledok iba pre prípad, že počet firiem ide do nekonečna.

Uvažujme teraz jednostupňový model. Riešenie hľadáme podobne ako pre dvojstupňový model ako nezáporné riešenie $MPV_1(\bar{t}) = C'(\bar{t})$. Substitúciou výrazu (9) do výrazu (7) dostaneme:

$$MPV_1(t) = \frac{\sigma^2(\lambda + \beta_n)}{(2(\lambda + \beta_n) + t(n-1)\beta_n)^2}.$$

A taktiež pravú stranu rovnú $C'(t) = c/(\sigma^2(1-t)^2)$ čo sme dostali zderivovaním nákladov na informácie. Dosadením do rovnosti dostaneme kvadratickú rovnicu premennej $\bar{t}$, z ktorej po vyriešení dostaneme explicitné riešenie v tvare:

$$\bar{t} = \max\left\{0; \frac{\sigma^2 - 2\sqrt{c(\lambda + \beta_n)}}{\sigma^2 + (n-1)\beta_n\sqrt{c/(\lambda + \beta_n)}}\right\}.$$

Po zdĺhavých úpravách môžeme dostať, že rozdiel v hraničných hodnotách pre jednotlivé modely je nasledovný:

$$\frac{MPV_2(t) - MPV_1(t)}{\sigma^2(\lambda + \beta_n)} = \frac{2(n-1)(t\beta_n)^2}{(2(\lambda + \beta_n) - t\beta_n)(2(\lambda + \beta_n) + (n-1)t\beta_n)^3} .$$

Z toho už je ľahko vidno, že hraničná hodnota v dvojstupňovom modeli je vždy vyššia pokiaľ nie je úroveň informácií všetkých firiem nulová. Taktiež vidno, že ak počet firiem ide limitne do nekonečna tak jednotlivé funkcie ku sebe konvergujú. Z tohto dôvodu v limite rozdiel medzi produkciou dvoch rôznych hier sa stráca.

4.4. Blahobyt

Firmy sa snažia pomocou získavania informácií o trhu, respektíve presnosti dopytu maximalizovať svoj zisk. Teda ak vie presnejšie odhadnúť dopyt na trhu, má aj vyšší zisk. Spotrebitelia taktiež získavajú z toho, že dopyt a ponuka sa rovnajú alebo sú veľmi blízke. Otázne je len za akých podmienok alebo dokedy je ešte nadobudnutie informácií o presnosti dopytu efektívne pre trh. Zrejmé je, že viacnásobný ten istý prieskum trhu vykonaný rôznymi firmami paralelne je asi neefektívny a zbytočný a nevedie k efektívnosti trhu. Na druhej strane ak firmy majú nepresnú informáciu o trhu, jedna produkuje viac, druhá menej, čo síce vedie k tomu, že spolu odhadli správne dopyt na trhu, ale keďže predpokladáme konvexnú funkciu nákladov tak priemerné náklady na trhu sú vyššie ako keby obe firmy správne odhadli dopyt. Tento fakt vedie k neefektívnosti na trhu.

Definícia: Prvá najlepšia efektívna úroveň informácií je taká úroveň informácií, ktorá maximalizuje blahobyt keď firmy produkujú blahobyt maximalizujúce množstvá a informácie všetkých firiem môžu byť zhromaždené.

Je prirodzené, že najefektívnejšia úroveň nastáva pre prípad keď firmy zdieľajú navzájom svoje informácie o dopyte. Keďže dostanú až na odchýlky, ktoré sú z rovnakého rozdelenia, rovnakú informáciu o dopyte, a priemer odchýlok ide s narastajúcim počtom firiem k nule, keďže sú z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou nula, tým pádom aj priemer signálov jednotlivých firiem ide k skutočnému dopytu so zvyšujúcim sa počtom firiem. Firmy takto dostanú rovnaký signál a teda produkujú aj pri rovnakých hraničných nákladoch, teda nevzniká neefektivita.
Vives [12] ukázal, že pre náš prípad toto nemôže byť dosiahnuté: „Na konkurenčnom trhu so symetrickými firmami s rýdzo konvexnou nákladovou funkciou so súkromnými informáciami o neistom dopyte je strata čo sa týka blahobytu oproti plne informovanom trhu.“

Pre prípad konštantných hraničných nákladov je táto efektívna úroveň možná, čo ukázal Palfrey [7] .

Definícia: Druhá najlepšia efektívna úroveň informácií je taká úroveň informácií, ktorá maximalizuje blahobyt, keď firmy použijú blahobyt maximalizujúcu produkčnú funkciu a informácie nemôžu byť zhromaždené.

Jeden z výsledkov Viva [12] je aj, že v dokonalej konkurencií bez agentov má firma správny (druhý najlepší) podnet na získanie informácií. Teda ukázal, že v dokonalej konkurencií firmy dosahujú druhú najlepšiu úroveň. Predchádzajúci výsledok, že v limite sa jednostupňový a dvojstupňový model rovnajú a z výsledku od Viva [12] dostávame nasledovné: ak počet firiem ide donekonečna, teda pre dokonale konkurenčný trh, jednostupňový model vedie k druhej najlepšej efektívnej úrovni informácií.

Definícia: Tretia najlepšia efektívna úroveň informácií je taká úroveň informácií, ktorá maximalizuje blahobyt keď firmy použijú zisk maximalizujúcu funkciu v ich produkčnom rozhodnutí a informácie nemôžu byť zhromaždené.

Prvú najlepšiu efektívnu úroveň informácií je nemožné dosiahnuť, keďže pre firmy je nezmyselné a ani neexistuje spôsob ako ich prinútiť deliť svoje informácie. Druhá najlepšia efektívna úroveň predpokladá nejaké politické stanovenia, ktoré maximalizujú blahobyt. Iba tretia najlepšia efektívna úroveň je založená čisto na efekte informácií, a preto bude naša analýza založená na základe tejto definície.

Celkový blahobyt pre danú presnosť informácií, pre dané signály, keď každá firma sa riadi ekvilibriovou stratégiou $x_j(s_j) = a(s_j - \mu) + b\mu$ odvodenou z výrazov (8) a (9) je rovný:

$$TW(t, \theta, s_1 \ldots s_n) = \frac{\theta^2}{2\beta_n} - \frac{1}{2\beta_n}\left(\theta - \beta_n \sum_j x_j(s_j)\right)^2 - \lambda \sum_j x_j(s_j)^2 .$$

My môžeme počítať očakávaný celkový blahobyt, keď zoberieme očakávané signály podmienené θ a potom zoberieme očakávané θ. Z definície pre tretiu najlepšiu úroveň informácií máme, že firmy sa rozhodujú na základe funkcie maximalizujúcej zisk a preto dostávame, že maximum je dosiahnuté, keď hraničný celkový blahobyt sa rovná celkovým hraničným nákladom, $ETW'(t_{e3}) = nC'(t_{e3})$ alebo zavedením $MSV(t) = ETW'(t)/n$ kde MSV je hraničná spoločenská hodnota informácie na firmu, čiže opisuje hraničný dopad na celkový blahobyt, keď jedna firma zvýši svoju presnosť informácií, a dostaneme rovnosť:

$$MSV'(t_{e3}) = C'(t_{e3})$$

kde

$$MSV(t) = \sigma^2 \frac{2\lambda^2 + 3\beta_n^2 + 5\beta_n\lambda + \lambda(n-1)t\beta_n + (n-1)t\beta_n/2}{(2(\lambda+\beta_n) + (n-1)t\beta_n)^3}.$$

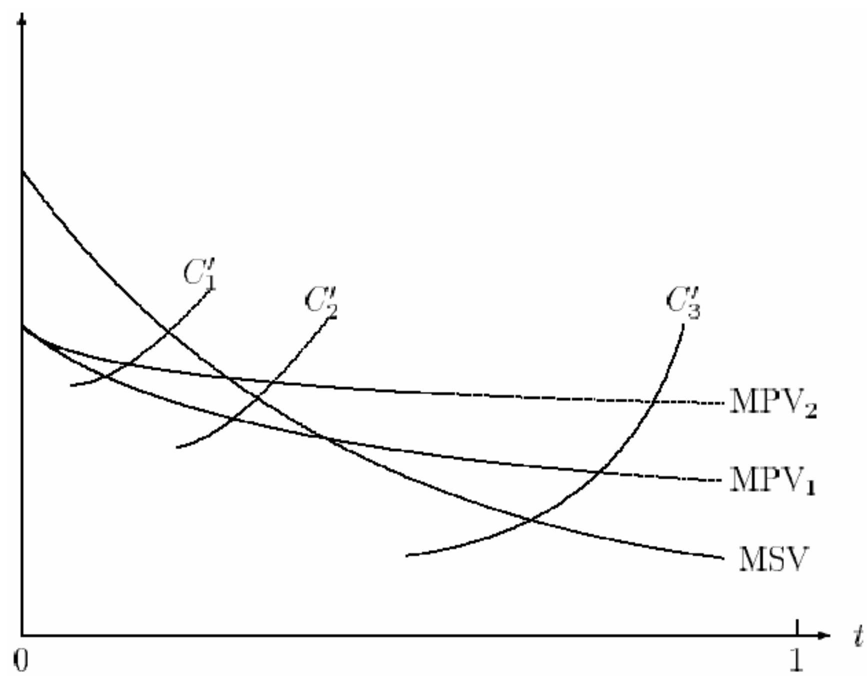
To, či firmy vzhľadom k tretej najlepšej efektívnej úrovni informácií investujú viac alebo menej ako by mali, nám závisí od polohy kriviek hraničných nákladov, hraničnej spoločenskej hodnoty a hraničnej súkromnej hodnoty pre jednotlivé modely. O tejto polohe nám hovorí nasledujúca lemma Hauk a Hurkens [3].

Lemma: 1) $MSV(t) > MPV_1(t)$ vtedy a len vtedy ak $t < \hat{t}_1$, kde $\hat{t}_1 = \dfrac{2 + 2n\lambda/\beta}{n-1}$. $\hat{t}_1 < 1$ vtedy a len vtedy ak $n(1 - 2\lambda/\beta) > 3$.

2) $MSV(t) > MPV_2(t)$ vtedy a len vtedy ak $t < \hat{t}_2$, kde $\hat{t}_2$ je kladný koreň kvadratickej rovnice $[(n-1)(2n\lambda/\beta + 3/2)]t^2 + [n(n\lambda/\beta+1)]t - 2(n\lambda/\beta+1)^2 = 0$.

Predchádzajúca lemma nám hovorí, že MSV a MPV krivky sa pretínajú v bode $\hat{t}$, ktorý vidíme, že závisí od pomeru λ/β a *n*. Lemma nám taktiež hovorí o vzájomnej polohe kriviek pre *t* väčšie a menšie. Rast pomeru λ/β nám zvyšuje neefektivitu trhu, a preto pre dostatočne veľké λ/β, teda pre dostatočne veľkú neefektivitu na trhu (výroba pri rôznych hraničných nákladoch) dostávame, že $\hat{t} > 1$ a z lemmy vyplýva, že hraničná spoločenská hodnota je stále nad hraničnou súkromnou hodnotou a teda firmy budú nedostatočne investovať do informácií. Preto pre zvýšenie blahobytu spoločnosti by mala zasiahnuť vláda a to tak, že by podporovala informovanosť. Ďalšou analýzou by mohlo byť do akej miery a akým spôsobom by mala vláda podporovať informácie, či priamo zavedením dotácií na informácie alebo vlastnými prieskumami trhu a následným zverejnením prieskumov. Z toho, že hraničná súkromná hodnota pri jednostupňovom modeli je menšia, nanajvýš rovná ako v dvojstupňovom nám vyplýva, že jednostupňový model vedie k vyšším dotáciám od štátu.

Naopak pre dostatočne malý pomer λ / β a k tomu príslušnej dostatočnej veľkosti trhu dostávame situáciu znázornenú na obrázku číslo 2 prebratého z článku Hauk a Hurkens [3]. Teda prienik $\hat{t}$ leží na intervale (0,1) a dostávame 3 rôzne situácie, ktoré závisia od počiatočnej neistoty a nákladov na informácie.



Obr.2: Porovnanie hraničných nákladov a hraničnej súkromnej hodnoty

1. Prvý prípad ($C_1^{'}$) je keď náklady na informácie sú vysoké a počiatočná neistota relatívne nízka. Vtedy dostávame prípad kedy firmy nedostatočne investujú a pre zvýšenie blahobytu spoločnosti by mali byť podporované informácie, teda vláda by

mala dotovať prieskum trhu. Taktiež máme, že pre jednostupňový by mali byť dotácie vyššie ako pre dvojstupňový.

2. Druhý prípad ($C_2^{'}$) je medzi prvým a druhým keď nastáva rozdiel medzi jednostupňovým a dvojstupňovým model a to taký, že pre jednostupňový nastáva prípad nedostatočného investovania do informácií a pre dvojstupňový naopak nadbytočné investovanie, preto pre dosiahnutie lepšieho blahobytu by mali byť udelené dane na informácie pre dvojstupňový.
3. Tretí prípad ($C_3^{'}$) nastáva pre lacné náklady na informácie a pre relatívne vysokú počiatočnú neistotu. Z obrázka vidno, že pre oba modely nastáva prípad, že firmy nadbytočne investujú do informácií o trhu, a preto pre zvýšenie blahobytu spoločnosti by mala vláda uvaliť dane na získavanie informácií. Z toho, že hraničná súkromná hodnota je menšia pre jednostupňový model ako dvojstupňový vyplýva, že daň na informácie by mala byť vyššia v prípade dvojstupňového modelu.

4.5. Heterogénny duopol

Uvažujme prípad heterogénneho duopolu. Je to prípad rozobraný taktiež Hwangom [4]. Ukážeme, že jednostupňový model má explicitné riešenie zatiaľ čo dvojstupňový iba implicitné. Taktiež ukážeme, že výsledok Hwanga [4] pre dvojstupňový model vždy nesúhlasí s výsledkom jednostupňového modelu.

Takže uvažujme počet firiem *n=2* a $\beta_n = \beta$. Nech $t = (t_i, t_j)$ je dvojica informácií. Ekvilibriová stratégia podľa výrazov (4) a (5) je potom nasledovná:

$$x_i(s_i) = b_i^e + \overline{a}_i^e[t]t_i(s_i - \mu)$$

kde máme:

$$\overline{a}_i^e = \frac{(2(\lambda_j + \beta) - \beta t_j)}{4(\lambda_i + \beta)(\lambda_j + \beta) - \beta^2 t_i t_j} \qquad (11)$$

$$b_i^e = \frac{2(\lambda_j + \beta)(\mu - c_i) - \beta(\mu - c_j)}{4(\lambda_i + \beta)(\lambda_j + \beta) - \beta^2}.$$

Zderivovaním výrazu (11) dostaneme:

$$\frac{\partial \overline{a}_i^e}{\partial t_i} = \frac{(2(\lambda_j + \beta) - \beta t_j)\beta^2 t_j}{(4(\lambda_i + \beta)(\lambda_j + \beta) - \beta^2 t_i t_j)^2} \qquad (12)$$

a následným dosadením výrazu (12) do výrazu (6) za predpokladu vnútorného riešenia dostávame:

$$\sigma^2(\lambda_i + \beta)\frac{\Phi_j^2}{\Psi^3}(\Psi + 2t_1 t_2 \beta^2) = C'(t_i^*), \qquad (13)$$

kde

$$\Phi_j = 2(\lambda_j + \beta) - \beta t_j \quad \text{a} \quad \Psi = 4(\lambda_i + \beta)(\lambda_j + \beta) - \beta^2 t_i t_j.$$

Taktiež ako pre homogénne firmy, tak i tu je nemožné dostať explicitné riešenie, ale iba implicitné a navyše je tu nemožné dostať explicitné riešenie ani pre reakčnú funkciu. Využitím vety o implicitnej funkcii vieme dokázať, že reakčná funkcia musí byť monotónne klesajúca pre náš prípad pričom sa odvolávame na tvrdenie od Hwanga [4] pre prvý stupeň dvojstupňovej hry, najlepšia reakčná funkcia je monotónne klesajúca.

Z derivácie nákladov na informácie a z rovnosti (13) vidíme, že pre $t_i^* < 1$ môžeme dostať po úpravách:

$$\frac{(1-t_j^*)^2}{(1-t_i^*)^2} = \frac{C'(t_i^*)}{C'(t_j^*)} = \frac{(\lambda_i + \beta)(2(\lambda_j + \beta) - \beta t_j^*)^2}{(\lambda_j + \beta)(2(\lambda_i + \beta) - \beta t_i^*)^2} . \tag{14}$$

Zobratím kvadratických koreňov a definovaním $p_k = \sqrt{\lambda_k + \beta}$, môžeme (14) prepísať ako $t_j^* = E_j(t_i^*)$ kde máme pre $t_i \in [0,1]$ definované:

$$E_j(t_i) = \frac{2p_i p_j (p_i - p_j) + t_i p_j (2p_i p_j - \beta)}{p_i(2p_i p_j - \beta) + t_i \beta (p_i - p_j)} . \tag{15}$$

Túto krivku môžeme nazvať ekvilibriovou krivkou.

Pre jednostupňový model budeme postupovať obdobne. Výraz (11) dosadíme do (7) a po malých úpravách dostaneme nasledovné ekvilibrium:

$$\sigma^2 (\lambda_i + \beta) \frac{\Phi_j^2}{\Psi^2} = C'(\bar{t}_i) . \tag{16}$$

Podobne ako pre dvojstupňový model dostávame nasledovný výraz:

$$\frac{(1-\bar{t}_j)^2}{(1-\bar{t}_i)^2} = \frac{C'(\bar{t}_i)}{C'(\bar{t}_j)} = \frac{(\lambda_i + \beta)(2(\lambda_j + \beta) - \beta \bar{t}_j)^2}{(\lambda_j + \beta)(2(\lambda_i + \beta) - \beta \bar{t}_i)^2}$$

a taktiež $\bar{t}_j = E_j(\bar{t}_i)$.

Z predošlých dvoch výrazov vidíme, že obe riešenia jedno aj dvojstupňového modelov ležia na tej istej krivke a veľmi ľahko vidno, že pre vnútorné hodnoty informácií máme nasledovnú nerovnosť $t_i^* > \bar{t}_i$. Teda vidíme, že stupeň informácií je pre dvojstupňový model vyšší ako pre jednostupňový model.

Z výrazu (16) a z derivácie nákladov po odmocnení dostaneme nasledovné:

$$\sigma^2 \sqrt{\lambda_i + \beta}(2(\lambda_i + \beta) - \beta t_j)(1 - t_i) = \sqrt{c}(4(\lambda_i + \beta)(\lambda_j + \beta) - \beta^2 t_i t_j)$$

čo môžeme upraviť a dostaneme nasledovnú rovnosť:

$$t_j = \frac{4p_i^2 p_j^2 \sqrt{c} - 2\sigma^2 p_i p_j (1 - t_i)}{t_i \sqrt{c} \beta^2 - \beta \sigma^2 p_i (1 - t_i)} ,$$

ktorá je definovaná ako vidno pre $t_i \in [0, p_i / (\beta \sqrt{c} + \sigma^2 p_i))$.

Pravú stranu môžeme označiť ako funkciu $R_j(t_i)$, teda funkcia premennej t_i, ktorej výsledok je hodnota t_j. Funkciu R_j môžeme nazvať akousi pseudoreakčnou krivkou, keďže stratégiou každej firmy je dvojica. Ale napriek tomu ekvilibrium môžeme počítať ako priesečník pseudoreakčných kriviek, ale taktiež ako priesečník ekvilibriovej krivky s jednou z pseudoreakčných kriviek.

Vidno, že R_j je klesajúca a má vertikálnu asymptotu. E_j je naopak rastúca. Keď si dáme nasledovné označenie $\lambda_i \geq \lambda_j$ z výrazu (15) dostaneme podmienku $E_j(0) \geq 0$. Z rastúcosti a klesajúcosti kriviek dostávame nevyhnutnú a postačujúcu podmienku pre jediné vnútorné riešenie a to nasledovnú: $R_j(0) > E_j(0)$, čo je veľmi jednoznačne a jednoducho dokázateľné. Teda máme nerovnosť:

$$\frac{4p_i^2 p_j^2 \sqrt{c} - 2\sigma^2 p_i p_j}{t_i \sqrt{c}\beta^2 - \beta\sigma^2 p_i} > \frac{2p_i p_j (p_i - p_j)}{p_i(2p_i p_j - \beta)}$$

z ktorej po zdĺhavých úpravách dostávame podmienku:

$$\sqrt{c} < \frac{\sigma^2(2p_j^2 - \beta)}{2p_j(p_i p_j - \beta)}.$$

Ďalej za predpokladu vnútorného riešenia, vieme riešenie nájsť ako priesečník ekvilibriovej a pseudoreakčnej krivky, teda:

$$\frac{4p_i^2 p_j^2 \sqrt{c} - 2\sigma^2 p_i p_j (1-t_i)}{t_i \sqrt{c}\beta^2 - \beta\sigma^2 p_i (1-t_i)} = \frac{2p_i p_j (p_i - p_j) + t_i p_j (2p_i p_j - \beta)}{p_i(2p_i p_j - \beta) + t_i \beta (p_i - p_j)}$$

z čoho po úpravách dostaneme nasledovné riešenie:

$$\bar{t}_i = \frac{\sigma^2 p_i (2p_j^2 - \beta) - 2p_i p_j (2p_i p_j - \beta)\sqrt{c}}{\sigma^2 p_i (2p_j^2 - \beta) + \beta(2p_i p_j - \beta)\sqrt{c}}.$$

Ďalej sa budeme zaoberať závislosťou od rôznych parametrov a tieto výsledky budeme porovnávať s výsledkami dvojstupňového modelu dosiahnutými v článku Hwang [4]. Predpokladajme teraz, že $\lambda_i > \lambda_j$. Potom jednoduchými vyšetreniami dostávame rôzne vlastnosti.

1. $E_j(t_i)$ je rastúca a konkávna a jej sklon, teda derivácia je menšia než 1. Tento výsledok dostaneme po zderivovaní a jednoduchej analýze. Tento výsledok je v nesúlade s dvojstupňovým modelom kde ekvilibriová krivka má vyšší sklon ako 1.

2. $R_j(t_i)$ je klesajúca. Výsledok dostaneme po zderivovaní funkcie.

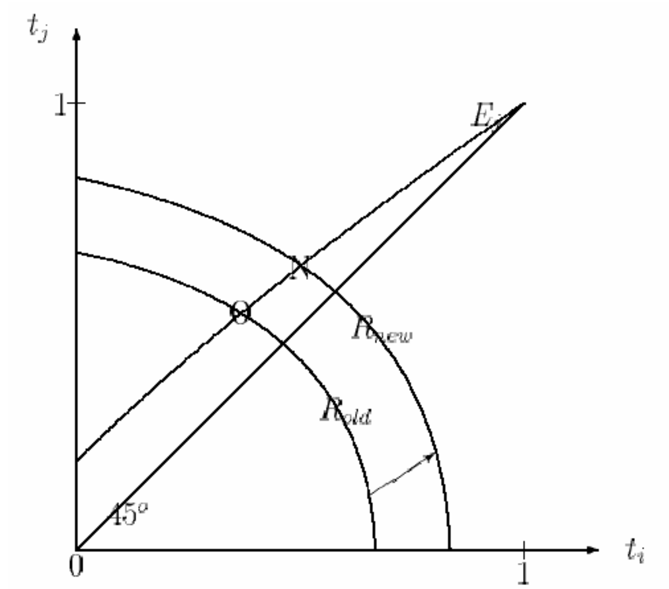
3. $R_j(t_i)$ spôsobujú posun nadol: nárast *c*, β alebo λ_i a naopak pokles λ_j alebo σ^2. Tento výsledok dostávame po zderivovaní jednotlivými parametrami.

4. $E_j(t_i)$ sa posunie nadol pri náraste β. Výsledok dostaneme po zderivovaní parametrom.

Z predchádzajúcich vlastností môžeme vyvodiť nasledujúce závery:

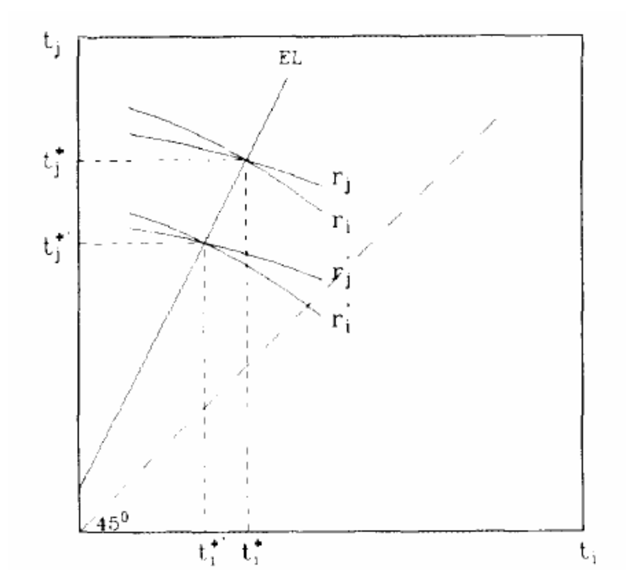
1. Z konkávnosti $E_j(t_i)$, $E_j(0) \geq 0$ a $E_j(1) = 1$ vyplýva, že $\bar{t}_j \geq \bar{t}_i$, kde rovnosť nastáva len pre $\lambda_i = \lambda_j$. Teda máme záver, že firma s nižším sklonom hraničných nákladov získava viacej informácií. Tento výsledok je aj v súlade s tvrdením: nech t_i^* a t_j^* sú ekvilibriové množstvá informácií nadobudnuté firmami. Potom platí $t_i^* >=< t_j^*$ ak $\lambda_i >=< \lambda_j$. Hwang [4] pre dvojstupňový model.

2. Z toho, že pseudoreakčná krivka sa posunie nahor pri zvýšení počiatočnej neistoty o dopyte σ^2 a posunie nadol pri zvýšení nákladov na informácie *c*, a z toho, že ekvilibriová krivka nie je závislá od týchto dvoch parametrov dostávame, že oba prípady vedú firmy k zvýšenému zhromažďovaniu informácií. Z konkávnosti $E_j(t_i)$ a z toho, že sklon je menší než jedna dostávame, že pri zvýšení počiatočnej neistoty alebo znížení nákladov firma s nižším sklonom hraničných nákladov zvyšuje informovanosť menej agresívnejšie než firma s vyšším sklonom hraničných nákladov čo si môžeme pozrieť na obrázku číslo 3, ktorý je prebratý z článku Hauk a Hurkens [3].



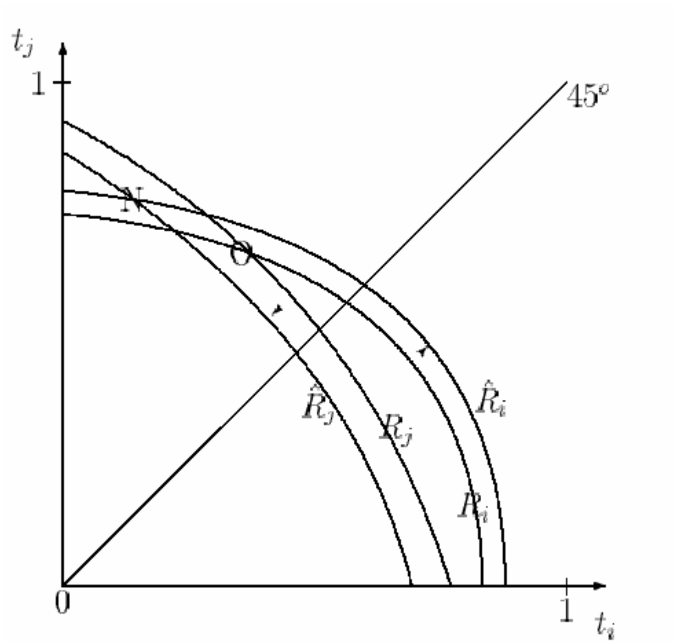
Obr.3: efekt nárastu σ^2 a poklesu c

Tento výsledok je čiastočne v rozpore s výsledkom Hwanga [4], kde nastáva presný opak v tom, že firma s vyššími hraničnými nákladmi slabšie reaguje na zvýšenie počiatočnej neistoty čo môžeme vidieť aj na obrázku číslo 4 od Hwanga [4]. Vysvetlené je to na príklade extrémnych hraničných nákladov a to takmer s horizontálnym a takmer vertikálnym rastom kde firma s vysokým rastom nereaguje skoro vôbec na zmenu počiatočnej neistoty na rozdiel od firmy s takmer nulovým rastom hraničných nákladov.



Obr.4: efekt nárastu nákladov na informáciu

3. Keď λ_i vzrastie, potom sa pseudoreakčná krivka firmy *j* posunie smerom nadol a firmy *i* nahor. Keďže máme, že pseudoreakčná funkcia firmy *i* je rovnejšia než firmy *j,* tak $\bar{t}_i$ klesne a $\bar{t}_j$ vzrastie čo si môžeme pozrieť na obrázku číslo 5. Inak povedané, čím je rozdiel v sklone hraničných nákladov medzi firmami väčší, tým je aj rozdiel medzi stupňom informácií väčší. A logicky aj opačne, čím je rozdiel v sklone menší, tým je aj rozdiel v úrovní informácií menší. Pri rovnosti sklonov nastáva rovnosť úrovní informácií.

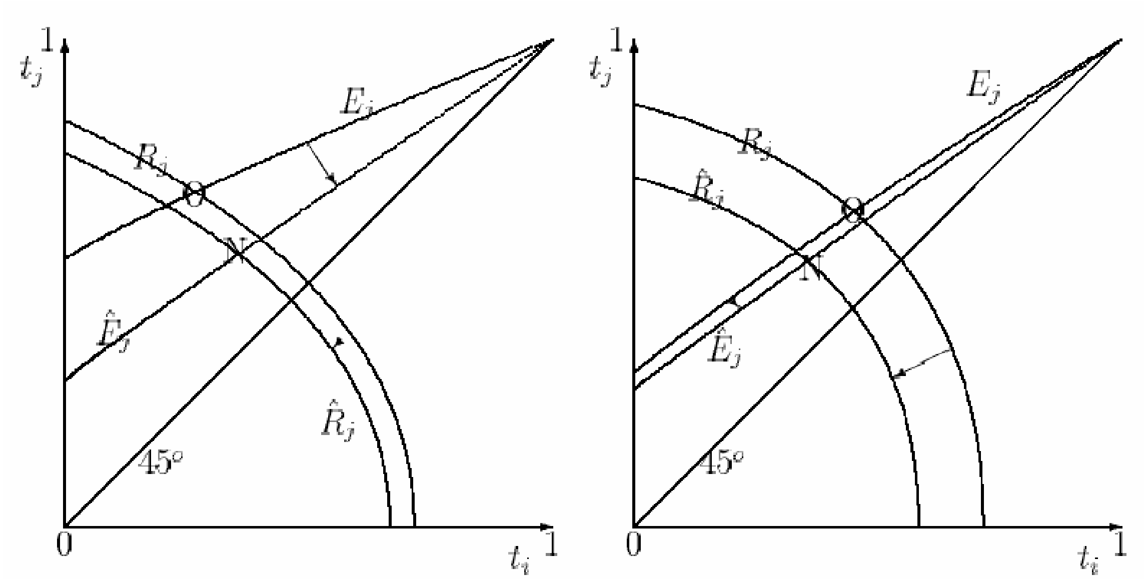


Obr.5: efekt nárastu λ_i

Tento výsledok je plne v súlade s tvrdením: Nárast v sklone firmy *i* jej hraničnej produkčnej nákladovej funkcie znižuje množstvo získaných informácií firmy *i,* ale zvyšuje množstvo informácií získaných firmou *j*.

4. Najproblematickejšie je vyšetriť ako sa posunú krivky keď sa zmení β. Už Vives [12] ukázal, že hraničná hodnota informácií je klesajúca funkcia β, a preto pri náraste β sa reakčné krivky oboch firiem posunú doľava. Toto je v súlade s našim výsledkom, že pri náraste β sa $R_j(t_i)$ posunie nadol, respektíve doľava a ekvilibriová krivka tiež nadol. Z toho máme, že t_j sa za každých okolností zníži,

ale čo sa stane s t_i nie je také jednoznačné. Môžu nastať tri prípady, a to že sa zníži, zvýši alebo úroveň ostane nezmenená. Prípady nárastu a poklesu t_i sú zobrazené na obrázku číslo 6, prevzatý Hauk a Hurkenson [3].



Obr.6: možné efekty nárastu β

Tento výsledok je v rozpore s tvrdením Hwang [4], ktoré tvrdí, že nárast β znižuje množstvo informácií získavaných oboma firmami a ich efekt je percentuálne väčší pre firmu, ktorá získava menej informácií.

5. Záver

Cieľom diplomovej práce bolo analyzovať jednostupňový model odvodený z dvojstupňového a následne ich porovnať. Dostali sme výsledok, že úrovne informácií sú v jednostupňovom modeli nižšie ako v dvojstupňovom modeli, a zase výplaty sú menšie v dvojstupňovom modeli ako v jednostupňovom. Preto firmy ak sa môžu rozhodnúť tak hrajú jednostupňovú hru. Vzniká zase problém, keďže najlepšia reakcia firmy je mať vyššiu úroveň informácií ako konkurencia, zaručiť aby firmy nezískavali o sebe žiadne informácie, lebo postupným procesom by sa dostali k ekvilibriovej stratégie dvojstupňového modelu. Ďalší výsledok sme dostali pre trh s homogénnymi firmami, keď pre počet firiem idúci limitne do nekonečna dostávame, že tieto dva modely sa rovnajú. Taktiež sme uvažovali blahobyt a efektivitu na trhu, kde sme dostali pre rôzne hodnoty, kedy má vláda podporovať informácie o trhu pre zvýšenie efektivity trhu, a naopak, kedy má uvaliť dane. Ak dáva dane na informácie tak v prípade dvojstupňového modelu by mali byť vyššie a v prípade dotácií by mali byť vyššie pre jednostupňový model. Pre prípad heterogénneho duopolu sme prišli k záveru, že pre jednotlivé modely firmy inak reagujú na zmenu parametrov, keďže nám vyšli výsledky jednostupňového modelu, ktoré ukázali iné správanie sa firiem na trhu ako pre dvojstupňový model. Z tohto usudzujeme, že je pre jednotlivé informačné analýzy je veľmi dôležité sa zamyslieť nad vhodnosťou modelu a uvažovať správny model.

6. Literatúra

[1] Boďa, J., Prednášky zo „Základy ekonómie“

[2] Chang, C.-H., and Lee C.-W. J. (1992). „Information Acquisition as Business Strategy,“

[3] Hauk and Hurnkenson, (1997). „Secret Information Acquisition in Cournot Markets“

[4] Hwang, H. (1993). „Optimal Information Acquisition for Heterogenous Duopoly Firms,“

[5] Hwang, H. (1995). „Information Acquisition and Relative Efficiency of Competitive, Oligopoly, and Monopoly Markets“

[6] Milgrom, R. (1981). „Rational Expectations, Information Acquisition and Competitive Bidding“

[7] Palfrey, T (1985). „Uncertainty Resolution Private Information Aggregation, and the Cournot Competitive Limit“

[8] Pekár, J., Prednášky z „Úvod do teórie hier“

[9] Pekár, J., Prednášky z „Teória nekooperatívnych hier“

[10] Ponssard, J-P. (1979). „The Strategic Role of Information on the Demand Function in an Oligopolistic Market“

[11] Sláviková, V., Diplomová práca (2007), „Hry s asymetrickou informáciou“

[12] Vive, X. (1988). „Aggregation of Information in Large Cournot Markets“

[13] Zvonár, R., Diplomová práca (2007), „Stabilita v nekonečno opakovaných hrách Cournotovho duopolu“