FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Optimálny čas uplatnenia Amerických Ázijských Call opcií

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2008

Branislav Kucharčík

Optimálny čas uplatnenia Amerických Ázijských Call opcií

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Branislav Kucharčík

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Matematika

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr.Daniel Ševčovič, CSc.

BRATISLAVA 2008

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne, len s pomocou nadobudnutých teoretických vedomostí, konzultácií a uvedenej literatúry.

V Bratislave, apríl 2008 . . . .

Branislav Kucharčík

Poďakovanie

Veľmi pekne ďakujem vedúcemu diplomovej práce Doc. RNDr.Danielovi Ševčovičovi, CSc. za jeho odborné vedenie, pripomienky, návrhy a čas, ktorý mi venoval pri vypracovávaní diplomovej práce.

Abstrakt

Táto práca má za cieľ analyzovať optimálny čas využitia amerického typu ázijských *floating strike call* opcií za predpokladu použitia spojitého aritmetického priemeru. Základom modelu je upravený Black-Scholesov vzorec na oceňovania opcií, ktorý je ďalej transformovaný na pevnú oblasť a pri transformácii je využitá myšlienka syntetického portfólia. Prezentované sú aj numerické výsledky.

Abstract

The purpose of this diploma work is to analyze the optimal stopping time for American Asian floating strike call options where we assume continuous arithmetic average. Our model is based on Black-Scholes framework adjusted for american asian options. Fixed domain transformation is performed, where we transform free boundary problem into a equation defined on fixed spatial domain. We also present numerical experiments.

Keywords: american asian option, floating strike call, fixed domain transformation, arithmetic average, free boundary, optimal stopping time.

Obsah

Zoznam skratiek a symbolov

S - hodnota základného aktíva

Q_S - počet akcií

V - cena opcie

Q_V - počet opcií

B - peňažný objem bezrizikových dlhopisov

E - realizačná cena akcie

t - premenná času

T - expiračný čas, termín vypršania derivátu

τ - $T - t$

A - priemer ceny základného aktíva za dané obdobie

σ - volatilita ceny akcie

μ - drift stochastického procesu

$S_f(t)$ - voľná hranica

$x_f(t)$ - zmenený zápis voľnej hranice po transformácii modelu

W - nová premenná pri redukcii dimenzie modelu $W = \frac{V}{A}$

Π - nová premenná po transformácii na pevnú oblasť $\Pi = W - x\frac{\partial W}{\partial x}$

$\rho(\tau)$ - preznačenie voľnej hranice $\rho(\tau) = x_f(T - \tau)$

x - nová premenná pri redukcii dimenzie modelu $x = \frac{S}{A}$

ξ - nová premenná po transformácii na pevnú oblasť $\xi = \ln \frac{\rho(\tau)}{x}$

r - bezriziková úroková miera dlhopisov

q - dividendová miera

BS - Black Scholesova rovnica

PDR - parciálna diferenciálna rovnica

Úvod

Oceňovanie finančných derivátov je už niekoľko desaťročí rozmáhajúcou sa oblasťou financií. Počas tohoto obdobia prebehol vývin od jednoduchších typov finančných nástrojov k pomerne komplexnejším nástrojom na zaisťovanie rizika. Jedným z nich sú ázijské opcie ktoré patria k *path-dependent* opciám a ako celok sú súčasťou väčšej triedy opcií nazývaných Exotické opcie. Zaujímavou vlastnosťou ázijských opcií je že ich *payoff* závisí od priemeru ceny základného aktíva. Používajú sa pri zaisťovaní sa proti riziku plynúceho z ceny základného aktíva ale hlavne pri znižovaní rizika plynúceho z náhleho pohybu ceny základného aktíva tesne pred expiráciou. Zvyčajne sú obchodované na menové kurzy a komodity. Na oceňovanie finančných derivátov existujú rôzne prístupy, ale základom pre väčšinu z nich stále ostáva Black-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica pre oceňovanie opcií, ktorá bude základom aj pri našej práci. Jeden zo zaujímavých problémov pri oceňovaní opcií je analýza voľnej hranice a optimálny čas využitia opcie.

Ciele práce

Cieľom našej práce je analyzovať optimálny čas využitia amerického typu ázijských *floating strike call* opcií. Práca je rozdelená na niekoľko častí. Na úvod si pripomenieme niektoré základné pojmy z oblasti finančných derivátov a ukážeme si niektoré príklady Exotických opcií. V ďalšej kapitole si popíšeme základný BS vzorec pre európske a americké vanilla opcie, kde si bližšie vysvetlíme pojem voľnej hranice a jej použitie pri oceňovaní. V tretej kapitole si zhrnieme predpoklady modelu a odvodíme si BS rovnicu pre Ázijské opcie, ktorú pomocou voľnej hranice preformulujeme na model pre Americké Ázijské opcie. Model ktorý bude zadefinovaný na časovo závislom definičnom obore si transformujeme na model s pevným definičným oborom. Ďalej využijeme myšlienku syntetického portfólia pri zmene premenných, čím dostaneme nelineárnu nelokálnu parabolickú rovnicu, ktorú budeme riešiť pomocou numerických metód.

1 Základné pojmy

Na úvod si pripomenieme niektoré pojmy a definície ako sú finančné deriváty, opcie, Brownov pohyb a iné. V jednoduchosti si rozdelíme opcie s ohľadom na ich špecifické vlastnosti a popíšeme si základný Black-Scholesov model.

1.1 Jednoduché Opcie

Základným nástrojom zabezpečenia sa voči riziku plynúceho z volatility cien na finančných trhoch je finančný derivát. Finančné deriváty sú odvodené od hodnoty primárnych aktív, najčastejšie sa používajú akcie, úrokové sadzby, komodity a menové kurzy. Medzi základné typy derivátov patria forwardy, futurity, swapy, a opcie. Vo všetkých prípadoch ide o obchodovanie s právami na plnenie v budúcnosti.
Opčné deriváty predstavujú právo kúpiť alebo predať určité základné aktívum v stanovenom čase za stanovenú cenu. Základnými typmi opcií z pohľadu vývoja sú jednoduché opcie (plain vanilla options). V literatúre sa rozlišujú dva typy opcií na základe toho či ponúkajú právo na kúpu alebo predaj základného aktíva

- *Call* opcia je kontrakt, ktorý dáva držiteľovi právo (nie povinnosť) kúpiť základné aktívum v presne určenom čase za vopred dohodnutú cenu.

- *put* opcia je kontrakt, ktorý dáva držiteľovi právo (nie povinnosť) predať základné aktívum v presne určenom čase za vopred dohodnutú cenu.

Opcie od svojho vzniku prešli dlhým vývojom. Môžeme to vidieť na množstve rôznych variánt s odlišnými vlastnosťami. Opcie sa dajú rozdeliť podľa viacerých kritérií, ale v praxi sa rozlišujú hlavne dva typy, európske a americké opcie.

- Európsku opciu je možné uplatniť len na konci daného obdobia, to znamená v expiračnom čase označovanom T.

- Americkú opciu je možné uplatniť kedykoľvek počas jej života. To znamená kedykoľvek v čase $\forall t \in < 0, T >$.

Oba typy opcií sú charakterizované výplatnou funkciou, tiež nazývanou *payoff* funkcia.Pre americké aj európske opcie je *payoff* definovaný rovnako

$$V(S,T) = \begin{cases} (S-E)^+ = \max\{S-E,0\} & \text{pre } \textit{call} \text{ opciu} \\ (E-S)^+ = \max\{E-S,0\} & \text{pre } \textit{put} \text{ opciu,} \end{cases} \tag{1}$$

kde E je vopred dohodnutá realizačná cena, a T vopred dohodnutý expiračný čas. Tieto dva typy opcií ani zďaleka nie sú jediné, aj keď sú najznámejšie a najviac využívané. Sútaž na trhu s derivátmi nútila finančné inštitúcie aby navrhovali a vyvýjali nové komplexnejšie nástroje. Dnes sa na trhu nachádza už nespočetné množstvo variácií. V nasledujúcej sekcii si uvedieme základné delenie a niektoré zaujímavé typy.

1.2 Exotické opcie

Presné vymedzenie pojmu exotické opcie neexistuje. Vo všeobecnosti sa dá povedať že sú to opcie ktoré sa nejakým spôsobom líšia od štandardných opcií. Delenie exotických opcií takisto nie je štandardizované. Existujú opcie ktoré majú zmenené zmluvné podmienky, opcie závislé od viacerých základných aktív, opcie na opcie, opcie so zmeneným *payoffom* kde patria aj *path-dependent* opcie (na ceste závislé) a iné. V skratke si uvedieme niektoré zaujímavé príklady exotických opcií.

1.2.1 Opcie s neštandardným spôsobom uplatnenia

Payoff nasledujúcich opcií síce ostáva nezmenený ale líšia sa v spôsobe uplatnenia.

- Bermudská opcia je opcia kde vlastník má právo uplatniť ju niekoľko krát, a to vo vopred určených termínoch (väčšinou každý mesiac). Táto vlastnosť ju radí niekde medzi európsku opciu (môže byť uplatnená iba raz) a americkú opciu (môže byť uplatnená kedykoľvek počas platnosti opcie).

- Zložená opcia (*Compound option*) je opcia na opciu, inými slovami to znamená, že držiteľ má vlastne dva expiračné časy a dve rozhodnutia. Prvé keď uplatní prvú opciu na opciu a druhé keď uplatní samotnú opciu na nejaké základné aktívum.

- Ohlasovacia opcia (*Shout option*) dáva držiteľovi právo kedykoľvek nahlásiť predávajucemu že si chce zabezpečiť súčasnú cenu aktíva. V expiračnom čase potom môže držiteľ použiť danú cenu ak mu to dá lepší výsledok ako *payoff*.

1.2.2 Opcie s neštandardným payoffom

Existuje viacero variánt opcií, v závislosti od požadovaných vlastností. Veľkú podskupinu tvoria už spomenuté *path-dependent* opcie ktoré závisia na vývoja základného aktíva a nielen od stavu v expiračnom čase.

- Lookback opcia je opcia kde majiteľ má právo kúpiť (predať) základné aktívum za najnižšiu alebo najvyššiu cenu, ktorá sa sleduje počas vopred určenej časovej periódy.

- Ázijská opcia je opcia, ktrej *payoff* závisí od priemernej ceny základného aktíva počas vopred určenej doby.

- Ruská opcia je večná lookback opcia, čiže opcia bez zadefinovaného expiračného času.

- Binárna opcia je opcia, ktorá vypláca fixnú čiastku ak základné aktívum presiahlo vopred určenú cenu, alebo nulu ak túto hranicu nedosiahlo.

- Barierová opcia je opcia kde jej *payoff* závisí od toho či cena základného aktíva dosiahne alebo prekročí nejakú hranicu.

- *Chooser* opcia dáva majiteľovi počas vopred určenej časovej periody právo rozhodnúť sa či daná opcia bude *call* alebo *put*.

Nás budú zaujímať hlavne ázijské opcie, konkrétne ázijské opcie amerického typu. Ako sa dá z predchádzajúcich popisov usúdiť, tento typ bude charakterizovaný priemernou cenou základného aktíva v *payoffe* a možnosťou uplatniť danú opciu kedykoľvek počas jej života.

1.3 Ázijské Opcie

Ázijské opcie sú vo všeobecnosti rozdelené na dve kategórie, *floating strike* (s plávajúcou realizačnou cenou) a *fixed strike* (s konštantnou realizačnou cenou).

- *Floating strike* opcia je opcia ktorej *payoff* je založený na rozdiele spotovej ceny akcie v expirácii a expiračnej ceny vypočítanej ako priemer ceny základné aktíva za čas života opcie

  $$V(S,T,A) = \eta(S-A)^+$$

  kde $\eta = 1$ pre *call* opciu a $\eta = -1$ pre *put* opciu. Tento typ ocpií zaručuje že priemerná cena zaplatená (alebo prijatá) za dané základné aktívum počas danej doby nie je vyššia ako cena akcie v expiračnom čase.

- *Fixed strike* opcia je opcia ktorej *payoff* je rozdiel medzi priemernou cenou základného aktíva za dané obdobie a expiračnej ceny

  $$V(S,T,A) = \eta(A-E)^+$$

  kde E je vopred určená fixná realizačná cena. Vo všeobecnosti tento druh opcií umožňuje kúpu alebo predaj základného aktíva za priemernú cenu namiesto za spotovú. Bežne sa používajú hlavne pri komoditách a výmenných kurzoch kde má účastník pravidelné alebo rozbehnuté obchody s konkrétnym aktívom a chce sa zabezpečiť voči fluktuácii. *Fixed strike* opcie sa taktiež pužívajú v situáciach keď kupujúci chce pokryť viacero spotových transakcií použitím jedného zaisťovacieho nástroja, alebo keď je rozumné zredukovať závislosť opcie na spotovej cene základného aktíva len v jednom čase.

Príklad: Uvažujme s pravidelným odberateľom ropy ktorý nemá stanovenú fixnú cenu dodávok, ale cena je stanovená týždenne pomocou konkrétneho benchmarku. Spotrebiteľ sa obáva nárastu cien v budúcich mesiacoch a chce sa zaistiť voči danému riziku. Potrebuje aby *payoff* zaistenia odrážal týždenné nákupy počas určenej doby. *Fixed strike* opcia môže byť prisôsobená týmto požiadavkám. Stačí zahrnúť do priemeru týždenné ceny daného aktíva počas určenej doby. Táto opcia zachytáva týždenné zmeny ceny komodity a je lacnejšia ako alternatíva zaplatenie niekoľkých európskych opcií s maturitou v jednotlivých časoch.

1.3.1 Základné charakteristiky Ázijských opcií

Pri ázijských opciách sa dá uvažovať o viacerých možnostiach pri definovaní predpokladov pomocou ktorých sa bude rátať ich cena. V prvom rade uvažujeme o dvoch spôsoboch priemeru ceny základného aktíva.

- Geometrický priemer je vhodné uvažovať za predpokladu že základné aktívum sa riadi geometrickým brownovým pohybom. Za tohoto predpokladu sa modely dajú rátať pomerne jednoducho pretože príslušná B-S rovnica sa dá transformovať na rovnicu vedenia tepla s konštantnými koeficientami. Riešenie je v tvare Greenovho tepelného jadra.

- Aritmetický priemer je síce z pohľadu riešenia komplikovanejší ale v praxi omnoho viac využívaný.

Ďalej sa dá uvažovať o spojitom alebo diskrétnom priemere.

- Diskrétny priemer - v praxi je možné zisťovať cenu akcie len v určitých časových okamihoch.

- Spojitý priemer - v matematickej formulácii sa omnoho jednoduchšie narába so spojitými fukciami.

Ďalšia z možností spočíva v tom, že priemer ceny základného aktíva sa môže rátať za časť obdobia života opcie, alebo za celé obdobie.
V neposlednom rade rozlišujeme ázijské opcie európskeho typu, ktoré môžu byť uplatnené až na konci obdobia, alebo ázijské opcie amerického typu, ktoré môžu byť uplatnené kedykoľvek počas života opcie.

Americké Ázijské opcie

Jeden z hlavných dôvodov prečo boli ázijské opcie vyvinuté je zaistenie sa voči riziku plynúceho z manipulácie ceny tesne pred expiráciou. Pri ázijksych opciách amerického typu dochádza ku konfliktu medzi možnosťou predčasného uplatnenia ázijkých opcií a pôvodným dôvodom vytvorenia ázijkých opcií. Keby ázijské opcie boli amerického typu tak by došlo k znovuzavedenie možnosti manipulácie s cenou základného aktíva. Tieto opcie by mohli byť uplatnené hneď po začatí priemerovania. Ako sa však ukázalo riziko z toho plynúce nie je signifikantné, čo potvrdzuje aj fakt že americké ázijské opcie sa reálne obchodujú.

1.3.2 Oceňovanie Amerických Ázijských opcií

Existuje niekoľko článkov zaoberajúcich sa oceňovaním amerických ázijských opcií založených na Black-Scholesovom modeli. Napríklad Hansen a Jorgensen v článku [15] prezentovali nemonotónnosť voľnej hranice amerických ázijských call a put opcií vzhľadom na čas. Ďalej v článku [17] je dôkaz konvexnosti voľnej hranice za určitých predpokladov na pohyb základného aktíva. Mnohé ďalšie zaujímavé prístupy su prezentované aj v článkoch [14] alebo [16]. Väčšina z nich sa zaoberá konštrukciou numerických metód na výpočet hodnôt voľnej hranice. Použité numerické prístupy sa líšia. Jedná sa o algoritmy založené na simuláciach, iteratívne riešenia integrálnych rovníc, variačný prístup, aproximácia pomocou Bernoulliho náhodného pohybu a iné.
Zatiaľ čo všetky uvedené publikácie používajú pri oceňovaní BS model, existujú aj prístupy ktoré nie sú založené na danej rovnici. Jeden z použitých prístupov

predpokladá že základné aktívum je riadené iným typom stochstického procesu, v článku [11] je uvažovaný *jump* proces. V inom prístupe je zavedená stochastická volatilita [18].

V našej práci sa takisto budeme sústrediť na model založený na BS vzorci. Budeme ho transformovať na model definovaný na pevnej oblasti a využijeme myšlienku syntetického portfólia. Ďalej budeme numericky rátať profil voľnej hranice.

2 Európske a Americké opcie

Keďže na oceňovanie amerických ázijskych opcií použijeme upravený Black-Scholesov model je vhodné pripomenúť si ako vyzerajú modely na ocenenie amerických a európskych jednoduchých opcií pre prípad *call* opcií.
Základný rozdiel medzi európskym a americkým typom opcie je založený na možnosti uplatnenia americkej opcie kedykoľvek počas jej života. Na druhej strane európsku opciu je možné uplatniť len v expiračnom čase. Vo všeobecnosti keď máme rovnaký typ opcie (realizačná cena, expiračný čas ....) a líšia sa len v tom že jedna opcia je amerického typu a druhá európskeho, tak vieme že hodnota americkej je vyššia kvôli dodatočnému právu kedykoľvek uplatniť túto opciu.

$$V_{Am}(S,t) \geq V_{Eur}(S,t) \quad \forall t \in [0,T].$$

Pri opciách poznáme výplatu v čase T, teda hodnotu tejto opcie v expiračnom čase. Čo ale nevieme, je ako oceniť hodnotu tejto opcie v čase 0, teda v čase jej predaja. Vieme, že táto hodnota je kladná pretože sa platí za právo kúpiť základné aktívum za realizačnú cenu. Realizačná cena môže byť teoreticky akákoľvek kladná hodnota, čiže aj nižšia ako je súčasná hodnota základného aktíva.

2.1 Oceňovanie Európskych opcií

Na oceňovanie európskeho typu opcií sa používa Black Scholesov model. Jeho odvodenie popisovať nebudeme, keďže v kapitole (3.2) si uvedieme podrobný popis odvodenia modelu pre americké ázijské opcie. Základný BS model má nasledujúci tvar.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

Spolu s podmienkou v expiračnom čase, ktorej zmysel je v tom, že ak aktuálna cena akcie S v čase T je vyššia ako realizačná cena E tak hodnota opcie v tomto čase je $S - E$. Na druhej strane ak neprekročí dohodnutú cenu tak opcia má nulovú hodnotu.

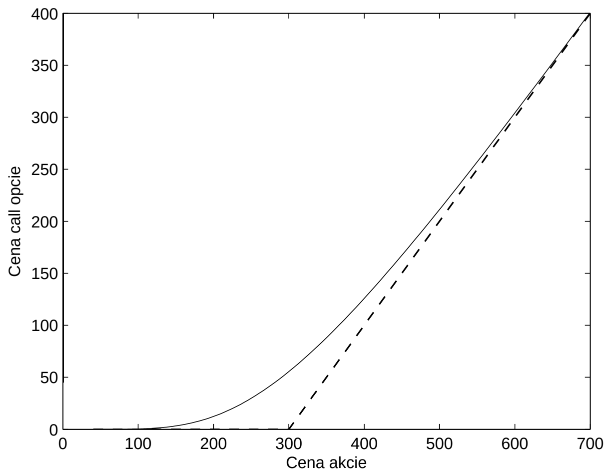
$$V(S,T) = \max\{S - E, 0\},$$

Nasledujúca okrajová pomienka vychádza z predpokladu že ak hodnota akcie je 0 tak ani opcia na danú akciu nemá hodnotu.

$$V(0,t) = 0.$$

2.2 Oceňovanie Amerických opcií

Ako bolo spomenuté americká opcia má výhodu oproti európskej v možnosti jej uplatnenia kedykoľvek počas jej života. Uplatnenie tohoto práva však má zmysel len ak uvažujeme vyplácanie dividend na akciu. Ak uvažujeme prípad americ-



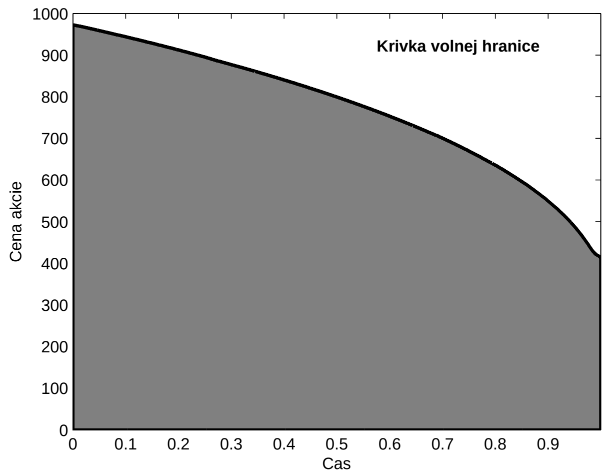
Obrázok 1: Cena americkej call opcie v závislosti od ceny akcie vyplácajúcej dividendy, v danom čase $t = 0.192$. Použité parametre $E = 300$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.8$, $q = 0.07$, $T = 1$

kej kúpnej opcie tak v prípade neplatenia dividend je jej predčasné uplatnenie nevýhodné. Viedlo by to k strate zaistenia a aj strate časovej hodnoty realizačnej ceny (pri uplatnení opcie zaplatiť za akciu cenu E teraz namiesto zaplatenia ceny E potom) V prípade americkej predajnej opcie môže byť jej uplatnenie výhodné ak zisk z časovej hodnoty realizačnej ceny (príjem hodnoty E teraz namiesto

v dobe expirácie) prevýši stratu zo zaistenej hodnoty predajnej opcie. V prípade americkej kúpnej opcie vyplácajúcej dividendy je výhodné uplatniť opciu pri dostatočne vysokých hodnotách základného aktíva.
Na obrázku (1) vidíme že krivka ceny americkej *call* opcie sa hladko napája na krivku reprezentujúcu hodnotu *call* opcie v expiračnom čase v bode kde hodnota základného aktíva je $S_f(t)$. Množina bodov $(S_f(t), t)$ kde $V(S_f(t), t) = S_f(t) - E$ pre $\forall t \in (0, T]$ je voľná hranica.

2.2.1 Voľná hranica

Na obrázku (2) môžeme vidieť že voľná hranica rozdeľuje oblasť (S, t) na dva regióny, kde v oblasti $S > S_f(t)$ je výhodné uplatniť opciu a jej hodnota je $(S - E)$. V opačnom prípade to výhodné nie je. Voľná hranica je spojitá klesajúca funkcia premennej času t.



Obrázok 2: Krivka voľnej hranice $S_f(t)$ pre call opciu na akciu vyplácajúcu spojité dividendy. Použité parametre $E = 300$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.8$, $q = 0.07$, $T = 1$

Pre americké opcie nie je žiadne analyticky odvodené riešenie, ale sú dostupné rôzne numerické metódy na rátanie približných hodnôt. Black-Scholesova rovnica pre americké opcie s využitím voľnej hranice, má spolu s podmienkou v expiračnom čase a okrajovou podmienkou nasledujúci tvar.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad 0 < t < T,\ 0 < S < S_f(t),$$

$$V(S,T) = \max(S-E,0), \quad V(0,t) = 0 \tag{2}$$

Treba ešte doplniť 2 podmienky na voľnú hranicu. Prvá popisuje hodnotu opcie keď hodnota akcie dosiahne voľnú hranicu a druhá popisuje hladké napojenie ceny opcie na voľnej hranici.

$$V(S_f(t),t) = S_f(t) - E, \quad \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = 1$$

3 Model

3.1 Predpoklady

Pripomeňme, že pri odvodzovaní modelu budeme uvažovať iba o amerických ázijských *call* opciach s plávajúcou realizačnou cenou (*floating strike call*). Ďalej uvažujeme o bezrizikovej úrokovej miere r a základné aktívum so spojitou dividendovou mierou q a volatilitou ceny základného aktíva σ a budeme uvažovať o aritmetickom priemere ceny akcie za celé obdobie života opcie. V (A.1) je zadefinovaný geometrický Brownov pohyb, ktorý využijeme v našich predpokladoch ako stochastický pohyb, ktorým sa bude riadiť cena základného aktíva

$$dS = (r-q)Sdt + \sigma S dw. \tag{3}$$

Cena opcie je funkciou ceny akcie S, času t, a premennej A čo je priemer ceny akcie za dané obdobie

$$V = V(S, A, t).$$

Použitím Itôovej lemy (A.1) dostávame, že cena opcie vyhovuje nasledujúcej stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{\partial V}{\partial A}dA + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt. \tag{4}$$

V danej rovnici vystupuje premenná dA, ktorá vyjadruje vývoj premennej A. V literatúre sa nachádzajú dva rôzne spôsoby zápisu premennej, ktorá charakterizuje tento priemer.

- Prvý spôsob zápisu tejto premennej má tvar

  $$A_t = \int_0^t S d\tau.$$

  Uvedený zápis je použitý napríklad aj v [7] str.285 kde je následne odvodený model pre ázijské opcie európskeho typu a má tvar

  $$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + S\frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0.$$

Príslušné okrajové podmienky v tomto prípade majú tvar

$$V(0, A, t) = 0, \quad \lim_{S\to\infty} \frac{\partial V}{\partial S}(S, A, t) = 1, \quad \lim_{A\to\infty} V(S, A, t) = 0, \qquad (5)$$

$$V(S, A, T) = \max(S - \frac{A}{T}, 0).$$

- Druhý spôsob zápisu tejto premennej má tvar $A_t = \frac{1}{t}\int_0^t S d\tau$, z čoho vyplývajú aj následné rozdiely v odvodzovaní modelu a vo výslednej rovnici. Zatiaľ čo v prvom prípade vývoj premennej A v čase je daný rovnicou

  $$dA = Sdt,$$

  v druhom prípade je tvar o niečo zložitejší, keďže premenná t sa vyskytuje nielen ako hranica integrálu ale vystupuje aj mimo integrálnej premennej

  $$dA = \frac{S - A}{t} dt.$$

Ďalej sa budeme zaoberať len možnosťou kde premenné A, dA nadobúdajú tvar

$$A_t = \frac{1}{t}\int_0^t S d\tau, \quad dA = \frac{S - A}{t} dt. \qquad (6)$$

Využitím rovníc (3) a (6) a ich dosadením do rovnice (4) následne dostávame

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{S - A}{t}\frac{\partial V}{\partial A} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dw. \qquad (7)$$

3.2 Samofinancovaná stratégia tvorby portfólia s nulovým rastom investícií

Postup v nasledujúcej sekcii sledujeme z [5] str.(21)-(24). Hoci uvedený postup je štandardne používaný, pre ázijské opcie nie je zvyčajne uvádzaný v detailoch. Pre pohodlie čitateľa však uvádzame detaily odvodenia.

Vytvoríme si portfólio pozostávajúce z jedného typu akcií, jedného typu opcií na tieto akcie a bezrizikových dlhopisov. Budeme uvažovat o samofinancovanej stratégii, pri ktorej nákup jednotlivých zložiek portfólia budeme financovať predajom iných zložky. Označme si Q_s počet akcií, Q_V počet opcií a B peňažný objem bezrizikových dlhopisov. Potom predpoklad nulového rastu investícií znamená, že musí platiť

$$SQ_S + VQ_V + B = 0 \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{8}$$

Podmienku samofinancovania môžeme prepísať do tvaru

$$SdQ_S + VdQ_V + \delta B = 0, \tag{9}$$

pričom $SdQ_S, VdQ_V, \delta B$ označujú zmeny počtov akcií opcií a objemu dlhopisov v portfóliu. Pre bezrizikové dlhopisy nevyplácajúce kupón platí nasledovná formula $dB = rBdt$. Pri danom zápise by zmena objemu dlhopisov bola závislá len na spojitom úročení istiny B. Keďže však dlhopisy dynamicky používame aj na samofinancovanie portfólia, je potrebné zohľadniť to. V rovnici bude vystupovať ešte jeden člen, a to získané dividendy v celkovom objeme qSQ_Sdt za čas dt. Potom celková zmena objemu dlhopisov bude

$$dB = rBdt + \delta B + qSQ_Sdt. \tag{10}$$

Diferencovaním rovnice (8), následným dosadením rovnice (10) za člen dB a využitím rovnice (9) dostávame

$$Q_SdS + Q_VdV + rBdt + qSQ_Sdt = 0.$$

Opätovným dosadením rovnice (8) za člen B dostávame

$$Q_SdS + Q_VdV - (rSQ_S + rVQ_V - qSQ_S)dt = 0.$$

Po vydelení rovnice členom Q_V dostaneme

$$dV - rVdt - \Delta(dS - rSdt + qSdt) = 0, \qquad kde \qquad \Delta = -\frac{Q_S}{Q_V}. \tag{11}$$

Teraz využijeme fakt, že cena akcie aj cena opcie vyhovujú stochastickým diferenciálnym rovniciam (3) a (7)

$$dS = (r-q)Sdt + \sigma S dw, \tag{12}$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{S-A}{t}\frac{\partial V}{\partial A}\right)dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dw. \tag{13}$$

Dosadením týchto vzťahov do rovnice (11) dostaneme po úpravách nasledujúcu rovnicu.

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{S-A}{t}\frac{\partial V}{\partial A} - rV\right)dt + \left[\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right]\sigma S dw = 0. \tag{14}$$

Cieľom investora je teraz skombinovať svoje portfólio tak aby neutralizoval riziko. Zrejme jediný rizikový člen v našej rovnici je reprezentovaný stochastickým členom dw Wienerovho náhodného procesu. Neutralizovanie vplyvu tohoto rizikového člena sa dá pomocou pomeru

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}. \tag{15}$$

Dosadením tohoto člena do vyššie uvedenej rovnice dostávame výslednú stochastickú rovnicu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-q)S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{S-A}{t}\frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0. \tag{16}$$

Rovnica je uvedená aj v článku [2] str.66, ale v upravenej forme a v tvare variačnej nerovnosti.

Počiatočná (resp. koncová) podmienka má tvar

$$V(S,A,T) = (S-A)^+, \tag{17}$$

a okrajová podmienka

$$V(0,A,t) = 0. \tag{18}$$

3.3 Rovnica pre Americké Ázijské opcie

Pre model na európske ázijske opcie by odvodený model s podmienkami boli postačujúce, ale keďže my sa budeme zaoberať americkými ázijskými opciami potrebujeme dodefinovať ešte dodatočné podmienky na voľnú hranicu, ktoré boli vysvetlené v sekcii (2.2.1)

$$V(S_f(t), A, t) = S_f(t) - A, \qquad \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), A, t) = 1. \tag{19}$$

Zhrnutím predchádzajúcich odvodení spolu so všetkými podmienkami dostávame výsledný model pre americké ázijské opcie

$$\begin{gathered}\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+(r-q)S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{S-A}{t}\frac{\partial V}{\partial A}-rV=0, \qquad 0<t<T, \quad 0<S<S_f(t),\\ V(S,A,T)=(S-A)^+, \quad \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),A,t)=1, \\ V(0,A,t)=0, \\ V(S_f(t),A,t)=S_f(t)-A.\end{gathered} \tag{20}$$

V nasledujúcej sekcii si upravíme model zmenou premenných a dosiahneme zníženie dimenzie modelu.

3.4 Redukcia dimenzie modelu

Všimnime si že rovnica (20) aj okrajové podmienky sú homogénne v premenných A a S. Túto vlastnosť môžeme využiť pri transformácii premenných a môžeme dosiahnuť zníženie rozmeru rovnice. V literatúre sa nachádzajú dva rôzne spôsoby transformácie.

- Prvá možnosť, použitá aj v literatúre [7] str.285 je zadefinovať substitúciu premenných

  $$x = \frac{S}{A}, \qquad \tau = T - t, \qquad W(x,\tau) = \frac{V(S,A,t)}{A}. \tag{21}$$

  Po transformácii a následnej úprave môžeme rovnicu preformulovať do tvaru

  $$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - (r-q)x\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{x-1}{T-\tau}\left[W - x\frac{\partial W}{\partial x}\right] + rW = 0, \tag{22}$$

$$0 < \tau < T, \quad 0 < x < \rho(\tau), \quad \rho(\tau) = x_f(T - \tau).$$

- Druhá možnosť, použitá aj v literatúre [2] str.68 je zadefinovať substitúciu premenných opačne

$$x = \frac{A}{S}, \qquad \tau = T - t, \qquad W(x,\tau) = \frac{V(S,A,t)}{S}, \tag{23}$$

čo po transformácii a po následnej úprave rovnice bude vyzerať nasledovne

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (r-q)x\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{1-x}{T-\tau}\frac{\partial W}{\partial x} + qW = 0, \tag{24}$$

$$0 < \tau < T, \quad 0 < x < \rho(\tau), \quad \rho(\tau) = x_f(T - \tau).$$

V ďalšom odvodzovaní modelu budeme uvažovať len o prvom modeli, kde si všimnime člen $W - x\frac{\partial W}{\partial x}$ ktorý bude dôležitý pre ďalší postup.
Pomocou danej zmeny premenných upravíme aj okrajové a počiatočnú podmienku, ktoré po transformácii budú vyzerať nasledovne

$$W(0,\tau) = 0, \quad W(x,0) = (x-1)^+,$$

$$W(\rho(\tau),\tau) = \rho(\tau) - 1, \quad \frac{\partial W}{\partial x}(\rho(\tau),\tau) = 1.$$

4 Transformácia modelu na pevnú oblasť

Dospeli sme k bodu kde máme odvodený model pre americký typ ázijskych opcií aj s okrajovými podmienkami. Je to jednorozmerná parabolická rovnica. Aj keby sme uvažovali len o modeli pre európsky typ ázijskych opcií, nevieme ho pretransformovať na model s konštantnými koeficientami pomocou logaritmickej substitúcie ako BS rovnicu. Keďže BS rovnica pre americké opcie nemá analytické riešenie, je pochopiteľné že ani pre americké ázijske opcie nie je k dispozícii explicitné riešenie.

V článku [1] je prezentovaný postup pre transformáciu modelu pre americké call opcie ktorý pretvára model definovaný na časovo závislom definičnom obore na model s pevne zadaným definičným oborom. Tú istú metodológiu chceme uplatniť na náš model. Postup nášho odvodenia bude založený práve na [1] strany 26 až 28.

Zameriame sa len na prípad keď $r > q > 0$. Pretransformovaním modelu dostaneme problém ktorý sa dá zredukovať na riešenie problému voľnej hranice $\rho(\tau) = x_f(T-\tau)$.

Využijeme myšlienku syntetického portfólia pozostávajúceho z jednej opcie v dlhej pozícii a množstva $\frac{\partial W}{\partial x}$ základného aktíva na zavedenie novej premennej

$$\Pi(\xi,\tau) = W(x,\tau) - x\frac{\partial W}{\partial x}. \tag{25}$$

Zavedieme transformáciu premenných

$$\xi = \ln\left(\frac{\rho(\tau)}{x}\right) \quad 0 < \tau < T, \quad 0 < \xi < \infty. \tag{26}$$

Vidíme že pre $x \in (0, x_f(t))$ platí $\xi \in (0,\infty)$.

Použitím zadefinovaných transformácií si vieme odvodiť nasledujúce rovnice ktoré budú použité pri preformulovaní modelu

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = x^2\frac{\partial^2 W}{\partial^2 x}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} = -x^3\frac{\partial^3 W}{\partial^3 x}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\tau} + \frac{\dot\rho}{\rho}\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} = \frac{\partial W}{\partial\tau} - x\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial\tau}. \tag{29}$$

Za predpokladu že $W(x,\tau)$ je dostatočne hladké riešenie rovnice (22), môžeme parciálne derivovať rovnicu (22) podľa premennej x a následne ju prenásobiť premennou x. Výsledok odpočítame od pôvodnej rovnice (22) a dostávame

$$\frac{\partial W}{\partial\tau} - x\frac{\partial^2 W}{\partial\tau\partial x} + (r-q)x^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{x-1}{T-\tau}(x^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}) + \frac{\sigma^2}{2}x^3\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}$$

$$+\frac{1}{T-\tau}\left[W - x\frac{\partial W}{\partial x}\right] + r\left[W - x\frac{\partial W}{\partial x}\right] = 0, \tag{30}$$

kde po dosadení rovníc (27)-(29) dostaneme žiadanú rovnicu

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\tau} + a(\xi,\tau)\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\Pi}{\partial\xi^2} + \left[r + \frac{1}{T-\tau}\right]\Pi = 0, \tag{31}$$

s koeficientom závislým od času a od premennej ξ

$$a(\xi,\tau) = \frac{\dot\rho(\tau)}{\rho(\tau)} + (r-q) - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\rho e^{-\xi} - 1}{T-\tau}. \tag{32}$$

Po pretransformovaní základnej rovnice, nám zostáva ešte upraviť okrajové podmienky. Využitím rovníc $W(\rho(\tau),\tau) = \rho(\tau) - 1$, a $\frac{\partial W}{\partial x}(\rho(\tau),\tau) = 1$ a použitím transformácie premennej ξ dostaneme

- ak $\xi = 0$ potom $x = \rho(\tau)$, a následným dosadením do rovnice syntetického portfólia dostaneme

$$\Pi(0,\tau) = -1, \tag{33}$$

- ak $\xi = \infty$ potom $x = 0$, a následným dosadením do rovnice syntetického portfólia dostaneme

$$\Pi(\infty,\tau) = 0. \tag{34}$$

Následne potrebujeme opäť pomocou (26) odvodiť podmienku pre $\Pi(\xi, 0)$. Keďže $\tau = 0$ tak v rovnici (25) bude vystupovať práve $W(x, 0) = (x-1)^+$, z čoho vyplýva, že musíme uvažovať o dvoch rôznych prípadoch:

- ak $x < 1$ z čoho použitím (26) dostávame že $\xi > \ln \rho(0)$. Keďže $W(x, 0) = 0$ tak pomocou (25) dostávame
$$\Pi(\xi, 0) = 0 \tag{35}$$
- ak $x > 1$ čo použitím (26) znamená že $\xi < \ln \rho(0)$. Keďže pre $x > 1, \ \tau = 0$ nadobúda funkcia $W(x, \tau) = \max(x-1, 0)$ hodnotu $W(x, 0) = x - 1$ tak funkcia $\frac{\partial W}{\partial x}(x, 0) = 1$ z čoho jednoduchým dosadením do (25) dostávame
$$\Pi(\xi, 0) = -1 \tag{36}$$

Prepísané do konzistentného tvaru, podmienka má nasledovný tvar

$$\Pi(\xi, 0) = \begin{cases} -1 & \xi < \ln \rho(0) \\ 0 & \xi > \ln \rho(0). \end{cases}$$

Vzťah medzi voľnou hranicou a riešením Π

Keďže funkcia $\rho(0)$ vystupuje v počiatočnej podmienke $\Pi(\xi, 0)$, najprv musíme skúmať vzťah medzi riešením $\Pi(\xi, \tau)$ a funkciou $\rho(\tau)$. Využitím okrajovej podmienky $W(\rho(\tau), \tau) = \rho(\tau) - 1$, z ktorej po derivovaní podľa premennej τ dostaneme

$$\frac{d}{d\tau}\rho(\tau) = \frac{\partial W}{\partial x}(\rho(\tau), \tau)\frac{d}{d\tau}\rho(\tau) + \frac{\partial W}{\partial \tau}(\rho(\tau), \tau). \tag{37}$$

Dosadením rovnice $\frac{\partial W}{\partial x}(\rho(\tau), \tau) = 1$ do predchádzajúceho odvodenia dostávame že musí platiť rovnosť

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}(\rho(\tau), \tau) = 0. \tag{38}$$

Za predpokladu regularity funkcie Π a Π_x v bode $x = 0$ a použitím transformácie môžeme ľahko odvodiť

$$x^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(x,\tau) \to \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}(0,\tau), \quad x\frac{\partial W}{\partial x}(x,\tau) \to \rho(\tau) \qquad pre \quad x \to \rho(\tau). \tag{39}$$

Ak zoberieme do úvahy rovnice (38)-(39) a za predpokladu $\frac{\partial W}{\partial \tau}(x,\tau) \to \frac{\partial W}{\partial \tau}(\rho(\tau),\tau) = 0$ pre $x \to \rho(\tau)^-$ tak potom z rovnice (22) môžeme odvodiť nasledujúce

$$\lim_{x\to\rho(\tau)^-}\left(\frac{\partial W}{\partial \tau} - (r-q)x\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}x^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{x-1}{T-\tau}\left[W - x\frac{\partial W}{\partial x}\right] + rW\right)$$

$$= -(r-q)\rho(\tau) - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}(0,\tau) + \frac{\rho(\tau)-1}{T-\tau} + r[\rho(\tau)-1] = 0. \tag{40}$$

Úpravou danej rovnosti nám vychádza rovnica pre koeficient $\rho(\tau)$

$$\rho(\tau) = \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}(0,\tau) + \frac{1}{T-\tau}}{q + \frac{1}{T-\tau}}. \tag{41}$$

Zostáva nám určiť počiatočný stav voľnej hranice $\rho(0)$. Predpokladáme, že riešenie Π je hladkou funkciou ξ na hranici $\xi = 0$, pre $\tau \to 0^+$. Presnejšie zapísané

$$\lim_{\tau\to 0^+}\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}(0,\tau) = \lim_{\tau\to 0^+,\xi\to 0^+}\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}(\xi,\tau) = \lim_{\xi\to 0^+}\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}(\xi,0) = 0,$$

pretože $\Pi(\xi,0) = -1$ pre ξ blízke 0^+. Následne dostávame

$$\rho(0) = \frac{r + \frac{1}{T}}{q + \frac{1}{T}} = \frac{1+rT}{1+qT}.$$

Všimnime si, že rovnaký výsledok sa uvádza aj v článku [2] str.69. Pre upresnenie, v danom článku dospeli k hodnote

$$\rho(0^+) = \min\left(\frac{1+qT}{1+rT}, 1\right),$$

Keďže pri transformácii modelu v článku [2] bola použitá recipročná transformácia pre premennú $x = \frac{A}{S}$, tak výsledná premenná je obrátená. V našom modeli nie je potrebné použiť funkciu minima keďže už na začiatku sme si zadefinovali že uvažujeme s modelom kde $r > q > 0$ a z toho dostávame že premenná $\frac{1+qT}{1+rT} < 1$ a teda $\rho(0^+) = \frac{1+qT}{1+rT}$.

4.1 Nelineárna nelokálna parabolická rovnica

Ukázali sme, že za vhodných predpokladov regularity funkcie môže byť problém voľnej hranice transformovaný na problém PDR s počiatočnou hodnotou hranice

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} + a(\xi,\tau)\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} + \left(r + \frac{1}{T-\tau}\right)\Pi = 0, \quad 0 < \tau < T, \quad \xi > 0, \quad (42)$$

$$\Pi(0,\tau) = -1, \qquad \Pi(\infty,\tau) = 0, \quad (43)$$

$$\Pi(\xi,0) = \begin{cases} -1 & \xi < \ln\rho(0) \\ 0 & \xi > \ln\rho(0), \end{cases}$$

$$a(\xi,\tau) = \frac{\dot\rho(\tau)}{\rho(\tau)} + (r-q) - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\rho e^{-\xi} - 1}{T-\tau},$$

$$\rho(\tau) = \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}(0,\tau) + \frac{1}{T-\tau}}{q + \frac{1}{T-\tau}}, \qquad \rho(0) = \frac{r + \frac{1}{T}}{q + \frac{1}{T}}. \quad (44)$$

Úloha (42) spolu s (44) je nelineárna nelokálna parabolická rovnica.

Poznamenajme že v prípade keby sme uvažovali $T = \infty$ vystupujúcej v rovniciach (42)-(44) (v princípe by sme uvažovali dve premenné $T, \quad T^*$, jedna vystupujúca v rovniciach, a jedna ako oblasť na ktorej je rovnica zadefinovaná) tak by všetky členy obsahujúce premennú $\frac{1}{T}$ boli nulové a systém rovníc (42)-(44) by bol rovnaký ako v prípade amerických *call* opcií [1]. Jediný rozdiel je len v premennej E ktorá v našom modeli nie je keďže uvažujeme inú *payoff* funkciu a je nahradená 1.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} + a(\tau)\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} + r\Pi = 0, \quad 0 < \tau < T^*, \quad \xi > 0, \quad (45)$$

$$\Pi(0,\tau) = -E, \qquad \Pi(\infty,\tau) = 0, \quad (46)$$

$$\Pi(\xi,0) = \begin{cases} -E & \xi < \ln\rho(0) \\ 0 & \xi > \ln\rho(0), \end{cases}$$

$$a(\tau) = \frac{\dot{\rho}(\tau)}{\rho(\tau)} + (r-q) - \frac{\sigma^2}{2},$$

$$\rho(\tau) = \frac{rE + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}(0,\tau)}{q}, \qquad \rho(0) = \frac{rE}{q}. \tag{47}$$

4.2 Spätná transformácia

Rovnicu na ocenenie Amerických Ázijských opcií založenej na riešení ρ dostaneme pomocou spätnej transformácie premenných. Budeme vychádzať z rovnice (25) z ktorej dostávame tvar

$$-x^2\Pi(\xi,\tau) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{W(x,\tau)}{x}\right). \tag{48}$$

Integrovaním na hranici $x \to \rho(\tau)$ dostávame

$$\frac{\rho(\tau)-1}{\rho(\tau)} - \frac{W(x,\tau)}{x} = -\int_x^{\rho(\tau)} x^{-2}\Pi(\xi,\tau)dx, \tag{49}$$

kde úpravou a substitúciou $x = e^{-\xi}\rho(\tau)$ dostávame

$$W(x,\tau) = \frac{1}{\rho(\tau)}\left[\rho(\tau) - 1 + \int_0^{\ln(\frac{\rho(\tau)}{x})} e^{\xi}\Pi(\xi,\tau)d\xi\right]. \tag{50}$$

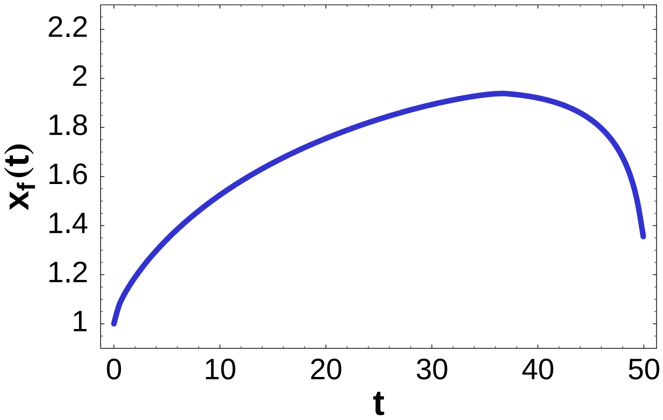
Využitím transformácie dostávame výsledný tvar

$$V(S,A,T-\tau) = \frac{A}{\rho(\tau)}\left(\rho(\tau) - 1 + \int_0^{\ln(\frac{A\rho(\tau)}{S})} e^{\xi}\Pi(\xi,\tau)d\xi\right). \tag{51}$$

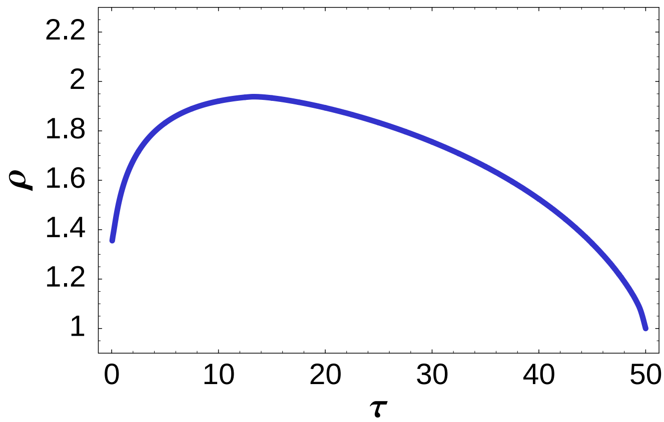
5 Numerické výsledky

Na výpočet voľnej hranice sme použili upravenú numerickú metódu z článku [10] ktorá je bližšie popísaná v článku [6].

Grafy (3) a (4) zobrazujú funkciu voľnej hranice v závislosti od času t a následne od $\tau = T - t$

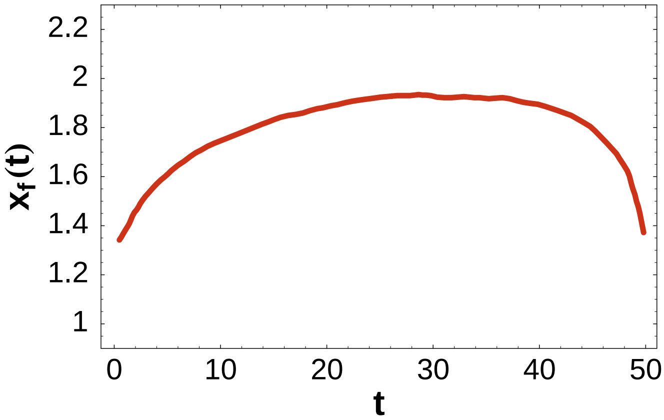


Obrázok 3: Krivka voľnej hranice $x_f(t)$ pre Americkú Ázijskú *floating strike call* opciu. Použité parametre $r = 0.06$, $\sigma = 0.2$, $q = 0.04$, $T = 50$ $n = 100$ počet priestorových bodov, $m = 20,000,000$ počet časových rezov

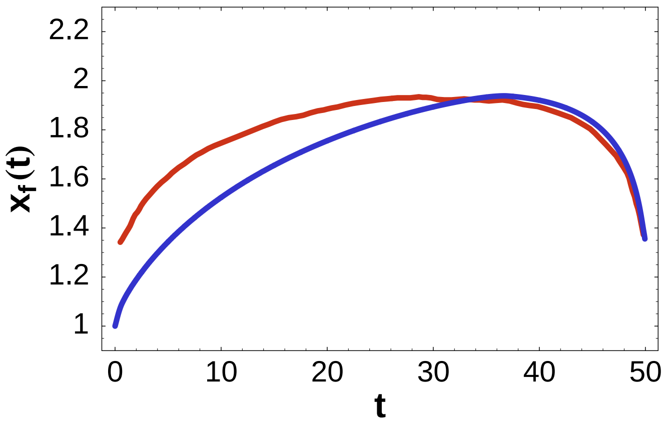


Obrázok 4: Krivka voľnej hranice $\rho(\tau)$ pre Americkú Ázijskú *floating strike call* opciu. Použité parametre $r = 0.06$, $\sigma = 0.2$, $q = 0.04$, $T = 50$ $n = 100$ počet priestorových bodov, $m = 20,000,000$ počet časových rezov

Na obrázku (5) je zobrazená obrátená hodnota voľnej hranice z článku [13]. Je to z dôvodu porovnania výsledkov, keďže v danom článku bola použitá opačná transformácia $x = \frac{A}{S}$ namiesto našej $x = \frac{S}{A}$.



Obrázok 5: Krivka voľnej hranice pre Americkú Ázijskú *floating strike call* opciu z článku [13]. Použité parametre: $r = 0.06$, $\sigma = 0.2$, $q = 0.04$, $T = 50$.



Obrázok 6: Porovnanie výsledkov

Na obrázku (6) je zobrazené porovnanie nášho výpočtu voľnej hranice s výsledkami z článku [13]. Ako si môžeme všimnúť krivky sú veľmi podobné pre časový úsek $t \in (30, 50)$, ale pre $t \to 0^+$ sa začínajú značne líšiť. Z rovnice (44) však za predpokladu že člen $\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}(0, \tau)$ vystupujúci v rovnici (44) je ohraničený, alebo rastie pomalšie ako člen $\frac{1}{T-\tau}$ pre $\tau \to T$ dostávame

$$\lim_{\tau \to T} \rho(\tau) = x_f(T-\tau) = \frac{r + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial \Pi}{\partial\ \xi}(0,\tau) + \frac{1}{T-\tau}}{q + \frac{1}{T-\tau}} = 1,$$

a z toho keďže $t = T - \tau$ vychádza

$$x_f(0^+) = 1.$$

6 Záver

V tejto práci sme sa zaoberali oceňovaním amerického typu ázijských *floating strike call* opciíí a ich optimálneho uplatnenia v čase. Použili sme upravenú BS rovnicu pre Americké Ázijské opcie, ktorú sme najprv transformovali na jednorozmernú parabolickú rovnicu. Rovnicu ktorá je definovaná na časovo závislom definičnom obore sme následne pretransformovali na model s pevným definičným oborom. Pri zmene premenných sme využili myšlienku syntetického portfólia, čím sme dostali nelineárnu nelokálnu parabolickú rovnicu. Ďalej bol numericky riešený tvar voľnej hranice [6] pomocou ktorej je zadefinované riešenie v rovnici (51). Numerické výsledky a tvar voľnej hranice sú prezentované a porovnané s výsledkami z práce [13].

A Stochastický kalkulus

Keďže pri odvádzaní BS modelu sú potrebné znalosti stochastického kalkulu, v nasledujúcej sekcii si pripomenieme niektoré definície a vety potrebné pri postupe použitom pri našich odvodeniach. Definície a vety boli čerpané z [5] str.17.

A.1 Brownov pohyb

Definícia A.1 (Brownov pohyb) *Brownov pohyb $X(t), t \geq 0$ je t-parametrický systém náhodných veličín, pričom*

- *všetky prírastky $X(t+\delta) - X(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a varianciou $\sigma^2\Delta$*
- *pre každé delenie $0 < t_1 < t_2 ... < t_n$ sú prírastky $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2) ... X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé náhodné premenné so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a varianciou $\sigma^2\Delta$*
- *$X(0) = 0$ a vzorky ciest $X(t)$ sú spojité v premennej $t \geq 0$*

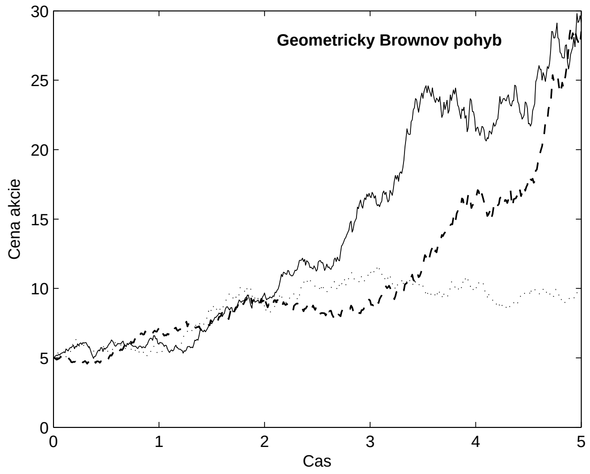
Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0$ a varianciou $\sigma^2 = 1$ nazývame Wienerov proces.

Definícia A.2 (Geometrický Brownov pohyb) *Ak $X(t), t \geq 0$ je Brownov pohyb s parametrami μ, σ a $y_0 \in \mathbb{R}$ tak systém náhodných premenných $Y(t), t \geq 0$*

$$Y(t) = y_0 e^{X(t)}, t \geq 0$$

nazývame geometrický Brownov pohyb.

Geometrický Brownov pohyb sa často využíva na modelovanie vývoja cien akcií (výnosy cien akcií sa modelujú ako nezávislé normálne rozdelené) ako aj úrokov, miezd a iných ekonomických a finančných veličín. Brownov pohyb sa vo všeobecnosti vzďaluje od svojej počiatočnej hodnoty, čo môže byť pre niektoré ekonomické veličiny výhodné pre iné nevýhodné.



Obrázok 7: Geometricky Brownov pohyb

A.2 Itôova lema

Lema A.1 (Itôova lema) *Nech $f(x,t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice $dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dw$, kde w je Wienerov proces.Potom prvý diferenciál funkcie $f(x,t)$ je daný vzťahom*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt \tag{52}$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}dw \tag{53}$$

Referencie

[1] ŠEVČOVIČ D., *Analysis of the free boundary for the pricing of an American call option*, Euro. Jnl of Applied Mathematics (2001), Vol. 12, 25-37.

[2] DAI M., KWOK Y.K., *Characterization of optimal stopping regions of american asian and loockback options*, Mathematical Finance, 2006, Vol. 16, 63-82

[3] LASSERRE J. B., PRIETO-RUMEAU T., ZERVOS M., *Pricing a class of exotic options via moments and sdp relaxations.*, Mathematical Finance, 2006, Vol. 16, 469-494

[4] MELICHERČÍK I., OLŠAKOVÁ L., ÚRADNÍČEK V., *Kapitoly z finančnej matematiky*, Bratislava, Epos, 2005

[5] ŠEVČOVIČ D., *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Bratislava, 2001

[6] ŠEVČOVIČ D., *Transformation methods for evaluating approximations to the optimal exercise boundary for a linear and nonlinear Black-Scholes equation.*, Nonlinear Models in Mathematical Finance New Research Trends in Option Pricing Matthias Ehrhardt (ed.) Nova Science Publishers, Inc., 2008.

[7] KWOK Y.K., *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer-Verlag Singapore, 1998

[8] BLACK F., SCHOLES M., *The pricing of options and corporate liabilities.*, J. Political Economy, 1973, Vol. 81, 637-654

[9] BUCHEN P., KONSTANDATOS O., *A new method of pricing lookback options.*, Mathematical Finance, 2005, Vol. 15, 245-259

[10] ŠEVČOVIČ D., *An iterative algorithm for evaluating aproximations to the optimal exercise boundary for a nonlinear Black-Scholes equation.*, Canadian Applied Mathematics Quaterly, 2007, Vol. 15, No. 1

[11] D'HALLUIN Y., FORSYTH P. A., Labahn G., *A Semi-Lagrangian Approach for American Asian Options under Jump Diffusion.*, SIAM Journal on Scientific Computing, 2005, Vol. 27, 315-345

[12] ZHANG J. E., *A semi-analytical method for pricing and hedging continously sampled arithmetic average rate options.*, Journal of Computational Finance, 2001, Vol. 5, 59-79.

[13] DAI M., KWOK Y.K., *Characterization of optimal stopping regions of american asian and loockback options*, *working paper* `http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=603744`

[14] WU L. X., KWOK Y. K., and YU H. *Asian Options with the American Early Exercise Feature.*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 1999, Vol. 2, 101–111.

[15] HANSEN, A. T., and P. L. JORGENSEN *Analytical Valuation of American-Style Asian Options.*, Management Science, 2000, Vol. 46, 1116-1136.

[16] BEN-AMEUR H., BRETON M., L'ECUYER P. *A Dynamic Programming Procedure for Pricing American-Style Asian Options.*, Management Science, 2002, Vol. 5, 625-643..

[17] WU, R., and M. C. FU *Optimal Exercise Policies and Simulation-Based Valuation for American-Asian Options.*, Operation Research, 2003, Vol. 51, 52–66.

[18] PAROTT, K., and N. CLARKE A Parallel Solution of Early Exercise Asian Options with Stochastic Volatility, in Proceedings of the Eleventh Domain Decomposition Conference. Greenwich.