

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO
v Bratislave

DEA modely a meranie eko-efektívnosti

DEA MODELY A MERANIE EKO-EFEKTÍVNOSTI

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Veronika Lennerová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Bratislava 2008

Prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracovala samostatne pod vedením
vedúceho diplomovej práce a uviedla som všetku použitú literatúru.

.....
Veronika Lennerová

Touto cestou by som chcela poďakovať vedúcej diplomovej práce, Doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc., za inšpiráciu, pomoc a poskytovanie cenných rád počas vypracovania tejto práce. Taktiež vďaka patrí mojim rodičom za podporu a trpezlivosť počas štúdia.

ABSTRAKT

LENNEROVÁ, Veronika: *DEA modely a meranie eko-efektívnosti* [Diplomová práca].- Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.- Školiteľ: Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.- Bratislava: FMFI UK, 2008.

Diplomová práca sa zaoberá meraním efektívnosti organizačných jednotiek v danej skupine pomocou DEA (*Data Envelopment Analysis*) modelov. V práci sú vysvetlené základné pojmy problematiky, stručný prehľad najčastejšie používaných modelov a vysvetlenie pojmu eko-efektívnosť. Hlbšie sa venujeme *Slacks Based Measure (SBM)* modelu. Uvádzame modifikáciu základných DEA modelov a SBM modelu, ktorá umožňuje merať eko-efektívnosť. Takto upravený SBM model je v práci aplikovaný na francúzske cementárne. Diskutujeme možnosti použitia výsledkov takejto analýzy eko-efektívnosti na spravodlivejšie rozdeľovanie emisových kvót.

Kľúčové slová: efektívnosť, Data Envelopment Analysis (DEA), Slacks Based Measure (SBM) model, eko-efektívnosť.

Obsah

Úvod	4
1 Úvod do DEA modelov	5
1.1 Data Envelopment Analysis (DEA)	5
1.2 Pojem efektívnosti	5
2 Ilustračné príklady	6
2.1 Jeden vstup a jeden výstup	6
2.1.1 Konštantné výnosy z rozsahu	6
2.1.2 Variabilné výnosy z rozsahu	8
2.2 Dva vstupy a jeden výstup	10
3 Základné modely	13
3.1 Koncepčný model	14
3.2 CCR model	14
3.3 BCC model	21
3.4 Aditívny model s váhami	23
3.5 SBM model	25
3.6 Zhrnutie vlastností modelov	28
4 DEA modely a eko-efektívnosť	30
4.1 Prehľad prác o meraní eko-efektívnosti	30
4.2 Základné modely a meranie eko-efektívnosti	30
4.3 Aditívny model s váhami pre neželateľné výstupy	36
4.4 SBM model a neželateľné výstupy	37
5 Eko-efektívnosť	41
5.1 Kjótsky protokol	41
5.2 Obchodovanie s emisiami CO_2	41
6 Hodnotenie efektivity francúzskych cementární	43
6.1 Výber modelu	43
6.2 Dáta. Výber vstupov a výstupov	43
6.3 Pribeh výpočtu a vyhodnotenie výsledkov	46
7 Záver	54

ÚVOD

Teória *Data Envelopment Analysis* (DEA) vznikla v sedemdesiatych rokoch minulého storočia. Bola vybudovaná na myšlienke článku „Measuring efficiency of decision making units“ od Farrella z roku 1957. Základnou úlohou DEA modelov je navzájom porovnať organizačné jednotky v rámci nejakej skupiny. Ide o metódu založenú na využití lineárneho programovania, ktorá bola pôvodne vyvinutá na meranie efektívnosti neziskových organizácií ako sú školy, nemocnice, štátna a verejná správa. Neskôr sa jej používanie rozšírilo na rôzne podniky, služby, bankový sektor, ako aj na meranie výkonností národných ekonomík. Na rozlíšenie efektívnych a neefektívnych organizačných jednotiek existuje veľa rozličných DEA modelov. V poslednom období najmä v priemyselných odvetviach začali počítať obmedzenie enviromentálnych zdrojov. Preto je potrebné do základných modelov zahrnúť aj enviromentálne hľadiská. Na správne vyhodnotenie efektívnosti organizačných jednotiek nestačí sledovať iba želateľný výstup jednotky, ale aj neželateľné výstupy ako sú napríklad emisie.

Hlavným cieľom diplomovej práce je poskytnúť teoretický prehľad základných DEA modelov a poukázať na ich úpravu v prípade neželateľných výstupov, ako sú emisie a odpad. Bližšie sa zameriavame na *tzv. SBM model*, pomocou ktorého vyhodnocujeme eko-efektívnosť na konkrétnych dátach z environmentalistiky.

Prvá kapitola stručne vysvetľuje základný pojem efektivity. V ďalšej časti diplomovej práci sú znázornené jednoduché ilustračné príklady, ktoré sú geometricky interpretované. Poskytujú základný princíp merania efektivity organizačných jednotiek a akými spôsobmi z neefektívnej organizačnej jednotky môžeme vyrobiť efektívnu jednotku. Tretia kapitola sa zaoberá detailnejšie základnými DEA modelmi (CCR, BCC, aditívny a SBM model). Poukazuje na výhody a nevýhody modelov, stručne vysvetlíme invariantnosť modelov, ktorá je hlbšie analyzovaná v [11]. Kapitoly 1 - 3 boli prevažne spracované podľa [3, 8]. V štvrtej a piatej kapitole sa venujeme modifikácií základných modelov na riešenie úloh s neželateľnými výstupmi, ide o meranie *tzv. eko-efektívnosti*. Základným teoretickým východiskom bola literatúra [2, 5, 9, 12]. Záverečná kapitola je praktická aplikácia SBM modelu na určenie eko-efektívnosti francúzskych cementární. Výsledky sú zhrnuté v závere diplomovej práce.

1 Úvod do DEA modelov

1.1 Data Envelopment Analysis (DEA)

DEA metóda patrí medzi významné prostriedky ekonomického manažmentu. Umožňuje vyhodnotiť efektívnosť jednotlivých producentov v rámci danej skupiny. V porovnaní so štatistickými a inými metódami DEA metóda je pomerne nová neparametrická metóda, ktorá je jedným z možných prístupov hodnotenia efektívnosti, výkonnosti či produktivity homogénnych produkčných jednotiek. Pod homogénnosťou produkčných jednotiek budeme rozumieť, že jednotky sa zaoberajú produkciou identických alebo ekvivalentných výstupov a na túto produkciu spotrebúvajú identické alebo ekvivalentné vstupy. DEA umožňuje individuálne hodnotenie efektívnosti jednotlivých produkčných jednotiek vzhľadom k celému súboru jednotiek, čo patrí medzi najväčšie výhody. Okrem rozdelenia jednotiek na efektívne a neefektívne je možné pre neefektívne organizačné jednotky identifikovať zdroj neefektívnosti a určiť tak spôsob, akým môže jednotka dosiahnuť hranicu efektívnosti prostredníctvom redukcie resp. navýšenia vstupov či výstupov. DEA metódy majú široké aplikácie napr. v štátnej správe, zdravotníctve, školstve, bankovníctve, vo firmách atď.

1.2 Pojem efektívnosti

Základným cieľom DEA metódy je porovnávať produktivitu podnikov resp. organizačných jednotiek, ktoré označujeme ako *DMU* (skratka anglického výrazu *Decision Making Unit*). Každá *DMU* používa na svoju činnosť určitý počet vstupov a výsledkom činnosti sú určité výstupy. Vstupy sú také veličiny, ktoré sa pri danej činnosti spotrebúvajú a výstupy predstavujú výsledné produkty. Vo všeobecnosti preferujeme menšie hodnoty vstupov a väčšie hodnoty výstupov.

Efektívnosť *DMU* v najjednoduchšom prípade (jeden vstup a jeden výstup) je možné definovať príslušným pomerným ukazovateľom:

$$efektivita = \frac{výstup}{vstup}.$$

V reálnych situáciach je často potrebné uvažovať viacero vstupov ako aj výstupov. Nastáva otázka, ako merať efektívnosť v takomto prípade. Riešením je dosadiť do predchádzajúceho vzorca za výstupy vážený súčet výstupov a za vstupy vážený súčet vstupov. Z hľadiska výpočtu by bolo najjednoduchšie stanoviť pevné váhy pre vstupy a výstupy. Toto však môže byť nespravodlivé voči niektorým *DMU*, pretože každá z nich môže preferovať iné vstupy a výstupy. Teraz sa naskytla otázka, ako vhodne voliť váhy pre jednotlivé vstupy a výstupy.

V nasledujúcej časti uvedieme ilustračné príklady a v ďalšej kapitole si ukážeme ako môžeme vypočítať optimálne váhy pre jednotlivé vstupy a výstupy pomocou riešenia úlohy lineárneho programovania.

2 Ilustračné príklady

Na začiatok ako motiváciu si uvedieme jednoduché príklady, ktoré je možné geometricky interpretovať. Ku grafickej interpretácii máme k dispozícii len dvoj-rozmerný priestor, a preto sa obmedzíme na úlohy s malým počtom vstupných a výstupných premenných.

2.1 Jeden vstup a jeden výstup

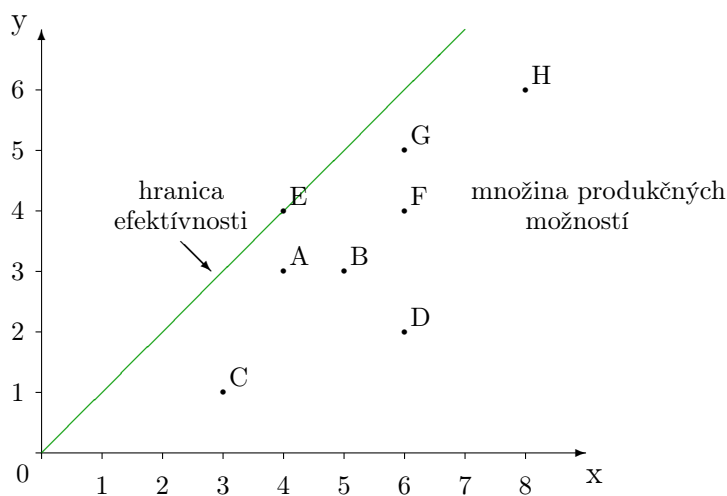
V nasledujúcich častiach si ukážeme rozdiel pri použití predpokladu konštantných a variabilných výnosov z rozsahu. Poukážeme na zmeny pri hranici efektívnosti ako aj množiny produkčných možností.

2.1.1 Konštantné výnosy z rozsahu

Potrebuje analyzovať 8 firiem, ktoré zamestnávajú pracovníkov a produkujú rovnaký typ výrobkov. Údaje sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

<i>DMU</i>	A	B	C	D	E	F	G	H
Pracovník x	4	5	3	6	4	6	6	8
Výrobok y	3	3	1	2	4	4	5	6
Podiel y/x	0,75	0,6	0,33	0,33	1	0,66	0,83	0,75
Miera efektivity	75%	60%	33%	33%	100%	66%	83%	75%

V predposlednom riadku tabuľky je uvedený podiel výstupov a vstupov jednotlivých firiem. Toto číslo nám vyjadruje efektivitu rozhodovacej jednotky a platí, čím je táto hodnota vyššia tým je na tom firma lepšie. Všetky *DMU* sú zobrazené na nasledujúcom obrázku, kde na osi x sú použité vstupy a na osi y výstupy. Taktiež na Obr.1 je znázornená hranica efektívnosti (ako polpriamka OE) a množina produkčných možností (ako oblasť medzi hranicou efektívnosti a kladnou časťou x -ovej osi), ktoré si vysvetlíme v nasledujúcej kapitole.



Obr. 1

Všimnime si, že hranica efektívnosti sa dotýka minimálne jedného bodu a ostatné body sú na alebo pod touto hranicou. Hovoríme, že body sú obalené v množine produkčných možností (v anglickej literatúre *Production Possibility Set*). Názov *Data Envelopment Analysis* vychádza práve z tejto vlastnosti pretože v matematickom jazyku sa hovorí, že hranica obaluje tieto body t.j. tvorí obal dát.

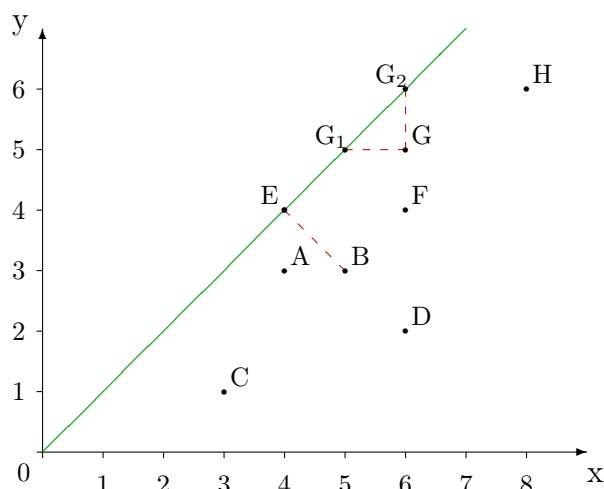
Z Obr.1 a dát je vidieť, že firma E má najväčšiu efektívnosť a leží na hranici efektívnosti. Z tohto môžeme usúdiť, že firma E je efektívna a ostatné firmy sú neefektívne. To znamená, že neefektívne organizačné jednotky sa musia polepšiť, aby sa dostali na hranicu efektívnosti. Teraz sa bližšie pozrieme na riešenie problému, ako z neefektívnej jednotky môžeme urobiť efektívnu organizačnú jednotku.

Existujú tri spôsoby ako to dosiahneme:

- zvýšením hodnoty výstupu pri zachovaní súčasnej úrovni vstupu;
- znížením hodnoty spotrebovaného vstupu pri zachovaní súčasnej úrovni výstupu;
- kombinovaním obidvoch predchádzajúcich možností.

Teraz si tieto možnosti vysvetlíme teoreticky a neskôr aplikujeme graficky na našom príklade. Podrobnejšie si rozoberieme neefektívnu organizačnú jednotku G. Firma G sa môže stať efektívnou, ak znížime hodnoty jednotlivých vstupov (v našom prípade počet pracovníkov) na 5 pri nezmenených výstupoch. Ďalšia možnosť posunutia jednotky na hranicu efektívnosti je zvýšenie výstupov z hodnoty 5 na hodnotu 6 pri nezmenených vstupoch. Môžeme to jednoducho geometricky interpretovať. Stačí, ak túto jednotku premietneme na hranicu efektívnosti a takto dostaneme *efektívnu jednotku*, ktorú označíme ako G_1 pri redukcii vstupov pri ponechaní hodnôt výstupov a G_2 pri zvýšení výstupov pri ponechaní hodnôt vstupov.

Ako sme už spomínali okrem zníženia vstupov a zvýšenia výstupov môžeme zvoliť aj postup, v ktorom znížime počet pracovníkov a súčasne zvýšime počet výrobkov. Ukážeme si to na neefektívnej organizačnej jednotke B. Na to, aby sa firma B dostala na efektívnu hranicu (do bodu E) stačí znížiť vstupy o jednotku a zvýšiť výstupy o jednotku. Vyššie opísané situácie sú znázornené na Obr.2.



Obr. 2

Teraz si popíšeme stručne situáciu, ak by podiel výstupov a vstupov pre nejakú organizačnú jednotku nadobudol väčšiu alebo menšiu hodnotu ako 1. Ukážeme si to na nasledujúcom príklade. Budeme uvažovať 8 firiem ako v predchádzajúcej úlohe:

<i>DMU</i>	A	B	C	D	E	F	G	H
Pracovník x	3	5	7	4	3	4	3	5
Výrobky y	4	2	3	6	3	1	2	3
Podiel y/x	1,33	0,4	0,43	1,5	1	0,25	0,67	0,6
Miera efektivity	133%	40%	43%	150%	100%	25%	67%	60%

Hodnota efektivity riešená pomocou DEA analýzy je ohraničená zhora 1. V prípade jedného vstupu a jedného výstupu vieme úlohu vyriešiť nasledovne: pretransformujeme podiely vstupov a výstupov na hodnoty efektivity t.j. aby efektívna firma mala hodnotu efektivity 1 a neefektívne hodnoty menšie ako 1. Spravíme to tak, že najvyššiu hodnotu položíme 1 a ostatné úmerne zmenšíme (vydelíme jednotlivé hodnoty efektivity tou najvyššiou hodnotou efektivity) t.j. mieru efektívnosti získame nasledovným podielom:

$$0 < \frac{\text{hodnota podielu } y/x \text{ príslušného } DMU}{\text{hodnota podielu } y/x \text{ jednotky D}} \leq 1 .$$

Pretože z predchádzajúcej tabuľky bolo vidieť, že hodnota podielu y/x je najvyššia pre organizačnú jednotku D, tak sme hodnoty príslušných podielov y/x predelili práve touto hodnotou.

<i>DMU</i>	A	B	C	D	E	F	G	H
Pracovník x	3	5	7	4	3	4	3	5
Výrobky y	4	2	3	6	3	1	2	3
Podiel y/x	1,33	0,4	0,43	1,5	1	0,25	0,67	0,6
Efektivita	0,887	0,267	0,287	1	0,66	0,167	0,447	0,4

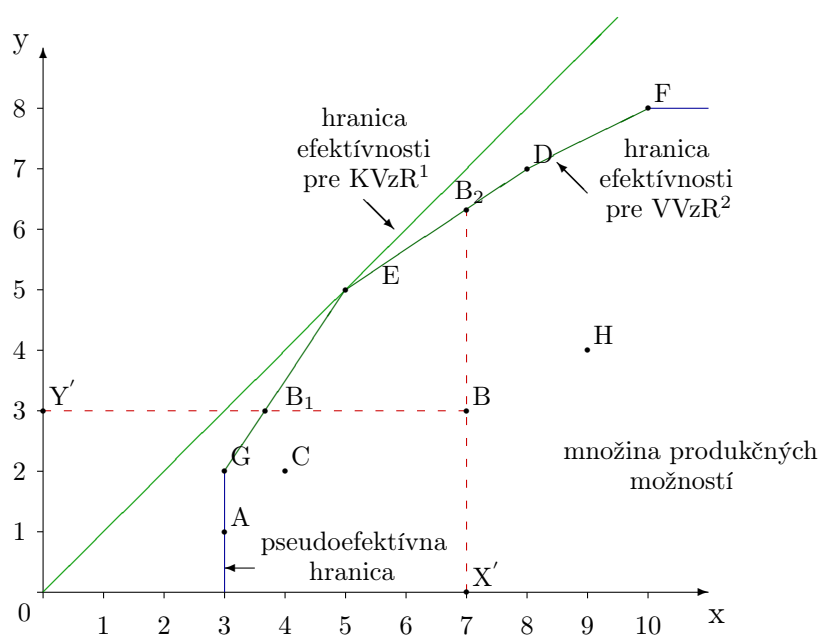
Tieto hodnoty nazývame ako *relatívna miera efektívnosti*. Relatívna preto, že jej hodnota závisí na celom súbore jednotiek. Ak pridáme do súboru novú rozhodovaciu jednotku, ktorá zmení efektívnu hranicu, zmenia sa i miery efektívnosti zvyšných jednotiek. Ďalej v riešení úlohy pokračujeme ako v predchádzajúcom príklade.

2.1.2 Variabilné výnosy z rozsahu

Doteraz sme sa zaoberali konštantnými výnosmi z rozsahu. V nasledujúcom príklade budeme predpokladať variabilné výnosy z rozsahu. Tento predpoklad vedie k modifikácii hranice efektívnosti a množiny produkčných možností. Budeme sa zaoberať týmito vstupnými hodnotami:

<i>DMU</i>	A	B	C	D	E	F	G	H
Pracovník <i>x</i>	3	7	4	8	5	10	3	9
Výrobky <i>y</i>	1	3	2	7	5	8	2	4
Podiel y/x	0,33	0,43	0,5	0,875	1	0,8	0,67	0,44
Miera efektivity	33%	43%	50%	87.5%	100%	80%	67%	44%

Na nasledujúcom Obr. 3 sú znázornené všetky *DMU*, pričom na osi *x* sú použité vstupy a na osy *y* výstupy. Taktiež je znázornená hranica efektívnosti (zelenou farbou), hranica pseudoeffectívnosti (modrou farbou) a množina produkčných možností.



Obr. 3

Z Obr. 3 je vidieť, že za predpokladu variabilných výnosov z rozsahu hranica efektívnosti tvorí obal dát, ktorý je konvexný. Na rozdiel od prípadu konštantných výnosov z rozsahu, kde (v našom príklade) je len jedna organizačná jednotka efektívna, v tomto prípade sú až štyri organizačné jednotky efektívne (ide o D, E, F, G). Čiže platí, že ak rozhodovacia jednotka je pri použití konštantných výnosov z rozsahu efektívna, tak je aj pri použití variabilných výnosov z rozsahu efektívna. Naopak to neplatí. Je to spôsobené tým, že v prípade variabilných výnosov z rozsahu neplatí požiadavka, že pre zachovanie efektívnosti musí byť α -násobok vstupov doplnený rovnakým násobkom výstupov. Variabilné výnosy z rozsahu vedú k tomu, že jednotka bude efektívna i keď pomerný nárast výnosov bude nižší prípadne vyšší než odpovedajúci nárast vstupov. Za predpokladu variabilných výnosov z rozsahu nie je miera efektívnosti organizačnej jednotky nižšia ako pri konštantných výnosoch z rozsahu.

¹KVzR - konštantné výnosy z rozsahu (v anglickej literatúre *constant returns to scale*)

²VVzR - variabilné výnosy z rozsahu (v anglickej literatúre *variable returns to scale*)

Organizačná jednotka A leží na tzv. *hranici pseudoeфективности*. Hodnota efektivity pre danú jednotku je rovnaká ako v prípade efektívnej organizačnej jednotky t.j. 1. Organizačná jednotka G pri rovnakej hodnote vstupu vyprodukuje o jednu jednotku viac výstupu. Ak by organizačná jednotka A zvýšila svoju produkciu o jednu jednotku, tak by sa dostala do bodu G a stala by sa efektívnou organizačnou jednotkou.

Teraz sa bližšie budeme zaoberať neefektívnou organizačnou jednotkou B. Možnosti premietnutia na hranicu efektivity sú graficky znázornené na obrázku ako aj nižšie teoreticky popísané. V modeli orientovanom na vstupy premietneme danú organizačnú jednotku na hranicu efektivity znížením jej vstupov tak, aby hodnota výstupu zostala nezmenená. Takto dostaneme bod B_1 , ktorý leží na efektívnej hranici. Efektivita jednotky sa vypočíta ako podiel $\frac{Y'B_1}{Y'B} = \frac{d(Y', B_1)}{d(Y', B)} = 0,52$, kde $d(Y', B_1)$ predstavuje vzdialenosť z bodu Y' do bodu B_1 a $d(Y', B)$ predstavuje vzdialenosť z bodu Y' do bodu B a tzv. *referenčnú množinu*³ tvoria jednotky G a E. Podobne ako za predpokladu konštantných výnosov z rozsahu aj pri predpoklade variabilných výnosov z rozsahu môžeme použiť model orientovaný na výstupy. Efektivita jednotky sa vypočíta ako podiel $\frac{X'B}{X'B_2} = \frac{d(X', B)}{d(X', B_2)} = 0,45$ pričom $d(X', B)$ je vzdialenosť bodu X' do bodu B a $d(X', B_2)$ je vzdialenosť bodu X' do bodu B_2 . Referenčnú množinu tvoria organizačné jednotky D a E. V tomto prípade však nie je rovnaká hodnota efektivity ako pri modeli orientovanom na vstupy.

2.2 Dva vstupy a jeden výstup

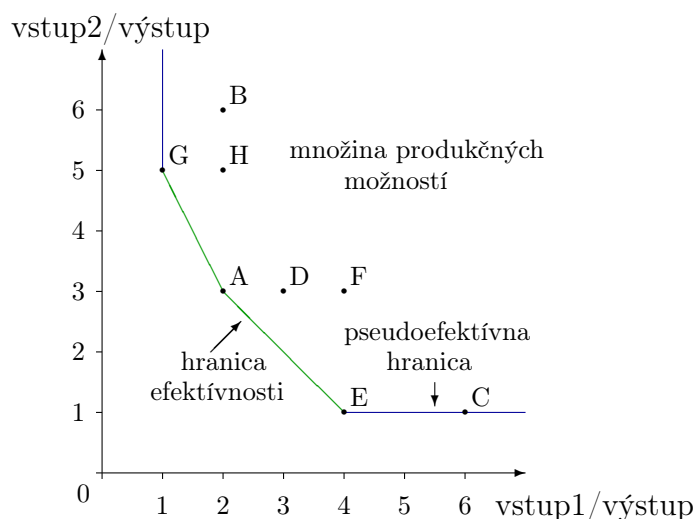
Tento príklad je len pre konštantné výnosy z rozsahu. Pre znázornenie situácie, kde je každá jednotka charakterizovaná dvoma vstupmi a jedným výstupom, budeme predpokladať, že všetky jednotky produkujú jednu jednotku výstupu, pričom používajú rôzne množstvá z dvoch rôznych vstupov. Predpoklad produkcie jednej jednotky výstupu nezodpovedá realite, ale dá sa splniť tak, že obidva vstupy nahradíme ich podielom s hodnotou výstupu danej rozhodovacej jednotky t.j. vstup1/výstup a vstup2/výstup. Takto dostaneme vstupy na jednotku výstupu. Údaje pre náš príklad sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

DMU	A	B	C	D	E	F	G	H
vstup1	2	2	6	3	4	4	1	2
vstup2	3	6	1	3	1	3	5	5
výstup	1	1	1	1	1	1	1	1
Efektivita	1	0,7	1	0,83	1	0,71	1	0,78

Kedže výstupy všetkých jednotiek majú hodnotu 1, môžeme ich porovnávať pomocou vstupov. Z uvedených dát môžeme vytvoriť graf, pričom os x tvorí podiel prvého vstupu a výstupu (vstup1/výstup) a os y tvorí podiel druhého vstupu a výstupu

³presná definícia bude uvedená v ďalšej časti

(vstup2/výstup). Z hľadiska efektívnosti budú nižšie hodnoty vstupov na jednotky výstupov viesť k vyššej efektívitve.

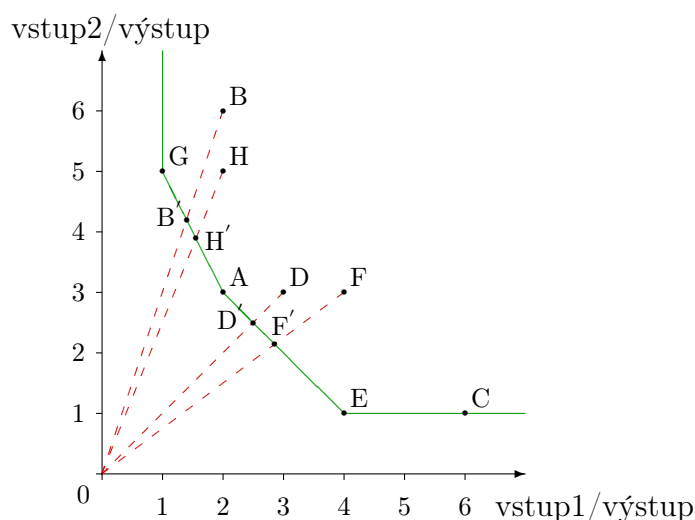


Obr. 4

Efektívnu hranicu tvoria úsečky GA a AE. Vertikálna polpriamka z bodu G smerom nahor a horizontálna polpriamka z bodu E doprava sa nazývajú *pseudoefektívne hranice*. Cieľom každej rozhodovacej jednotky je používať čo najmenšie hodnoty vstupov. Jednotky G, A, E ležia na hranici efektívnosti, a preto hodnota efektivity týchto jednotiek je 1. Organizačná jednotka C leží na hranici pseudoefektívnosti, hodnota efektívnosti aj v tomto prípade je 1. Môžeme si všimnúť, že jednotka E je lepšia ako jednotka C, pretože E používa o dve jednotky menej zo vstupu 1. Takéto nadmerné použitie niektorého vstupu sa nazýva *sklz*⁴. Ak by daná organizačná jednotka C znížila množstvo použitých vstupov 1 o 2 jednotky, tak by sa dostala do bodu E a stala by sa efektívnou.

Teraz sa budeme zaoberať organizačnými jednotkami, ktoré neležia na efektívnej a ani na pseudoefektívnej hranici. Základná myšlienka bude spočívať v meraní vzdialenosti od hranice efektívnosti. Táto vzdialenosť nám vyjadruje mieru efektívnosti hodnotenej organizačnej jednotky. Budeme ju merať radiálne a určíme mieru redukcie obidvoch vstupov na dosiahnutie hranice efektívnosti. Ukážeme si postup na organizačnej jednotke D. Keďže neleží na efektívnej, ani na pseudoefektívnej hranici potrebujeme, aby jej vstup 1 a vstup 2 boli znížené o θ^* -násobok súčasnej hodnoty. Ak $\theta_D^* = \frac{OD'}{OD} = 0,83$, tak znížením vstupov na θ^* -násobok sa jednotka dostane na efektívnu hranicu medzi body A a E do bodu D'. Organizačné jednotky A a E tvoria referenčnú množinu jednotky D. Daná myšlienka je znázornená na Obr. 5.

⁴bude bližšie vysvetlené v kapitole CCR model



Obrázok 5

Podobne ako pri jednotke D potrebujeme znížiť vstupy aj pre zvyšné neefektívne jednotky. Vstupy pre jednotku H potrebujeme znížiť o $\theta_H^* = \frac{OH'}{OH} = 0,78$. Takto sa jednotka H dostane do bodu H', ktorý leží na hranici efektívnosti. Referenčná množina H je tvorená jednotkami G a A. V prípade jednotky F je $\theta_F^* = \frac{OF'}{OF} = 0,71$, znížením vstupov F sa dostane do F', referenčnú množinu jednotky F tvoria jednotky A a E. Ako posledná nám ostáva neefektívna organizačná jednotka B. V jej prípade je $\theta_B^* = \frac{OB'}{OB} = 0,7$, znížením vstupov B sa dostane do B', referenčnú množinu jednotky B tvoria jednotky A a G.

Z tohoto môžeme uviesť dve príčiny neefektívnosti organizačných jednotiek:

- v prípade, ak daná organizačná jednotka leží mimo hranice efektívnosti t.j. v prípade $\theta^* < 1$, tak potrebujeme úmerne znížiť všetky vstupy. Hovoríme, že ide o *technickú mieru neefektívnosti* (v anglickej literatúre *technical* alebo *radial inefficiency*);
- v prípade, ak daná organizačná jednotka leží na hranici pseudoeфективности t.j. ide o prípad, kde sa vyskytujú tzv. *sklzy*. Na odstránenie týchto sklzov potrebujeme znížiť len niektoré vstupy. Ide o *zmiešanú neefektívnosť* (v anglickej literatúre *mix-inefficiency*)

3 Základné modely

Budeme uvažovať n organizačných jednotiek, ktoré maximalizujú svoju efektivitu, teda pre každé DMU_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ riešime úlohu matematického programovania. Optimalizovanú jednotku označíme ako DMU_o , $o \in \{1, \dots, n\}$. Predpokladajme, že každá organizačná jednotka má rovnaké typy vstupov a výstupov, pričom je charakterizovaná m vstupmi a s výstupmi.

Označme x_{ij} ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$) hodnotu j -teho vstupu i -tej organizačnej jednotky a y_{ik} ($i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, s$) hodnotu k -teho výstupu i -tej organizačnej jednotky. Potom hodnoty vstupov a výstupov i -tej organizačnej jednotky tvoria vektory. Vektor vstupov i -tej organizačnej jednotky zapisujeme $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{im})^T$ a vektor výstupov $y_i = (y_{i1}, \dots, y_{is})^T$. Predpokladáme, že hodnoty vstupov a výstupov pre každé DMU sú nezáporné a každé DMU má hodnotu aspoň jedného vstupu a aspoň jedného výstupu nenulovú.

Každý vstup a výstup má určité ocenenie t.j. vnútorné ceny resp. váhy, ktoré označíme pomocou vektorov $u = (u_1, \dots, u_m)^T$ pre vstupy a $v = (v_1, \dots, v_s)^T$ pre výstupy. To znamená, že u_i ($i = 1, \dots, m$) je cena i -teho vstupu a v_k ($k = 1, \dots, s$) je cena k -teho výstupu.

Ak máme pevne určené hodnoty u, v potom už nie je zložité určiť mieru efektívnosti pre prípad viac vstupov a viac výstupov. Pre útvar DMU_o mieru efektívnosti $E_o(u, v)$ určíme podľa nasledujúceho vzorca:

$$E_o(u, v) = \frac{\sum_{k=1}^s v_k y_{ok}}{\sum_{j=1}^m u_j x_{oj}} = \frac{v^T y_o}{u^T x_o},$$

pričom u_j a v_k sú zatiaľ neznáme váhové premenné.

Teraz nastáva otázka ako vhodne voliť ceny, aby sme boli spravodliví voči všetkým analyzovaným DMU . Určitým východiskom by bolo umožniť každému DMU , aby si zvolil svoje vlastné ceny, ktoré by spĺňali určité podmienky. Medzi základné podmienky patrí podmienka, aby v danom systéme cien bola miera efektívnosti všetkých organizačných jednotiek v danej skupine ohraničená zhora nejakou kladnou konštantou. Na začiatku sme predpokladali menšie alebo rovnaké hodnoty výstupov ako vstupov, a preto je prirodzené zvoliť danú konštantu ako jednotku. Druhá podmienka je, aby ceny vstupov a výstupov boli kladné. Táto podmienka sa dá vysvetliť nasledovne. Všetky vstupy a výstupy považujeme za významné pre daný proces a musíme ich brať do úvahy. Za predpokladu splnenia týchto dvoch podmienok môžeme pre každé DMU_o zvoliť vlastné ceny.

Presnejšie povedané pre útvar DMU_o hľadáme riešenie nasledovnej úlohy:

$$\begin{aligned} \max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m \\ v \in \mathbb{R}^s}} \quad & E_o(u, v) \\ & E_i(u, v) \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & u > 0 \\ & v > 0 \end{aligned}$$

Ak existuje optimálne riešenie (u^*, v^*) pre DMU_o takejto úlohy, potom zrejme optimálna hodnota účelovej funkcie $E_o^*(u^*, v^*) \in (0, 1)$. Ak $E_o^*(u^*, v^*) = 1$ hovoríme, že DMU_o je efektívne. Inak je neefektívne a E_o^* nazývame mierou efektívnosti.

3.1 Koncepčný model

Koncepčný model je základným modelom DEA analýzy, ktorý je východiskom pre celú skupinu DEA modelov. Na určenie efektívnosti DMU_o pre $o \in \{1, \dots, n\}$ pomocou použitia konceptného modelu budeme riešiť úlohu matematického programovania:

$$(MP_o) \quad \max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m \\ v \in \mathbb{R}^s}} \quad \frac{v^T y_o}{u^T x_o} \quad (1)$$

$$\frac{v^T y_i}{u^T x_i} \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2)$$

$$u > 0 \quad (3)$$

$$v > 0. \quad (4)$$

Nech dvojica (u^*, v^*) je optimálnym riešením a $E_o^* = E_o^*(u^*, v^*)$ je optimálna hodnota účelovej funkcie pre úlohu (MP_o) . Potom DMU_o je efektívne, ak $E_o^* = 1$, inak je neefektívne a E_o^* udáva mieru efektívnosti. Táto úloha nemusí mať vždy riešenie kvôli ostrým nerovnostiam v podmienkach kladnosti cien u a v . V niektorých modeloch je kladnosť cien u, v nahradená nezápornosťou cien prípadne sa ohraničia zdola malými kladnými číslami. Navyše (1) - (4) je úloha zlomkového programovania, ktorá sa vo všeobecnosti ťažko rieši. Túto úlohu je vhodné previesť na úlohu lineárneho programovania. Na odstránenie zlomku z účelovej funkcie sa používajú dva spôsoby, ktorými sa budeme zaoberať v nasledujúcich častiach.

3.2 CCR model

CCR model je historicky prvým DEA modelom, ktorý bol navrhnutý Charnesom, Cooperom a Rhodesom v roku 1978. Teraz si ukážeme ako CCR model môžeme odvodiť jednoduchými úpravami z konceptného modelu. Všimnime si, že ak (u^*, v^*) je optimálnym riešením úlohy (MP_o) , tak potom aj každé $(\alpha u^*, \alpha v^*)$, $\alpha > 0$ je optimálnym riešením (MP_o) . V dôsledku tejto nejednoznačnosti môžeme pridať normalizačnú podmienku $u^T x_o = 1$ a účelová funkcia potom nadobudne tvar:

$$\max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m \\ v \in \mathbb{R}^s}} \quad v^T y_o.$$

Podmienku (2) prevedieme nasledovne:

$$\frac{v^T y_i}{u^T x_i} \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow v^T y_i \leq u^T x_i, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Ostré nerovnosti (3) a (4) nahradíme neostrými podmienkami:

$$u \geq 0, v \geq 0,$$

čo musíme zohľadniť pri interpretácii výsledkov riešenia úlohy. Po prevedení týchto úprav dostaneme z úlohy matematického programovania úlohu lineárneho programovania. V prvej úprave sme normalizovali vstupy, a preto hovoríme, že ide o tzv. *vstupne orientovaný (multiplikatívny) CCR model*. Použitie tohto modelu predpokladá riešiť pre každé $o = \{1, \dots, n\}$ nasledovnú úlohu lineárneho programovania:

$$\begin{aligned} (LP_o) \quad & \max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m \\ v \in \mathbb{R}^s}} & v^T y_o \\ & u^T x_o = 1 \\ & v^T y_i \leq u^T x_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0, \end{aligned}$$

kde x_i resp. y_i sú vektory vstupov, resp. výstupov i -tej organizačnej jednotky a u, v sú ich vektory váh.

Môžeme to jednoducho interpretovať. Útvar DMU_o je efektívny, ak existuje také optimálne riešenie (u^*, v^*) úlohy (LP_o) , že $E^*(u^*, v^*) = v^{*T} y_o = 1$ a $u^* > 0, v^* > 0$. Inak DMU_o je neefektívne. Tiež môže nastať situácia, že existuje optimálne riešenie (u^*, v^*) úlohy (LP_o) pričom $E^*(u^*, v^*) < 1$ a $u^* > 0, v^* > 0$. Potom $E_o^*(u^*, v^*)$ nazývame *mierou technickej efektívnosti*. Ak nastane situácia, že neexistuje kladné optimálne riešenie (u^*, v^*) a $E^*(u^*, v^*) = 1$, tak hovoríme, že ide o *pseudoeфектívnosť* a v prípade, ak $E^*(u^*, v^*) < 1$, tak $E^*(u^*, v^*)$ nazývame *mierou pseudoeфектívnosti*.

Skôr ako prejdeme k zadefinovaniu *množiny produkčných možností* (v anglickej literatúre označené ako *Production Possibility Set*) si objasníme pojem technológie. Ak máme k dispozícii vektor vstupov x a vektor výstupov y , tak pod technológiou rozumieme dvojicu (x, y) , ktorá nám hovorí o množstve výstupov y , ktoré je možné vyrobiť pomocou spotrebovania množstva vstupov x za nejakú jednotku času. Potom množina P je množina produkčných možností (množina všetkých technológií), ak spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. všetky pozorované technológie (x_i, y_i) pre $i = \{1, \dots, n\}$ patria do produkčnej množiny P ;
2. ak $(x, y) \in P$ a pre ľubovольnú nezápornú dvojicu $(\tilde{x}, \tilde{y}) : \tilde{x} \geq x$ a $\tilde{y} \leq y$ platí $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in P$;
3. konvexné kombinácie technológií sú realizovateľnými technológiami;
4. pre ľubovольný kladný skalár t a pre $\forall (x, y) \in P$ platí $(tx, ty) \in P$;

5. P je najmenšia množina spĺňajúca vlastnosti 1. - 4..

Množinu produkčných možností vytvárame pomocou najlepších jednotiek zo skupiny, ktorú porovnávame. Všetky rozhodovacie jednotky sú obalené do tejto množiny. Množinu produkčných možností P vyhovujúcu podmienkam 1.- 5. môžeme napísať nasledovne:

$$P_C = \{(x, y) \mid x \geq \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i, y \leq \sum_{i=1}^n y_i \lambda_i, \lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}^n\}.$$

Teraz si zapíšeme duálnu úlohu k úlohe (LP_o) pre DMU_o , $o \in \{1, \dots, n\}$, ktorú môžeme podľa teórie lineárneho programovania vyjadriť nasledovne:

$$(LD_o) \quad \min_{\substack{\theta \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \mathbb{R}^n}} \theta$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \geq y_o \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq \theta x_o \quad (6)$$

$$\lambda \geq 0,$$

kde λ je n rozmerný vektor a θ je reálne číslo.

Vidíme, že úlohu (LD_o) možno zapísať aj ako:

$$\min \{ \theta \mid (\theta x_o, y_o) \in P_C \}.$$

Model (LD_o) nazývame ako *vstupne orientovaný obáľkový CCR model*.

Vzťah medzi primárnou a duálnou úlohou je uvedený v nasledujúcej tabuľke:

Ohraničenie v (LP_o)	Duálna premenná v (LD_o)	Ohraničenie v (LD_o)	Primárna premenná v (LP_o)
$u^T x_o = 1$	θ	$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \geq y_o$	$v \geq 0$
$v^T y_i \leq u^T x_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$	$\lambda \geq 0$	$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq \theta x_o$	$u \geq 0$

K predchádzajúcej duálnej úlohe môžeme zaviesť doplnkové premenné:

$$s^x = \theta x_o - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

$$s^y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - y_o,$$

pričom platí $s^x \geq 0$, $s^y \geq 0$ pre každé prípustné riešenie (θ, λ) duálnej úlohy, kde $s^x \in \mathbb{R}^m$ a $s^y \in \mathbb{R}^s$. Tieto premenné nazývame *sklzy*, ktoré boli stručne vysvetlené v príkladoch. Udávajú ako ďaleko je jednotka $(\theta x_o, y_o)$ od efektívnej hranice. Premenná s^x nám vyjadruje nadmernú spotrebu vstupov (v anglickej literatúre *input excesses*) a s^y vyjadruje nedostatok produkovaných výstupov (v anglickej literatúre *output shortfalls*). Útvar, ktorý je CCR efektívny má $\theta^* = 1$ a hodnoty sklzov s^x a s^y nulové v každom optimálnom riešení. Pseudoefektívnosť alebo miera pseudoefektívnosti definovaná v multiplikatívnom modeli sa v obáľkovom modeli interpretuje ako existencia nenuového sklzu aspoň v jednom optimálnom riešení.

Keď už máme zadefinované doplnkové premenné, tak na zistenie pseudoefektívnosti organizačnej jednotky môžeme použiť niekoľko metód napr. *dvojfázovú metódu*, ε -*metódu* alebo riešiť model *metódou vnútorných bodov*. Blížšie sa budeme zaoberať *dvojfázovou metódou*.

V prvej fáze riešime obáľkový model na výpočet efektivity danej organizačnej jednotky, ktorej výsledkom sú optimálne hodnoty premenných θ^* , s^{x*} , s^{y*} . Treba poznamenať, že podľa teórie lineárneho programovania optimálne hodnoty primárnej a duálnej úlohy sa rovnajú. Pri riešení môžu nastať dve situácie. Ak nastane situácia, že premenná $s^x \neq 0$ alebo $s^y \neq 0$ daná organizačná jednotka je pseudoefektívna. V prípade, že nastane druhá možnosť, pri ktorej $s^x = 0$ a $s^y = 0$ prejdeme na riešenie druhej fázy. S vypočítanou hodnotou θ^* potom riešime druhú fázu, v ktorej zisťujeme jednotlivé namerané spotreby vstupov alebo nedostatky produkovaných výstupov, pomocou ktorých môžeme určiť optimálnu projekciu pre jednotlivé rozhodovacie jednotky. V druhej fáze riešime nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda, s^x, s^y} \quad & \omega = e^T s^x + e^T s^y \\ s^x = & \theta^* x_o - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \\ s^y = & \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i - y_o \\ s^x \geq & 0 \\ \lambda \geq & 0, \end{aligned}$$

kde $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ je jednotkový vektor príslušného rozmeru, teda $e^T s^x = \sum_{i=1}^m s_i^x$ a $e^T s^y = \sum_{r=1}^s s_r^y$. V tejto fáze maximalizujeme súčet všetkých sklzov pri zachovaní miery efektívnosti. Riešenie tejto úlohy sa nazýva *riešenie najväčšieho sklzu* (v anglickej literatúre *max - slack solution*).

Veta 3.1. (CCR-efektivita pomocou skzov) Ak optimálne riešenie $(\theta^*, \lambda^*, s^{x*}, s^{y*})$ vyššie uvedenej dvojfázovej úlohy spĺňa

1. $\theta^* = 1$
2. $s^{x*} = 0, s^{y*} = 0$,

tak DMU_o sa nazýva CCR-efektívna. Inak DMU_o je CCR-neeefektívna.

Prvá podmienka z vety sa nazýva ako „radiálna efektívnosť“ (v anglickej literatúre *radial efficiency*). Podmienky 1. a 2. spolu nazývame ako „Pareto-Koopmans“ efektívnosť, ktorú môžeme vyjadriť nasledovne.

Definícia 3.1. (*Pareto-Koopmans Efficiency*) *DMU je plne efektívna vtedy a len vtedy, ak už nie je možné zlepšiť niektorý zo vstupov alebo výstupov bez zhoršenia iného vstupu alebo výstupu.*

Definícia 3.2. (*Definícia referenčnej množiny*) *Pre neefektívnu DMU_o môžeme definovať referenčnú množinu E_o na základe riešenia najväčšieho sklzu nasledovne:*

$$E_o = \{i \mid \lambda_i > 0, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Teraz sa vrátíme k príkladu z druhej kapitoly o dvoch vstupoch a jednom výstupe, na ktorom si prakticky vysvetlíme referenčnú množinu.

Referenčná množina nám hovorí, na ktorú časť efektívnej hranici (medzi efektívne organizačné jednotky) sa premietne neefektívna organizačná jednotka. Na určenie referenčnej množiny použijeme riešenia duálnej úlohy, ktoré je uvedené v nasledujúcej tabuľke:

<i>DMU</i>	θ^*	λ_A	λ_B	λ_C	λ_D	λ_E	λ_F	λ_G	λ_H
A	1	1	0	0	0	0	0	0	0
B	0,7	0,4	0	0	0	0	0	0,6	0
C	1	0	0	0	0	1	0	0	0
D	0,83	0,75	0	0	0	0,25	0	0	0
E	1	0	0	0	0	1	0	0	0
F	0,71	0,56	0	0	0	0,43	0	0	0
G	1	0	0	0	0	0	0	1	0
H	0,78	0,56	0	0	0	0	0	0,44	0

Na základe definície referenčnej množiny a pomocou výsledkov duálnej úlohy vieme určiť referenčnú množinu pre neefektívne organizačné jednotky. Teraz si postupne rozoberieme každú neefektívnu organizačnú jednotku t.j. $\theta^* < 1$.

Z tabuľky vidíme, že organizačná jednotka B má hodnoty $\lambda_A = 0,4$, $\lambda_G = 0,6$ a ďalšie hodnoty λ sú rovné nulovej hodnote. Z toho dostávame referenčnú množinu, ktorá je tvorená organizačnými jednotkami A a G. Pomocou hodnôt λ vieme vypočítať potrebné hodnoty vstupu1 a vstupu2 na to, aby sa z neefektívnej organizačnej jednotky stala efektívna jednotka. Urobíme to pomocou konvexnej kombinácie organizačných jednotiek, ktoré tvoria referenčnú množinu neefektívnej jednotky.

Na to, aby sa organizačná jednotka B stala efektívna potrebujeme zredukovať vstup1 a vstup2 nasledovne:

Pre vstup1 bude platiť:

$$\lambda_A \cdot \text{vstup1}(A) + \lambda_G \cdot \text{vstup1}(G) = 0,4 \times 2 + 0,6 \times 1 = 1,4.$$

Pre vstup2 bude platiť:

$$\lambda_A \cdot \text{vstup2}(A) + \lambda_G \cdot \text{vstup2}(G) = 0,4 \times 3 + 0,6 \times 5 = 4,2.$$

Organizačná jednotka B sa stane efektívnou, ak zredukuje vstup1 z hodnoty 2 na hodnotu 1,4 a vstup2 z hodnoty 6 na hodnotu 4,2 t.j. v oboch prípadoch redukcia vstupu predstavuje 30%. Organizačná jednotka sa premietne na hranicu efektívnosti do bodu B' uvedenom na obrázku 5.

Rovnakým spôsobom to urobíme pre zvyšné neefektívne jednotky.

Referenčnú množinu pre organizačnú jednotku D tvoria jednotky A a E, pričom $\lambda_A = 0,75$ a $\lambda_E = 0,25$, zvyšné hodnoty λ sú nulové. Táto organizačná jednotka sa stane efektívnou, ak:

Vstup1 zredukujeme na:

$$\lambda_A \cdot \text{vstup1}(A) + \lambda_E \cdot \text{vstup1}(E) = 0,75 \times 2 + 0,25 \times 4 = 2,5.$$

Vstup2 zredukujeme na:

$$\lambda_A \cdot \text{vstup2}(A) + \lambda_E \cdot \text{vstup2}(E) = 0,75 \times 3 + 0,25 \times 1 = 2,5.$$

Organizačná jednotka sa premietne do bodu D' uvedenom na Obr. 5, ak vstup1 a vstup2 pre organizačnú jednotku D zredukujeme na 2,5 t.j. o 16,67% pôvodných vstupov.

Pre organizačnú jednotku F máme tiež dve kladné hodnoty $\lambda_A = 0,57$, $\lambda_E = 0,43$. Z toho vidíme, že jednotky A a E vytvárajú referenčnú množinu. Organizačná jednotka F sa stane efektívnou, ak:

Pre vstup1 platí:

$$\lambda_A \cdot \text{vstup1}(A) + \lambda_E \cdot \text{vstup1}(E) = 0,57 \times 2 + 0,43 \times 4 = 2,86.$$

Pre vstup2 platí:

$$\lambda_A \cdot \text{vstup2}(A) + \lambda_E \cdot \text{vstup2}(E) = 0,57 \times 3 + 0,43 \times 1 = 2,14.$$

Jednotka F sa stane efektívnou, ak zredukujeme vstup1 o hodnotu 1,14 a vstup2 o hodnotu 0,86. Takto sa z neefektívnej jednotky stane efektívna organizačná jednotka a dostane sa do bodu F' ako je uvedené na Obr. 5.

Ako posledná neefektívna organizačná jednotka je jednotka H. Referenčná množina je zložená z jednotiek A a G, pričom $\lambda_A = 0,55$, $\lambda_G = 0,44$ a zvyšné hodnoty sú nulové. Postupujeme rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch.

Pre vstup1 platí:

$$\lambda_A \cdot \text{vstup1}(A) + \lambda_G \cdot \text{vstup1}(G) = 0,55 \times 2 + 0,44 \times 1 = 1,56.$$

Pre vstup2 platí:

$$\lambda_A \cdot \text{vstup2}(A) + \lambda_G \cdot \text{vstup2}(G) = 0,55 \times 3 + 0,44 \times 5 = 3,88.$$

Na to, aby jednotka H sa stala efektívna je potrebné zredukovať vstup1 z hodnoty 2 na hodnotu 1,56 a vstup2 z hodnoty 5 na hodnotu 3,88. Takto sa dostaneme do bodu H' ukázanom na Obr. 5.

Doteraz sme sa zaoberali vstupne orientovaným CCR modelom, ktorý nám hovorí ako znížiť hodnoty vstupov, aby sa zachovali hodnoty výstupov. Teraz si stručne odvodíme výstupne orientovaný CCR model pomocou jednoduchých úprav koncepčného modelu. Podobne ako pri vstupne orientovanom modeli pridáme normalizačnú podmienku. Keďže ide o výstupne orientovaný model budeme normalizovať výstupy t.j. $v^T y_o = 1$ a účelová funkcia nadobudne tvar:

$$\max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m \\ v \in \mathbb{R}^s}} \frac{1}{u^T x_o},$$

ktorú môžeme prepísať do tvaru:

$$\min_{\substack{u \in \mathbb{R}^m \\ v \in \mathbb{R}^s}} u^T x_o.$$

Zvyšné podmienky sú upravené rovnakým spôsobom ako pri vstupne orientovanom CCR modeli. Po prevedení týchto úprav dostávame úlohu lineárneho programovania. Použitie výstupne orientovaného modelu predpokladá riešiť pre všetky $o = \{1, \dots, n\}$ nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned} (LPO_o) \quad & \min_{\substack{u \in \mathbb{R}^m \\ v \in \mathbb{R}^s}} u^T x_o \\ & v^T y_o = 1 \\ & v^T y_i \leq u^T x_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0. \end{aligned}$$

Duálna úloha má tvar:

$$\begin{aligned} (LDO_o) \quad & \max_{\substack{\psi \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \mathbb{R}^n}} \psi \\ & \sum_{i=1}^n \mu_i y_i \geq \psi y_o \tag{7} \\ & \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \leq x_o \tag{8} \\ & \mu \geq 0. \end{aligned}$$

Výstupne orientovaný CCR model nám hovorí, ako máme zvýšiť výstupy pri nezmenených vstupoch.

Porovnaním duálnych úloh vstupne a výstupne orientovaných modelov si môžeme všimnúť, že tieto úlohy sa veľmi podobajú. Vo vstupne orientovanom modeli minimalizujeme hodnotu θ pre zníženie vstupov a pri výstupne orientovanom modeli maximalizujeme hodnotu ψ , ktorá predstavuje mieru, o ktorú sa majú zvýšiť výstupy. Na základe teórie lineárneho programovania môžeme účelovú funkciu (LDO_o) prepísať na maximalizačnú úlohu, a to prevrátením hodnoty účelovej funkcie θ . Teraz sa pozrieme ako môžeme upraviť ohraničenia (5) a (6) v úlohe (LDO_o) na

ohraničenia (7), (8) v úlohe (LDO_o). Ako vidieť z nerovností je tam určitá podobnosť. Na to, aby sme pretransformovali úlohu (LD_o) na úlohu (LDO_o) je potrebné nerovnice (5), (6) prenásobiť $\frac{1}{\theta}$. Nerovnosti sa potom zmenia na nasledujúce:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\theta} y_i \geq \frac{1}{\theta} y_o$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\theta} x_i \leq x_o$$

Použijeme výsledok transformácie účelovej funkcie t.j. $\psi = \frac{1}{\theta}$ a vzájomným porovnaním nových nerovností a nerovností (7), (8) z úlohy (LDO_o) dostávame ďalšiu transformáciu $\mu = \frac{\lambda}{\theta}$. Vyššie uvedené výsledky môžeme zhrnúť nasledovne. Optimálne riešenie úlohy (LD_o) prevedieme na optimálne riešenie (LDO_o) pomocou transformácií:

$$\psi^* = \frac{1}{\theta^*} \quad \text{a} \quad \psi^* = \frac{\lambda^*}{\theta^*}.$$

Podobnými úpravami môžeme úlohu (LD_o) prepísať na úlohu (LDO_o) pomocou transformácie premenných

$$\theta^* = \frac{1}{\psi^*} \quad \text{a} \quad \lambda^* = \frac{\mu^*}{\psi^*}.$$

3.3 BCC model

BCC model je podobný s predchádzajúcim modelom. Je rovnako odvodený z úlohy matematického programovania ako CCR model. Bol publikovaný Bankerom, Charnesom a Cooperom v roku 1984. Pri CCR modeli sme predpokladali, že každá jednotka vstupu prináša rovnaké množstvo výstupu, teda konštantné výnosy z rozsahu. Model BCC predpokladá variabilné výnosy z rozsahu. Pri variabilných výnosoch z rozsahu rozlišujeme tri oblasti:

1. oblasť rastúcich výnosov z rozsahu;
2. oblasť klesajúcich výnosov z rozsahu;
3. oblasť konštantných výnosov z rozsahu.

Množinu produkčných možností pre BCC model môžeme zapísať nasledovne:

$$P_B = \{(x, y) \mid x \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, y \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda \geq 0\},$$

pričom rozmery zostávajú rovnaké ako v predchádzajúcich prípadoch. Porovnaním množín produkčných možností BCC a CCR modelov zistíme, že BCC model sa líši iba pridaním podmienky $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Z tohoto vyplýva, že množina produkčných možností BCC modelu je podmnožinou množiny produkčných možností CCR modelu.

Teraz sa bližšie pozrieme ako bude vyzerat' úloha lineárneho programovania pre BCC model. K úlohe na riešenie obáľkového CCR modelu pribudne k ohraničeniam už spomínaná podmienka $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Úloha lineárneho programovania pre vstupne orientovaný multiplikatívny BCC model vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} \max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^s \\ v_o \in \mathbb{R}}} \quad & v^T y_o - v_o \\ & u^T x_o = 1 \\ & v^T y_i - v_o \leq u^T x_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0. \end{aligned}$$

Výsledok môžeme podobne ako v CCR modeli jednoducho interpretovať. Organizačná jednotka DMU_o je efektívna, ak existuje kladné optimálne riešenie (u^*, v^*) vyššie uvedenej úlohy, také že $E^*(u^*, v^*) = v^{*T} y_o - v_o^* = 1$. Inak DMU_o je neefektívne.

Duálna úloha má tvar:

$$\begin{aligned} \min_{\substack{\theta \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \mathbb{R}^n}} \quad & \theta \\ & \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - s^y = y_o \\ & \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x = \theta x_o \\ & \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \\ & \lambda \geq 0, s^x \geq 0, s^y \geq 0. \end{aligned}$$

Organizačná jednotka je efektívna, ak všetky s^x, s^y v každom optimálnom riešení nadobúdajú nulovú hodnotu. Môžeme to zistiť pomocou dvojfázovej metódy, ktorá je podrobnejšie popísaná v CCR modeli.

Platí nasledujúca veta:

Veta 3.2. (*BCC-efektivita pomocou skzov*) Ak pre optimálne riešenie $(\theta^*, \lambda^*, s^{x*}, s^{y*})$ BCC model splňa

1. $\theta_B^* = 1$
2. $s^{x*} = 0, s^{y*} = 0,$

tak DMU_o sa nazýva BCC-efektívna. Inak hovoríme, že DMU_o je BCC-neepektívna.

Teraz prejdeme k výstupne orientovanému modelu. Primárnu úlohu zapíšeme nasledovne:

$$\begin{aligned} \min_{\substack{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^s \\ u_o \in \mathbb{R}}} \quad & u^T x_o \\ & v^T y_o = 1 \\ & v^T y_i - u_o \leq u^T x_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0. \end{aligned}$$

Duálna úloha má tvar:

$$\begin{aligned} \max_{\substack{\psi \in \mathbb{R} \\ \lambda \in \mathbb{R}^n}} \quad & \psi \\ & \sum_{i=1}^n \mu_i y_i - s^y \geq \psi y_o \\ & \sum_{i=1}^n \mu_i x_i + s^x \leq x_o \\ & \lambda \geq 0, s^x \geq 0, s^y \geq 0. \end{aligned}$$

Vo výstupne orientovanom modeli mierou efektívnosti je prevrátená hodnota optimálnej účelovej funkcie rovnako ako v predchádzajúcom modeli.

3.4 Aditívny model s váhami

Aditívny model bol zostavený Osarnesom, Cooperom, Golany, Seifordom a Stutzom v roku 1985.

V predchádzajúcich modeloch sa vyžaduje rozlišovanie medzi vstupne orientovaným a výstupne orientovaným modelom. Aditívny model je ich kombináciou. Aditívne modely sú schopné zohľadniť všetky zdroje neefektívnosti, avšak priamo neposkytujú mieru efektívnosti. Mieru efektívnosti je potrebné dodatočne definovať. Bližšie sa budeme zaoberať takýmto modelom s váhami.

Podobne ako iné modely tak aj aditívny model s váhami môžeme jednoduchými úpravami dostať z pôvodného modelu matematického programovania (MP_o). V koncepčnom modeli podmienky ostrých nerovností (3) a (4) nahradíme nasledujúcimi podmienkami:

$$\begin{aligned} u &\geq w^x \\ v &\geq w^y \end{aligned}$$

pričom $w^x > 0$, $w^x \in \mathbb{R}^m$ a $w^y > 0$, $w^y \in \mathbb{R}^s$ sú dané vektory. Takto sme si stanovili minimálne kladné váhy pre jednotlivé vstupy a výstupy. Podmienku (2) upravíme na lineárny tvar rovnako ako v CCR modeli. Účelová funkcia v aditívnom modeli maximalizuje rozdiel vážených vstupov a vážených výstupov. Po prevedení vyššie uvedených úprav na koncepčnom modeli dostaneme aditívny model s váhami w^x a w^y . Budeme riešiť nasledovnú úlohu lineárneho programovania pre každé

$o = \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned}
 (AdP_o) \quad & \max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m \\ v \in \mathbb{R}^s}} & v^T y_o - u^T x_o \\
 & v^T y_i \leq u^T x_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \\
 & u \geq w^x \\
 & v \geq w^y.
 \end{aligned}$$

Výsledky úlohy môžeme jednoducho interpretovať. DMU_o je efektívna, ak hodnota účelovej funkcie $E_o^*(u^*, v^*) = v^{*T} y_o - u^{*T} x_o = 0$. Inak je neefektívna a hodnota $E_o^*(u^*, v^*) \in (-\infty, 0)$ je mierou efektívnosti. V tomto prípade nevidíme mieru efektívnosti tak „pekne“ ako v prípade CCR alebo BCC modelu. Základnou snahou je preškálovať túto mieru efektívnosti do intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Uvedieme aspoň jednu možnosť, ktorá je uvedená v [11]. Ako vhodná transformácia optimálnej hodnoty účelovej funkcie je $E' = \exp(E_o^*)$.

K danej úlohe môžeme zostojiť duálnu úlohu, ktorá ma tvar:

$$\begin{aligned}
 (AdD_o) \quad & \min_{\substack{s^x \in \mathbb{R}^m, s^y \in \mathbb{R}^s \\ \lambda \in \mathbb{R}^n}} & -((w^x)^T s^x + (w^y)^T s^y) \\
 & \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x = x_o \\
 & \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i + s^y = y_o \\
 & \lambda \geq 0, s^x \geq 0, s^y \geq 0,
 \end{aligned}$$

pričom s^x, s^y sú vektory doplnkových vstupných a výstupných premenných.

Teraz nastáva otázka ako voliť váhy w^x a w^y , aby bola zabezpečená invariantnosť vzhľadom na zmenu jednotiek⁵. V prípade, že uvažujeme aditívny model v základnej verzii t.j. $w^x = e, w^y = e$, kde e predstavuje vektor samých jednotiek určitého rozmeru, tak tento model nie je invariantný vzhľadom na zmenu jednotiek. Invariantnosť na zmenu jednotiek je žiadúcou vlastnosťou modelov, preto je potrebné vhodne zvoliť váhy. Uvedieme si niektoré z týchto možností:

1. Váhy volíme ako prevrátenú hodnotu štandardnej odchýlky, kde σ_j^x je štandardná odchýlka j -teho vstupu a σ_k^y je štandardná odchýlka k -teho výstupu.

$$\begin{aligned}
 w_j^x &= \frac{1}{\sigma_j^x}; \quad j = 1, \dots, m \\
 w_k^y &= \frac{1}{\sigma_k^y}; \quad k = 1, \dots, s.
 \end{aligned}$$

Pričom štandardnú odchýlku j -teho vstupu σ_j^x pre $j = \{1, \dots, m\}$ vypočítame

⁵bližšie vysvetlené v časti 3.6

pomocou nevychýleného odhadu nasledovne:

$$\sigma_j^x = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}, \quad \text{kde } \bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}.$$

2. Váhy založené na minimálnych a maximálnych hodnotách vstupov a výstupov:

$$w_j^x = \frac{1}{R_j^x}, \quad j = 1, \dots, m$$

$$w_k^y = \frac{1}{R_k^y}, \quad k = 1, \dots, s$$

Často sa tiež vyskytuje voľba váh v tvare:

$$w_j^x = \frac{1}{R_j^x(m+s)}, \quad j = 1, \dots, m$$

$$w_k^y = \frac{1}{R_k^y(m+s)}, \quad k = 1, \dots, s,$$

kde R_j^x a R_k^y sú definované nasledovne:

$$R_j^x = \max_{i=1, \dots, n} x_{ij} - \min_{i=1, \dots, n} x_{ij}, \quad j = 1, \dots, m$$

$$R_k^y = \max_{i=1, \dots, n} y_{ik} - \min_{i=1, \dots, n} y_{ik}, \quad k = 1, \dots, s,$$

t.j. R_j^x pre $j = \{1, \dots, m\}$ predstavuje rozdiel medzi maximálnou a minimálnou hodnotou j -teho vstupu všetkých DMU_i , ($i = 1, \dots, n$) a R_k^y pre $k = \{1, \dots, s\}$ predstavuje rozdiel medzi maximálnou a minimálnou hodnotou k -teho výstupu všetkých DMU_i , ($i = 1, \dots, n$).

3.5 SBM model

Teraz sa budeme bližšie zaoberať inou formou aditívneho modelu. A to neorientovaným modelom, ktorý na meranie efektivity používa doplnkové premenné, sklzy s^x a s^y , označovaný ako SBM (v anglickej literatúre *Slacks-Based Measure*). Táto kapitola je voľne spracovaná pomocou [3]. Skôr ako prejdeme k samotnému modelu zavedieme si nasledovnú symboliku.

Ak $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, potom symbolom x^{-1} budeme označovať nasledovný vektor z $\mathbb{R}^n$: $x^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{pmatrix}$. Ďalej označíme $x^{-T} = (x^{-1})^T$.

Predpokladáme, že všetky hodnoty vstupov a výstupov pre každú uvažovanú DMU

sú kladné. Na určenie efektívnosti DMU_o pre $o = \{1, \dots, n\}$ pomocou SBM modelu potrebujeme riešiť nasledovnú úlohu matematického programovania:

$$\begin{aligned}
 (SBM) \quad \min_{\lambda, s^x, s^y} \quad \rho &= \frac{1 - \frac{1}{m} x_o^{-T} s^x}{1 + \frac{1}{s} y_o^{-T} s^y} \\
 x_o &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x \\
 y_o &= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - s^y \\
 \lambda &\geq 0, s^x \geq 0, s^y \geq 0,
 \end{aligned} \tag{9}$$

pričom rozmery premenných ostávajú rovnaké.

Výsledky môžeme interpretovať nasledovne. Organizačná jednotka DMU_o je SBM efektívna, ak vyššie uvedená úloha má optimálne riešenie $\rho^* = 1$ t.j. ak hodnoty $s^{x*} = 0$ a $s^{y*} = 0$. Ak hodnota $\rho^* < 1$, tak organizačná jednotka je neefektívna a táto hodnota vyjadruje mieru efektívnosti.

Pri použití SBM modelu rozlišujeme rovnako ako v predchádzajúcich modeloch konštantné a variabilné výnosy z rozsahu. Hore uvedená úloha nám reprezentuje konštantné výnosy z rozsahu. Pri použití variabilných výnosov z rozsahu je potrebné pridať podmienku $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ resp. $e^T \lambda = 1$.

V knihe [3, str. 97] sa uvádza modifikácia modelu pre prípad nulových hodnôt niektorých vstupov, či výstupov. Ak niektorý vstup je nulový, tak príslušná zložka sa vynechá z účelovej funkcie t.j. ak $x_{jo} = 0$, pre každé $j = \{1, \dots, m\}$, tak potom $x_{jo}^{-1} s_j^x = 0$. V prípade záporného alebo nulového výstupu, $y_{ko} \leq 0$, pre každé $k = \{1, \dots, s\}$, namiesto $y_{ko}^{-1} s_k^y$ sa zvolí malé kladné číslo, ktoré môžeme interpretovať ako penalizácia.

V porovnaní s aditívnym modelom má SBM model výhodu v tom, že optimálnu hodnotu účelovej funkcie nemusíme prešlávať. SBM model nám vráti hodnoty z intervalu 0 až 1. Teraz sa bližšie pozrieme prečo platí nasledujúci vzťah:

$$0 \leq \rho \leq 1. \tag{10}$$

Ako dôkaz toho, že vzťah (10) platí, ako prvé si všimnime, že $s^x \leq x_o$ z čoho po jednoduchšej úprave dostávame $0 \leq x_o^{-T} s^x \leq 1$, pričom $x_o^{-T} s^x = 1$ iba, ak bola požadovaná nulová hodnota vstupov. Z tohoto vyplýva:

$$0 \leq \frac{1}{m} x_o^{-T} s^x \leq 1. \tag{11}$$

Tento výsledný vzťah platí tiež pre výstupy, s výnimkou, ak s^y môže presiahnuť príslušnú hodnotu vyprodukovaného výstupu, potom platí:

$$0 \leq \frac{1}{s} y_o^{-T} s^y. \tag{12}$$

Vzťahy (11) a (12) reprezentujú pomery priemerného vstupu a výstupu s horným ohraňčením, $\rho = 1$, dosiahnutým v (9) iba, ak sklzy s^x a s^y sú nulové vo všetkých vstupoch a výstupoch.

Taktiež platí, ak máme organizačné jednotky A a B , pričom $DMUA$ dominuje nad $DMUB$ tak, že $x_A \leq x_B$ a $y_A \geq y_B$ potom pre optimálne hodnoty účelovej funkcie (9) platí $\rho_A^* \geq \rho_B^*$.

Ďalšími vlastnosťami SBM modelu sa zaoberáme v nasledujúcej časti, v ktorej sú zhrnuté vlastnosti modelov uvedených v predchádzajúcich podkapitolách.

Bolo by vhodné úlohu matematického programovania (SBM) pretransformovať na úlohu, ktorá je jednoduchšie riešiteľná. Zavedením kladného skalára t a normalizovaním menovateľa v účelovej funkcii môžeme SBM úlohu prepísať nasledovne:

$$\begin{aligned} \min_{\lambda, s^x, s^y, t} \quad & \tau = t - \frac{1}{m} x_o^{-T} (t s^x) \\ & 1 = t + \frac{1}{s} y_o^{-T} (t s^y) \\ & x_o = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x \\ & y_o = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - s^y \\ & \lambda \geq 0, s^x \geq 0, s^y \geq 0, t > 0. \end{aligned}$$

Táto úloha nie je štandardnou úlohou lineárneho programovania kvôli nerovnosti $t > 0$. Všimnime si, že z podmienok úlohy vyplýva, že hodnoty $t \leq 0$ nie sú prípustné. Z toho vyplýva, že ohraňčenie $t > 0$ môžeme vynechať a dostaneme ekvivalentnú úlohu.

Pri pohľade na vyššie uvedenú úlohu sa nám ponúkajú substitúcie:

$$S^x = t s^x, S^y = t s^y \text{ a } \Lambda = t \lambda.$$

Ich aplikáciou získavame nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

$$\begin{aligned} \min_{\Lambda, S^x, S^y, t} \quad & \tau = t - \frac{1}{m} x_o^{-T} S^x \\ & 1 = t + \frac{1}{s} y_o^{-T} S^y \\ & t x_o = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x \\ & t y_o = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - s^y \\ & \lambda \geq 0, s^x \geq 0, s^y \geq 0, \end{aligned}$$

ktorú už vieme riešiť.

Úloha má v optimálnom riešení hodnotu účelovej funkcie τ^* . Optimálna hodnota účelovej funkcie pôvodnej SBM úlohy je $\rho^* = \tau^*$. Ostatné premenné SBM modelu

získame spätnou transformáciou t.j. $\lambda^* = \Lambda^*/t^*$, $s^{x^*} = S^{x^*}/t^*$ a $s^{y^*} = S^{y^*}/t^*$.

Teraz sa pozrieme bližšie na duálnu úlohu.

$$\begin{aligned} \max_{\substack{\theta \in \mathbb{R} \\ u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^s}} \quad & \theta = 1 - u^T x_o + v^T y_o \\ & v^T y_i - u^T x_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ & \frac{1}{m} \cdot x_o^{-1} \leq u \\ & (1 - u^T x_o + v^T y_o) \frac{1}{s} \cdot y_o^{-1} \leq v \end{aligned}$$

3.6 Zhrnutie vlastností modelov

Výhodou *CCR*, *BCC* a *SBM* modelov je, že hodnoty efektivity sú z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Hodnota efektivity v aditívnom modeli sa nachádza medzi $-\infty$ a 0. Tie-to hodnoty nám poukazujú na vhodnosť preškálovania optimálnej hodnoty účelovej funkcie na to, aby sme dosiahli efektívitu z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ a tým mohli porovnávať efektívnosť so zvyšnými modelmi.

Mohli sme si všimnúť, že ak je organizačná jednotka *CCR* efektívna, tak je aj *BCC* efektívna, ale naopak to neplatí. Taktiež platí, že ak sú organizačné jednotky *SBM* efektívne tak sú aj *CCR* efektívne a *CCR* pseudoeфекtívne sú *SBM* neefektívne.

Nevýhodou *CCR* a *BCC* modelov je nutnosť overovania podmienky existencie kladných váh resp. či $s^x, s^y = 0$ platí v každom optimálnom riešení pri duálnom modeli. V prípade, že táto podmienka nie je splnená tak θ a ψ^{-1} nezachytáva celú mieru neefektívnosti. Toto môže pre niektoré *DMU* skresliť výsledky. Takýto nedostatok nemajú aditívne modely t.j. zachytávajú zdroj neefektívnosti.

Teraz si bližšie popíšeme invariantnosť modelov, ktorá je spracovaná pomocou [8 a 11]. Pod invariantnosťou modelu rozumieme, že po nejakej zmene parametrov modelu výstup ostáva nezmenený.

Jednou z veľmi žiadúcich vlastností modelov je *invariantnosť vzhľadom na zmenu jednotiek*, ktorá nie je samozrejmosťou u všetkých DEA modelov. Pod invariantnosťou na zmenu jednotiek rozumieme, že optimálna hodnota účelovej funkcie sa nezmení napríklad pri zmene kilogramov na gramy t.j. pri zmene používaných jednotiek. To znamená, že hodnoty vstupov a výstupov môžeme vynásobiť kladnou konštantou bez toho, aby sa nám zmenila hodnota účelovej funkcie.

Zmenu jednotiek môžeme vyjadriť matematicky:

$$\begin{aligned} x_i &\rightarrow Ax_i = x'_i \\ y_i &\rightarrow By_i = y'_i, \quad \forall i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

kde A predstavuje kladnú diagonálnu maticu, čiže $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ s prvkami $\alpha_j > 0, \forall j = \{1, \dots, m\}$ a $B = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_s)$ s prvkami $\beta_k > 0, \forall k = \{1, \dots, s\}$. Táto vlastnosť je veľmi dôležitá lebo nechceme, aby výsledky modelu záviseli od toho v akých jednotkách zadávame vstupy a výstupy. Treba poznamenať, že táto vlastnosť nie je samozrejmosťou u všetkých DEA modelov. Z modelov, ktorými

sme sa zaoberali túto vlastnosť majú orientované modely (*CCR*, *BCC*), *SBM* model a vážený aditívny model s variabilnými výnosmi z rozsahu. Hlbšie sa tejto problematike venuje [11, str. 17 - 32].

Ako už bolo spomínané invariantnosť vzhľadom na zmenu jednotiek je dôležitou vlastnosťou, trochu iná situácia je s tzv. *invariantnosťou na posun*. Invariantnosť na posun znamená, že sa hodnota účelovej funkcie nezmení, ak ku niektorému vstupu alebo výstupu pripočítame konštantu. Matematicky môžeme posun vyjadriť nasledovne:

$$\begin{aligned}x_i &\rightarrow x_i + \Delta x = x'_i, & \Delta x &\in \mathbb{R}^m \\y_i &\rightarrow y_i + \Delta y = y'_i, & \Delta y &\in \mathbb{R}^s.\end{aligned}$$

CCR model nie je invariantný vzhľadom na posun. Pre *BCC* model platí, že ak je vstupne orientovaný tak je invariantný vzhľadom na posun výstupov a opačne, teda ak je výstupne orientovaný tak je invariantný vzhľadom na posun vstupov. Aditívny model je invariantný na posun pri posune vstupov ako aj pri posune výstupov.

4 DEA modely a eko-efektívnosť

4.1 Prehľad prác o meraní eko-efektívnosti

Väčšina článkov o DEA predpokladá žiadúce vstupy a výstupy. Teraz sa bližšie pozrieme na niektoré významné príspevky z teórie DEA, ako aj na riešenie problému eko-efektívnosti v niektorých z nich.

Allen (1999) [2] sa rozhodol o analyzovanie 22 publikovaných článkov o problematike DEA zameraných na problematiku neželateľných výstupov. Zistil, že 15 článkov obsahovalo praktickú aplikáciu DEA modelov na reálnych dátach a iba 7 z nich boli čisto teoretické príspevky. Články poukazovali na rozdielne možnosti riešenia úloh s neželateľnými výstupmi a vhodný výber modelu.

Keďže diplomová práca je zameraná na riešenie úloh s neželateľnými výstupmi zameriame sa teraz na štyri práce spojené s touto problematikou.

Lovell (1995) [10] vo svojom článku porovnával makroekonomické výkony 19 OECD krajín. Neželateľné výstupy v tomto prípade boli emisie CO_2 a emisie dusíka. Z neželateľných výstupov urobil ich prevrátenú hodnotu a považoval ich pri riešení úlohy za želateľné výstupy. Na riešenie úlohy používal aditívny model.

Färe (1996) [6] vo svojom príspevku porovnával výkon US spalovní, ktoré vyprodukovali neželateľné výstupy (emisie SO_2 , NO_x , CO_2). Predpokladá, že na zníženie neželateľných výstupov je potrebné zvýšiť hodnoty vstupov alebo znížiť hodnoty želateľných výstupov. Mieru eko-efektívnosti vypočítava ako vzájomný pomer dvoch hodnôt funkcií, pričom jedna zahŕňa neželateľné výstupy a druhá ich vynecháva.

Courcelle (1998) [4] sa vo svojom článku snažil o ekonomické a environmentálne oceňovanie 23 zberných tuhého komunálneho odpadu a ich triediacich programov. V tomto prípade neželateľný výstup reprezentuje pomer materiálu poslaného na konečné odstránenie zo spracovania a materiálu opúšťajúceho spracovanie. Pri riešení DEA úlohy sa tento tzv. zostatkový pomer zahŕňa ako normálny vstup v DEA.

Korhonen, Luptáčík (2004) [8] v tomto príspevku sa autori snažili poukázať na riešenie úloh s nežiadúcimi výstupmi pomocou rôznych modifikácií CCR modelu. Príklad riešili na reálnych dátach 24 tepelných elektrární v európskych krajinách. Neželateľné výstupy tvorili prach, SO_2 a NO_x . Zistili, že na pohľad rozdielne modely dávali podobné výsledky.

4.2 Základné modely a meranie eko-efektívnosti

V tejto časti uvedieme možné modifikácie CCR modelu pre riešenie úloh s neželateľnými výstupmi, ktoré boli publikované vo vyššie uvedenom článku od autorov Korhena a Luptáčíka [8].

Skôr ako prejdeme k samotnej úprave CCR modelu si napíšeme potrebné teoretické predpoklady. Ako v základných DEA modeloch aj teraz budeme predpokladať n organizačných jednotiek, ktoré spotrebúvajú m vstupov a s výstupov. Výstupy v tomto prípade musíme rozdeliť na želateľné a neželateľné. Želateľný výstup budeme označovať $y \in \mathbb{R}^l$ a neželateľný výstup označíme ako $z \in \mathbb{R}^r$. Keďže každý vstup a výstup má určité váhy z toho dostávame, že váhy pre vstupy ostávajú rovnaké

ako v základných DEA modeloch t.j. $u = (u_1, \dots, u_m)^T$, zmena nastane pri váhach určených pre výstupy, kde vektor váh je rozdelený na váhy pre želateľné výstupy a váhy pre neželateľné výstupy. Vektor váh pre želateľné výstupy je $v = (v_1, \dots, v_l)^T$ a vektor váh pre neželateľné výstupy $w = (w_1, \dots, w_r)^T$, pričom $l + r = s$.

Každá spoločnosť, ktorá produkuje neželateľné výstupy sa snaží o ich minimalizáciu a želateľné výstupy chce maximalizovať. Toto môžeme zabezpečiť viacerými možnosťami. Autori článku ukázali štyri rôzne spôsoby ako možno upraviť CCR model pri produkovani neželateľných výstupov. Budeme ich označovať model A až model D, pričom v každom prípade najskôr zostrojíme úlohu matematického programovania (koncepčný model) a podobným postupom ako pri základných modeloch odvodíme z nich úlohu lineárneho programovania.

Model A

V tomto modeli sú neželateľné výstupy započítané v úlohe matematického programovania so záporným znamienkom v čitateli. Tým docielime, že pri maximalizácii účelovej funkcie ich minimalizujeme. Koncepčný model má nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} \max_{u,v,w} \quad & E_o(u, v, w) = \frac{v^T y_o - w^T z_o}{u^T x_o} \\ & E_i(u, v, w) = \frac{v^T y_i - w^T z_i}{u^T x_i} \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & u > 0 \\ & v > 0 \\ & w > 0 \end{aligned}$$

Model B

Kedže sa snažíme o minimalizáciu neželateľných výstupov, ako veľmi jednoduché riešenie sa naskytla myšlienka zarátania týchto výstupov na stranu vstupov t.j. pripočítali sme ich v menovateli so vstupmi. Potom riešime nasledujúcu úlohu matematického programovania:

$$\begin{aligned} \max_{u,v,w} \quad & E_o(u, v, w) = \frac{v^T y_o}{u^T x_o + w^T z_o} \\ & E_i(u, v, w) = \frac{v^T y_i}{u^T x_i + w^T z_i} \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & u > 0 \\ & v > 0 \\ & w > 0 \end{aligned}$$

Model C

Tento model je podobný s modelom A. Rozdiel je v zámene vstupov a neželateľných výstupov t.j. maximalizujeme pomer medzi rozdielom želateľných výstupov so vstupmi a neželateľnými výstupmi. Úloha má tvar:

$$\begin{aligned} \max_{u,v,w} \quad & E_o(u, v, w) = \frac{v^T y_o - u^T x_o}{w^T z_o} \\ & E_i(u, v, w) = \frac{v^T y_i - u^T x_i}{w^T z_i} \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & u > 0 \\ & v > 0 \\ & w > 0 \end{aligned}$$

Model D

Tento model je obmenou druhého modelu. Rozdiel je len v tom, že minimalizujeme prevrátenú hodnotu účelovej funkcie.

$$\begin{aligned} \min_{u,v,w} \quad & E_o(u, v, w) = \frac{u^T x_o + w^T z_o}{v^T y_o} \\ & E_i(u, v, w) = \frac{u^T x_i + w^T z_i}{v^T y_i} \leq 1, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & u > 0 \\ & v > 0 \\ & w > 0 \end{aligned}$$

Našou úlohou pri riešení modelov je nájsť také váhy vstupov a výstupov, aby hodnota účelovej funkcie $E_o(u, v, w)$ bola čo najvyššia.

Riešenia vyššie uvedených úloh môžeme interpretovať nasledovne. Organizačná jednotka DMU_o pre $o = \{1, \dots, n\}$ je efektívna, ak existuje optimálne riešenie (u^*, v^*, w^*) také, že hodnota účelovej funkcie $E_o^* = E_o(u^*, v^*, w^*) = 1$. Inak je neefektívna a E_o^* udáva mieru efektívnosti.

Tieto úlohy matematického programovania nemusia mať vždy optimálne riešenie kvôli ostrým nerovnostiam v podmienkach kladnosti váh u , v a w .

Teraz si odvodíme CCR model pre eko-efektívnosť z úloh matematického programovania, ktoré sú uvedené vyššie. CCR model odvodíme rovnakým spôsobom z koncepcného modelu ako v tretej kapitole.

Model A

Ako si môžeme všimnúť postupne vykonaním rovnakých úprav ako v tretej časti diplomovej práce dostaneme z úlohy matematického programovania vstupne orientovaný model. V tomto prípade normalizujeme vstupy $u^T x_o = 1$. Teraz sa bližšie pozrieme ako vyzerá primárna a duálna úloha k úlohe matematického programovania.

Primárna úloha má nasledovný tvar:

$$\begin{aligned}
 \max_{u,v,w} \quad & v^T y_o - w^T z_o \\
 & u^T x_o = 1 \\
 & v^T y_i - w^T z_i \leq u^T x_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \\
 & u \geq 0 \\
 & v \geq 0 \\
 & w \geq 0
 \end{aligned}$$

Duálna úloha:

$$\begin{aligned}
 \max_{\substack{\theta, \lambda, s^x \\ s^y, s^z}} \quad & \theta \\
 & \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x = \theta x_o \\
 & \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i + s^z = z_o \\
 & \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - s^y = y_o \\
 & \theta \geq 0, \lambda \geq 0, s^x \geq 0, s^y \geq 0, s^z \geq 0
 \end{aligned}$$

Duálna úloha je skoro v štandardnom tvare vstupne orientovaného CCR modelu. Rozdielom je, že hodnoty neželateľných výstupov pozorovanej jednotky berieme ako hornú hranicu pre lineárnu kombináciu ostatných neželateľných výstupov.

Model B

Tento model zodpovedá vstupne orientovanému CCR modelu. S neželateľnými výstupmi pracujeme ako so vstupmi. Súčasne znižujeme hodnotu vstupov a neželateľných výstupov na zvýšenie eko-efektívnosti.

Primárna úloha:

$$\begin{aligned}
 \max_{u,v,w} \quad & v^T y_o \\
 & u^T x_o + w^T z_o = 1 \\
 & v^T y_i \leq u^T x_i + w^T z_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \\
 & u \geq 0 \\
 & v \geq 0 \\
 & w \geq 0
 \end{aligned}$$

Duálna úloha:

$$\begin{aligned}
 \max_{\substack{\theta, \lambda, s^x \\ s^y, s^z}} \quad & \theta \\
 \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x &= \theta x_o \\
 \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i + s^z &= \theta z_o \\
 \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - s^y &= y_o \\
 \theta \geq 0, \lambda \geq 0, s^x \geq 0, s^y \geq 0, s^z \geq 0
 \end{aligned}$$

Organizačná jednotka DMU_o pre $o = \{1, \dots, n\}$ je CCR efektívna pre model A a model B s neželateľnými výstupmi, ak optimálna hodnota účelovej funkcie v duálnej úlohe je rovná 1 t.j. $\theta^* = 1$ a existuje aspoň jedno riešenie primárnej úlohy (u^*, v^*, w^*) také, že $u^* > 0, v^* > 0, w^* > 0$. Inak hodnotu E_o^* považujeme za mieru efektívnosti.

Z teórie duality lineárneho programovania dostávame, že podmienka efektívnosti $\theta^* = 1$ je ekvivalentná s podmienkou $s^{x^*} = 0, s^{y^*} = 0, s^{z^*} = 0$ v každom optimálnom riešení.

Teraz sa bližšie pozrieme na model C a model D, ktoré nám predstavujú výstupne orientovaný CCR model.

Model C

V tomto modeli rovnakým spôsobom ako pre vstune orientovaný model normalizujeme neželateľné výstupy $w^T z_o = 1$. Tento model je rovnaký ako model A s rozdielom, že autori zamenili postavenie neželateľných výstupov a vstupov. V tomto modeli sa úmerne bude znižovať iba hodnota neželateľných výstupov pri zvyšovaní eko-efektívnosti.

Primárna úloha:

$$\begin{aligned}
 \max_{u, v, w} \quad & v^T y_o - u^T x_o \\
 & w^T z_o = 1 \\
 & v^T y_i - u^T x_i \leq w^T z_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \\
 & u \geq 0 \\
 & v \geq 0 \\
 & w \geq 0
 \end{aligned}$$

K tej to úlohe duálny tvar je nasledovný:

$$\begin{aligned}
 \max_{\substack{\psi, \lambda, s^x \\ s^y, s^z}} \quad & \psi \\
 \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x &= x_o \\
 \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i + s^z &= \psi z_o \\
 \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - s^y &= y_o \\
 \lambda \geq 0, s^x \geq 0, s^y \geq 0, s^z \geq 0.
 \end{aligned}$$

Model D

V tomto modeli sú normalizované žiadúce výstupy.

Primárna úloha má tvar:

$$\begin{aligned}
 \min_{u, v, w} \quad & u^T x_o + w^T z_o \\
 v^T y_o &= 1 \\
 u^T x_i + w^T z_i &\leq v^T y_i, \quad \forall i = 1, \dots, n \\
 u &\geq 0 \\
 v &\geq 0 \\
 w &\geq 0
 \end{aligned}$$

Duálna úloha:

$$\begin{aligned}
 \max_{\substack{\psi, \lambda, s^x \\ s^y, s^z}} \quad & \psi \\
 \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x &= x_o \\
 \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i + s^z &= z_o \\
 \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - s^y &= \psi y_o \\
 \lambda \geq 0, s^x \geq 0, s^y \geq 0, s^z \geq 0.
 \end{aligned}$$

Pre efektívnosť modelu C a modelu D platí to isté ako vo predchádzajúcom prípade s rozdielom, že miera efektívnosti je prevrátenou hodnotou optimálnej hodnoty účelovej funkcie.

4.3 Aditívny model s váhami pre neželateľné výstupy

Táto časť je spracovaná pomocou článku [5]. Podľa tzv. *štandardného prístupu* predpokladáme, že každá jednotka je zadaná pomocou troch disjunktných tried vstupov a výstupov.

Tieto triedy sú rozdelené na:

1. želateľné vstupy a výstupy, ktoré beriem s pozitívnou hodnotou;
2. neželateľné vstupy a výstupy berieme so zápornou hodnotou;
3. neutálne vstupy a výstupy nemajú prirodzenú žiadnu hodnotu z pohľadu riešenia problému.

Naše vstupy a výstupy budú mať v tomto prípade tvar⁶:

$$x_i = \begin{pmatrix} x_i^g \\ x_i^b \\ x_i^n \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_i = \begin{pmatrix} y_i^g \\ y_i^b \\ y_i^n \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n$$

Teraz si označíme dolné ohraničenia váh, ktoré máme vopred zadané. Ako už bolo vyššie spomenuté neutálne vstupy a výstupy nemajú žiadnu hodnotu z pohľadu riešenia problému, a preto tieto vstupy a výstupy neberieme do úvahy pri odvodení nasledujúceho modelu. Teraz si označíme dolné ohraničenia váh, ktoré máme vopred zadané:

$$w^{gx} > 0, w^{bx} > 0, w^{gy} > 0, w^{by} > 0.$$

Ako vhodne určiť tieto váhy bolo uvedené v časti 3.4.

Budeme riešiť nasledujúcu úlohu lineárneho programovania pre každé $o = \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \min_{u,v} \quad & u_b^T x_o + v_b^T y_o - v_g^T y_o - u_g^T x_o \\ & u_b^T x_i + v_b^T y_i - v_g^T y_i - u_g^T x_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \\ & u_b \geq w^{bx}, u_g \geq w^{gx} \\ & v_b \geq w^{by}, v_g \geq w^{gy}. \end{aligned}$$

Výsledky interpretujeme rovnakým spôsobom ako v aditívnom modeli s váhami. Útvar DMU_o je efektívny, ak hodnota účelovej funkcie $E_o^*(u_g^*, u_b^*, v_g^*, v_b^*) = 0$. Inak je neefektívna a hodnota $E_o^*(u_g^*, u_b^*, v_g^*, v_b^*) \in (-\infty, 0)$ je mierou efektívnosti. Túto mieru efektívnosti je potrebné preškalovať do intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Môžeme to urobiť rovnakým spôsobom ako je uvedené v 3.4.

⁶pričom: x_i^g resp. y_i^g predstavujú želateľný vstup resp. želateľný výstup (skratka g je zo slova goods), x_i^b resp. y_i^b predstavuje neželateľný vstup resp. výstup (skratka b je zo slova bads) a posledné x_i^n resp. y_i^n predstavuje neutálne hodnoty vstupov a výstupov (skratka n je zo slova naturals)

K nej prisluchajúca duálna úloha:

$$\begin{aligned}
 \min_{\substack{\lambda, s^{bx}, s^{gx} \\ s^{by}, s^{gy}}} \quad & -((w^{bx})^T s^{bx} + (w^{by})^T s^{by} - (w^{gx})^T s^{gx} - (w^{gy})^T s^{gy}) \\
 & \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^b + s^{bx} = x_o^b \\
 & \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^b + s^{by} = y_o^b \\
 & \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^g - s^{gx} = x_o^g \\
 & \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^g + s^{gy} = y_o^g \\
 & \lambda \geq 0, s^{bx} \geq 0, s^{by} \geq 0, s^{gx} \geq 0, s^{gy} \geq 0.
 \end{aligned}$$

4.4 SBM model a neželateľné výstupy

V tejto časti si ukážeme modifikáciu SBM modelu pri produkcií neželateľných výstupoch. Ako vieme, firmy nie vždy produkujú len želateľné výstupy, ktoré sa snažia maximalizovať, ale taktiež produkujú i neželateľné výstupy, ktoré sa pokúšajú minimalizovať. Pri modifikácii SBM modelu využijeme myšlienku modelu B uvedeného pri úprave CCR modelu. Keďže sa snažíme o minimalizáciu neželateľných výstupov ako aj minimalizáciu vstupov, jednoduché riešenie je započítanie týchto výstupov ku vstupom t.j. s neželateľnými výstupmi budeme pracovať ako so vstupmi. Predpoklady sú rovnaké ako pri odvádzaní CCR modelov pri produkcii neželateľných výstupov. Modifikovaný SBM model zdefinujeme ako nasledovnú úlohu matematického programovania:

Konštantné výnosy z rozsahu

$$\begin{aligned}
 (SBMN_o) \quad & \min_{\lambda, s^x, s^y, s^z} \quad \rho = \frac{1 - \frac{1}{m} x_o^{-T} s^x}{1 + \frac{1}{l+r} (y_o^{-T} s^y + z_o^{-T} s^z)} \\
 & x_o = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x \\
 & y_o = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - s^y \\
 & z_o = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i + s^z \\
 & \lambda \geq 0, s^x \geq 0, s^y \geq 0, s^z \geq 0.
 \end{aligned}$$

Variabilné výnosy z rozsahu

$$\begin{aligned}
\min_{\lambda, s^x, s^y, s^z} \quad & \rho = \frac{1 - \frac{1}{m} x_o^{-T} s^x}{1 + \frac{1}{l+r} (y_o^{-T} s^y + z_o^{-T} s^z)} \\
x_o = & \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x \\
y_o = & \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - s^y \\
z_o = & \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i + s^z \\
1 = & \sum_{i=1}^n \lambda_i \\
\lambda \geq 0, s^x \geq 0, s^y \geq 0, s^z \geq 0.
\end{aligned}$$

Vektor $s^x \in \mathbb{R}^m$ zodpovedá prebytku vstupov a $s^z \in \mathbb{R}^r$ predstavuje prebytok neželateľných výstupov pričom $s^y \in \mathbb{R}^l$ zodpovedá nedostatku želateľných výstupov.

Ako v predchádzajúcich prípadoch interpretácia výsledkov je nasledovná. Organizačná jednotka DMU_o pre $o = \{1, \dots, n\}$ je efektívna za prítomnosti neželateľných výstupov, ak úloha $(SBMN_o)$ má optimálne riešenie $\rho^* = 1$ t.j. $s^{x*} = 0$, $s^{y*} = 0$ a $s^{z*} = 0$. Inak DMU_o je neefektívna.

Rovnako ako v predchádzajúcej časti je potrebné úlohu matematického programovania pretransformovať na úlohu, ktorá je jednoduchšie riešiteľná. Použitím rovnakých transformácií dostávame nasledujúcu úlohu lineárneho programovania:

Konštantné výnosy z rozsahu

$$\begin{aligned}
\min_{\substack{\Lambda, S^x, S^y \\ S^z, t}} \quad & \tau = t - \frac{1}{m} x_o^{-T} S^x \\
1 = & t + \frac{1}{l+r} (y_o^{-T} S^y + z_o^{-T} S^z) \\
tx_o = & \sum_{i=1}^n \Lambda_i x_i + S^x \\
ty_o = & \sum_{i=1}^n \Lambda_i y_i - S^y \\
tz_o = & \sum_{i=1}^n \Lambda_i z_i + S^z \\
\Lambda \geq 0, S^x \geq 0, S^y \geq 0, S^z \geq 0, t \geq 0.
\end{aligned}$$

Variabilné výnosy z rozsahu

$$\begin{aligned}
\min_{\substack{\Lambda, S^x, S^y \\ S^z, t}} \quad & \tau = t - \frac{1}{m} x_o^{-T} S^x \\
& 1 = t + \frac{1}{l+r} (y_o^{-T} S^y + z_o^{-T} S^z) \\
& tx_o = \sum_{i=1}^n \Lambda_i x_i + S^x \\
& ty_o = \sum_{i=1}^n \Lambda_i y_i - S^y \\
& tz_o = \sum_{i=1}^n \Lambda_i z_i + S^z \\
& t = \sum_{i=1}^n \Lambda_i \\
& \Lambda \geq 0, S^x \geq 0, S^y \geq 0, S^z \geq 0, t \geq 0.
\end{aligned}$$

Optimálne riešenie úlohy lineárneho programovania je τ^* . Rovnakú hodnotu účelovej funkcie nadobúda aj pôvodná úloha *SBM* modelu s neželateľnými výstupmi t.j. $\tau^* = \rho^*$. Na zistenie ďalších premenných použijeme spätnú transformáciu ako v predchádzajúcom prípade.

Teraz sa pozrieme bližšie na duálnu úlohu k úlohe lineárneho programovania pre konštantné výnosy z rozsahu:

$$\begin{aligned}
\max_{\xi, u, v, w} \quad & \xi \\
& \xi + vx_o - uy_o + wz_o = 1 \\
& u^T y_i - v^T x_i - w^T z_i \\
& v \geq \frac{1}{m} x_o^{-1} \\
& u \geq \frac{\xi}{l+r} y_o^{-1} \\
& w \geq \frac{\xi}{l+r} z_o^{-1},
\end{aligned}$$

kde duálne premenné $v \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^l$, $w \in \mathbb{R}^r$ zodpovedajú ohraňčeniam z predchádzajúcej úlohy.

Elimináciou ξ z prvej podmienky a dosadením dostávame ekvivalentnú duálnu úlohu

lineárneho programovania pre SBM model:

$$\begin{aligned}
 \max_{u,v,w} \quad & 1 + uy_o - vx_o - wz_o \\
 & u^T y_i - v^T x_i - w^T z_i \\
 & v \geq \frac{1}{m} x_o^{-1} \\
 & u \geq \frac{1 + uy_o - vx_o - wz_o}{s + r} y_o^{-1} \\
 & w \geq \frac{1 + uy_o - vx_o - wz_o}{s + r} z_o^{-1}.
 \end{aligned}$$

5 Eko-efektívnosť

V základných DEA modeloch sa snažíme vstupy minimalizovať a výstupy maximalizovať. V skutočnosti je veľmi málo úloh, kde by boli všetky výstupy želateľné. Dá sa povedať, že je to skôr nereálne. Pri eko-efektívnosti je potrebné zahrnúť do týchto modelov aj *neželateľné výstupy*, tak ako sme si to ukázali v predchádzajúcich modeloch. Takéto neželateľné výstupy sú najčastejšie spojené s ekológiou ako napr. odpad alebo emisie, taktiež sa môžu objavovať aj v zdravotníctve alebo v podnikaní.

V praktickej časti diplomovej práce sa zaoberáme riešením úloh s neželateľnými výstupmi. Zameriame sa na francúzske cementárne, v ktorých neželateľný výstup je produkcia skleníkového plynu CO_2 a produkcia škváry.

Stručne si popíšeme niektoré dokumenty spojené s emisiami ako je Kjótsky protokol a obchodovanie s nimi.

5.1 Kjótsky protokol

Kjótsky protokol bol vyjednaný v Kjóte v roku 1997, definuje povinnosť evidovať a inventarizovať emisie šiestich skleníkových plynov oxidu uhličitého (CO_2), metánu (CH_4), oxidu dusného (N_2O) a tzv. F-plynov (HFC_s , PFC_s a SF_6) podľa schválenej metodiky IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change - Medzivládny panel o zmene klímy).

Ide vlastne o medzinárodnú dohodu vyjednanú v súvislosti s globálnym otepľovaním. Krajiny, ktoré podpísali tento protokol sa zaviazali znížiť emisie vyššie uvedených skleníkových plynov alebo sa zaviazali k obchodu s emisiami ak udržiavajú alebo zvyšujú emisie ich plynov. Tento protokol podpísalo spolu 141 krajín sveta. Významnými výnimkami sú Spojené štáty americké a Austrália. Formálny názov tejto dohody je Kjótsky protokol k rámcovému dohovoru OSN o zmene klímy.

Kjótsky protokol je záväzná dohoda, na základe ktorej priemyselné krajiny musia znížiť svoje emisie skleníkových plynov o 5,2% v porovnaní s rokom 1990. V máji 2002 ratifikovala Európska únia a jej členské štáty Kjótsky protokol a tým sa zaviazala znížiť emisie skleníkových plynov o 8 %. Národné ciele ďalších krajín sú 7% redukcie pre USA a 6% pre Japonsko. Ako sme už vyššie spomínali Kjótsky protokol podporuje obchod s emisiami ako prostriedok, ktorým môžu vyspelé krajiny splniť svoje emisné záväzky. V nasledujúcej časti poukážeme na základný princíp v obchodovaní s emisiami.

5.2 Obchodovanie s emisiami CO_2

Jedným z kľúčových nástrojov, ktorými sa Európska Únia snaží znížiť emisie skleníkových plynov je Európsky systém obchodovania s emisiami (EU ETS - v anglickej literatúre *the European Union Greenhouse Gas Emission Trading Scheme*). Tento systém zabezpečuje, aby v rámci sektorov energetiky a priemyslu došlo k zníženiu emisných kvót skleníkových plynov s čo možno najnižšími nákladmi na hospodárstvo. Túto schému Európska Únia spustila 1.1.2005 pre všetkých 25 členských štátov. Hlavným cieľom EU ETS je umožniť členským krajinám splniť všetky

záväzky, ktoré sú obsiahnuté v Kjótskom protokole. Tento systém nestojí na určovaní nových cieľov, ale na trhových mechanizmoch.

EU ETS stojí na šiestich základných princípoch ⁷:

1. je to systém založený na princípe „limit a obchod“;
2. pôvodne sa zameriava na emisie CO_2 veľkých priemyselných znečisťovateľov;
3. implementácia prebieha vo fázach s pravidelnými revíziami, ktoré vytvárajú možnosť rozšírenia schémy na iné skleníkové plyny a ďalšie sektory hospodárstva;
4. rozhodovanie o alokačných plánoch limitov emisií prebieha tiež periodicky vo fázach;
5. systém obsahuje robustný rámec kontroly plnenia;
6. trh s emisiami funguje v celej EÚ, špeciálnymi mechanizmami však otvára možnosti redukcie emisií aj v iných krajinách, je otvorený spolupráci s inými podobnými systémami.

Pri obchodovaní s emisiami môžu nastať rôzne problémy ako napr. transparentné a spravodlivé pravidlá na prideľovanie emisných kvót, legislatívna úprava „voľného obchodovania“, nerovnomerné zaťažovanie jednotlivých sektorov priemyslu, nutné dôkladné monitorovanie.

Systém reguluje emisie oxidu uhličitého približne 15 000 spoločností alebo zariadení v odvetviach rafinérií, energetiky, papierenstva, výroby skla, ocele a cementu. Spoločnostiam sú pridelené obchodovateľné povolenky na každý rok. Spoločnosti, ktorých emisie prekročia množstvo povoleniek čelia vysokej pokute 100 euro⁸ (3 350,-) za každú jednu tonu oxidu uhličitého nepokrytú povolenkou počas obdobia 2008 - 2012. Zaplatenie pokuty nie je žiadnym riešením a tak okrem jej zaplatenia sa od spoločnosti vyžaduje odovzdanie chýbajúcich povoleniek v nasledujúcom roku. Namiesto znižovania svojich vlastných emisií môže spoločnosť dosiahnuť svoj emisný cieľ aj prostredníctvom nákupu kvót od inej spoločnosti, ktorá ich má nadbytok.

⁷prevzaté z internetovej stránky www.europskaunia.sk/system_obchodovania_s_emisiami

⁸ak berieme 1 euro = 33,50 SKK

6 Hodnotenie efektivity francúzskych cementární

V tejto kapitole sa zaoberáme hodnotením efektivity tridsiatich piatich najznámejších francúzskych cementární pomocou SBM modelu.

6.1 Výber modelu

V tejto časti si bližšie vysvetlíme prečo sme sa rozhodli použiť na výpočet efektivity práve SBM model. Porovnaním s BCC a CCR modelmi veľkou výhodou SBM modelu je, že zachytáva všetky zdroje neefektívnosti. Pri použití CCR a BCC modelov, ak je neefektívna organizačná jednotka projektovaná na hranicu pseudoefektívnosti tak hodnoty doplnkových premenných (s^x , s^y a s^z) nie sú zachytené v mierke efektívnosti. Porovnaním týchto modelov s aditívnym model s vhodne zvolenými váhami, ktorý síce zachytáva všetky zdroje neefektívnosti, ale v porovnaní s SBM modelom má nevýhodu v zle naškálovej hodnote účelovej funkcie. Pri aditívnom modeli hodnota účelovej funkcie leží na intervale $(-\infty, 0)$, a preto je potreba preškálovania tejto hodnoty na interval $\langle 0, 1 \rangle$. Z týchto dôvodov sme sa rozhodli použiť pre riešenie úlohy SBM model. Na porovnanie hodnoty efektivity pri použití konštantných výnosoch z rozsahu sme sa tiež zaoberali modifikovaným CCR modelom typu A a B , ktoré boli uvedené v časti 4.2.

6.2 Dáta. Výber vstupov a výstupov

Teraz si objasníme význam použitých dát a pomocou SBM modelu s neželateľnými výstupmi vypočítame mieru efektívnosti a vyhodnotíme kvalitu francúzskych cementární.

Údaje sú získané z CEMBUREAU⁹ WCD databázy, ktoré sú uverejnené v štúdií Európskej komisie: Evaluation of alternative initial allocation mechanisms in a european union greenhouse gas emissions allowance trading scheme [7, str. 130]. Údaje, ktoré použijeme na výpočet miery efektívnosti a zhodnotenie kvality francúzskych cementární sú z roku 1993. Je pravdepodobné, že existujú aj vhodnejšie údaje z iného časového obdobia, ale nie pre taký počet cementární ako je uvedený v tejto štúdii.

CEMBUREAU je Európske združenie výrobcov cementu, ktoré obsahuje 27 členov. V súčasnej dobe zahŕňa členské štáty Európskej Únie s výnimkou Cyprusu, Litvy, Malty a Slovenska ďalej k združeniu sa pričlenili európske štáty Nórsko, Švajčiarsko a Turecko. V roku 2006 v 26 členských štátoch združenia CEMBUREAU produkcia cementu dosiahla 314 miliónov ton, čo predstavuje okolo 12,4% produkcie cementu na svete.

Výroba cementu je proces veľmi náročný na energiu a prírodné suroviny. Pre lepšie pochopenie vstupných a výstupných dát si stručne popíšeme niektoré časti výrobného procesu cementu.

Suroviny na výrobu cementu sú zmesou oxidov, niekde je potrebné pridať íl a

⁹ viac informácií o združení výrobcov cementu v Európe je uvedených na www.cembureau.be

vápenec. Surová zmes sa páli v rotačnej peci, čo je pomaly sa otáčajúci, ľahko naklonený valec, dlhý zhruba 100 metrov. Teplota vo valci vzrastá s jeho dĺžkou až na približne 1480 °C. Teplota v peci je regulovaná a zmes sa tak speká do hrudiek. Okrem produkcie samotného cementu vzniká i neželateľný produkt, ide o množstvo produkovaného skleníkového plynu CO_2 , ktorý robí z výroby cementu veľkého prispievateľa ku globálnemu otepľovaniu Zeme.

Vo všeobecnosti platí, že počet premenných by nemal presahovať tretinu počtu analyzovaných organizačných jednotiek. Čím sa použije väčší počet premenných tým klesá výpovedná hodnota, vznikajú skreslené výsledky a väčšie množstvo efektívnych jednotiek.

Všetky dostupné hodnoty pre jednotlivé organizačné jednotky sú uvedené v Tab.1. Teraz si napíšeme používané vstupy a výstupy pri výpočte miery efektívnosti:

Vstup:

Používame jeden vstup, teplo potrebné na výrobu cementu (Heat Input), ktoré je merané v jednotkách MMBtu. Teplota v rotačných peciach v jednotlivých cementárňach sa nachádza v rozmedzí 236 až 3 027 MMBtu, kde najnižšia hodnota prislúcha cementárni La Perelle a najvyššia hodnota Saint-Piree-la-Cour.

Výstup:

Ako je zrejmé z popisu vyššie pri výrobe cementu vznikajú želateľné a neželateľné výstupy.

Želateľný výstup: v danom prípade máme jeden a to produkcia cementu, ktorá je uvedená v 1 000 tonách. Rozmedzie produkovania cementu sa nachádza v rozmedzí 33 000 (Dannes) až 1 230 000 (Saint-Piree-la-Cour) tonách, ktoré závisí od viacerých faktorov (veľkosť fabriky, počet pracovníkov ...).

Neželateľný výstupy: pri výrobe cementu vzniká viac neželateľných výstupov. V našich dátach, ktoré boli dostupné budeme používať emisie CO_2 a škváru. Tieto výstupy sú uvedené v 1 000 tonách. Najväčšiu produkciu CO_2 mala cementáreň Saint-Piree-la-Cour a najnižšiu La Perelle.

Z toho dostávame, že každá cementáreň je charakterizovaná jedným vstupom, jedným želateľným výstupom a dvoma neželateľnými výstupmi.

Vstup:	teplo
Želateľný výstup:	cement
Neželateľné výstupy:	emisie
	škvára

Tab. 1: Produkcia francúzskych cementární

Názov cementárne	DMU	Vstupné teplo (MMBtu)	Produkcia cementu v 1000 t	Emisie v 1000 t	Produkcia škáry v 1000 t
Saint-Piree-la-Cour	1	3027	1230	755	1014
Heming	2	2109	844	549	706
Couvrot	3	2354	1074	541	736
Montalieu	4	2239	870	518	685
Airvault	5	2343	1074	516	687
Le Teil	6	1844	745	462	617
La Malle	7	1999	662	441	586
Martres	8	1965	599	407	494
Origny	9	1843	623	399	528
Corneilles	10	1720	541	389	431
Lexos	11	1466	583	375	491
Beucaire	12	1465	614	354	490
Lumbres	13	2107	468	349	377
La Couronne	14	1283	523	345	430
Grave-de-Peille	15	1460	580	344	456
Bussac	16	1373	307	331	460
Havre-Saint-Vigor	17	1086	430	290	364
Port-la-Nouvelle	18	955	388	256	320
Rochefort	19	979	375	255	328
Xeuilley	20	1088	405	251	319
Beffes	21	1130	479	249	331
Altkirch	22	954	375	248	319
Contes	23	1173	340	242	294
Saint-Egreve	24	940	400	235	315
Gargenville	25	915	614	221	307
Dannes	26	953	33	210	239
Val-d'Aizergues	27	901	334	201	264
Crechy	28	728	310	196	244
Frangy	29	800	272	190	235
Villiers-au-Bonin	30	732	276	177	245
Ranville	31	774	338	170	227
Pont-a-vendin	32	594	135	101	106
Chambery	33	376	160	92	126
Cruas	34	330	135	80	110
La Perelle	35	236	75	52	59
max	-	3027	1230	755	1014
min	-	236	33	52	59
priemer	-	1321,171	491,7429	308,3143	398,2857
stand. odchýlka	-	649,6976	277,8617	151,3029	203,479

6.3 Priebeh výpočtu a vyhodnotenie výsledkov

Pri výpočtoch hodnôt efektívnosti a doplnkových premenných a pri programovaní SBM modelu sme použili matematický softvér MATLAB. Keďže išlo o riešenie úlohy lineárneho programovania využili sme zabudovanú funkciu *linprog*. Zdrojový kód SBM modelu s neželateľnými výstupmi pre konštantné a variabilné výnosy z rozsahu je uvedený v prílohe. Rovnako aj zdrojový kód pre modifikovaný CCR model typu A a typu B je uvedený tiež v prílohe. Numerické výpočty prebehli bez problémov. Výsledky pre konštantné a variabilné výnosy z rozsahu sú uvedené v Tab.3 - Tab.5. Pre každú organizačnú jednotku *DMU* sú v nich uvedené hodnoty efektivity, sklzy pre všetky premenné t.j. $s^x, s^y, s^{yn1}, s^{yn2}$ a hodnoty λ , pričom v tabuľkách sú uvedené iba premenné λ , ktoré reprezentovali efektívne jednotky.

Z tabuľky výsledkov pre konštantné výnosy z rozsahu (Tab.3) vidíme, že iba jedna organizačná jednotka nadobúda hodnotu efektivity 1, t.j. je efektívna. Ide o francúzsku cementáreň *Gargenville (DMU 25)*. Efektívna jednotka leží na hranici efektívnosti a nemá v žiadnej premennej sklzy. Keďže sme v štvorrozmernom priestore je výsledok prekvapivý, očakávali sme viac efektívnych jednotiek. Predpokladáme, že to môže byť spôsobené vysokou koreláckou medzi vstupmi a výstupmi, ktorá je uvedená v Tab.2:

Tab.2: Korelácia vstupov a výstupov

	teplo	cement	emisie CO_2	škvára
teplo	1	0,904075	0,972785	0,9528
cement	0,904075	1	0,932925	0,945703
emisie CO_2	0,972785	0,932925	1	0,992861
škvára	0,9528	0,945703	0,992861	1

Po odstránení dát efektívnej jednotky (t.j. pracovali sme už len s 34 *DMU*) vyšla znova jedna organizačná jednotka efektívna - cementáreň *Airvault (DMU 5)*. Pri práci s tridsiatimi troma *DMU* (po odstránení dát aj cementárne *Airvault*) vyšli dve organizačné jednotky efektívne - *Couvrot* a *Ramville*.

Teraz sa vrátime k našej tabuľke s výsledkami Tab.3. Iba jedna organizačná jednotka je efektívna a ostatné cementárne pracujú, na základe výsledkov SBM modelu, neefektívne. Ich miera efektívnosti je uvedená v tabuľke. Najnižšiu mieru efektívnosti nadobúda organizačná jednotka 26 (*Dannes*) a jej hodnota je 0,0318. Teraz sa bližšie pozrieme na to ako sa z neefektívnej jednotky môže stať efektívna t.j. aby sa dostala na hranicu efektívnosti pomocou zníženia vstupov a neželateľných výstupov alebo zvýšenia výstupov.

Bližšie sa pozrieme na jednotku 1 (*Saint-Piree-la-Cour*), ktorej hodnota miery efektivity je 0,4772 a jej neefektívnosť je zapríčinená sklzmi v premenných vstupov (vstupné teplo) a obidvoch neželateľných výstupoch (emisie, škvára). Odstránením týchto sklzov by sa daná jednotka dostala na hranicu efektívnosti. Keďže bola iba jedna organizačná jednotka efektívna tak tvorí pre všetky *DMU* referenčnú množinu.

Podobne, ak sa pozrieme na organizačnú jednotku 28 (*Crechy*), tak vidíme, že hodnota efektívnosti je 0,5016 čiže organizačná jednotka nie je efektívna. Hodnoty sklzov nám hovoria ako je potrebné upraviť proces na výrobu cementu, aby cementáreň pracovala efektívne.

V Tab.4 je porovnanie výsledkov miery efektívnosti upraveného CCR modelu (spôsoby úpravy sú uvedené v kapitole 4.2), a to modelu A a modelu B, s výsledkami miery efektívnosti SBM modelu.

CCR model je model s konštantnými výnosmi z rozsahu, a preto na porovnanie výsledkov používame SBM model s rovnakými výnosmi z rozsahu. Pri programovaní CCR modelov sme používali multiplikatívny tvar úlohy. V druhom stĺpci Tab.4 sú výsledky z upraveného CCR modelu, model A, kde neželateľné výstupy sa snažíme minimalizovať započítaním so záporným znamienkom v účelovej funkcii. V treťom stĺpci Tab.4 sú uvedené výsledky upraveného modelu B, kde s neželateľnými výstupmi pracujeme ako so vstupmi.

Najvyššie hodnoty efektívnosti sú dosiahnuté pri použití druhého modelu (model B). Porovnaním výsledkov CCR modelov je vidieť, že výsledné hodnoty sa veľmi nelíšia. Pri porovnaní efektivity platí:

$$E_{SBM} \leq E_{CCR}.$$

Toto je dôsledkom toho, že SBM model zohľadňuje viac druhov neefektívnosti ako CCR model.

Najväčší rozptyl miery efektívnosti sme zaznamenali pri použití CCR modelu typu B, kde miera efektívnosti sa pohybovala v rozmedzi 6,9% až 78,17%. Najnižšia miera sa zaznamenala pri použití SBM modelu (3,18%). Na Obr.6 sú tieto výsledky znázornené graficky.

Tab.3: Výsledky riešenia úlohy - konštantné výnosy z rozsahu

DMU	efektivita	s(x) (MMBtu)	s(y) v 1000 t	sn1(y) v 1000 t	sn2(y) v 1000 t	λ_{25}
1	0,4772	1971,71	3,41E-10	515,6679	658,8684	3,3080
2	0,4648	1427,496	5,7E-11	411,2091	476,2491	2,3051
3	0,5736	1108,264	3,14E-12	227,1445	292,7007	2,5729
4	0,462	1627,489	2,16E-13	353,7455	431,6987	2,4468
5	0,5907	1087,015	5,16E-10	189,4799	219,5935	2,5607
6	0,4733	1218,889	2,83E-11	321,9994	406,1359	2,0154
7	0,3801	2051,828	6,58E-12	410,8058	516,7419	2,1850
8	0,3527	2360,646	5,27E-11	421,3269	428,1531	2,1474
9	0,3927	1815,635	1,1E-10	346,9483	429,8128	2,0143
10	0,3632	1949,339	2,55E-10	414,4562	342,402	1,8797
11	0,4622	1007,572	1,82E-11	278,6755	336,6216	1,6026
12	0,4998	880,5522	1,6E-11	212,932	292,9816	1,6010
13	0,2548	4259,027	7,35E-10	545,5436	432,0828	2,3030
14	0,4738	829,0418	3,38E-12	258,0542	277,3907	1,4023
15	0,4727	1006,135	2,12E-13	228,4404	280,4032	1,5957
16	0,2307	2747,724	9,23E-11	661,8309	919,9597	1,5007
17	0,4567	754,5435	6,74E-11	229,1993	252,5415	1,1870
18	0,472	622,2458	7,2E-12	192,1621	208,1083	1,0436
19	0,4392	736,1111	2,41E-11	210,2671	246,1375	1,0699
20	0,4397	873,3227	1,82E-12	189,7093	210,0341	1,1892
21	0,5288	658,8502	8,6E-11	121,2375	144,837	1,2349
22	0,4543	674,6643	1,18E-09	192,9602	224,5025	1,0427
23	0,3309	1542,762	1,12E-11	276,9396	287,0749	1,2820
24	0,507	542,2091	4,54E-12	143,5381	181,3424	1,0272
25	1	0	0	0	0	1
26	0,0318	17493,71	3,65E-10	3834,475	4306,286	1,0409
27	0,4397	730,0432	2,27E-13	146,2227	175,5793	0,9845
28	0,5016	419,2584	2,99E-12	133,0285	140,2452	0,7957
29	0,3892	778,777	4,88E-12	181,7459	195,3669	0,8741
30	0,435	570,8046	1,01E-11	138,1952	190,4101	0,8000
31	0,5515	415,4125	4,82E-11	74,28704	89,12838	0,8459
32	0,2617	1160,107	4,55E-11	154,7585	113,687	0,6492
33	0,5088	216,9811	4,32E-11	54,26199	72,53774	0,4110
34	0,484	211,3636	2,73E-11	51,51736	69,7093	0,3605
35	0,3695	262,2463	5,41E-13	52,79648	45,39621	0,2579

Tab.4: Porovnanie CCR modelu s SBM

Názov cementárne	DMU	CCR model A	CCR model B	SBM
Saint-Piree-la-Cour	1	0,6055	0,6065	0,4772
Heming	2	0,5964	0,5977	0,4648
Couvrot	3	0,6799	0,7296	0,5736
Montalieu	4	0,5791	0,6350	0,4620
Airvault	5	0,6831	0,7817	0,5907
Le Teil	6	0,6021	0,6037	0,4733
La Malle	7	0,4935	0,5648	0,3801
Martres	8	0,4543	0,6063	0,3527
Origny	9	0,5038	0,59	0,3927
Cormeilles	10	0,4687	0,6276	0,3632
Lexos	11	0,5926	0,5937	0,4622
Beucaire	12	0,6246	0,6265	0,4998
Lumbres	13	0,331	0,6207	0,2548
La Couronne	14	0,6075	0,6081	0,4738
Grave-de-Peille	15	0,592	0,636	0,4727
Bussac	16	0,3332	0,3338	0,2307
Havre-Saint-Vigor	17	0,5901	0,5907	0,4567
Port-la-Nouvelle	18	0,6055	0,6062	0,472
Rochefort	19	0,5708	0,5716	0,4392
Xeuilley	20	0,5547	0,6348	0,4397
Beffes	21	0,6317	0,7236	0,5288
Altkirch	22	0,5858	0,5878	0,4543
Contes	23	0,432	0,5782	0,3309
Saint-Egreve	24	0,6341	0,6349	0,507
Gargenville	25	1	1	1
Dannes	26	0,0516	0,069	0,0318
Val-d'Azergues	27	0,5524	0,6326	0,4397
Crechy	28	0,6346	0,6352	0,5016
Frangey	29	0,5067	0,5787	0,3892
Villiers-au-Bonin	30	0,5619	0,5633	0,435
Ranville	31	0,6508	0,7445	0,5515
Pont-a-vendin	32	0,3387	0,6368	0,2617
Chambery	33	0,6341	0,6349	0,5088
Cruas	34	0,6096	0,6136	0,484
La Perelle	35	0,4736	0,6356	0,3695

Tab.5: Výsledky riešenia úlohy - variabilné výnosy z rozsahu

DMU	efektivita	$s(x)$ (MMBtu)	$s(y)$ v 1000 t	$sn1(y)$ v 1000 t	$sn2(y)$ v 1000 t	λ_1	λ_5	λ_{25}	λ_{35}
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
2	0,6393	480,0628	0	180,5063	209,0072	0	0,5	0,5	0
3	0,9593	10,9981	0	24,9992	48,9983	0	1	0	0
4	0,6546	529,2196	0	132,82	166,5142	0	0,5565	0,4435	0
5	1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	0,5864	522,3078	0	156,9973	201,7932	0	0,2848	0,7152	0
7	0,4161	934,8938	0	189,2071	239,3347	0	0,1044	0,89564	0
8	0,3543	1068,855	0	190,6999	193,8983	0	0	0,97224	0,0278
9	0,4001	900,1279	0	172,2367	213,5757	0	0,0196	0,9804	0
10	0,3723	897,0305	0	190,8979	157,5957	0	0	0,8646	0,1355
11	0,4668	589,9898	0	163,714	198,2564	0	0	0,9424	0,0575
12	0,4998	549,9875	0	132,996	182,9945	0	0	1	0
13	0,2695	1376,03	0	173,7867	137,1836	0	0	0,7291	0,2709
14	0,4892	482,6575	0	152,533	164,8707	0	0	0,8312	0,1688
15	0,478	587,8015	0	133,6577	164,6404	0	0	0,9369	0,0631
16	0,2708	844,7002	0	206,2461	294,2373	0	0	0,4304	0,5695
17	0,4933	402,7548	0	126,6919	141,6604	0	0	0,6586	0,34146
18	0,5239	324,7669	0	105,8662	116,9911	0	0	0,5808	0,4194
19	0,4916	365,051	0	108,938	130,968	0	0	0,5566	0,4434
20	0,4831	436,3298	0	95,5334	108,1664	0	0	0,6123	0,3877
21	0,5583	385,0968	0	70,3311	86,1185	0	0	0,7495	0,2505
22	0,5089	340,1189	0	101,9307	121,9593	0	0	0,5566	0,44346
23	0,3809	603,1888	0	106,9153	113,0751	0	0	0,4917	0,5084
24	0,5593	294,5365	0	81,1019	106,4685	0	0	0,6029	0,3971
25	1	0	0	0	0	0	0	1	0
26	0,1286	717,0647	41,999	157,9965	179,9961	0	0	0	1
27	0,5112	338,7865	0	67,7953	85,8351	0	0	0,4805	0,5195
28	0,5968	195,9344	0	70,3163	76,8728	0	0	0,436	0,5640
29	0,4823	315,8489	0	76,2348	85,3613	0	0	0,3655	0,6346
30	0,5373	242,8163	0	61,9769	93,5162	0	0	0,3729	0,6271
31	0,6437	206,6727	0	35,5383	46,991	0	0	0,4879	0,5121
32	0,4520	282,3816	0	30,1878	19,3936	0	0	0,1113	0,8887
33	0,8131	32,8807	0	13,3495	27,8920	0	0	0,1577	0,8423
34	0,8513	18,4117	0	9,1871	23,3926	0	0	0,1114	0,8886
35	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Ako si môžeme všimnúť pri použití variabilných výnosoch z rozsahu máme pochopiteľne viac efektívnych jednotiek ako pri použití konštantných výnosoch z rozsahu. Z tabuľky vidíme, že máme štyri organizačné jednotky efektívne, ide o cementárne *Saint-Piree-la-Cour* (DMU 1), *Airvault* (DMU 5), *Gargenville* (DMU 25) a *La Perelle* (DMU 35). Tieto jednotky ležia na hranici efektívnosti a nemajú v žiadnej premennej sklzy.

Teraz sa pozrieme ako neefektívne organizačné jednotky môžeme premietnuť na hranicu efektívnosti.

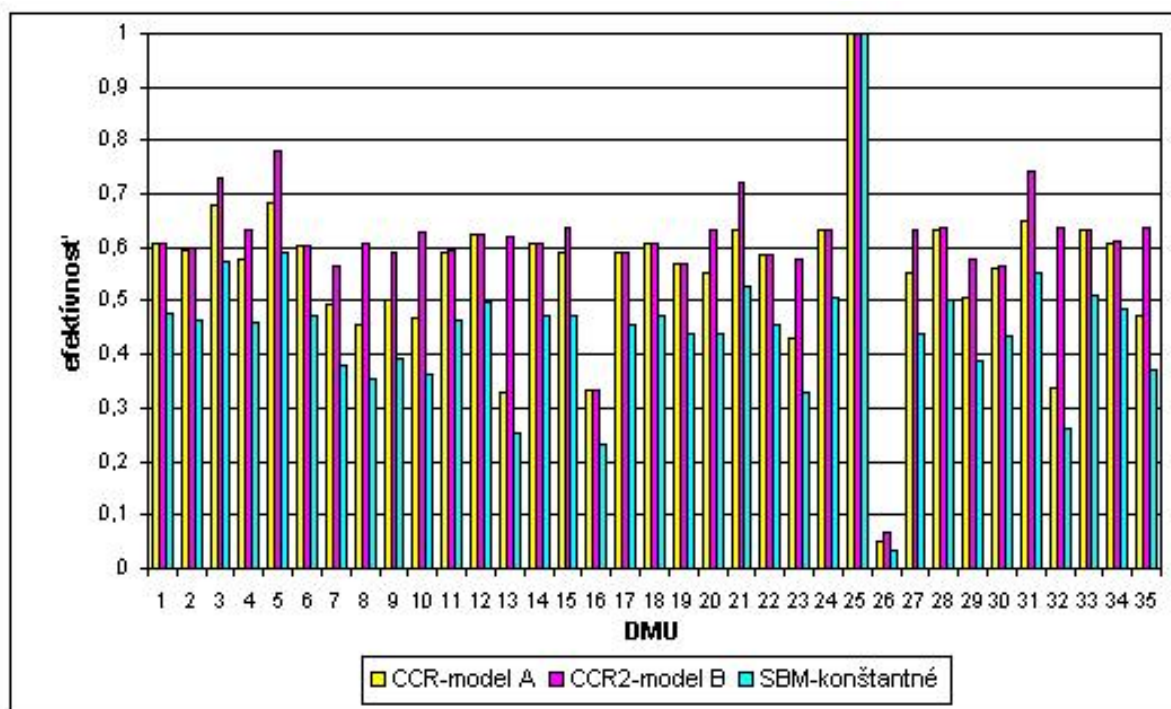
Bližšie sa budeme zaoberať napríklad neefektívnou organizačnou jednotkou 3, ktorá má hodnotu efektivity 0,9593 a jej neefektívnosť je spôsobená sklzmi vo vstupe a v neželateľných výstupoch. Na efektívnu hranicu sa môže dostať znížením vstupnej teploty na spracovanie materiálu o 10,9981 MMBtu a súčasne znížením obidvoch neželateľných výstupov - produkciu emisií o 249 992 ton a produkciu škváry o 48 998,3 ton. Ďalej vidíme, že nenulová hodnota λ je λ_5 z čoho dostávame referenčnú množinu, ktorú tvorí cementáreň *Airvault* (DMU 5).

Teraz si rozoberieme ďalšiu organizačnú jednotku, v prípade ktorej je referenčná množina tvorená viacerými organizačnými jednotkami. Budeme sa zaoberať cementárnou *Xeuilley* (DMU 20). Rovnako ako v predchádzajúcom prípade organizačná jednotka nie je efektívna a miera efektívnosti je 0,4831. Na to, aby sa z tejto organizačnej jednotky stala efektívna jednotka je potrebné, aby znížila svoj vstup o 436,3298 MMBtu a súčasne je potrebné zníženie produkcie cementu na 95 533,4 ton a redukcia produkcie škváry o 108 166,4 ton. Hodnota $\lambda_{25} = 0,6123$ a $\lambda_{35} = 0,3877$ z čoho dostávame referenčnú množinu, ktorá je tvorená cementárňami *Gargenville* (DMU 25) a *La Perelle* (DMU 35).

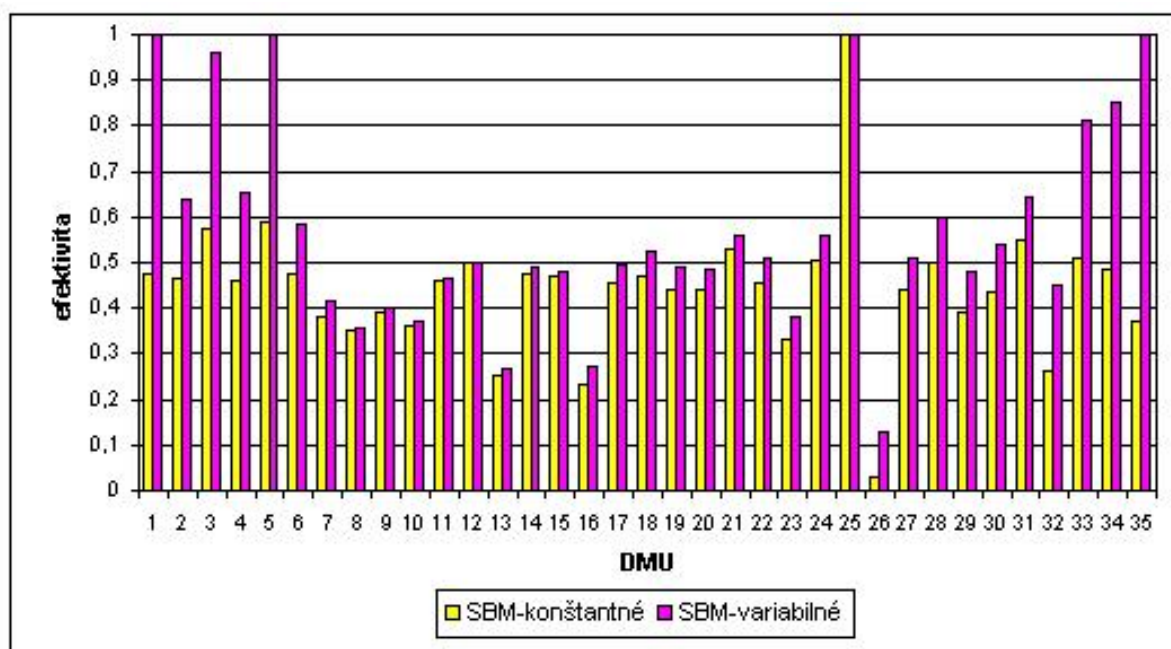
Môžeme si všimnúť v tabuľke, že iba jedna organizačná jednotka (DMU 26) má nenulovú hodnotu sklzu pri produkcii cementu. Na to, aby sa táto jednotka stala efektívna je potrebné zníženie vstupov o 717,0647 MMBtu, zníženie produkcie emisie o 157 996,5 ton ako aj produkcie škváry o 179 996,1 ton a zvýšenie produkcie cementu o 41 999 ton. V tomto prípade referenčnú množinu tvorí cementáreň *La Perelle* (DMU 35).

Teraz sa budeme zaoberať výslednými hodnotami parametra λ . Veľmi zaujímavé je si všimnúť ako často sa efektívne jednotky vyskytujú v referenčných množinách neefektívnych jednotiek. Najviac v referenčných množinách vystupuje cementáreň *Gargenville*, potom cementáreň *La Perelle*. Efektívna organizačná jednotka DMU 1 (*Sain-Piree-la-Cour*) netvorí referenčnú množinu žiadnej neefektívnej jednotke t.j. žiadna neefektívna jednotka nie je s ňou porovnávaná.

Všimnime si na Obr.7, že všetky hodnoty efektívnosti sú vyššie s použitím variabilných výnosoch z rozsahu.



Obr.6: Porovnanie CCR a SBM modelu



Obr.7: Porovnanie efektívnosti konštantných a variabilných výnosov z rozsahu

Základným cieľom výrobných podnikov a spoločností je, aby pracovali efektívne t.j. minimalizovali hodnoty vstupov a hodnoty neželateľných výstupov, pričom súčasne maximalizovali svoju produkciu. V prípade, ak organizačná jednotka je neefektívna, tak nastáva otázka ako treba postupovať vo výrobnom procese resp. aké zmeny je potrebné uskutočniť, aby sa stala efektívnou jednotkou.

Teraz sa zamyslíme nad tým, ako môžeme využiť výsledky eko-efektívnosti na spravodlivejšie rozdelenie emisových kvót pre štáty, ktoré tieto emisie pridelujú svojim výrobným podnikom resp. spoločnostiam prispievajúcim k znečisťovaniu ovzdušia.

Ak nejaká organizačná jednotka pracuje efektívne môže ťažšie znižovať počet emisií ako neefektívna jednotka. Z tohoto dostávame, že emisné kvóty by mali byť „prísnejšie“ pre neefektívne organizačné jednotky. Neefektívna jednotka na zníženie emisií môže využiť modernizáciu svojho výrobného procesu, pričom efektívna jednotka hlavne zníženie produkcie, čo nie je najrozumnejšie riešenie. Ako riešenie vidíme, ak nejaká organizačná jednotka je efektívna, emisie pre ďalší rok by mali ostať na rovnakej úrovni. Pri neefektívnej organizačnej jednotke je potrebné, aby dostala nižší počet emisných kvót v porovnaní s predchádzajúcim obdobím o počet kvót, pri ktorom by pracovala efektívne. Tento počet je vypočítaný ako sklz pre neželateľný výstup.

Tiež by bolo vhodné navrhnúť určitý spôsob motivácie (finančný príspevok na modernizáciu výrobného procesu v podnikoch) pre efektívne organizačné jednotky, aby aj napriek tomu, že splňajú podmienky emisii sa snažili pracovať s lepšími výsledkami aké dosahovali doteraz. Pre neefektívne organizačné jednotky naopak nejaké sankcie ako je navrhnuté pri obchodovaní s emisiami.

7 Záver

Cieľom diplomovej práce bolo oboznámiť čitateľa s metódou *Data Envelopment Analysis (DEA)*, poukázať na možné modifikácie základných DEA modelov pre riešenie úloh s neželateľnými výstupmi a aplikácia upraveného SBM modelu na reálne dáta - francúzske cementárne.

DEA metóda ponúka možnosti na ohodnotenie efektívnosti organizačných jednotiek v rámci danej skupiny. Na začiatku sme si vysvetlili základnú myšlienku DEA modelov a súčasne aj možnosti využitia. Ukázali sme si riešenia jednoduchých príkladov ako aj ich grafickú interpretáciu. Vysvetlili sme si na nich základné pojmy z *DEA* modelov, ktoré sme neskôr definovali.

V základnej teoretickej časti sme sa zaoberali prvopočiatočnými orientovanými modelmi - *CCR* a *BCC* model. Ukázali sme si ako ich môžeme odvodiť jednoduchými úpravami z úlohy matematického programovania. Postupne sme prešli k vysvetleniu zložitejších modelov ako sú *aditívny model s váhami* a *Slacks-Based Measure (SBM)* model, ktorý je založený na meraní sklzov. Literatúru, ktorú sme použili na spracovanie tejto časti bola prevažne písaná rozdielnou symbolikou. V diplomovej práci sme ujednotili túto symboliku na vektorovú.

V ďalšej časti sme sa zamerali na rozšírenie základných modelov na riešenie úlohy s neželateľnými výstupmi, ktoré boli zozbierané z dostupnej literatúry týkajúcej sa tejto problematiky. Modifikáciu *CCR* modelu sme spracovali pomocou [8]. Aditívny model bol hlbšie rozoberaný v [5] a pri úprave *SBM* modelu na prácu s neželateľnými výstupmi sme ponajviac využívali [12]. Pomocou modifikovaných modelov sme vysvetlili v posledných rokoch často rozoberaný pojem eko-efektívnosti z pohľadu *DEA* modelov.

V praktickej časti sme sa zaoberali aplikáciou modifikovaného *SBM* modelu na výpočet eko-efektívnosti pre reálne dáta francúzskych cementární. V danom prípade sme mali dva neželateľné výstupy - emisie CO_2 a škváru. Výsledky výpočtov nám pomohli nájsť nedostatky v eko-efektívnosti jednotlivých cementární a poukazujú na možnosť ich odstránenia, aby organizačná jednotka pracovala efektívne.

Ako určite väčšine ľudí neuniklo pozornosti, že v poslednom období sa vo veľkej miere rozoberá vo svete problematika zníženia skleníkových plynov ako aj obchodovanie s emisiami. Na základe tohto na záver diplomovej práce diskutujeme ako možno využiť výsledky eko-efektívnosti na spravodlivé rozdelenie emisových kvót pre jednotlivé krajiny.

Referencie

- [1] ACS, L. Vyhodnocovanie efektívnosti pedagogickej práce na FMFI UK. Diplomová práca. Bratislava: FMFI UK, 2005. s. 60.
- [2] ALLEN, K. DEA in the ecological context-an overview. . In G. Westerman (ed.), Measuring the Efficiency in the Private and Public Service Sector. Gabler, Wiesbaden. 1999. s. 203-235.
- [3] COOPER, W. W., SEIFORD, L. M., TONE, K. DATA ENVELOPMENT ANALYSIS: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. 3. vydanie. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1999. s. 320. ISBN 0-7923-8693-0.
- [4] COURCELLE C., et al. Assessing the economic and environmental performance of municipal solid waste collection and sorting programmes. Waste Management & Research 16, 1998. s. 253-263.
- [5] DYCKHOFF H., ALLEN K. Measuring ecological efficiency with data envelopment analysis (DEA). European Journal of Operational Research, 2001. s. 312-325.
- [6] FÄRE, R., et al. An activity analysis model of the environmental performance of firms—application to fossil-fuel-fired electric utilities. Ecological Economics 18, 1996. s. 161-175.
- [7] HARRISON D., RADOV D. B. Evaluation of alternative initial allocation mechanisms in a European union greenhouse gas emissions allowance trading scheme. National economic research associates, European Commission, 2002. s. 192. <http://ec.europa.eu/environment/climat/pdf/allocation.pdf>
- [8] HALICKÁ, M. Prednášky k predmetu DEA modely. Bratislava: FMFI UK, 2007
- [9] KORHONEN Pekka J., LUPTÁČIK M. Eco-efficiency analysis of power plants: An extension of data envelopment analysis. European Journal of Operational Research, 2004. s. 437 - 446.
- [10] LOVELL, C.A.K, et al. Measuring macroeconomic performance in the OECD: A comparison of European and non-European countries. European Journal of Operational Research, 1995, s. 147-151.
- [11] NÉMETHOVÁ, A. DEA modely a meranie efektívnosti. Diplomová práca. Bratislava: FMFI UK, 2001. s. 65.
- [12] TONE, K. Dealing with Undesirable Outputs in DEA: A Slacks-based Measure (SBM) Approach. 1. vydanie. Tokyo: National Graduate Institute for Policy Studies, 2003. s. 16.

PRÍLOHA

Tab.6: Informácie o povolenej výške emisií v krajinách EÚ, v miliónoch tón CO_2 ¹⁰

Členské štáty	roky 2005-2007	emisie 2005	návrh krajín 2008-2012	Pripustené EK 2008-2012	Dodatočne pridelenie 2008-2012	JI/CDM ¹¹ limit 2008-2012 v %
Belgicko	62.1	55.58	63.3	58.5 (92.4%)	5.0	8.4
Bulharsko	42.3	40.6	67.6	42.3 (62.6%)	na	12.55
Cyprus	5.7	5.1	7.12	5.48 (77%)	na	10
ČR	97.6	82.5	101.9	86.8 (85.2%)	na	10
Dánsko	33.5	26.5	24.5	24.5 (100%)	0	17.01
Estónsko	19	12.62	24.38	12.72 (52.2 %)	0.31	0
Fínsko	45.5	33.1	39.6	37.6 (94.8%)	0.4	10
Francúzsko	156.5	131.3	132.8	132.8 (100%)	5.1	13.5
Grécko	74.4	71.3	75.5	69.1 (91.5%)	na	9
Holandsko	95.3	80.35	90.4	85.8 (94.9%)	4.0	10
Írsko	22.3	22.4	22.6	22.3 (98.6%)	na	10
Litva	12.3	6.6	16.6	8.8 (53%)	0.05	20
Lotyšsko	4.6	2.9	7.7	3.43 (44.5%)	na	10
Luxembursko	3.4	2.6	3.95	2.5 (63%)	na	10
Maďarsko	31.3	26.0	30.7	26.9 (87.6 %)	1.43	10
Malta	2.9	1.98	2.96	2.1 (71%)	na	-
Nemecko	499	474	482	453.1 (94 %)	11.0	20
Poľsko	239.1	203.1	284.6	208.5 (73.3%)	6.3	10
Portugalsko	38.9	36.4	35.9	34.8 (96.9%)	0.77	10
Rakúsko	33.0	33.4	32.8	30.7 (93.6%)	0.35	10
Rumunsko	74.8	70.8	95.7	75.9 (79.3%)	na	10
Slovensko	30.5	25.2	41.3	32.6 (78.9%)	1.78	7
Slovinsko	8.8	8.7	8.3	8.3 (100%)	na	15.76
Španielsko	174.4	182.9	152.7	152.3 (99.7%)	6.7	cca. 20
Švédsko	22.9	19.3	25.2	22.8 (90.5%)	2.0	10
Taliansko	223.1	225.5	209	195.8 (93.7%)	nk	10
UK	245.3	242.4	246.2	246.2 (100%)	9.5	8
<i>SUMA</i>	<i>2298.2</i>	<i>2122.16</i>	<i>2325.34</i>	<i>2082.68 (89.56%)</i>	<i>54.69</i>	-

¹⁰ uvedená tabuľka je získaná z internetovej stránky <http://europa.eu/rapid/pressReleasesAction.do?reference=IP/07/1869&format=HTML&aged=0&language=EN&guiLanguage=en>

¹¹ V rámci EÚ ETS môžu členské štáty svojim prevádzkovateľom povoliť, aby rovnako, ako na pokrytie svojich emisií používajú kvóty ETS, používali aj kredity z projektov na znižovanie emisií, ktoré sa realizujú v tretích krajinách. Tieto projekty musia byť oficiálne uznané v rámci mechanizmov Kjótskeho protokolu, ktorými sú mechanizmus spoločnej implementácie (Joint Implementation, JI, t.j. projekty, ktoré sa realizujú v krajinách s cieľom zníženia emisií v zmysle protokolu) alebo mechanizmus čistého rozvoja (Clean Development, CDM, t.j. projekty, ktoré sa realizujú v rozvojových krajinách). Kredity z projektov JI sú známe ako jednotky zníženia emisií (Emission Reduction Units, ERU) a kredity z projektov CDM ako certifikované zníženia emisií (Certified Emissions Reductions, CER).

Zdrojové kódy programov

Vstupné dáta pre francúzske cementárne:

```
%vstup:
x=[3027;2109;2354;2239;2343;1844;1999;1965;1843;1720;1466;1465;2107;
1283;1460;1373;1086;955;979;1088;1130;954;1173;940;915;953;901;728;
800;732;774;594;376;330;236];

%želateľný výstup - cement
y=[1230;844;1074;870;1074;745;662;599;623;541;583;614;468;523;580;307;
430;388;375;405;479;375;340;400;614;33;334;310;272;276;338;135;160;135;75];

%neželateľný výstup 1 - emisie CO2
yn1=[755;549;541;518;516;462;441;407;399;389;375;354;349;345;344;331;290;
256;255;251;249;248;242;235;221;210;201;196;190;177;170;101;92;80;52];

%neželateľný výstup 2 - škvára
yn2=[1014;706;736;685;687;617;586;494;528;431;491;490;377;430;456;460;364;
320;328;319;331;319;294;315;307;239;264;244;235;245;227;106;126;110;59];
```

Program pre SBM model

```
function [efektivita, lambda, sx, sy, sn1y, sn2y] = sbm(x, y, yn1, yn2, o)

%výber hodnôt pre aktuálne spracovavanú jednotku
xo = x(o,:);
yo = y(o,:);
yn1o = yn1(o,:);
yn2o = yn2(o,:);
n = length(x);    %počet jednotiek DMU
m = size(x,2);    %počet vstupov
s = size(y,2);    %počet želateľných výstupov
s1 = size(yn1,2); %počet neželateľných výstupov 1
s2 = size(yn2,2); %počet neželateľných výstupov 2

% vyjadrenie minimalizovanej funkcie (účelovej funkcie)
ex = -1./(m*xo);
f = [1; zeros(n,1); ex; 0; 0; 0];

% zápis rovnicových ohraničení:  $Aeq * x = beq$ 
Aeq = [1      zeros(1,n)      0      1/(yo*(s+s1+s2))      1/(yn1o*(s+s1+s2))      1/(yn2o*(s+s1+s2));
      -xo      x'              1              0              0              0;
      -yo      y'              0              -1             0              0;
      -yn1o    yn1'            0              0              1              0;
      -yn2o    yn2'            0              0              0              1
      (-1)     ones(1,n) zeros(s,m)  zeros(s,m)      zeros(s,m)      zeros(s,m)];
% posledný riadok matice Aeq je pre variabilné výnosy z rozsahu

beq = [1; 0; 0; 0; 0; 0];

% zápis  $Ax \leq b$ 
A = -eye(1+n+m+s+s1+s2);
```

```

b = zeros(1+n+m+s+s1+s2,1);

% využitie funkcie linprog na riešenie našej úlohy
[optlin, efektivita, exitflag, lpoutput] = linprog(f, A, b, Aeq, beq);
t = optlin(1);
lambda = optlin(2 : n + 1);
sx = optlin(37);
sy = optlin(38);
sn1y = optlin(39);
sn2y = optlin(40);

% výpis výsledkov
vysledok = [];
n=length(x);
for o=1:n
    disp('lambda o=')
    disp(o);
    [efektivita, lambda, sx(o), sy(o), sn1y(o), sn2y(o)] = sbmspravne(x, y, yn1, yn2, o);
    vysledok(o)=efektivita;
    disp(lambda);
end;

disp('efektivita')
disp(vysledok');
disp('sx')
disp(sx');
disp('sy')
disp(sy');
disp('sn1y')
disp(sn1y');
disp('sn2y')
disp(sn2y');

```

Program pre CCR model A

```

function efektivita = CCR(x, y, yn1, yn2, o)

%výber hodnôt pre aktuálne spracovavanú jednotku
xo = x(o,:);
yo = y(o,:);
yn1o = yn1(o,:);
yn2o = yn2(o,:);

n = size(x,1); %počet jednotiek DMU
m = size(x,2); %počet vstupov
s = size(y,2); %počet výstupov

f = -[zeros(1,m) yo -yn1o -yn2o] ; % účelová funkcia

A = [-x y -yn1 -yn2 ]; % ľavá strana podmienky s nerovnosťou
b = zeros(1,n); % pravá strana podmienky s nerovnosťou
lb = zeros(1, m+s+s+s);

```

```

Aeq = [xo zeros(1,s) zeros(1,s) zeros(1,s)];
beq = 1;

[optlin, fval, exitflag, lpoutput] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb); efektivita = -fval;

% výpis výsledkov
for o=1:length(x)
    efektivita(o)=CCR1(x, y, yn1, yn2, o);
end; disp('efektivita')
disp(efektivita');

```

Program pre CCR model B

```

function efektivita = CCR(vstup, vystup, vystupn1, vystupn2, o)

x = vstup; y = vystup; yn1 = vystupn1; yn2 = vystupn2;
%výber hodnôt pre aktuálne spracovavanú jednotku
xo = x(o,:);
yo = y(o,:);
yn1o = yn1(o,:);
yn2o = yn2(o,:);

n = size(x,1); %počet jednotiek DMU
m = size(x,2); %počet vstupov
s = size(y,2); %počet výstupov

f = -[zeros(1,m) yo zeros(1,m) zeros(1,m)]; % účelová funkcia

A = [-x y -yn1 -yn2]; % ľavá strana podmienky s nerovnosťou
b = zeros(1,n); % pravá strana podmienky s nerovnosťou
lb = zeros(1, m+s+s+s);

Aeq = [xo zeros(1,s) yn1o yn2o];
beq = ones(size(Aeq,1), 1);

[optlin, fval, exitflag, lpoutput] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb);
efektivita = -fval;

% výpis výsledkov
for o=1:length(x)
    efektivita(o)=CCR2(x, y, yn1, yn2, o);
end; disp('efektivita')
disp(efektivita');

```