

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



Analýza investičného rozhodovania  
pri uplatnení reálnej opcie

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2008

Ingrid Michnová

# Analýza investičného rozhodovania pri uplatnení reálnej opcie

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Ingrid Michnová

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Matematika

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce: Dr. Zuzana Chladná

BRATISLAVA 2008

## Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne, len s pomocou nadobudnutých teoretických vedomostí, konzultácií a uvedenej literatúry.

V Bratislave, apríl 2008

. . . . .

Ingrid Michnová

## PodĎakovanie

Veľmi pekne ďakujem vedúcej diplomovej práce Dr. Zuzane Chladnej za jej odborné vedenie, pripomienky, návrhy a čas, ktorý mi venovala pri vypracovávaní diplomovej práce.

## Abstrakt

V tejto diplomovej práci sa bližšie zaoberáme jednou z metód investičného rozhodovania, tzv. *metódou reálnej opcie*, ktorá je založená na využití analógie investičnej príležitosti s finančnou opciou. Uvedieme príklad projektu a taktiež jednu z možností jeho riešenia (využitím parciálnych diferenciálnych rovníc a ich numerického riešenia). Úlohu ďalej rozšírime o pohľad regulátora, ktorý optimalizuje čas zásahu do stochastickej ceny aktíva (zavedenie dane) pričom sleduje daný cieľ.

**Kľúčové slová:** reálna opcia, NPV, investičná analýza, voľná hranica, stochastické diferenciálne rovnice

## Abstract

This work demonstrates one of the methods of investment analysis — *real option approach* that is based on analogy between investment opportunity and financial option. We introduce a model of optimal realization of project and we provide a presentation of possible solution technique (transformation of stated problem into a sequence of partial differential equations and its numerical solution). Moreover, we analyze optimal time of regulator's intervention on the stochastic price of underlying asset (put the tax) in order to achieve specified aim.

**Keywords:** real option, NPV, investment analysis, free boundary problem, stochastic differential equations

# Obsah

|                                                            |           |
|------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Zoznam skratiek a symbolov</b>                          | <b>3</b>  |
| <b>Úvod</b>                                                | <b>5</b>  |
| <b>1 Metódy investičného rozhodovania</b>                  | <b>7</b>  |
| 1.1 Porovnanie prístupu NPV a reálnej opcie . . . . .      | 8         |
| <b>2 Reálna opcia</b>                                      | <b>11</b> |
| 2.1 Typy reálnych opcií . . . . .                          | 12        |
| <b>3 Stochastický kalkulus</b>                             | <b>15</b> |
| 3.1 Brownov pohyb . . . . .                                | 15        |
| 3.2 Itôva lema . . . . .                                   | 17        |
| <b>4 Model</b>                                             | <b>18</b> |
| 4.1 Predpoklady investovania . . . . .                     | 18        |
| 4.2 Formulácia modelu . . . . .                            | 19        |
| 4.3 Stochastické dynamické programovanie . . . . .         | 20        |
| 4.4 Odvodenie parciálnych diferenciálnych rovníc . . . . . | 20        |
| 4.5 Problém voľnej hranice . . . . .                       | 22        |
| 4.6 Matematická formulácia modelu . . . . .                | 22        |
| <b>5 Aplikácia modelu</b>                                  | <b>24</b> |
| 5.1 Motivácia . . . . .                                    | 24        |
| 5.2 Úloha . . . . .                                        | 25        |
| 5.3 Modelovanie ceny CO <sub>2</sub> . . . . .             | 26        |

|          |                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.4      | Funkcie nákladov . . . . .                                 | 28        |
| 5.5      | Numerické riešenie . . . . .                               | 30        |
| 5.5.1    | Oblasť rozhodovania . . . . .                              | 31        |
| 5.5.2    | Parametre a ich vplyv na oblasť rozhodovania . . . . .     | 32        |
| 5.6      | Vplyv regulátora . . . . .                                 | 35        |
| <b>6</b> | <b>Možnosti rozšírenia modelu</b>                          | <b>39</b> |
| 6.1      | Modelovanie ceny . . . . .                                 | 39        |
| 6.2      | Optimalizácia zásahu regulátora ako reálna opcia . . . . . | 42        |
|          | <b>Záver</b>                                               | <b>44</b> |
|          | <b>Literatúra</b>                                          | <b>45</b> |

# Zoznam skratiek a symbolov

**NPV** — Net present value (čistá súčasná hodnota finančných tokov)

$W_t$  — Wienerov proces

$S_t$  — cena komodity

$t$  — čas

$x$  — stav

$\mu$  — drift stochastického procesu

$\sigma$  — volatilita stochastického procesu

$r$  — úroková miera p.a.

$d$  — hodnota dane alebo iného vplyvu regulátora na cenu komodity

$\mu_1$  — drift stochastického procesu modelujúceho cenu komodity v období pred zásahom vlády

$\mu_2$  — drift stochastického procesu modelujúceho cenu komodity v období po zásahu vlády

$\sigma_1$  — volatilita stochastického procesu modelujúceho cenu komodity v období pred zásahom vlády

$\sigma_2$  — volatilita stochastického procesu modelujúceho cenu komodity v období po zásahu vlády

$t^*$  — čas zásahu vlády

$T$  — maturita reálnej opcie

$I$  — výška investície (expiračná cena opcie)

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  — normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $\mu$  a disperziou  $\sigma^2$

$\pi_1(S_t, t)$  — funkcia nákladov pred investíciou

$\pi_2(S_t, t)$  — funkcia nákladov po realizácii investície

$V(S_t, t)$  — očakávaná čistá súčasná hodnota budúcich peňažných tokov od času  $t$  do času  $T$  za predpokladu, že sa firma rozhoduje optimálne vo všetkých budúcich časových okamihoch

$V_2(S_t, t)$  — očakávaná čistá súčasná hodnota všetkých budúcich peňažných tokov od času  $t$  do času  $T$  za predpokladu, že spoločnosť investovala v minulosti (do času  $t$ )

$S_f(t)$  — funkcia (tzv. voľná hranica) rozdeľujúca rovinu  $(t, S_t)$  na oblasť, kedy je optimálne investovať a oblasť, kedy je naopak výhodnejšie neinvestovať

$X$  — produkcia  $\text{CO}_2$  v tonách pred uskutočnením investície

$Y$  — produkcia  $\text{CO}_2$  v tonách po uskutočnení investície

$A$  — fixné náklady pred uskutočnením investície

$B$  — fixné náklady po uskutočnení investície

$G(\xi, t)$  — Greenova funkcia

# Úvod

S rozvojom teoretických znalostí o finančných opciách sa vedecká verejnosť začala zaoberať myšlienkou aplikácie teórie opcií aj do iných odvetví. Podobnosť definície americkej finančnej opcie s investičnou príležitosťou spoločnosti viedlo k zavedeniu pojmu reálnej opcie. Tento koncept poskytuje iný pohľad na optimalitu rozhodovania sa o realizácii investície. Doteraz najviac používaná metóda čistej súčasnej hodnoty (NPV) platí iba za určitých predpokladov (úplná návratnosť vstupných nákladov v prípade odstúpenia od projektu, možnosť investovať teraz alebo nikdy, deterministický vývoj vstupných parametrov), ktoré väčšina reálnych investičných príležitostí nespĺňa. Na druhej strane teória reálnych opcií prináša do tejto problematiky väčšiu flexibilitu: zohľadňuje možnosť odložiť rozhodnutie na neskôr a dynamický (často stochastický) vývoj vstupných parametrov.

Na rozdiel od finančných opcií, kedy je primárnym cieľom určiť ich hodnotu, v reálnych opciách sa väčší dôraz kladie na určenie hranice, ktorá manažérom poskytne presný návod za akých podmienok investovať a za akých naopak využiť možnosť odložiť rozhodnutie na neskôr. Vzhľadom na požiadavku silného matematického zázemia pri práci s reálnymi opciami tento prístup zatiaľ v praxi nie je štandardne využívaný, čo však vedie k zvýšenej snahe sprístupniť túto myšlienku verejnosti. V tejto diplomovej práci uvidíme pojem reálnej opcie, jej analógiu s finančnými opciami a zameriame sa odvodenie modelovej situácie investičnej príležitosti, ktorá je riadená stochastickou cenou komodity. Následne tento model aplikujeme na konkrétnu situáciu z oblasti obchodovania s emisiami. Nakoniec ukážeme, ako môže byť existencia všeobecne známej dynamickej hranice rozhodovania využitá autoritou, ktorej úsilím je za pomoci regulácie ceny komodity (zavedenia dane)

dosiahnuť zvýšenie počtu spoločností, ktoré realizujú projekt v určenom časovom horizonte.

Diplomová práca je rozdelená do šiestich kapitol. V prvej sa venujeme rozdielom v prístupe analýzy investície pomocou NPV a reálnej opcie a demonštrujeme ich na príklade. Porovnanie finančnej a reálnej opcie je obsahom druhej kapitoly. Tretia kapitola poskytuje základné matematické poznatky z teórie stochastického kalkulu. V štvrtej kapitole všeobecne definujeme model projektu. Tento model v piatej kapitole rozšírime predpokladom vstupu regulátora na trh a numericky vyriešime pre konkrétne parametre. Šiesta kapitola sa zaoberá možnosťami rozšírenia modelu. Koncipovanie textu predpokladá dobrú matematickú zručnosť čitateľa a jeho skúsenosť s oceňovaním finančných opcí.

# Kapitola 1

## Metódy investičného rozhodovania

Investícia je v ekonómii často definovaná ako akt obetovania súčasných nákladov v prospech očakávaných budúcich ziskov. Väčšina investičných rozhodnutí má tri základné charakteristiky:

- *Nenávratnosť* — ak bola investícia úplne alebo čiastočne realizovaná, nie je možné vrátenie nákladov v prípade odstúpenia od zámeru.
- *Neistota* — príjmy (prípadne aj náklady) sú stochastické veličiny a ich budúci časový vývoj nie je známy v čase rozhodnutia.
- *Načasovanie* — rozhodnutie je možné oddialiť za účelom získania nových informácií.

Klasická teória zjednodušuje problematiku investičného rozhodovania na určenie znamienka čistej súčasnej hodnoty budúcich peňažných tokov (NPV = net present value): investovať, ak do súčasnosti diskontované budúce príjmy prevyšujú diskontované budúce náklady, v opačnom prípade neinvestovať. V procese výpočtu čistej súčasnej hodnoty budúcich peňažných tokov sa však vynárajú mnohé problémy, ako napríklad odhad očakávaného toku budúcich príjmov, inflácie alebo diskontných faktorov. Veličiny stochastického charakteru sú v tomto prístupe nahrádzané ich strednými hodnotami. Táto metóda taktiež predpokladá iba jednu z dvoch možností: *úplnú návratnosť nákladov v prípade odstúpenia od projektu* alebo *možnosť investovať „teraz alebo nikdy“*. Túto podmienku však nespĺňa väčšina reálnych

investícií.

Profesor Myers ako prvý vo svojom článku s názvom „Determinants of Corporate Borrowing”<sup>1</sup> použil pojem *reálna opcia* a poukázal na vzťah medzi finančnými opciami a možnosťami objavujúcimi sa v procese investičného rozhodovania. Právo odložiť rozhodnutie o nenávratnej investícii na neskôr za účelom získania novej informácie má na investorove správanie zásadný vplyv, a preto klasická teória využívajúca analýzu pomocou NPV nevedie vždy k optimálnej rozhodovacej stratégii.

V nasledujúcej časti 1.1 porovnáme investičné rozhodnutia analyzované na základe prístupu NPV a reálnej opcie.

## 1.1 Porovnanie prístupu NPV a reálnej opcie

Pre názornejšie pochopenie rôzneho prístupu rozhodovania na základe čistej súčasnej hodnoty (NPV) a tzv. reálnej opcie uvedieme jednoduchý príklad.

Predstavme si, že pri kopaní studne v záhrade sme narazili na zlatú žilu o objeme 1000 trójskych uncí (1 trójska unca = 31.10348 gramu). Predpokladáme, že cena zlata je výsledkom náhodného procesu: dnes je jeho hodnota 500\$ za uncu, budúci rok vzrastie na hodnotu 600\$/unca s pravdepodobnosťou 0.6 respektíve klesne na hodnotu 350 \$/unca s pravdepodobnosťou 0.4 (v prípade, že pokusné vrty v západnej Ázii objavia nové zdroje zlata). Náklady na ťažbu predstavujú 450 \$/unca.

Stojíme pred rozhodnutím, či zlato vyťažiť dnes (*stratégia I*) alebo ťažbu odložiť o rok (*stratégia II*), pričom predpokladáme, že všetko zlato bude predané ihneď za aktuálnu cenu. Ďalej uvažujeme, že cenové riziko je perfektne diferzifikované, a teda budúce peňažné toky diskontujeme bezrizikovou úrokovou mierou 5% per annum.

### ***Rozhodovanie na základe NPV***

Ako už bolo spomenuté v úvode tejto kapitoly, čistá súčasná hodnota investície je definovaná ako rozdiel súčasnej hodnoty príjmov a súčasnej hodnoty nákladov,

---

<sup>1</sup>Uverejnený v Journal of Finance v roku 1977 [9].

ktoré sú s touto investíciou spojené. V prípade, že hodnota  $NPV > 0$  (diskontované príjmy prevyšujú diskontované náklady), manažér odporučí akceptovať túto investíciu. Naopak pri zápornom znamienku investičnú príležitosť zamietajú.

Aplikujeme teda túto metódu na uvedený príklad:

Analýzovaním *stratégie I* dostávame

$$NPV^{n,I} = 1000 \times (-450 + 500) = 50000\$ > 0$$

Uvažujeme teraz *stratégiu II*:

- Ak cena zlata v budúcom roku zaznamená pozitívny trend

$$NPV_{up}^{n,II} = \frac{1000 \times (-450 + 600)}{1.05} \doteq 142860\$$$

- Ak cena zlata v budúcom roku klesne

$$NPV_{down}^{n,II} = \frac{1000 \times (-450 + 350)}{1.05} \doteq -95240\$$$

A teda

$$NPV^{n,II} = 0.6 \times NPV_{up}^{n,II} + 0.4 \times NPV_{down}^{n,II} = 47620\$$$

Keďže čistá súčasná hodnota *stratégie I* je väčšia ako *stratégie II* ( $50000\$ > 47620\$$ ), ťažba okamžite sa javí ako výhodnejšia.

### ***Rozhodovanie na základe prístupu reálnej opcie***

V prípade výpočtu založenom na základe prístupu reálnej opcie sa taktiež rozhodujeme medzi *stratégiou I* a *stratégiou II*, avšak zohľadníme fakt, že odloženie rozhodnutia o rok (*stratégia II*) poskytne novú informáciu o cene zlata.

Čistá súčasná hodnota investície dnes sa vypočíta rovnako, ako bolo uvedené v predchádzajúcom prístupe ( $NPV^{o,I} = NPV^{n,I} = 50000\$$ ). Rozdiel nastáva pri *stratégii II*, kedy opciu investovať uplatníme len v prípade, že cena zlata vzrastie, kým v prípade jej poklesu ťažbu neuskutočníme ( $NPV_{up}^{o,II} = 142860$ , ale  $NPV_{down}^{o,II} = 0$ ). Potom dostávame

$$NPV^{o,II} = 0.6 \times NPV_{up}^{o,II} + 0.4 \times NPV_{down}^{o,II} = 85716\$$$

Keďže  $NPV^{o,II} = 85716 > 50000 = NPV^{o,I}$ , uvedená metóda rozhodovania považuje za optimálnu stratégiu počkať jeden rok a potom sa na základe trhovej ceny zlata prikloniť k lepšiemu riešeniu.

Predchádzajúci príklad poukazuje na skutočnosť, že nielenže každý z prístupov ohodnocuje projekt inak (používajúc klasický NPV prístup má investícia hodnotu 50000\$, prístup reálnej opcie ohodnocuje túto príležitosť na 85716\$), ale za optimálne považuje diametrálne odlišné stratégie.

Doteraz často využívaný prístup NPV teda čelí kritike najmä z dôvodu zanedbania možnosti flexibilného rozhodovania na základe novej informácie. Ďalej si všimnime, že rozdiel  $85716\$ - 50000\$ = 35716\$$  predstavuje hodnotu, o ktorú je príležitosť investovať *teraz alebo o rok* cennešia oproti možnosti investovať *teraz alebo nikdy*.

Keďže väčšinu reálnych investičných príležitostí je možné uskutočniť v nejakom časovom intervale a rozhodnutia sú prijímané na základe všetkých v danom okamihu dostupných informácií, teória reálnych opcií oproti analýze pomocou NPV lepšie popisuje realitu.

# Kapitola 2

## Reálna opcia

Analógia medzi finančnými a reálnymi opciami je zrejmá z definícií oboch spomenutých nástrojov:

**Definícia 2.1 (Americká call (put) opcia)** *Predstavuje právo, nie však povinnosť, kúpiť (predať) podkladové aktívum (najčastejšie akciu) za vopred stanovenú expiračnú cenu kedykoľvek do času  $T$  (maturity).*

**Definícia 2.2 (Reálna opcia)** *Poskytuje právo, nie však povinnosť, investovať určitý finančný obnos (kúpiť dané podkladové aktívum za vopred stanovenú expiračnú cenu) do stanoveného času (maturity) a získať projekt (podkladové aktívum).<sup>1</sup>*

Investičná príležitosť je teda analogická americkej call opcii, pričom vzťahy medzi vstupnými parametrami pre finančnú a reálnu opciu sú uvedené v tabuľke 2.1.

Investícia sa považuje za nenávratnú. Ak firma investuje, využije danú opciu, avšak vzdáva sa možnosti ďalšieho odkladu rozhodnutia (*náklady stratenej príležitosti*). Pripomeňme, že v oboch spomenutých definíciách predpokladáme stochastický vývoj ceny podkladového aktíva.

---

<sup>1</sup>Dixit, Pindyck, 1994, str.30 [1].

| Reálna opcia                               | Premenná   | Finančná opcia          |
|--------------------------------------------|------------|-------------------------|
| Hodnota projektu                           | $S$        | Cena akcie              |
| Náklady na investíciu                      | $I$        | Expiračná cena opcie    |
| Čas, dokedy je možné investíciu uskutočniť | $T$        | Maturita opcie          |
| Peňažné toky plynúce z investície          | $\delta$   | Dividendový výnos       |
| Časová hodnota peňazí                      | $r$        | Bezrizik. úroková miera |
| Rizikovosť projektu                        | $\sigma^2$ | Volatilita akcie        |

Tabuľka 2.1: Porovnanie reálnej a finančnej americkej call opcie na akciu vyplácajúcu dividendy.

## 2.1 Typy reálnych opcií

V predchádzajúcej časti sme definovali reálnu opciu popisujúcu jednoduchú investičnú príležitosť. V praxi je takmer každé rozhodovanie možné popísať určitým typom reálnej opcie.

Dixit a Pindyck, 1994 [1] uvádzajú príklad manželstva, kedy šťastie páru závisí od stochastických náhodných udalostí, ktoré sa v každodennom živote vyskytnú. Expiračná cena tejto opcie rastie s rastúcimi nákladmi na rozvod alebo sociálnym odsúdením rozluky manželov (náboženské prekážky). Čím väčšie sú tieto prekážky, tým cennejšia je možnosť so sobášom počkať a nájsť čo možno najvyhovujúcejšieho partnera.

Iným príkladom je rozhodovanie o stupni dosiahnutého vzdelania. Reálnu opciu tu predstavuje možnosť ďalšieho štúdia, ktorým sa na niekoľko rokov vzdávame možnosti zárobku (expiračná cena), avšak očakávame vyššiu mzdu v budúcnosti.

Extrémnym prípadom nenávratného rozhodovania je samovražda, pretože opčná hodnota odložiť rozhodnutie a počkať, či sa situácia zlepší je v tomto prípade veľká.

Spomenuté príklady predstavujú len niekoľko názorných ukážok reálnych opcií. Napriek veľkej rôznorodosti investičných príležitostí sa v literatúre uvádza istá kategorizácia. V nasledujúcom texte spomenieme všeobecnú terminológiu základných

typov reálnych opcií zavedenú Copelandom a Antikarovom, 2001.<sup>2</sup>

- *option to wait* predstavuje možnosť odložiť investičné rozhodnutie. Jej analógiou je americká call opcia na akciu vyplácajúcu dividendy, kde expiračná cena korešponduje s počiatočnými nákladmi, vlastníctvo akcie s vlastníctvom projektu a dividendy s kladnými alebo zápornými finančnými tokmi plynúcimi z tejto investície. Možnosť oddialiť rozhodovanie má určitú nezápornú hodnotu (cenu opcie), pretože oproti príležitosti *teraz alebo nikdy* umožňuje využiť dynamický systém rozhodovania v rôznych okamihoch na základe všetkých vtedy dostupných informácií.
- *option to abandon*— možnosť ukončiť projekt pred predpokladaným termínom v prípade jeho nevýnosnosti a predať vybavenie (napríklad stroje alebo patent) za určitú cenu (americká put opcia). Daný typ reálnej opcie chráni investora pred stratami v prípade, že situácia na trhu je horšia ako sa očakávalo. Treba pripomenúť, že tento krok je nezvratný a opätovné spustenie projektu nákladné, preto v realite je investor ochotný akceptovať dočasné straty presvedčený vierou v potenciálne budúce výnosy.
- *option to switch* reprezentuje flexibilitu v prechode od jednej alternatívy k inej. Ide prevažne o zmenu v technickom alebo softvérovom vybavení, pričom pôvodný model je optimálny v inej situácii ako model nový. Pre ilustráciu: kúrenie uhlím je výhodnejšie v situácii, keď je jeho cena nízka, ale v prípade, že vzrastie, uprednostníme plynové kúrenie.
- *compound option* sú reálne opcie umožňujúce viac realizácií (po uplatnení jednej opcie, môže byť realizovaná ďalšia). Napríklad *option to switch* môže byť považovaná za *compound option*, ak je povolený prechod od jednej alternatívy k druhej a naopak neobmedzený počet krát.
- *rainbow option* — reálne opcie obsahujúce niekoľko zdrojov náhodnosti. Všetky z vyššie spomínaných druhov opcií sa môžu správať ako *rainbow* v prípade,

---

<sup>2</sup>Uvádza tiež Chladná, 2007, str.9 [5]. Vzhľadom na fakt, že názvy nemajú slovenský ekvivalent, uvádzame pôvodné anglické názvy.

že rozhodnutie závisí od viacerých premenných (cien rôznych vstupov resp. výstupov), z ktorých každá sleduje iný stochastický proces alebo sa tieto procesy líšia parametrami.

V realite väčšina investičných príležitostí spĺňa definíciu posledných dvoch uvedených typov reálnych opcií. Spomínaný príklad manželstva sa môže správať ako *compound option* vychádzajúcu zo *switch option*, keďže vstupovať do manželstva a rozvádzať sa je možné neobmedzený počet krát. Rozhodovanie o samovražde (*option to abandon*) zasa závisí na veľkom množstve náhodných veličín, teda ide o *rainbow option*.

Vzhľadom na veľký počet možných scenárov v mnohých prípadoch dochádza k zjednodušovaniu reálnych problémov (napríklad redukcia zdrojov náhodnosti, predpoklad jedného možného využitia opcie). Tieto komplikácie sú dôvodom pre preferenciu (zo strany manažérov) síce statického, ale ľahšie dosiahnuteľného výsledku využijúc klasický prístup analýzy pomocou NPV a taktiež výzvou pre vedeckú obec sprístupniť metódu reálnej opcie využitiu v praxi.

# Kapitola 3

## Stochastický kalkulus

Základným predpokladom pre oceňovanie opcií je fakt, že cena komodity (a teda aj od nej odvodené finančné toky) je riadená stochastickým procesom. Koncept *Wienerovho* a následne *Brownovho pohybu* má niekoľko dôležitých vlastností, ktoré sú nevyhnutné pre ďalšie matematické úvahy.

### 3.1 Brownov pohyb

**Definícia 3.1 (Wienerov proces)** *Wienerov proces je stochastický proces<sup>1</sup> s nasledujúcimi vlastnosťami:*

- $W_0 = 0$
- $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
- $W_{t+s} - W_s \sim \mathcal{N}(0, t)$
- $W_t$  má nezávislé prírastky t.j.  $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$  sú nezávislé pre všetky  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k$ .<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Stochastický proces je definovaný ako súbor náhodných premenných  $X = \{X_t; t \in T\}$  na pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  s hodnotami v  $R^d$ .

<sup>2</sup>Melicherčík, 2005, str.129 [3].

Dôležité charakteristiky Wienerovho procesu:

- *Markovovskosť procesu* — úplná informácia o minulom vývoji danej veličiny je obsiahnutá v poslednej hodnote. Teda táto je jediná potrebná na najlepšiu predpoveď budúcnosti.<sup>3</sup>
- *Nezávislosť prírastkov* — umožňuje limitný prechod od diskrétného binárneho rozhodovacieho stromu (*random walk*) k jeho spojitej verzii.
- *Normálne rozdelenie zmien Wienerovho procesu* — empirické pozorovania niektorých reálnych stochastických veličín (alebo ich logaritmov) podporujú tento predpoklad.

Formálny zápis Wienerovho pohybu ( $dW$  predstavuje diferenciál Wienerovho procesu,  $dt$  nekonečne malú časovú zmenu):

$$dW = \epsilon_t \sqrt{dt} \quad (3.1)$$

kde  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$  a  $E[\epsilon_t \epsilon_s] = 0$  pre  $t \neq s$ .

**Definícia 3.2 (Brownov pohyb)** *Brownov pohyb je stochastický proces odvodený od Wienerovho procesu pridaním lineárneho trendu*

$$dx = \alpha dt + \sigma dW \quad (3.2)$$

kde  $\alpha$  nazývame *driftom* a  $\sigma$  *volatilitou* daného procesu.

**Definícia 3.3 (Itôv proces)** *Zovšeobecnenie Brownovho pohybu, ktorého drift a volatilitu predstavujú nenáhodné funkcie času a stavu nazývame Itôv proces, a teda:*

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW \quad (3.3)$$

**Definícia 3.4 (Geometrický Brownov pohyb)** *Špeciálnym prípadom Itôvho procesu je geometrický Brownov pohyb, pre ktorý platí:*

$$dx = \mu x dt + \sigma x dW \quad (3.4)$$

---

<sup>3</sup>Stochastický proces nazývame Markovovským, ak pre  $\forall t \in T$  a pre  $\forall t$ -ticu  $(x_1, \dots, x_t) \in X(\Omega)$  platí  $P[X_t = x_t \mid X_1 = x_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}] = P[X_t = x_t \mid X_{t-1} = x_{t-1}]$ .

resp.

$$x_t = x_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \quad (3.5)$$

kde  $x_0$  predstavuje hodnotu procesu v čase 0 a  $\mu$  resp.  $\sigma$  sú dané konštanty.

Geometrický Brownov pohyb sa často využíva na modelovanie vývoja cien akcií (výnosy cien akcií sa modelujú ako nezávislé normálne rozdelené, vtedy  $\mu$  predstavuje očakávaný výnos a  $\sigma$  neistotu tohto výnosu), úrokov, miezd a iných ekonomických a finančných veličín. Jeho výhody spočívajú najmä v tom, že generuje iba kladné hodnoty, čo je vhodné pri modelovaní veličín, ktorých záporné hodnoty by nedávali praktický zmysel (napríklad cena alebo množstvo).<sup>4</sup>

## 3.2 Itôva lema

Jedným z pilierov analýz stochastických diferenciálnych rovníc sa stalo odvodenie Itôvej lemy (pomocou *Taylorovho rozvoja*). Táto lema definuje pravidlá pre derivovanie funkcií stochastických procesov.

**Lema 3.1 (Itôva lema)** *Nech  $x_t$  je Itôv proces  $dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW$ , nech  $f(x, t) \in C^2(R \times ]0, \infty))$ . Potom prvý diferenciál funkcie  $f(x, t)$  je daný vzťahom*

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2(x, t)dt \quad (3.6)$$

dôsledkom čoho funkcia  $f$  vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici<sup>5</sup>

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + b(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dW \quad (3.7)$$

---

<sup>4</sup>Niektoré ceny (napríklad ceny základných surovín) však nevyhovujú exponenciálnemu trendu vývoja. Na ich modelovanie je možné použiť napríklad tzv. *mean—reverting* proces (detailnejšie v časti 6.1).

<sup>5</sup>Ševčovič, 2001, str.17 [4].

# Kapitola 4

## Model

Základom pre naše úvahy o optimálnom procese rozhodovania je správna formulácia modelu popisujúceho realitu. Uvažujme všeobecnú úlohu zameriavajúcu sa na minimalizáciu nákladov (pre zjednodušenie abstrahujeme od existencie príjmov), ktoré sú funkciou stochastickej ceny nejakej komodity. Túto úlohu neskôr bližšie špecifikujeme (zvolením konkrétnych funkcií) a mierne modifikujeme.

### 4.1 Predpoklady investovania

- Nech sa spoločnosť rozhoduje optimálne (v zmysle minimalizácie nákladov) a jej rozhodnutie je riadené cenou  $S_t$  nejakej komodity, ktorá sleduje geometrický Brownov pohyb (s parametrami ako v (3.4)).
- Uvažujme investíciu výšky  $I$ .
- Náklady za jednotku času pred investíciou nech definuje funkcia  $\pi_1(S_t, t)$ , kým po nej funkcia  $\pi_2(S_t, t)$ , pričom platí  $\forall S_t, t : \pi_1(S_t, t) \geq \pi_2(S_t, t)$ .
- Rozhodnutie investovať je nenávratné, to znamená, že po uskutočnení projektu sú náklady za jednotku času vo všetkých nasledovných časových okamihoch definované funkciou  $\pi_2(S_t, t)$ .
- Uvažujme spoločnosť, ktorej životnosť je  $T$  rokov, po uplynutí ktorých spoločnosť úplne zaniká a s jej činnosťou nie sú spojené žiadne ďalšie výdavky.

- Predpokladajme konštantnú, v čase nemennú ročnú úrokovú mieru  $r$ .

## 4.2 Formulácia modelu

V nasledujúcej časti matematicky popíšeme skutočnosti uvedené v časti 4.1. Označme  $V_2(S_t, t)$  očakávanú čistú súčasnú hodnotu všetkých budúcich peňažných tokov od času  $t$  do času  $T$  za predpokladu, že spoločnosť investovala v minulosti (do času  $t$ ). Z hľadiska ďalších úvah sa javí výhodné vyjadriť hodnotu  $V_2(S_t, t)$  pomocou nasledujúcej Bellmanovej rovnice:

$$V_2(S_t, t) = \pi_2(S_t, t)\Delta t + (1 + r\Delta t)^{-1}E[V_2(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t)|S_t] \quad (4.1)$$

Kým prvý argument pravej strany vzťahu (4.1) predstavuje okamžité náklady v čase  $t$ , druhý popisuje diskontované budúce náklady, ktoré sú vyjadrené podmienenou strednou hodnotou na základe informácie o cene známej v čase  $t$ .

Nech  $V(S_t, t)$  predstavuje očakávanú čistú súčasnú hodnotu budúcich peňažných tokov od času  $t$  do času  $T$  ak predpokladáme, že sa firma rozhoduje optimálne vo všetkých budúcich časových okamihoch. Úloha sa redukuje na Bellmanovu rovnicu pre úlohu optimálneho riadenia:

$$V(S_t, t) = \min(\pi_1(S_t, t)\Delta t + (1 + r\Delta t)^{-1}E[V(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t)|S_t], V_2(S_t, t) + I) \quad (4.2)$$

s koncovou podmienkou

$$V(S_T, T) = 0 \quad (4.3)$$

Prvý člen prvého argumentu vzťahu (4.2) predstavuje peňažný tok nákladov za čas  $\Delta t$ , druhý člen diskontovanú očakávanú hodnotu budúcich peňažných tokov za predpokladu, že sa v každom časovom okamihu rozhodujeme optimálne a v čase rozhodnutia je známa cena  $S_t$ . Druhý argument vzťahu (4.2) interpretuje možnosť investície s jednorazovými nákladmi vo výške  $I$  v čase  $t$ , ďalšie peňažné toky budú v tomto prípade dané funkciou  $V_2(S_t, t)$  (pretože investícia je nevratná).

A teda v prípade, že sa minimum nadobúda v prvom argumente, investícia v čase  $t$  a pri danej cene  $S_t$  nie je prijatá a naopak, jeho nadobudnutie v druhom argumente zodpovedá jej akceptovaniu.

Koncová podmienka (4.3) zodpovedá ukončeniu prevádzky firmy v čase  $T$ .

## 4.3 Stochastické dynamické programovanie

Úlohu sformulovanú vzťahom (4.2) je možné prepísať do tvaru úlohy stochastického dynamického programovania s diskretným pevným časom a pevným koncom.

Označme:

- $j$  — časový index prislúchajúci času  $t_j = j\Delta t$ , kde  $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $m = \frac{T}{\Delta t}$ . Teda  $(t_0, \dots, t_m)$  je delenie časového intervalu.
- $S_j$  — náhodná premenná predstavujúca cenu aktíva v čase  $t_j$  sledujúca geometrický Brownov pohyb. Predpokladáme, že  $S(t_0) = S_0$ .
- $u_j$  — riadiaca premenná, pričom
$$u_j = \begin{cases} 0 & \text{neinvestovať} \\ 1 & \text{investovať} \end{cases}$$

Rovnica stochastického dynamického programovania teda v zmysle zavedeného označenia vyzerá nasledovne:

$$V_j(S_j) = \min_{u_j \in \{0,1\}} ((1 - u_j)(\pi_{1_j}(S_j)\Delta t + (1 + r\Delta t)^{-1}E[V_{j+1}(S_{j+1}|S_j)]) + u_j(V_{2_j}(S_j) + I))$$

s koncovou podmienkou

$$V_m(S_j) = 0$$

Táto úloha je zvyčajne riešená metódou programového riadenia alebo metódou optimálnej spätnej väzby, avšak ako problematická sa ukazuje závislosť náhodných premenných  $S_j, S_{j+1}$ . Preto zvolíme iný prístup založený na numerickom riešení parciálnych diferenciálnych rovníc.

## 4.4 Odvodenie parciálnych diferenciálnych rovníc

Ako bolo spomenuté, úloha optimálneho riadenia sa zvyčajne rieši odzadu iteračnou metódou, avšak v tomto prípade je možný jej prevod na hľadanie minima

funkcií, ktoré vyhovujú parciálnym diferenciálnym rovniciam.<sup>1</sup>

Použitím Taylorovho rozvoja, vzťahov (3.7) a (3.4) a faktu, že  $E[dW] = 0$  dostávame<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} E[V(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t)|S_t] &= V(S_t, t) + \\ &+ [V_t(S_t, t) + \mu S_t V_S(S_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 V_{SS}(S_t, t)]\Delta t + \\ &+ o(\Delta t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

kde  $o(\Delta t)$  sú členy vyššieho rádu.

Ak sa vo vzťahu (4.2) nadobudne minimum v prvom argumente, potom platí:

$$V(S_t, t) = \pi_1(S_t, t)\Delta t + (1 + r\Delta t)^{-1}E[V(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t)] \quad (4.5)$$

Prenásobením  $(1 + r\Delta t)$  a preusporiadaním dostávame

$$r\Delta t V(S_t, t) = \pi_1(S_t, t)\Delta t(1 + r\Delta t) + E[V(S_{t+\Delta t}, t + \Delta t) - V(S_t, t)] \quad (4.6)$$

Predelením  $\Delta t$  a limitným prechodom  $\Delta t \rightarrow 0$

$$rV(S_t, t) = \pi_1(S_t, t) + \frac{1}{dt}E[dV] \quad (4.7)$$

Využijúc (4.4) vo vzťahu (4.7)

$$rV(S_t, t) = \pi_1(S_t, t) + V_t(S_t, t) + \mu S_t V_S(S_t, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 V_{SS}(S_t, t) \quad (4.8)$$

Nakoniec preusporiadaním dostávame parciálnu diferenciálnu rovnicu (PDR)

$$V_t(S, t) + \mu S V_S(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}(S, t) - rV(S, t) + \pi_1(S, t) = 0 \quad (4.9)$$

Analogickým postupom vychádzajúc zo vzťahu (4.1) dostávame PDR pre  $V_2(S, t)$

$$V_{2t}(S, t) + \mu S V_{2S}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{2SS}(S, t) - rV_2(S, t) + \pi_2(S, t) = 0 \quad (4.10)$$

---

<sup>1</sup>Detailnejšie v Dixit, Pindyck, 1994, str.104–109 [1].

<sup>2</sup>Dolný index štandardne označuje parciálnu deriváciu funkcie podľa indikovanej premennej.

## 4.5 Problém voľnej hranice

Intuícia nám hovorí, že je optimálne investovať pri vyšších hodnotách  $S$  a že celú oblasť rozhodovania (rovinu  $(t, S(t))$ ) môžeme krivkou  $S_f(t)$  rozdeliť na dva regióny, pričom v prvom je optimálne investovať a v druhom naopak zotrvať v súčasnom stave. Krivku  $S_f$  nazývame *voľnou hranicou*. Poznamenajme, že táto krivka je analógiou voľnej hranice známej z teórie amerických finančných opcí.

Predpokladajme, že neinvestovať je optimálne pre  $S < S_f$  a investovať pre  $S > S_f$ . Detailnejšie podmienky, za ktorých je tento predpoklad splnený uvádzajú Dixit, Pindyck, 1994, str.104–108 [1].

Z formulácie voľnej hranice je zrejmé, že na hranici musí platiť

$$V(S_f(t), t) = V_2(S_f(t), t) + I \text{ pre } \forall t. \quad (4.11)$$

Táto hranica je však neznáma, preto potrebujeme ďalšiu podmienku, ktorá zvyčajne pochádza z ekonomického (fyzikálneho, biologického) pozadia daného problému. V našom prípade predstavuje požiadavku hladkého napojenia  $V(S, t)$  a  $V_2(S, t) + I$  ako funkcií  $S$  v bodoch hranice  $S_f(t)$ <sup>3</sup>, teda

$$V_S(S_f(t), t) = V_{2S}(S_f(t), t) \text{ pre } \forall t \quad (4.12)$$

## 4.6 Matematická formulácia modelu

Využívajúc všetky spomenuté fakty môžeme sformulovať dve ekvivalentné definície uvedeného modelu:

**Definícia 4.1** *Riešením úlohy (4.2) je dvojica  $(V(S, t), S_f(t))$  spĺňajúca*

- $V_t(S, t) + \mu S V_S(S, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS}(S, t) - r V(S, t) + \pi_1(S, t) = 0$   
pre  $\forall t \in (0, T), \forall S \in (0, S_f(t))$
- $V(S, T) = 0$

---

<sup>3</sup>Podmienka je analogická podmienke voľnej hranice v teórii amerických opcí a je založená na rovnakom ekonomickom základe. Pre bližšie matematické vysvetlenie pozri Dixit, Pindyck, 1994, str.130–131 [1].

- $V(0, t) = 0$
- $V(S_f(t), t) = V_2(S_f(t), t) + I$  kde  $V_2(S, t)$  splňa rovnicu (4.10)
- $V_S(S_f(t), t) = V_{2_S}(S_f(t), t)$  pre  $\forall t \in (0, T)$ .

**Definícia 4.2** Riešením úlohy (4.2) je aspoň  $C^1$  hladká funkcia  $V(S, t)$  splňajúca

- $V(S, t) \leq V_2(S, t) + I$  pre  $\forall t \in (0, T)$ ,  $S > 0$
- ak  $V(S, t) < V_2(S, t) + I$ , potom  $V(S, t)$  splňa parciálnu diferenciálnu rovnicu  $V_t(S, t) + \mu S V_S(S, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 V_{SS}(S, t) - r V(S, t) + \pi_1(S, t) = 0$ ,  
inak  $V(S, t) = V_2(S, t) + I$ , kde  $V_2(S, t)$  splňa rovnicu (4.10)

Prvá uvedená definícia je vhodná na analytické úvahy o vlastnostiach riešenia, kým druhá má využitie najmä v numerických aproximáciách.

# Kapitola 5

## Aplikácia modelu

Cieľom nasledujúcej kapitoly je ukázať možnosti rozšírenia úlohy (4.2) v prípade, že umožníme regulátorovi (vláde, kartelu, inej autorite) ovplyvniť cenu komodity  $S_t$  zavedením jednorazového skoku  $d$  v čase  $t^*$  (kde  $t^* < T$ ). Tento skok môže byť interpretovaný ako zavedenie dane, cla, alebo akákoľvek zmena pomerov, ktorá má dopad na cenu komodity.

### 5.1 Motivácia

Uvažujme štát, ktorý chce znížiť výdavky na zdravotníctvo, respektíve dbá o zdravie obyvateľstva, a preto uvažuje o zavedení povinnosti preventívnych prehliadok pre svojich občanov. Ideou je fakt, že náklady spoločnosti na pacienta, ktorého zdravie je pod dohľadom lekára sú nižšie (v dôsledku rýchlej diagnostiky ochorenia, a teda jeho menšej závažnosti).

Pred zavedením tejto povinnosti občan nenavštevujúci lekára platí určité percento ceny liečby  $\pi_1(S_t) = \frac{S_t}{1+d}$  (kde  $S_t$  je náhodná premenná predstavujúca náklady na liečbu danej choroby,  $d \in (0, 1)$ ) a dobrovoľne navštevujúci platí štvrtinu ceny liečby, teda  $\pi_2(S_t) = \frac{S_t}{4}$ .

Naopak, ak štát túto myšlienku zrealizuje, občan, ktorý sa rozhodne povinnosť ignorovať, hradí celú sumu  $\pi_1(S_t) = S_t$ , kým cena pre občana podstupujúceho prehliadku sa taktiež mierne zvýši, povedzme na  $\pi_2(S_t) = \frac{(1+d)S_t}{4}$ . Jeho právo rozhodnúť sa,

či podstúpi prehliadky alebo nie predstavuje opciu, ktorej expiračnou cenou je cena stratenej príležitosti, teda čas strávený každoročne na vyšetreniach vyjadrený v peniazoch, ktoré by bol produktívny človek schopný za túto dobu zarobiť. Do expiračnej ceny môže byť prípadne zahrnutý aj stres z čakania na výsledky a podobne. Predpokladáme, že ak sa občan rozhodne prehliadky absolvovať, jeho rozhodnutie je nezvratné.

Cieľom štátu je v horizonte  $T$  rokov dosiahnuť, aby sa určité stanovené percento jeho občanov prehliadok zúčastňovalo. Z pohľadu tohto regulátora je teda otázkou, kedy prijať zákon o povinnosti prehliadok, aby boli naplnené jeho predstavy o nákladoch na liečbu pacientov.

Vzhľadom na fakt, že kvantifikovať jednotlivé veličiny v modeli popisujúcom náklady na liečbu a zdravie ako také, by bolo z dôvodu nedostatku dát náročné, nebudeme sa touto úlohou zaoberať. Tento názorný príklad však poukazuje na skutočnosť, že schéma modelu, ktorým sa zaoberáme v tejto diplomovej práci, má opodstatnenie v množstve aktuálnych problémov.

## 5.2 Úloha

V nasledujúcom texte sa zaoberáme úlohou, ktorá je aplikovateľná na rozhodovanie v rôznych priemyselných odvetviach.

Predpokladajme existenciu malých podnikateľov prevádzkujúcich spoločnosti, ktorých vedľajším produktom výroby sú splodiny vo forme  $\text{CO}_2$ . Reprezentujme všetky spoločnosti jednou *agregovanou spoločnosťou*, ktorá predstavuje priemernú spoločnosť (z hľadiska prístupu k realizácii investície). Keďže štát má záujem na plnení kvót stanovených Kjótskym protokolom, za každú tonu  $\text{CO}_2$  vypustenú do ovzdušia nad povolené množstvo je jej emitent povinný platiť náklady, ktoré sa odvíjajú od aktuálnej ceny  $\text{CO}_2$  a množstva vyprodukovaných splodín. S touto splodinou je možné reálne obchodovanie (v zmysle obchodu s emisiami) a jej cena je modelovaná ako geometrický Brownov pohyb.

Ďalej uvažujme, že agregovaná spoločnosť produkuje splodiny nad povolenú kvótu

a to v čase  $t_0$   $X$  ton  $\text{CO}_2$  za čas  $\Delta t$ . Táto spoločnosť má možnosť nainštalovať filter za cenu  $I$ , ktorý zníži produkciu  $\text{CO}_2$  nad limit na  $Y$  ton za čas  $\Delta t$  ( $Y < X$ ). Spoločnosť má životnosť  $T$  rokov a rozhoduje sa optimálne (prioritou je minimalizovať náklady spojené s produkciou  $\text{CO}_2$ ). Je dôležité si uvedomiť, že úloha spĺňa predpoklady definované v časti 4.1.

Regulátor uvažuje o zavedení dane na  $\text{CO}_2$  vo výške  $d$  (detailnejšie v časti 5.3) v čase  $t^*$ , s úmyslom zatráktívniť zavedenie filtra, a teda zlepšiť životné prostredie. Toto rozhodnutie má možnosť urobiť raz ročne.

Úlohou je určiť *kedy* (prípadne *o koľko*,  $d \in (0, 1)$ ) má regulátor k tomuto kroku pristúpiť, aby postavenie filtra určité percento spoločností počas zvoleného časového obdobia realizovalo.

### 5.3 Modelovanie ceny $\text{CO}_2$

Zavedením Kjótskeho protokolu, ktorý udáva jednotlivým krajinám kvóty na produkciu emisií znečisťujúcich životné prostredie, sa vytvoril priestor na obchodovanie s týmito emisiami. Jednoducho povedané: ak štát stanovuje jednotlivým podnikom stropy na produkciu  $\text{CO}_2$ , potom tieto môžu rozdiel medzi stropom a ich skutočnou produkciou predať podniku, ktorý svoj limit prekračuje.

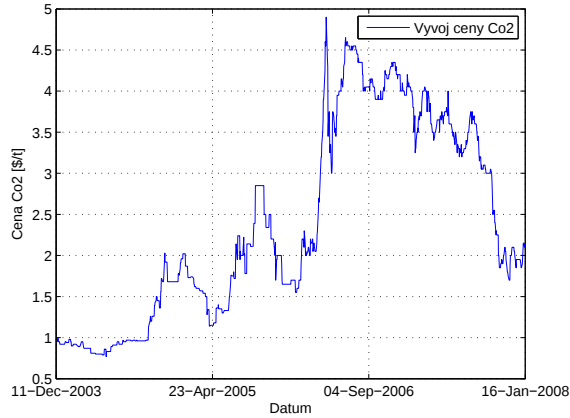
Využívajúc predpoklad, že cena  $\text{CO}_2$  (uvádzaná v prepočte na 1 tonu  $\text{CO}_2$ ) sleduje geometrický Brownov pohyb, z historických dát cien za obdobie 12.12.2003–15.1.2008 uverejnených na [www.chicagoclimatex.com/market/data/summary.jsf](http://www.chicagoclimatex.com/market/data/summary.jsf) odhadneme parametre  $\mu_1 = 0.198436$ ,  $\sigma_1 = 0.515207$  (pre  $\Delta t = 1/250$ ),  $S_0 = 0.95\$$ . Vývoj ceny  $\text{CO}_2$  za toto obdobie je znázornený na obrázku 5.1.

Pod pojmom *zavedenie dane v čase  $t^*$*  rozumieme nasledovné:

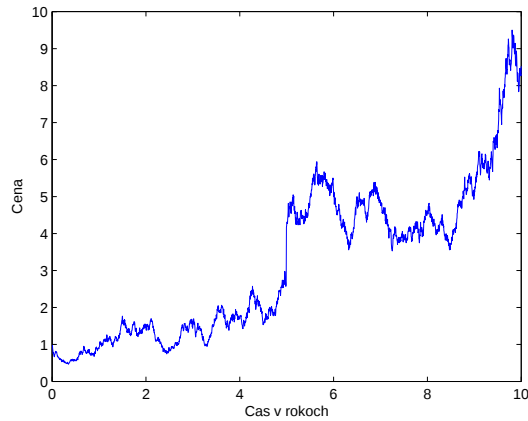
$$S_t = \begin{cases} S_0 e^{(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)t + \sigma_1 W_t} & \text{pre } t < t^* \\ (1 + d)S_0 e^{(\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)t^* + \sigma_1 W_{t^*}} e^{(\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2)(t - t^*) + \sigma_2(W_t - W_{t^*})} & \text{pre } t \geq t^* \end{cases}$$

Treba podotknúť, že po zavedení dane cena opäť sleduje geometrický Brownov pohyb, avšak potenciálne s inými parametrami  $\mu_2$ ,  $\sigma_2$ . Na obrázku 5.2 je zná-

zornená simulácia ceny za predpokladu zmeny týchto parametrov ( $0 < \mu_2 \leq \mu_1$ ,  $0 < \sigma_2 \leq \sigma_1$ — predpoklad nižších hodnôt rastu ceny a nižšej volatility).



Obrázok 5.1: Vývoj ceny CO<sub>2</sub> [\$ / t] v období od 12.12.2003 do 15.1.2008.



Obrázok 5.2: Simulácia ceny CO<sub>2</sub> pre parametre  $\Delta t = 1/250$ ,  $S_0 = 0.95$ ,  $\mu_1 = 0.198436$ ,  $\sigma_1 = 0.515207$ ,  $\mu_2 = 0.08$ ,  $\sigma_2 = 0.2$ ,  $t^* = 5$  rokov,  $d = 0.5$ .

Ďalej je dôležité si uvedomiť, čo sa deje s hodnotou  $V(S, t)$  v čase tejto intervencie. Kvôli jednoduchosti predpokladajme, že v čase uvalenia dane ( $t^*$ ) nie je možná realizácia investície.<sup>1</sup> Potom môže byť využitý vzťah:

$$V(S_{t^*}, t^*) = \lim_{t \rightarrow t^{*+}} V((1 + d)S_t, t) \quad (5.1)$$

<sup>1</sup>Uvedený predpoklad je dôležitý iba z technického hľadiska pri numerickom riešení modelu, bližšie v časti 5.5.

Vzťah (5.1) vyjadruje fakt, že čistá súčasná hodnota budúcich nákladov od času  $t^*$  do času  $T$  pri cene  $S_t$  je rovná týmto nákladom od času  $t^* + dt$  do času  $T$  pri cene  $(1 + d)S_t$ .

## 5.4 Funkcie nákladov

Pri riešení úlohy má na celkový tvar oblasti rozhodovania vplyv množstvo faktorov. Jedným z nich je voľba funkcií  $\pi_1(S_t, t)$ ,  $\pi_2(S_t, t)$ , ktoré predstavujú mieru okamžitých nákladov firmy na produkciu splodín.

V ekonomickej teórii sa stretávame s rôznymi typmi nákladových funkcií, vo všeobecnosti však rozlišujeme:

- *Fixné náklady* — náklady, ktoré musia byť nevyhnutne vynaložené na zabezpečenie produkcie. Ich hodnota je konštatná a nezávisí od vyprodukovaného množstva.
- *Variabilné náklady* — zahŕňajú bezprostredné náklady na produkciu, závisia od počtu vyprodukovaných jednotiek.

V kontexte problematiky produkcie CO<sub>2</sub> môže byť interpretáciou predpoklad, že každý producent daného odvetvia prekračuje povolené množstvá emisií. V dôsledku toho platí pokutu štátu alebo mestu za zhoršené životné prostredie (fixné náklady). Nech je zavedená povinnosť, že každá ďalšia tona nad limit, musí byť odkúpená od spoločností, ktoré limit nenapĺňajú. Teda emitent kupuje presne také množstvo, aké vyprodukuje (variabilné náklady).

Zaoberajme sa najjednoduchším typom nákladových funkcií:

$$\pi_1(S_t, t) = XS_t + A$$

$$\pi_2(S_t, t) = YS_t + B$$

$$X > Y \geq 0, A \geq B \geq 0$$

V niektorých prípadoch je možné parciálne diferenciálne rovnice (4.9) a (4.10) vyriešiť analyticky. V ďalšej časti uvedieme koncept riešenia rovnice (4.9) pre  $\pi_1(S, t)$  kde  $A = 0$ .

## Analytické riešenie PDR

V prípade, že budúce peňažné toky (napr. náklady) sú lineárnou funkciou produkovaného množstva  $X$ , teda  $\pi(S, t) = XS$  je rovnicu (4.9):

$$\begin{cases} V_t(S, t) + \mu SV_S(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}(S, t) - rV(S, t) + XS = 0 \\ V(S, T) = 0 \end{cases}$$

možné vyriešiť analyticky.

Použitím transformácií  $x = \ln S$ ,  $\tau = T - t$  a vzťahu  $V(S, t) = u(x, \tau)$  dostávame

$$\begin{cases} u_\tau - \frac{\sigma^2}{2} u_{xx} - (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) u_x + ru - Xe^x = 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Transformáciou  $v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$  a vhodným zvolením parametrov  $\alpha = \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\mu + \frac{\sigma^2}{8} + r$  sa rovnica redukuje na tvar:

$$\begin{cases} v_\tau - \frac{\sigma^2}{2} v_{xx} - Xe^{(1+\alpha)x + \beta\tau} = 0 \\ v(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Následne aplikujeme vzorec na výpočet riešenia nehomogénnej parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice

$$v(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, \tau) v(s, 0) ds + \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, \tau - r) X e^{(1+\alpha)s + \beta r} ds dr \quad (5.2)$$

kde  $G(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2 t}}$  je Greenova funkcia.

$$v(x, \tau) = X \int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau - r)}} e^{-\frac{(x-s)^2}{2\sigma^2(\tau-r)} + (1+\alpha)s + \beta r} ds dr \quad (5.3)$$

$$v(x, \tau) = X \underbrace{\int_0^{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau - r)}} e^{-\frac{(s - (x + \sigma^2(\tau-r)(1+\alpha)))^2}{2\sigma^2(\tau-r)}} ds}_{1} e^{(1+\alpha)x + \frac{\sigma^2}{2}(\tau-r)(1+\alpha)^2 + \beta r} dr \quad (5.4)$$

Vyriešením integrálu dostávame

$$v(x, \tau) = X e^{x(1+\alpha)} \left[ \frac{e^{\frac{\sigma^2}{2}(\tau-r)(1+\alpha)^2 + \beta r}}{\beta - \frac{\sigma^2}{2}(1+\alpha^2)} \right]_0^{\tau} \quad (5.5)$$

$$v(x, \tau) = X e^{x(1+\alpha)} \frac{e^{\beta\tau} - e^{\frac{\sigma^2}{2}\tau(1+\alpha)^2}}{\beta - \frac{\sigma^2}{2}(1+\alpha)^2} \quad (5.6)$$

Nakoniec spätnými transformáciami dostávame

$$V(S, t) = 2XS e^{-\beta(T-t)} \frac{e^{\beta(T-t)} - e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)(1+\alpha)^2}}{2\beta - \sigma^2(1+\alpha)^2} \quad (5.7)$$

pričom  $\alpha, \beta$  sú uvedené vyššie.

## 5.5 Numerické riešenie

V predchádzajúcej časti 5.4 sme sa zaoberali prípadom, kedy je možné rovnice (4.9) a (4.10) pri špeciálnej voľbe nákladových funkcií vyriešiť analyticky. Nakoľko však existencia explicitného analytického riešenia nie je vo všeobecnosti zabezpečená, model budeme riešiť numericky. Presnejšie aplikujeme PSOR metódu<sup>2</sup> (s využitím parametra  $\omega = 1.8$ ) postupujúc odzadu.

Numerické riešenie vyžaduje definíciu rozmerov siete a kroku. Vo všetkých nasledujúcich výsledkoch (ak nie je uvedené inak) aplikujeme časový krok  $k = 1/250$ , priestorový krok (rozmer ceny)  $h = 0.05$  a priestorové ohraničenie  $S_{max} = 60\$$ .

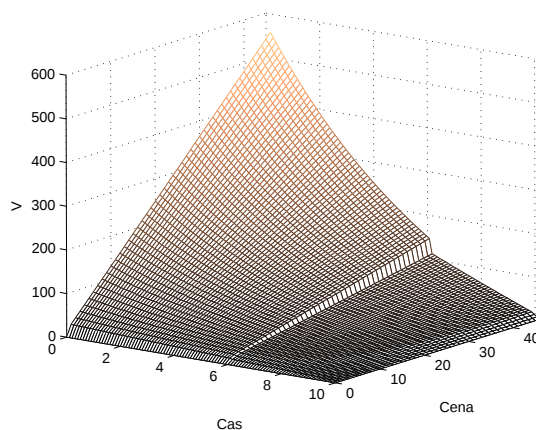
Na všetky neskôr analyzované úlohy sa ďalej vzťahujú nasledovné predpoklady o parametroch:

- $T$  — čas ukončenia prevádzky spoločnosti a súčasne čas maturity reálnej opcie. Zvyčajne volíme obdobie 10 rokov.
- $t^*$  — čas intervencie regulátora (vlády) vo forme uvalenia dane na podkladové aktívum. Predpokladáme, že daň môže byť uvalená raz ročne vždy na začiatku roka, teda v časoch rok 1, rok 2, ..., rok  $T - 1$ .
- $\mu_1$  a  $\sigma_1$  — drift a volatilita stochastického procesu ceny  $\text{CO}_2$  pred zásahom štátu, tieto sú pevne určené — odhadnuté z realizácie ceny  $\text{CO}_2$  ( $\mu_1 = 0.198436$ ,  $\sigma_1 = 0.515207$ ).

---

<sup>2</sup>Projected super over relaxation method, jej algoritmus uvádza napríklad Seydel, 2002, str.127–131 [2].

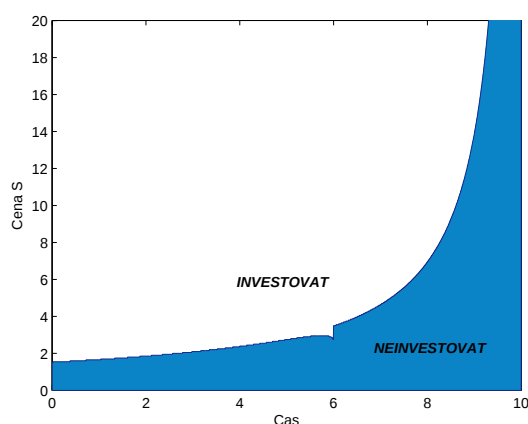
Na obrázku 5.3 je znázornené numerické riešenie  $V(S, t)$  pre uvedené parametre. Je zrejmé, že s plynúcim časom hodnota  $V(S, t)$  klesá, pretože sa skracuje životnosť spoločnosti (obdobie od času  $t$  do času  $T$ ), a teda klesajú aj diskontované budúce náklady spojené s produkciou  $\text{CO}_2$ . Zlom je spôsobený zavedením dane v roku 6.



Obrázok 5.3: Hodnota  $V(S_t, t)$  pre parametre  $S_0 = 0.95$ ,  $\mu_1 = 0.198436$ ,  $\sigma_1 = 0.515207$ ,  $\mu_2 = 0.08$ ,  $\sigma_2 = 0.3$ ,  $t^* = 6$  rokov,  $d = 0.3$ ,  $r = 0.05$ ,  $I = 7\$$ ,  $T = 10$  rokov,  $\pi_1(S, t) = S + 1.2$ ,  $\pi_2(S, t) = 0.5S + 1$ .

### 5.5.1 Oblasť rozhodovania

Tak ako pravidlo čistej súčasnej hodnoty hovorí investovať pre  $NPV > 0$ , aj pri teórii reálnej opcie existuje presná hranica medzi hodnotami  $S_t$  kedy je výhodnejšie investovať a naopak, kedy nie. Na rozdiel od hodnoty NPV je táto hranica dynamická (závislá na čase) a je identická s voľnou hranicou uvedenou v časti 4.5. Obrázok 5.4 zobrazuje voľnú hranicu  $S_f(t)$  v prípade zavedenia dane v roku 6. Všimnime si, že zásah štátu spôsobí posun voľnej hranice smerom dolu, čo znamená, že sa investovať oplatí už pri nižšej cene. Dôvod plynie z očakávaných vyšších hodnôt cien, a teda narastajúceho rozdielu medzi nákladmi na produkciu  $\text{CO}_2$  bez filtra a po jeho zavedení.



Obrázok 5.4: Tvar oblasti rozhodovania resp. voľnej hranice  $S_f(t)$  pre parametre  $S_0 = 0.95$ ,  $\mu_1 = 0.198436$ ,  $\sigma_1 = 0.515207$ ,  $\mu_2 = 0.08$ ,  $\sigma_2 = 0.3$ ,  $t^* = 6$  rokov,  $d = 0.3$ ,  $r = 0.05$ ,  $I = 7\$$ ,  $T = 10$  rokov,  $\pi_1(S, t) = S + 1.2$ ,  $\pi_2(S, t) = 0.5S + 1$ .

### 5.5.2 Parametre a ich vplyv na oblasť rozhodovania

V nasledujúcom odseku sa budeme zaoberať analýzou citlivosti krivky  $S_f(t)$  na zmenu jedného z parametrov. Všetky nasledujúce zmeny parametrov a ich vplyvy budú aplikované na základnú úlohu definovanú parametrami  $S_0 = 0.95$ ,  $\mu_1 = 0.198436$ ,  $\sigma_1 = 0.515207$ ,  $\mu_2 = 0.08$ ,  $\sigma_2 = 0.25$ ,  $t^* = 6$  rokov,  $d = 0.35$ ,  $r = 0.05$ ,  $I = 11\$$ ,  $T = 10$  rokov,  $\pi_1(S, t) = S + 1$ ,  $\pi_2(S, t) = 0.5S + 0.5$ . Oblasť rozhodovania tejto úlohy je na každom z obrázkov 5.5 až 5.12 znázornená plnou čiarou. Prerušovaná čiara predstavuje zmenu tejto krivky pri zmene jedného z parametrov (špecifikácia parametera a na akú hodnotu je zmenený je uvedené pod každým z obrázkov).

- $d$  — výška dane. Uvažujeme  $d \in (0, 1)$ . Vplyv zvýšenia dane na krivku  $S_f(t)$  je znázornený na obrázku 5.5. Je zrejmé, že čím je hodnota dane väčšia, tým je optimálnejšie investovať už pri nižších hodnotách ceny  $\text{CO}_2$ . Dôvodom je fakt, že zavedenie dane má za následok väčší nárast nákladov na  $\text{CO}_2$  pri jeho produkcii bez filtra ako s ním.
- $I$  — náklady na zavedenie filtra. Je zrejmé, že čím je cena inštalácie filtra vyššia, tým viac sa krivka  $S_f(t)$  posúva smerom nahor (obrázok 5.6), pretože sa investovať oplatí až pri vyšších cenách  $\text{CO}_2$ .

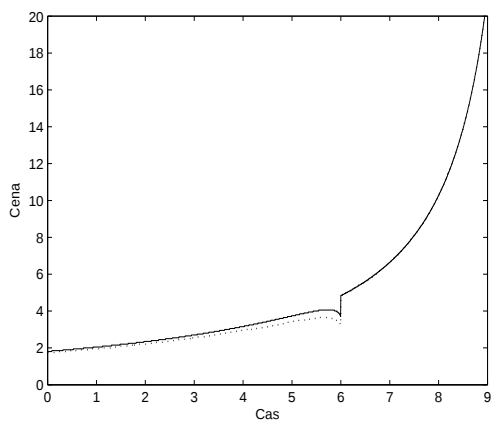
- $r$  — bezriziková úroková miera (% per annum). V dôsledku faktu, že cena reálnej opcie s rastúcim úrokom rastie, zvýšenie zvolenej úrokovej miery spôsobí posun  $S_f(t)$  nahor (obrázok 5.7).<sup>3</sup>
- $\mu_2$  — drift stochastického procesu ceny  $\text{CO}_2$  po zásahu štátu (uvažujeme, že tento parameter sa potenciálne môže líšiť od  $\mu_1$ ). Vyššie hodnoty  $\mu_2$  indikujú vyšší rast ceny, a teda sa optimálnejšie javí investovať už pri nižších hodnotách  $S$  (obrázok 5.8).
- $\sigma_2$  — volatilita stochastického procesu ceny  $\text{CO}_2$  po zásahu štátu (opäť vo všeobecnosti  $\sigma_2 \neq \sigma_1$ ). Vyššia volatilita posúva  $S_f(t)$  nahor, pretože aj keď sa cena nachádza na vyšších hodnotách, investor v dôsledku vyššej volatility (a teda neistoty) čaká, či cena neklesne (obrázok 5.9).

Ďalej uvažujme aj o vplyve zmeny parametrov jednoduchých nákladových funkcií  $\pi_1(S_t, t) = XS_t + A$ ,  $\pi_2(S_t, t) = YS_t + B$  a zmene typu jednej z týchto funkcií na mocninový.

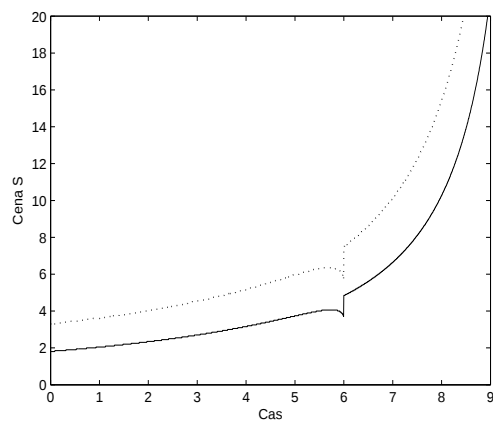
- $X$  resp.  $Y$  — je zrejmé, že nárast  $Y$  respektíve pokles  $X$  spôsobí menšiu atraktivitu možnosti využiť reálnu opciu (obrázok 5.10).
- $A$  resp.  $B$  — vyššie fixné náklady po realizácii projektu (B) alebo nižšie fixné náklady pred ňou (A) majú opäť za následok posun hranice oblasti rozhodovania k vyšším hodnotám (obrázok 5.11).
- $\pi_1$  — mocninová funkcia  $\pi_1$  v závislosti od ceny spôsobuje, že náklady pri vyšších cenách  $\text{CO}_2$  prudko rastú. Z toho dôvodu je optimálnejšia inštalácia filtra už pri nižších hodnotách ceny (obrázok 5.12).

---

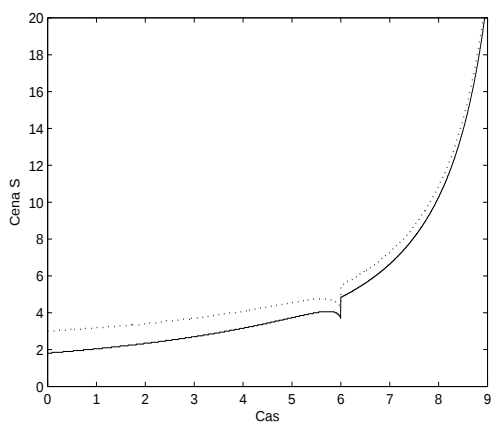
<sup>3</sup>Výsledok je analogický ako pre americkú call opciu.



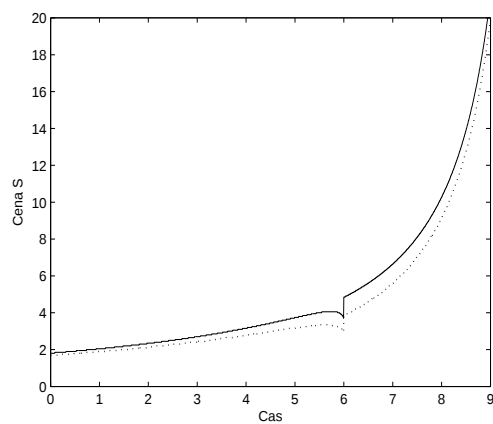
Obrázok 5.5:  $d = 0.55$ .



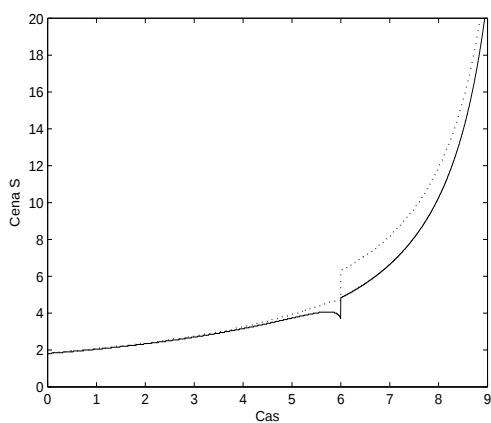
Obrázok 5.6:  $I = 16$ .



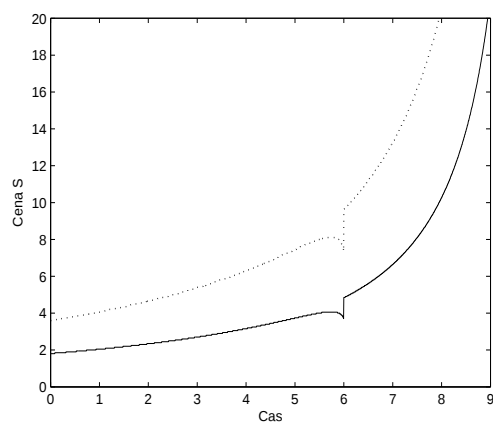
Obrázok 5.7:  $r = 0.1$ .



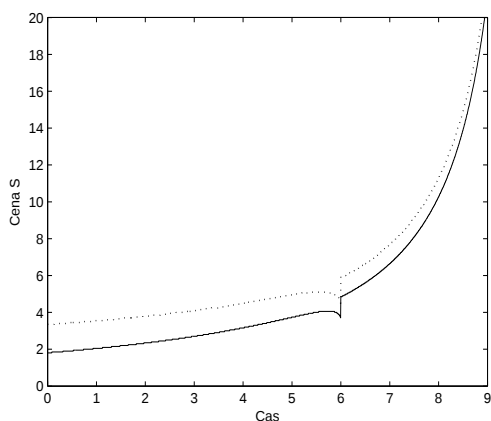
Obrázok 5.8:  $\mu_2 = \mu_1$ .



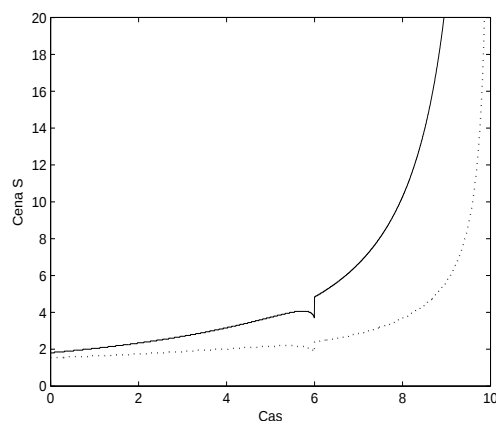
Obrázok 5.9:  $\sigma_2 = \sigma_1$ .



Obrázok 5.10:  $\pi_2 = 0.75S + 0.5$ .



Obrázok 5.11:  $\pi_2 = 0.5S + 1$ .



Obrázok 5.12:  $\pi_1 = S^{1.5} + 1$ .

## 5.6 Vplyv regulátora

Ako bolo uvedené v časti 5.2 záujmom štátu je vplyvom zavedenia dane dosiahnuť, aby čo najviac spoločností inštaláciu filtra realizovalo. Pri riešení tohto problému predpokladajme, že spoločnosť realizuje investíciu okamžite, ak simulácia ceny  $\text{CO}_2$  prekročí hranicu  $S_f(t)$ . Keďže všetky spoločnosti na trhu sú reprezentované jednou agregovanou, pravdepodobnosť prijatia investície touto spoločnosťou môže byť interpretovaná ako relatívna početnosť realizácií opcie skutočnými spoločnosťami.

V nasledujúcej analýze vždy uvažujme parametre  $S_0 = 0.95$ ,  $\mu_1 = 0.198436$ ,  $\sigma_1 = 0.515207$ ,  $\mu_2 = 0.15$ ,  $\sigma_2 = \sigma_1$ ,  $r = 0.05$ ,  $I = 10.2\$$ ,  $T = 10$  rokov,  $\pi_1(S, t) = 0.9S + 1.5$ ,  $\pi_2(S, t) = 0.5S + 0.76$  a počet simulácií 1000.

Pre voľbu  $d = 0.35$  je z výsledkov prezentovaných v tabuľke 5.1 zrejmé, že je optimálne zaviesť daň v roku 3, kedy je pravdepodobnosť prijatia investície agregovanou spoločnosťou maximálna. Avšak rozdiely najmä v prvých piatich rokoch sú minimálne a veľmi citlivé najmä na voľbu parametrov  $\mu_2$  a  $\sigma_2$ . Všimnime si, že takýmto zásahom do vývoja ceny  $\text{CO}_2$  je možné zvýšiť počet spoločností, ktoré investíciu prijímú o takmer 10% (oproti prípadu, kedy regulátor nezasahuje).

Je dôležité si uvedomiť, že dôvodom prečo regulátor nezavedie daň už v roku 1 je

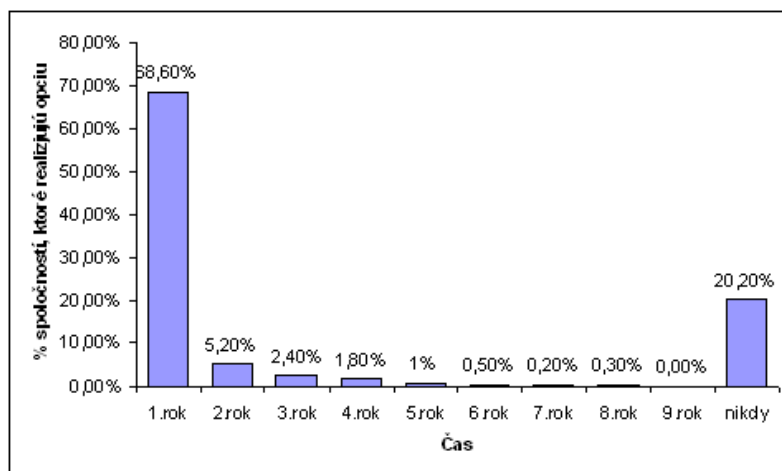
zmena driftu stochastického procesu po zásahu ( $\mu_2 < \mu_1$ ), ktorú je možné interpretovať ako penalizáciu za zavedenie dane. Je tu teda riziko, že ak sa daň zavedie príliš skoro, v dlhodobom horizonte bude cena nižšia ako bez intervencie (pri zavedení dane totiž dochádza k protichodným javom: čím skôr sa zavednie daň, tým sú v dôsledku skoku v cene pravdepodobnejšie vyššie hodnoty ceny v budúcnosti; čím skôr sa zavedie daň, tým pokles  $\mu_2$  spôsobí väčšiu „škodu“ v zmysle nižších hodnôt ceny). V prípade, že by sme uvažovali o úlohe, v ktorej parameter  $\mu_2$  zostane nezmenený ( $\mu_2 = \mu_1$ ), pre regulátora je najoptimálnejšie zaviesť daň okamžite v roku 1.

| <i>Rok uvalenia dane<br/>(zásahu štátu)</i> | <i>Pravdepodobnosť realizácie<br/>investície</i> |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1                                           | 79.8%                                            |
| 2                                           | 80.0%                                            |
| 3                                           | <b>81.3%</b>                                     |
| 4                                           | 80.8%                                            |
| 5                                           | 80.7%                                            |
| 6                                           | 80.9%                                            |
| 7                                           | 79.4%                                            |
| 8                                           | 78.2%                                            |
| 9                                           | 76.2%                                            |
| bez zásahu                                  | 72.5%                                            |

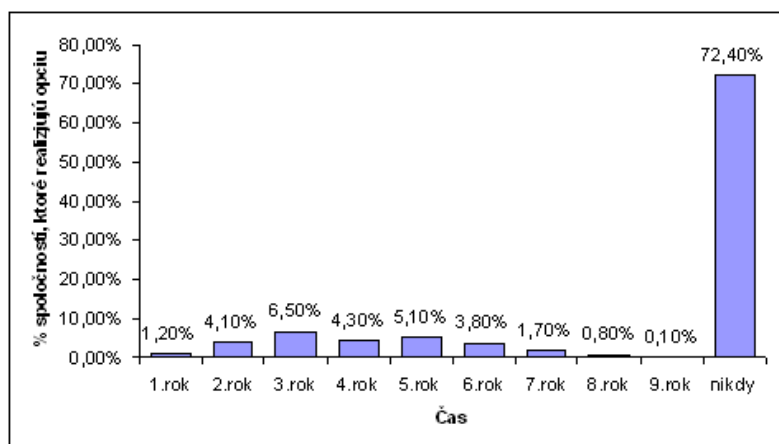
Tabuľka 5.1: Vývoj percentuálneho počtu spoločností, ktoré prijímú investíciu v závislosti od roku zásahu štátu.

Taktiež je zaujímavé rozloženie uplatnení opcií na jednotlivé roky. Na obrázku 5.13 môžeme vidieť, že v prípade zavedenia dane  $d = 0.35$  v roku 6 sa na takmer 70% realizácia investície uskutoční v prvom roku a na 20.2% sa neuskutoční vôbec. Ostatné roky sú zastúpené iba nízkymi pravdepodobnosťami. Znamená to teda, že väčšina zo spoločností uplatňujúcich opciu ju využije už v prvom roku. Hlavný vplyv na rozloženie uplatnenia opcie na jednotlivé roky má tvar oblasti rozhodovania. Ak zvolíme mocninový typ funkcie nákladov  $\pi_1(S, t)$  (tvar  $S_f(t)$  je potom

napríklad uvedený čiarkovanou čiarou v obrázku 5.12) a dostatočne veľké náklady na investíciu  $I$ , väčší počet spoločností realizuje investíciu neskôr (obrázok 5.14).



Obrázok 5.13: Rozloženie percentuálneho počtu spoločností, ktoré uplatnia opciu podľa roku uplatnenia pre základnú úlohu s  $t^* = 6$  rokov.



Obrázok 5.14: Rozloženie percentuálneho počtu spoločností, ktoré uplatnia opciu podľa roku uplatnenia pre úlohu s mocninovým typom nákladovej funkcie  $\pi_1 = S^{1.4} + 1.5$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2$ ,  $I = 55$ ,  $t^* = 6$  rokov (ostatné parametre ako v základnej úlohe).

V tabuľke 5.2 sa zaoberáme rozdielmi v počte realizácií investície pri rôznej výške dane uvalenej regulátorom. Z hodnôt vyplýva, že čím vyššiu daň autorita zavedie, tým väčšia je pravdepodobnosť uplatnenia opcie agregovanou spoločnosťou. Taktiež je zaujímavý fakt, že čím vyššiu daň volíme, tým sa optimálny čas jej zavedenia

blíži k roku 1 (kým pre  $d = 0.25$  je optimálnejšie daň zaviesť v rokoch 6 - 7, pre  $d = 0.55$  je to rok 1). Tento fakt je možné vysvetliť tým, že pri voľbe vyšších hodnôt  $d$  preváži jeho pozitívny vplyv nad negatívnym účinkom poklesu driftu  $\mu_2$ , a preto je optimálne intervenovať už v roku 1. Všimnime si, že ak by pri voľbe  $d = 0.1$  regulátor zaviedol daň v rokoch 1 až 6, spôsobil by dokonca zníženie počtu realizácií investície (negatívny vplyv poklesu  $\mu_1$  na  $\mu_2$  by prevážil nad skokom v cene).

| <i>Rok zavedenia dane<br/>(zásahu štátu)</i> | <i>d=0.10</i> | <i>d=0.25</i> | <i>d=0.35</i> | <i>d=0.4</i> | <i>d=0.5</i> | <i>d=0.55</i> |
|----------------------------------------------|---------------|---------------|---------------|--------------|--------------|---------------|
| 1                                            | 63.1%         | 73.4%         | 79.8%         | <b>82.8%</b> | <b>88.3%</b> | <b>91.9%</b>  |
| 2                                            | 64.7%         | 73.9%         | 80.0%         | 82.6%        | 87.7%        | 90.8%         |
| 3                                            | 67.2%         | 75.3%         | <b>81.3%</b>  | 82.8%        | 87.5%        | 89.6%         |
| 4                                            | 68.7%         | 76.0%         | 80.8%         | 82.4%        | 87.6%        | 88.3%         |
| 5                                            | 70.7%         | 77.3%         | 80.7%         | 82.6%        | 87.2%        | 87.7%         |
| 6                                            | 72.1%         | <b>77.8%</b>  | 80.9%         | 82.0%        | 85.8%        | 87.3%         |
| 7                                            | 73.1%         | 77.5%         | 79.4%         | 81.0%        | 82.9%        | 84.5%         |
| 8                                            | <b>73.3%</b>  | 76.5%         | 78.2%         | 78.6%        | 81.0%        | 82.0%         |
| 9                                            | 73.2%         | 75.1%         | 76.2%         | 76.7%        | 78.1%        | 78.2%         |
| bez zásahu                                   | 72.5%         |               |               |              |              |               |

Tabuľka 5.2: Vývoj percentuálneho počtu spoločností, ktoré prijímú investíciu v závislosti od roku zásahu štátu a hodnoty dane.

# Kapitola 6

## Možnosti rozšírenia modelu

V tejto kapitole uvidíme možné alternatívy modifikácie modelu, ktoré rozšíria aplikáciu modelu aj do iných odvetví.

### 6.1 Modelovanie ceny

Pri všetkých doterajších úvahách bol využitý predpoklad modelovania ceny geometrickým Brownovým pohybom. V tejto časti sa budeme zaoberať ďalšími procesmi, ktoré sa v realite vyžívajú na simuláciu cien.

#### *Mean—reverting proces*

Ako už bolo spomenuté, geometrický Brownov pohyb nie je vhodný na modelovanie cien niektorých komodít, pretože jeho časový vývoj sa vo veľkej miere vzdďaľuje od svojej počiatočnej hodnoty. Avšak najmä ceny základných surovín ako elektrická energia alebo meď sú v dlhodobom horizonte viazané na hraničné produkčné náklady. Teda, kým krátkodobo napríklad cena elektrickej energie náhodne fluktuuje (napríklad ako dôsledok zmien dopytu a ponuky), z dlhodobého hľadiska sa vracia k hodnote hraničných produkčných nákladov.

Tejto požiadavke správania sa vyhovuje tzv. mean—reverting proces<sup>1</sup> definovaný

---

<sup>1</sup>V slovenskom preklade proces „vracajúci sa k priemeru“.

nasledovne:

$$dx = c(\bar{x} - x)dt + \sigma dW \quad (6.1)$$

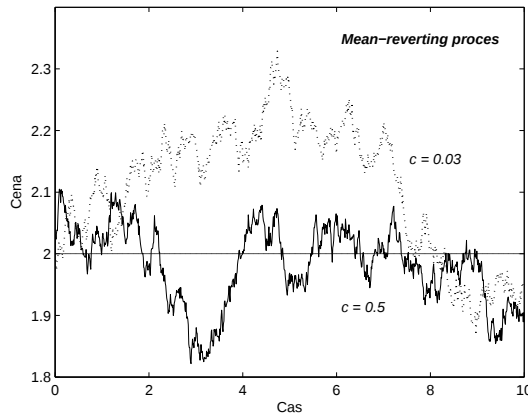
V tomto výraze  $c$  predstavuje rýchlosť reverzie (návratu) k priemernej hodnote  $\bar{x}$ . S rastúcou hodnotou  $c$  má  $x$  vyššiu tendenciu nevzďaľovať sa od  $\bar{x}$ , čo je demonštrované na obrázku 6.1.

V prípade použitia mean—reverting procesu sa model modifikuje iba v parciálnych diferenciálnych rovniciach, kde pri ich odvodení použijeme vo vzťahu (4.4) namiesto vzťahu (3.4) vzťah (6.1). Analogickým postupom ako bolo uvedené v časti 4.4 dostávame výsledok:

$$V_t(S, t) + c(\bar{S} - S)V_S(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{SS}(S, t) - rV(S, t) + \pi_1(S, t) = 0 \quad (6.2)$$

$$V_{2t}(S, t) + c(\bar{S} - S)V_{2S}(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{2SS}(S, t) - rV_2(S, t) + \pi_2(S, t) = 0 \quad (6.3)$$

Tieto rovnice sú následne použité v matematickej definícii modelu<sup>2</sup>, ktorá inak zostáva nezmenená.



Obrázok 6.1: Simulácie mean—reverting procesu pre dve rôzne hodnoty  $c$  (uvedené v obrázku) a parametre  $S_0 = 2$ ,  $dt = 0.01$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $\bar{x} = 2$ .

---

<sup>2</sup>Uvedené v časti 4.6.

## Skokový (jump) proces

V realite sa často stretávame s náhodnými skokmi cien napríklad po vstupe nového konkurenta na trh prípadne koncoch alebo začiatkoch vojenských konfliktov. Uvádzame špeciálny prípad jump procesu, tzv. *Poissonov jump proces*<sup>3</sup> generujúci skoky pevnej alebo variabilnej výšky, ktorých výskyt je daný Poissonovým rozdelením. Nech  $\lambda$  predstavuje priemerný výskyt skokov za jednotku času a  $u$  výšku skoku (ktorá môže byť opäť náhodnou veličinou). Poissonov proces  $q$  je definovaný nasledovne:

$$dq = \begin{cases} 0 & \text{s pravdepodobnosťou } 1 - \lambda dt \\ u & \text{s pravdepodobnosťou } \lambda dt \end{cases}$$

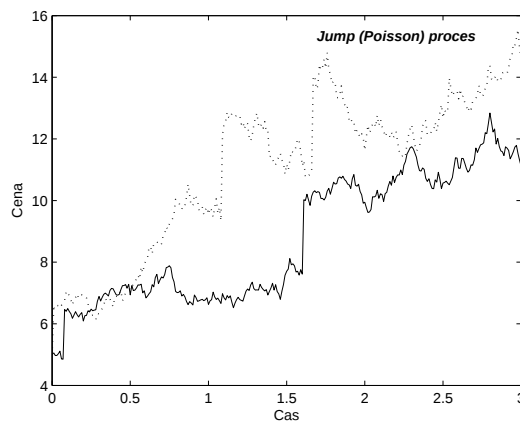
Stochastický Poissonov jump proces spĺňa diferenciálnu rovnicu:

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)dq \quad (6.4)$$

Vo veľkej miere môže byť využiteľný proces, ktorý vznikne kombináciou geometrického Brownovho a Poissonovho jump procesu:

$$dx = \mu x dt + \sigma x dW + g(x, t)dq \quad (6.5)$$

Možný priebeh tohto procesu je znázornený na obrázku 6.2.



Obrázok 6.2: Simulácie kombinácie geometrického Brownovho a Poissonovho jump procesu s parametrami  $g(S, t) = S$ ,  $S_0 = 5$ ,  $dt = 0.01$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $\lambda = 1$ ,  $u = 0.3$ .

<sup>3</sup>Detailnejšie v Dixit, Pindyck, 1994, str.85 [1].

Aplikácia jump procesu v modeli je prirodzeným rozšírením našej úlohy, ktorá však uvažuje deterministický čas zavedenia skoku. Skúmanie rozhodovacieho procesu v prípade, kedy komodita sleduje jump proces je však nad rámec tejto diplomovej práce.

## 6.2 Optimalizácia zásahu regulátora ako reálna opcia

Doteraz sme sa zaoberali numerickým hľadaním optimálneho času zavedenia dane pre konkrétnu úlohu. Teda pri rozhodovacom procese regulátora sme aplikovali statický prístup analýzy pomocou NPV. Avšak optimalizáciu času (prípadne veľkosti) zásahu regulátora je tiež možné interpretovať ako problém investičného rozhodovania a aplikovať naň teóriu reálnej opcie.

Teraz sa zaoberajme opačnou úlohou, kedy rozhodovanie regulátora analyzujeme prístupom reálnej opcie a spoločnosti sa rozhodujú na základe prístupu analýzy pomocou NPV.

Opäť uvažujme o agregovanej spoločnosti produkujúcej  $\text{CO}_2$  a zvažujúcej zavedenie filtra, ktorá predstavuje priemernú spoločnosť na trhu. Cieľom regulátora je ovplyvnením ceny  $\text{CO}_2$  dosiahnuť, aby čo najviac zo spoločností prijalo investíciu. Predpokladáme, že regulátor pozná hraničnú hodnotu  $S^*$ , pri ktorej agregovaná spoločnosť investíciu realizuje.

Rozhodnutie autority je teda riadené stochastickým vývojom ceny  $\text{CO}_2$  a jeho *funkcia užitočnosti* je klesajúcou funkciou celkového množstva emitovaných ton  $\text{CO}_2$  (ktoré závisí od počtu realizácií ceny  $\text{CO}_2$ , ktoré prekročia hodnotu  $S^*$ ). Penalizáciou štátu za zavedenie dane (expiračná cena opcie) môže byť zníženie ekonomického rastu krajiny (spôsobené vysokými nákladmi spoločností). Cieľom je maximalizovať funkciu užitočnosti.

Rozhodovanie regulátora je teda opäť reálnou opciou. Po presnom definovaní modelu je možné určiť jej voľnú hranicu  $S_f(t)$  a tým aj optimálnu rozhodovaciu stratégiu.

Na záver treba podotknúť, že analýza oboch rozhodovacích procesov (agregovanej spoločnosti aj regulátora) súčasne pomocou prístupu reálnej opcie by vzhľadom na skúmanie dvoch protichodných vzájomne sa ovplyvňujúcich rozhodovaní bola zložitým matematickým problémom prekračujúcim rozsah tejto diplomovej práce.

# Záver

Vzhľadom k veľkému počtu individuálnych charakteristík reálnych investičných príležitostí v súčasnosti neexistuje všeobecne aplikovateľná metóda investičného rozhodovania. V dôsledku požiadavky jednoduchého využitia metódy v praxi sa často stretávame so zjednodušovaním reálneho problému. Často využívaná metóda NPV napríklad zanedbáva stochastický vývoj trhových parametrov a taktiež možnosť odložiť rozhodnutie na neskôr. Oproti tomu prístup reálnej opcie berie do úvahy neistotu a taktiež flexibilitu času realizácie investície. Avšak aj tu dochádza k zjednodušeniam: aplikácia iba jedného zdroja náhodnosti, predpoklad konštantnosti úrokovej miery, voľba druhu stochastického procesu najlepšie popisujúceho realitu.

V tejto diplomovej práci sme sa zaoberali modelovým príkladom investičnej príležitosti, ktorej predpoklady, odvodenie a návrh riešenia pomocou parciálnych diferenciálnych rovníc sme uviedli v kapitole 4. Tento model sme aplikovali na reálny problém z oblasti produkcie emisií  $\text{CO}_2$ . Pôrobne sme analyzovali vplyvy jednotlivých parametrov na investičný proces. Následne sme model rozšírili o zásah regulátora do stochastického vývoja ceny  $\text{CO}_2$  (zavedenie dane), ktorého cieľom je zvýšiť počet spoločností, ktoré uplatnia opciu (kapitola 5).

Numerickým riešením sme dospeli k optimálnemu času zavedenia dane a vplyvu veľkosti tohto zásahu na pravdepodobnosť realizácie investície.

Na záver v kapitole 6 bola uvedená diskusia o možnostiach rozšírenia modelu. Zaujímavým pozorovaním, ktorým sa otvára priestor pre ďalšie skúmanie je napríklad fakt, že samotné rozhodovanie regulátora o čase zavedenia dane je možné chápať a riešiť ako problém reálnej opcie.

# Literatúra

- [1] DIXIT A. K., PINDYCK R. S., *Investment under Uncertainty*, Princeton, Princeton University Press, 1994
- [2] SEYDEL R., *Tools for computational finance*, Berlin, Springer Verlag, 2002
- [3] MELICHERČÍK I., OLŠAROVÁ L., ÚRADNÍČEK V., *Kapitoly z finančnej matematiky*, Bratislava, Epos, 2005
- [4] ŠEVČOVIČ D., *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Bratislava, 2001
- [5] CHLADNÁ Z., *Real options applications for strategic investment decisions*, Viedeň, 2007
- [6] KWOK Y. K., *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Singapore, Springer—Verlag 1998
- [7] McDONALD R., SIEGEL D., *The value of waiting to invest*, The quarterly journal of economics, Vol.101, No.4, p.707–728, november 1986. Dostupné na: [www.jstor.org](http://www.jstor.org)
- [8] JING CHEN, *An Analytical Theory of Project Investment—A Comparison with Real Option Theory*, Prince George, School of Business—University of Northern British Columbia 2002. Dostupné na: <http://papers.ssrn.com/sol3/displayabstractsearch.cfm>
- [9] MYERS S.C., *Determinants of Corporate Borrowing*, Journal of Financial Economics, Vol.5, p.147–175, 1977. Dostupné na: <http://bbs.cenet.org.cn/uploadImages/20035171194642347.pdf>