FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Využitie metód aplikovanej matematiky vo finančnom plánovaní

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2008

Tatiana Plachá

Využitie metód aplikovanej matematiky vo finančnom plánovaní

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Tatiana Plachá

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Zuzana Chladná

BRATISLAVA 2008

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne, len s pomocou nadobudnutých teoretických vedomostí, konzultácií a uvedenej literatúry.

V Bratislave, júl 2008 . . . .

Tatiana Plachá

Poďakovanie

Veľmi pekne ďakujem vedúcej diplomovej práce RNDr. Zuzane Chladnej za jej odborné vedenie, pripomienky, návrhy a čas, ktorý mi venovala pri vypracovávaní diplomovej práce.

Abstrakt

Účelom tejto práce je poskytnúť prehľad matematických metód využiteľných pri finančnom plánovaní. Predkladaná práca má pomôcť riadiacim pracovníkom z podnikovej praxe zorientovať sa v metódach, ktoré im ponúka súčasná matematika a ukázať im smer, v akom im tieto metódy môžu pomôcť pri skvalitňovaní finančného plánu ich podniku. V druhej časti práce sa venujeme predstaveniu modelu tvorby výrobného plánu prostredníctvom lineárneho programovania a využitiu reálnych opcií pri tvorbe plánu investícií.

Kľúčové slová: finančné plánovanie, optimalizačné metódy, reálne opcie

Obsah

Úvod

Hlavným cieľom podnikateľských subjektov je zabezpečovanie trvalej prosperity. Užitočným prostriedkom napomáhajúcim jej dosiahnutie je vypracovanie podnikového plánu a jeho integrujúcej súčasti—finančného plánu, ktorý predstavuje spôsob, ako už dnes získať informácie o budúcich finančných dôsledkoch súčasných rozhodnutí. Jeho význam možno výstižne načrtnúť slovami Brealeyho a Myersa [2]: „*Ťava vyzerá ako zviera, ktoré vzniklo spojením názorov rôznych tvorcov. Ak bude firma uskutočňovať svoje finančné rozhodnutia nesúrodo, vznikne z toho finančná ťava.*“ Z tohto dôvodu je potrebné vždy uvážiť celkový vplyv finančných a investičných rozhodnutí. Proces, v rámci ktorého sa tak uskutočňuje, predstavuje finančné plánovanie, pričom jeho konečným výsledkom je zostavenie finančného plánu.

V rámci podnikovej praxe finančného plánovania môžu vznikať situácie, keď je síce známy plánovací problém, no nie je známy spôsob, ako ho riešiť. V dôsledku toho dochádza jednak k zjednodušovaniu danej plánovacej úlohy s cieľom použiť zaužívané metódy a jednak ako následok zjednodušenia i k neprimeranému skresleniu celkových výsledkov, čo môže viesť k zbytočnému zvyšovaniu rizika nedostatočnej prosperity podniku—dokonca až k ohrozeniu jeho existencie.

Aj keď neexistuje metóda priamo vedúca k optimálnemu a komplexnému finančnému plánu—aj Brealey a Myers píšu [2]: „*Neexistuje žiadny model alebo postup, ktorý by vystihol všetku zložitosť a nehmatateľnosť, s ktorou sa stretávame vo finančnom plánovaní.*“—je možné nájsť spôsoby, ako sa k nemu, čo najviac priblížiť. Jedným z nich sú aj dostatočné vedomosti o existujúcom matematickom aparáte a možnostiach jeho aplikácie v konkrétnych situáciách. Práve z tohto dôvodu sme si za hlavný cieľ tejto diplomovej práce zvolili poskytnúť prehľad vybraných metód aplikovanej matematiky využiteľných pri riešení rôznych plánovacích problémov.

Diplomová práca je rozdelená do troch hlavných kapitol. V prvej kapitole sa venujeme stručnej charakteristike finančného plánovania, jeho významu pre podnik a typickej štruktúre finančného plánu.

Obsahom druhej kapitoly je popis vybraných oblastí aplikovanej matematiky a poukázanie na možnosti ich využitia pri tvorbe finančného plánu. Z optimalizačných metód sme zvolili lineárne a nelineárne programovanie, optimálne riadenie a sieťovú analýzu. Z metód finančnej matematiky sa venujeme najmä reálnym opciám.

Tretia kapitola sa zaoberá aplikáciou lineárneho programovania a reálnych opcií pri riešení konkrétnych plánovacích problémov. Predstavíme v nej lineárny model plánovania výroby a na príklade skutočného podniku ukážeme možnosti jeho využitia pri zlepšení finančného riadenia. V druhej časti kapitoly na príklade skutočného projektu poukážeme na využitie reálnych opcií pri investičnom rozhodovaní a zisťovaní hodnoty investície.

Kapitola 1

Finančné plánovanie

1.1 Podstata plánovania

Pojem plánovanie vychádza z latinského slova "planta", ktoré označuje náčrt, nárys. Plánovať preto znamená vypracovať náčrt, projekt niečoho [12].

Plánovanie sa uplatňuje pri rôznych objektoch riadenia, čiže existuje na každom ich stupni. Je to projektovanie budúcnosti. Pomocou plánovania sa určujú ciele organizácie a stanovujú sa cesty, ako tieto ciele v stanovenom čase a na požadovanej úrovni dosiahnuť.

Plánovanie je nástroj, ktorý pomáha manažérom myslieť prostredníctvom výsledkov a problémov a navrhovať alternatívy na dosahovanie výsledkov a prekonávanie problémov. V priebehu plánovania sa smer budúceho vývoja organizácie neustále spresňuje, čo umožňuje organizácii pružne reagovať na nepredvídané zmeny v nej a v jej okolí. Plánovanie je teda jedným z prejavov racionality správania sa organizácie.

1.2 Finančný plán a jeho význam

Brealey a Myers [2] hovoria o finančnom plánovaní ako o procese, v ktorom sa uvažuje s celkovým vplyvom finančných a investičných rozhodnutí. Finančné plánovanie je nutné, pretože finančné a investičné rozhodnutia sú na sebe vzájomne závislé a celkový výsledok nemožno získať ako jednoduchý súčet čiastkových rozhodnutí. Taktiež je nutné pomôcť finančným manažérom, aby sa vyhli prekvapeniam, ktorým sa nedá vyhnúť. Pomocou finančného plánu je možné určiť konkrétne ciele pre motiváciu manažérov a obdržať normu pre ich výkonnosti. Finančné plánovanie sa podľa týchto autorov skladá z týchto častí:

- analýza finančných a investičných možností, ktoré má podnik k dispozícii,
- predpoveď budúcich výsledkov súčasných rozhodnutí,
- výber alternatív,
- meranie výsledkov a porovnávanie s cieľmi.

Výsledkom finančného plánovania je finančný plán. Je to dokument, v ktorom sú oproti sebe postavené súčasná a budúca potreba finančných prostriedkov a momentálne existujúce a budúce očakávané zdroje na ich krytie, t.j. na isté obdobie vopred rozpočítané príjmy a výdavky.

Podnik prostredníctvom finančného plánu verifikuje finančné dôsledky prijatých rozhodnutí vo vecnej oblasti (plán predaja, plán nákupu, ľudských zdrojov a pod.) a zároveň transformuje požiadavky z finančnej oblasti do oblasti podnikateľskej, predovšetkým do sféry využívania výrobných činiteľov. Je to proces postupného približovania, zosúlaďovania čiastkových plánov s finančným plánom s cieľom dosiahnutia optimálnej kombinácie likvidity, istoty a rentability.

Finančný plán nie je však iba pasívnym vyjadrením hospodárskych aktivít podniku, ale plní významné poslanie pri vytyčovaní cieľov plánov. Predpokladom efektívneho plánovania je udržanie finančnej rovnováhy podniku a jeho finančného zdravia. Súčasťou finančného plánu je popri predikcii peňažných tokov aj rozhodovací proces týkajúci sa alokácie prebytkov likvidity alebo krytia schodkov likvidity.

1.3 Štruktúra a obsah finančného plánu

Štruktúra, obsah a stupeň podrobnosti finančného plánu závisia najmä od veľkosti podniku, vyrábanej produkcie, príslušnosti k odvetviu, vlastníctva a podobne. Diferencovaný prístup k štruktúre a obsahu finančného plánu môže byť nielen z hľadiska základných charakteristík podniku a časového horizontu plánu, ale aj z hľadiska členitosti celého systému finančného plánovania na jednotlivé subsystémy a v rámci nich na jednotlivé časti—prvky.

V malých podnikoch sa väčšinou vypracúvajú len jednoduché, málo členité finančné plány na krátke časové intervaly v trvaní do jedného roka. Nemusia mať vždy písomnú podobu, môžu napríklad existovať len v hlave podnikateľa. V stredných a väčších podnikoch s viac formalizovanou organizačnou štruktúrou je finančný plán nevyhnutným nástrojom riadenia podnikateľských aktivít. Plány zostavované v týchto podnikoch si vyžadujú väčšiu podrobnosť a plánovacie obdobie presahujúce dĺžku jedného roka. Štruktúru a obsah finančného plánu si môže podnik vybrať sám, mal by však pritom sledovať minimálne tieto ciele:

- zabezpečiť súvislosť s ostatnými čiastkovými plánmi komplexného plánu podniku (horizontálne väzby),
- zabezpečiť spojitosť v rámci jednotlivých subsystémov (vertikálne väzby),
- zabezpečiť prepojenosť s informačnou sústavou (účtovníctvo, výkazníctvo, štatistika),
- poskytnúť žiaduce informácie finančnému trhu (investorom, akcionárom a pod.).

Každý finančný plán by mal minimálne obsahovať *plánovacie tabuľky*, tzv. proforma výkazy, ktoré môžeme prirovnať k účtovným výkazom účtovnej závierky podniku. Ich obsah je prispôsobený potrebám finančného plánovania a vyjadruje sa v zjednodušenej forme.

Kapitola 2

Vybrané metódy aplikovanej matematiky a ich využitie pri finančnom plánovaní

V nasledujúcej kapitole sa budeme venovať popisu vybraných metód aplikovanej matematiky. Ukážeme si štandardné úlohy, ktorými sa zaoberajú, a spomenieme najpoužívanejšie metódy ich riešenia. Svoju pozornosť upriamime na možnosti poskytované týmito metódami pri tvorbe finančného plánu podniku.

2.1 Lineárne programovanie

2.1.1 Formulácia úlohy a základné pojmy

Úlohu lineárneho programovania možno vo všeobecnosti zapísať v tvare:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i \in I_1 \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i \in I - I_1 \tag{2.3}$$

$$x_j \geq 0 \qquad j \in J_1 \tag{2.4}$$

kde $a_{ij}, b_i, c_j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ sú dané reálne čísla, $I_1 \subset I = \{1, \ldots, m\}$, $J_1 \subset J = \{1, \ldots, n\}$, výraz (2.1) sa nazýva účelová funkcia, výrazy (2.2), (2.3) a

(2.4) ohraničenia. V prípade, že $I_1 \neq \emptyset$, $I_1 \subsetneqq I$ alebo $J_1 \subsetneqq J$, vyššie uvedenú úlohu nazývame *maximalizačná úloha lineárneho programovania v zmiešanom tvare*, ak $I_1 = \emptyset$, $J_1 = J$, ide o *maximalizačnú úlohu lineárneho programovania v rovnicovom tvare*, a ak $I_1 = I$, $J_1 = J$, ide o *maximalizačnú úlohu lineárneho programovania v tvare nerovností*. Platí, že každú úlohu v zmiešanom tvare a v tvare nerovností možno vhodnou transformáciou premenných previesť na úlohu v rovnicovom tvare, teda (vyjadrené prostredníctvom maticového zápisu):

$$\max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{2.5}$$

za podmienok

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \tag{2.7}$$

Pre úlohu lineárneho programovania zadanú pomocou výrazov (2.5), (2.6) a (2.7) definujeme *množinu prípustných riešení* $M = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ a *optimálne riešenie* $\mathbf{x}^* \in \mathbf{M}$, pre ktoré platí:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}$$

Základnou metódou používanou pri riešení úloh lineárneho programovania je *simplexová metóda* a jej rôzne modifikácie v závislosti od tvaru riešenej úlohy. Hlavnou myšlienkou je pritom konštrukcia simplexovej tabuľky podľa určitých pravidiel. Tá sa v procese hľadania riešenia postupne transformuje, až dospeje k jednej z nasledujúcich možností, ktoré pri riešení úloh lineárneho programovania vo všeobecnosti môžu nastať:

- *optimalita*–úloha má optimálne riešenie;
- *neohraničenosť*–úloha má prípustné riešenie, no účelová funkcia je zhora (v prípade minimalizačnej účelovej funkcie zdola) neohraničená;
- *neprípustnosť*–úloha nemá prípustné riešenie.

Podrobnejšie informácie týkajúce sa lineárneho programovania nájde čitateľ napríklad v [16].

2.1.2 Využitie lineárneho programovania vo finančnom plánovaní

Využitie lineárneho programovania ako nástroja finančného plánovania podniku je podmienené jeho základnými charakteristikami. Na jednej strane umožňuje nájsť optimálne riešenie v závislosti od zadanej účelovej funkcie a ohraničení pomerne nenáročným spôsobom. Úlohu lineárneho programovania možno riešiť aj pomocou štandardných tabuľkových procesorov (napr. MS Excel), ktoré sú bežným nástrojom používaným na ekonomické analýzy v podniku. Spolu s relatívnou jednoduchosťou a zrozumiteľnosťou formulácie úlohy to vedie k obľúbenosti používania tejto metódy v praxi.

Na strane druhej lineárne programovanie vychádza z deterministického prístupu a teda neumožňuje prihliadať na vplyvy náhodných činiteľov. Problémom v niektorých prípadoch môže byť aj lineárnosť účelovej funkcie ako aj ohraničení, keďže nie všetky vzťahy medzi zvolenými premennými musia túto podmienku spĺňať. To môže viesť k podvedomému zjednodušovaniu úlohy a z toho vyplývajúcim nepresným záverom.

Práve z týchto dôvodov je lineárne programovania vhodným nástrojom plánovania predovšetkým v kratšom časovom horizonte napr. jeden rok, kde zostavený model pre určitý plánovací problém uspokojivo aproximuje existujúce ekonomické závislosti.

Jednou zo skupín plánovacích úloh, ktoré možno vhodným spôsobom riešiť prostredníctvom lineárneho programovania, sú úlohy s maximalizáciou zisku, resp. minimalizáciou nákladov, pri rôznych ohraničujúcich podmienkach v závislosti od oblasti, ktorej sa plánovací problém týka. Príkladom môžu byť rôzne personálne problémy, kde sa snažíme určiť optimálny počet zamestnancov určitého oddelenia pri minimálnych mzdových nákladoch v závislosti od množstva úloh a pracovného času, výrobné problémy, kde sa optimalizuje množstvo vyrobenej produkcie pri maximalizácii zisku z ich predaja a ohraničeniach na výrobné faktory a pod. Jednou z najznámejších úloh patriacich do tejto skupiny je aj dopravný problém, v ktorom sa snažíme minimalizovať náklady na prepravu výrobkov z miest ich výroby do miest ich odbytu:

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \qquad 1 \leq i \leq m \tag{2.9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \qquad 1 \leq j \leq n \tag{2.10}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \tag{2.11}$$

kde x_{ij} je množstvo výrobku prepravené z miesta výroby i do miesta odbytu j, c_{ij} sú náklady na prepravu jedného výrobku z i do j, m je počet miest výroby, n je počet miest odbytu, a_i je disponibilné množstvo výrobkov v mieste výroby i a b_j je požadované množstvo výrobkov miestom odbytu j.

Zaujímavou aplikáciou lineárneho programovania vo finančnom plánovaní je model LONGER od autorov S. C. Myers a G. A. Pogue [14], ktorý spája plánovanie projektov rozvoja, dividendovej politiky a finančnej štruktúry podniku do jedného optimalizačného modelu. Autori uvažujú s nasledovnými predpokladmi:

1. Uvažujeme spoločnosť rozhodujúcu sa o výške investície na budúci rok x a o veľkosti pôžičky na túto investíciu y.

2. Dostupná investičná príležitosť môže absorbovať finančné prostriedky v určitej maximálnej výške I.

3. Je daná miera čistej súčasnej hodnoty investície r za predpokladu financovania len vlastným kapitálom (táto miera určuje vzťah medzi čistou súčasnou hodnotou investície (NPV) a výškou kapitálových výdavkov potrebných na jej uskutočnenie, teda napr. ak $r = 0,1$ a $I = 1000$, tak $NPV = 100$).

4. Veľkosť pôžičky je limitovaná percentom z celkovej výšky investície p.

5. Firma má k dispozícii určité množstvo vlastných finančných prostriedkov E.

6. Je stanovená miera súčasnej hodnoty daňových úspor generovaných novým dlhom d (teda napr. ak $d = 0,5$ a firma si požičia $y = 1000$, tak súčasná hodnota daňových úspor získaných v dôsledku financovania cudzím kapitálom bude $1000 \times 0,5 = 500$).

7. Prebytočné peňažné prostriedky sú vyplatené vo forme dividend.

8. Prírastky dlhu a vlastného kapitálu sú trvalé.

V tvare úlohy lineárneho programovania možno tento problém zapísať ako:

$$\max \quad \mathbf{r} \times \mathbf{x} + \mathbf{d} \times \mathbf{y} \tag{2.12}$$

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{I} \tag{2.13}$$

$$\mathbf{y} \leq \mathbf{p} \times \mathbf{x} \tag{2.14}$$

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} + \mathbf{E} \tag{2.15}$$

kde výraz (2.12) je účelová funkcia maximalizujúca prírastok trhovej hodnoty podniku pozostávajúci z čistej súčasnej hodnoty investície a súčasnej hodnoty daňových úspor generovaných novým dlhom, výraz (2.13) vyjadruje ohraničenie na veľkosť investície, výraz (2.14) ohraničenie na výšku nového dlhu a výraz (2.15) vyváženosť zdrojov a ich použitia.

2.2 Nelineárne programovanie

2.2.1 Formulácia úlohy a metódy riešenia

Nelineárne programovanie sa podobne ako aj lineárne programovanie spomínané vyššie zaoberá riešením optimalizačných úloh, avšak zahŕňa podstatne širšiu množinu funkcií používaných ako účelové funkcie i ohraničenia. Vo všeobecnosti možno úlohu nelineárneho programovania zapísať ako:

$$\min\{f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m\} \tag{2.16}$$

kde $f_0(x)$ je účelová funkcia a $f_i(x)$ sú ohraničenia. Na základe vlastností účelovej funkcie a funkcií ohraničení klasifikujeme úlohy nelineárneho programovania:

1. podľa linearity funkcií na
   (a) úlohy *lineárne*—ak všetky funkcie $f_i(x)$ pre i=0,1...,m sú lineárne;
   (b) úlohy *nelineárne*—ak aspoň jedna funkcia je nelineárna;
2. podľa konvexnosti funkcií na
   (a) úlohy *konvexné*—ak všetky funkcie $f_i(x)$ pre i=0,1...,m sú konvexné;
   (b) úlohy *nekonvexné*—ak aspoň jedna funkcia je nekonvexná;
3. úlohy so špeciálnou štruktúrou

(a) úlohy *kvadratického programovania* (v užšom zmysle)—ak je účelová funkcia kvadratická a ohraničenia sú lineárne $f_0(x) = x^T Cx + p^T x, \quad f_i(x) = a_i^T x + b_i$;

(b) úlohy *separovateľného programovania*—ak každá funkcia je súčtom funkcií jednej premennej $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(x_j)$;

(c) úlohy *hyperbolického programovania* $f_0(x) = \frac{c^T x+\gamma}{d^T x+\delta}, \quad f_i(x) = a_i^T x + b_i$;

(d) úlohy *geometrického programovania*—ak všetky funkcie sú zovšeobecnené kladné polynómy $f_i(x) = \sum_{h \in I_i} c_{hi} x_1^{a_{h1}} x_2^{a_{h2}} \dots x_n^{a_{hn}} - 1$, kde c_{hi} sú kladné konštanty, $I_i \cap I_k = \emptyset$ pre $i \neq k$, a_{hj} sú ľubovoľné reálne exponenty, x_j sú kladné premenné.

Vzhľadom na uvedené možno teda povedať, že úlohy lineárneho programovania predstavujú podmnožinu úloh nelineárneho programovania. V historickom vývoji sa lineárne programovanie v dôsledku špecifického tvaru účelovej funkcie a funkcií ohraničení (ich lineárnosti) vyvíjalo samostatným smerom charakterizovaným vlastnými prístupmi a metódami riešenia. Práve z tohto dôvodu sa v literatúre zaužívalo jeho individuálne chápanie a zobrazovanie a práve preto ho ani ja neuvádzam len ako časť nelineárneho programovania ale ako samostatnú oblasť optimalizácie.

Na riešenie úloh nelineárneho programovania boli vyvinuté viaceré metódy. Tieto sa medzi sebou líšia najmä vhodnosťou ich využitia pre jednotlivé typy účelových funkcií ako aj funkcií ohraničení a predpokladmi (ako napr. unimodálnosť účelovej funkcie, spojitosť, konvexnosť, separovateľnosť funkcií a pod.), ktoré musia tieto funkcie spĺňať, aby boli riešiteľné zvolenou metódou. K základným metódam nelineárneho programovania patria:

1. *Metódy minimalizácie funkcie jednej premennej*

   (a) Metódy *intervalovej aproximácie minima*—zakladajú sa na vzájomnom porovnávaní funkčných hodnôt, resp. hodnôt prvých alebo druhých derivácií minimalizovanej funkcie v rôznych bodoch. Patria sem napr. *metóda bisekcie*, *dichotomická metóda*, *metóda zlatého rezu*, *metóda Fibonacci.*

   (b) Metódy *bodovej aproximácie minima*—zakladajú sa na interpolácii minimalizovanej funkcie nejakou vhodnou funkciou ako napr. kvadratickou, kubickou parabolou, kvadratickým splajnom a pod.

2. *Metódy minimalizácie funkcie viacerých premenných*

(a) *Klasické metódy minimalizácie*—ide prevažne o iteračné metódy, v ktorých začíname v nejakom štartovacom bode x_k a postupne prostredníctvom voľby smeru s_k a pevne stanoveného kroku λ_k, resp. voľbou kroku a pevne stanoveným smerom podľa pravidiel zvolenej metódy vyrátame ďalší bod $x_{k+1} = x_k + \lambda_k s_k$ z postupnosti bodov konvergujúcej k optimálnemu riešeniu. Ku klasickým metódam možno zaradiť: *gradientnú metódu s konštantným krokom*, *Cauchyho metódu najväčšieho spádu*, *metódu cyklickej súradnicovej redukcie* a *Newtonovu metódu*.

(b) *Moderné metódy minimalizácie*—patria sem prevažne metódy založené na iteračnom postupe s rovnakým princípom ako v prípade klasických metód minimalizácie a zároveň na tzv. združených smeroch vzhľadom na nejakú kladne definitnú maticu. K moderným metódam možno zaradiť *metódu združených gradientov Fletchera-Reevesa* a *kvázinewtonovské metódy*.

Podrobnejšie informácie týkajúce sa jednotlivých úloh nelineárneho programovania a metód ich riešenia sú uvedené v [8].

2.2.2 Využitie nelineárneho programovania vo finančnom plánovaní

Pri posudzovaní nelineárneho programovania z hľadiska jeho využitia vo finančnom plánovaní podniku sa možno opierať o podobné argumenty ako v prípade lineárneho programovania (aj keď s menšími obmenami). Tiež poskytuje optimálne riešenie daného problému, tento však nemusí byť zadaný len pomocou lineárnych funkcií. To prináša dva podstatné rozdiely. Prvým je možnosť zachytiť zložitejšie vzťahy medzi premennými, v dôsledku čoho nelineárne programovanie poskytuje presnejšie výsledky (znižuje sa tendencia k prílišnému zjednodušovaniu plánovacieho problému) a dá sa použiť aj v dlhšom časovom horizonte. Druhým rozdielom je väčšia náročnosť formulovania úlohy a zložitosť jej riešenia. V porovnaní s lineárnym programovaním rastú požiadavky na matematickú zručnosť finančného manažéra ako aj požiadavky na softvérové vybavenie. Spoločným obmedzením obidvoch metód je ich deterministickosť.

Nelineárne programovanie možno použiť napríklad pri optimalizácii veľkosti výrobných zásob v závislosti od nákladov na ich skladovanie a obstaranie a spotreby za určité obdobie. Obdobou rozhodovania o zásobách je riešenie otázky, v akej forme a množstve treba držať pohotové prostriedky v záujme vyhnutia sa riziku nedostatočnej likvidity, ale aj stratám z jej prebytku v podobe ušlého úroku. Úlohu tohto typu rieši Baumolov model (viď [1] a [11]). V základnom tvare pracuje s viacerými zjednodušujúcimi predpokladmi—v projektovanom období sa neráta so žiadnymi peňažnými príjmami podniku, resp. predpokladá sa, že tieto príjmy sa hneď konvertujú na krátkodobé cenné papiere, celkové peňažné výdavky za dané obdobie sú známe a vynakladajú sa rovnomerne, abstrahuje sa od trvalo viazanej minimálnej sumy pohotových prosriedkov, peňažné prostriedky na bežnom účte v banke nie sú úročené a trh krátkodobých cenných papierov sa považuje za absolútne likvidný. Základná rovnica má tvar:

$$\min\{N_{pp}(C) \mid C \geq 0\} \tag{2.17}$$

kde $N_{pp} = f \times \frac{T}{C} + i \times \frac{C}{2}$ sú náklady spojené s držbou pohotových prostriedkov, f sú transakčné náklady jednej konverzie peňazí na krátkodobé cenné papiere, T je celková suma peňažných výdavkov za projektované obdobie, C je veľkosť jednej konverzie a i je úrokový výnos spojený s držbou krátkodobých cenných papierov.

2.3 Optimálne riadenie

2.3.1 Formulácia úlohy a základné pojmy

Optimálne riadenie sa zaoberá riešením úloh tvaru:

$$x_{i+1} = F_i(x_i, u_i) \quad i = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{2.18}$$

$$u_i \in U_i \tag{2.19}$$

$$x_i \in X_i \tag{2.20}$$

$$x_0 \in P \subset X_0 \tag{2.21}$$

$$x_k \in C \subset X_k \tag{2.22}$$

$$\min J(\{x_i\}, \{u_i\}, k) = \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i) + \varphi(x_k) \tag{2.23}$$

v prípade diskrétnej úlohy a

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad t \in [0, T] \tag{2.24}$$

$$u(t) \in U(t) \tag{2.25}$$

$$x(t) \in X(t) \tag{2.26}$$

$$x(0) \in P \subset X(0) \tag{2.27}$$

$$x(T) \in C \subset X(T) \tag{2.28}$$

$$\min J(x(t), u(t), T) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt + \varphi(x(T)) \tag{2.29}$$

v prípade spojitej úlohy, kde bod $x \in X$ popisuje okamžitý *stav* nejakého systému a bod $u \in U$ popisuje okamžitý *vstup* daného systému. Správanie systému pozorujeme v čase $t \in [0, T]$ v spojitej verzii, resp. v čase $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ v diskrétnej a popisujú ho výrazy (2.24), resp. (2.18), kde f a F_i sú dané funkcie.

Funkcia $u(t), t \in [0, T]$, resp. postupnosť $\{u_i\}, i = 0, 1, \ldots, k-1$, ktorá každému časovému okamžiku t, resp. i, priraďuje hodnotu z danej množiny vstupov $U(t)$, $t \in [0, T]$, resp. $\{U_i\}, i = 0, 1, \ldots, k-1$, sa nazýva *riadenie*. Výrazy (2.19), resp. (2.25), predstavujú ohraničenia na riadenie a výrazy (2.20), (2.21), (2.22) resp. (2.26), (2.27), (2.28), ohraničenia na stavovú premennú, kde P je množina povolených stavov na začiatku procesu v čase $t = 0$, resp. $i = 0$, a C je daná množina povolených cieľových stavov na konci procesu v čase $t = T$, resp. $i = k$.

Výraz (2.23), resp. (2.29), predstavuje *účelovú funkciu*, kde f^0 a φ sú dané funkcie.

Pod *odozvou* $x(t)$, resp. x_i, na riadenie $u(t)$, resp. u_i, a začiatočný stav $x(0)$, resp. x_0, rozumieme riešenie rovnice (2.24), resp. (2.18), pri zvolenom riadení so zvolenou začiatočnou podmienkou. Pod *prípustným riadením* rozumieme také riadenie, ktoré spolu so svojou odozvou spĺňajú všetky podmienky (2.24) až (2.28), resp. (2.18) až (2.22), pričom prípustné riadenie minimalizujúce účelovú funkciu nazývame *optimálnym riadením.*

Na riešenie úloh optimálneho riadenia sa využíva *Bellmanova rovnica dynamického programovania* v diskrétnom prípade a *Pontrjaginov princíp maxima* v spojitom prípade (pre bližšie oboznámenie sa so spôsobom riešenia úloh optimálneho riadenia viď. [7]).

2.3.2 Využitie optimálneho riadenia vo finančnom plánovaní

Hlavným prínosom optimálneho riadenie pre finančné plánovanie podniku je (na rozdiel od predošlých optimalizačných metód) schopnosť zachytiť a ovplyvňovať vývoj plánovaných premenných v čase. Formulovanie konkrétneho plánovacieho problému v tvare úlohy optimálneho riadenia a jej následné riešenie si však vyžaduje istú (nie malú) matematickú zručnosť a skúsenosti s podobnými úlohami.

Vhodnými oblasťami uplatnenia sú napr. plánovanie výroby, dodávok zásob, predaja výrobkov, manažmentu cash flow a pod. Konkrétnu úlohu o plánovaní výroby uvádza Halická[1]:
Firma dostala objednávku v čase T dodať B jednotiek výrobku. Snaží sa nájsť plán výroby na splnenie objednávky za minimálnu cenu, pričom predpokladá:

- jednotková produkčná cena rastie lineárne (s konštantou $c_1 > 0$) s rýchlosťou produkcie,
- jednotková cena za skladovanie výrobkov je konštantná ($= c_2 > 0$).

Nech $x(t)$ je množstvo výrobku vyrobeného až do času t (akumulovaná výroba) a $u(t)$ je produkčná rýchlosť (rýchlosť zmien v zásobe výrobku), potom úloha optimálneho riadenia bude mať tvar:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= u(t) \quad t \in [0, T] \\ u(T) &\geq 0 \\ x(0) &= 0 \\ x(T) &= B > 0 \\ \min J &= \int_0^T (c_1 u^2 + c_2 x) dt \end{aligned}$$

Príkladom spojenia plánovania predaja výrobkov a manažmentu cash flow je obdoba úlohy o obchodníkovi s komoditami od Halickej[2]:
Uvažujme obchodnú spoločnosť zaoberajúcu sa nákupom a opätovným predajom komodít s cieľom dosiahnuť zisk. Predpokladá sa, že aktíva spoločnosti pozostávajú z hotovosti a komodít, ktorých cena je odhadnutá na obdobie dĺžky T. Úlohou je maximalizovať hodnotu aktív spoločnosti v čase T a určiť, kedy majú byť komodity nakúpené a kedy predané. Označme $x_1(t)$ množstvo hotovosti v čase t, $x_2(t)$

[1] viď str. 20 v [7]
[2] viď str. 25 v [7]

množstvo komodity v čase t, $p(t)$ funkciu určujúcu cenu v čase t, $u(t)$ rýchlosť predávania ($-1 \leq u \leq 1$, pričom záporné hodnoty znamenajú nákup komodít), $s > 0$ poplatok za skladovanie jednotky komodity za jednotku času, $a_2 > 0$ množstvo komodity vlastnenej v čase $t = 0$ a $a_1 > 0$ disponibilnú hotovosť v čase $t = 0$. Úloha optimálneho riadenia má tvar:

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= p(t)u(t) - sx_2(t) \quad t \in [0, T] \\ \dot{x_2}(t) &= -u(t) \\ x_1(0) &= a_1 \\ x_2(0) &= a_2 \\ u(t) &\in [-1, 1] \\ \max J &= x_1(T) + p(T)x_2(T) \end{aligned}$$

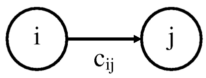
Okrem deterministických úloh umožňuje optimálne riadenie riešiť aj úlohy s výskytom náhodných udalostí—ide o oblasť tzv. stochastického dynamického programovania, ktoré môže v niektorých prípadoch tiež poskytnúť vhodný aparát pri zostavovaní finančného plánu podniku.

2.4 Sieťová analýza

2.4.1 Typy úloh

Spoločným znakom úloh, ktorými sa zaoberá sieťová analýza je možnosť ich grafického znázornenia pomocou tzv. *sieťového diagramu* (grafu). Sieťovým grafom rozumieme konečný, súvislý, orientovaný, acyklický, hranovo alebo uzlovo ohodnotený graf, vo väčšine prípadov s jedným začiatočným a jedným koncovým uzlom vyjadrujúci závislosť jednotlivých činností problému, ktorý daný graf popisuje. K hlavným typom úloh, ktorými sa sieťová analýza zaoberá, patria:

- Hľadanie *najkratšej*, *najširšej* a *najspoľahlivejšej* cesty—daný problém je znázornený pomocou sieťového diagramu, v ktorom je každej hrane priradená určitá hodnota (viď. 2.1) v závislosti od riešenej úlohy napr. vzdialenosť medzi hranami, šírka hrán, pravdepodobnosť. Tento typ úloh je riešený najmä pomocou *Dijkstrovho algoritmu*, *acyklického algoritmu*, *Floydovho algoritmu.*



Obrázok 2.1: Schéma značenia uzlov

- Úlohy o *maximálnom toku* a *najlacnejšom maximálnom toku*—hrany sieťového diagramu môžu byť označené viacerými údajmi ako napr. akú minimálnu a maximálnu hodnotu môže hrana nadobdnúť, akú hodnotu má aktuálne a údaj o cene na danej hrane. Na riešenie sa využíva *Ford-Fulkersonov algoritmus* a *Kleinov algoritmus záporných polocyklov*.
- Úlohy o *najlacnejšej kostre grafu*—podobne ako v prechádzajúcich prípadoch aj tu hranám prislúcha ohodnotenie. Na riešenie možno použiť napr. *Kruskalov algoritmus* a *Primov algoritmus*.

Návod na vytvorenie sieťového diagramu ku konkrétnemu problému a postup pri riešení možno nájsť v [4] alebo v [15].

2.4.2 Využitie sieťovej analýzy vo finančnom plánovaní

Sieťová analýza je zameraná na konštrukciu, riešenie a aplikáciu matematických modelov zložitých komplexov činností tvoriacich nadväzný proces, čo predurčuje jej použitie v ponímaní ako nástroja finančného plánovania predovšetkým do oblasti projektového manažmentu—konkrétne jeho prvej fázy—naplánovanie projektu. Prostredníctvom metód na hľadanie najkratšej cesty možno vykonať časovú analýzu projektu a pomocou metód využívaných pri úlohách o maximálnom toku aj jeho nákladovú analýzu. V obidvoch prípadoch je skúmaný projektový problém pretransformovaný do podoby sieťového diagramu umožňujúcemu zachytiť všetky logické väzby medzi jednotlivými činnosťami obsiahnutými v danom projekte.

Pri časovej analýze sú známe určité predpokladané trvania jednotlivých činností ako aj termín samotného zahájenia a ukončenia projektu. Hlavným cieľom je nájsť tzv. *kritickú cestu* pozostávajúcu z činností, ktoré určujú celkový čas realizácie projektu. Je to najdlhšia cesta v sieťovom diagrame, pričom jej dĺžka je daná súčtom dôb trvania činností na nej ležiacich. Akékoľvek predĺženie doby trvania niektorej z týchto činností má za následok predĺženie celkovej doby realizácie projektu. Okrem určenia možných termínov začatia jednotlivých činností je výsledkom časovej analýzy aj kvantifikácia časových rezerv nekritických činností.

Po nájdení kritickej cesty možno uskutočniť nákladovú analýzu zameranú na optimalizáciu nákladov v závisloti od požadovaného trvania projektu. Predpokladom na jej uskutočnenie je vedomosť o aktuálne naplánovanom a minimálne možnom trvaní kritických činností, ako aj o nákladoch, ktoré je potrebné vynaložiť pri skrátení kritickej cesty o časovú jednotku.

Najznámejšími metódami využívanými pri hľadaní kritickej cesty sú:

- *CPM* (Critical Path Method)—ide o deterministickú metódu používanú v prípadoch, keď sú doby trvania činností aspoň približne známe.

- *PERT* (Program Evalution and Review Technique)—v tomto prípade je vytvorený sieťový graf časovo stochasticky ohodnotený a doba trvania každej činnosti projektu je považovaná za náhodnú veličinu s určitým rozdelením pravdepodobnosti. Pre každú činnosť sa určuje optimistická, pesimistická a najpravdepodobnejšia doba jej trvania, z ktorých sa potom vyratáva stredná hodnota trvania činnosti. Ide teda o stochastickú metódu.

2.5 Metódy finančnej matematiky

Vznik finančnej matematiky súvisí predovšetkým s rozvojom finančných trhov. K hlavným oblastiam, ktorými sa zaoberá, patria:

- *teória úrokových mier*—zahŕňa modelovanie úrokových mier, súvis úrokových mier a cien dlhopisov, forwardové úrokové miery;

- *teória portfólia*—venuje sa hľadaniu optimálneho portfólia, stanovovaniu cien aktív;

- *teória oceňovania derivátov*—zahŕňa oceňovanie finančných derivátov od najjednoduchších (opcie, forwardy, futurity, swapy) až po deriváty finančných derivátov;

- *reálne opcie*—predmetom ich skúmania je oceňovanie investícií do reálnych aktív.

Poznatky finančnej matematiky využíva podnik pri *investovaní do dlhodobého a krátkodobého finančného majetku* (napríklad kúpa akcií a obligácií, depozitných certifikátov, štátnych pokladničných poukážok a pod.), *získavaní cudzích finančných* *zdrojov* prostredníctvom finančného trhu (emisia akcií, obligácií, komerčných papierov a pod.) a pri *eliminácii finančných rizík* (riziko zmien úrokových mier, kurzov mien, cien komodít a pod.).

Veľmi dôležitú časť finančného plánovania predstavuje rozhodovanie o investíciách do dlhodobého hmotného a nehmotného majetku. Oblasťou finančnej matematiky zaoberajúcou sa touto problematikou sú *reálne opcie.* Ich vznik súvisí s rozvojom teórie finančných opcií a aplikáciou jej poznatkov na reálne investície.

Reálna (kúpna) opcia je definovaná ako právo, nie však povinnosť, investovať určitý finančný obnos (kúpiť dané podkladové aktívum za vopred stanovenú expiračnú cenu) do stanoveného času (maturity) a získať projekt (podkladové aktívum)[3].

Pod reálnou opciou si môžeme predstaviť napríklad právo odložiť investičné rozhodnutie (napr. možnosť začať ťažbu na danom území v priebehu nejakého obdobia). Hodnota tohto práva je daná skutočnosťou, že v dôsledku odloženia investície môžeme získať dodatočné informácie, prispôsobiť im svoje rozhodnutia (napr. technológia použitá na ťažbu, objem ťažby) a tým zvýšiť náš zisk z projektu (resp. znížiť stratu).

Výhodou reálnych opcií je ich schopnosť posúdiť vplyv pôsobenia náhodných činiteľov na hodnotu investičného projektu, čo ich predurčuje k využitiu pri plánovaní v dlhodobom časovom horizonte. Negatívom tejto metódy je relatívne veľká výpočtová zložitosť a tiež závislosť správnosti výsledku od presnosti odhadu vývoja zdrojov volatility—náhodných veličín.

Najčastejšie sa reálne opcie riešia pomocou *binomických stromov.* Ich hlavnou prednosťou je menšia matematická náročnosť a väčšia názornosť, čo uľahčuje modelovanie zložitých vzťahov. Iný spôsob riešenia je založený na využití *parciálnych diferenciálnych rovníc.* Výhodou tohto prístupu je najmä vyššia presnosť.

Bližší popis reálnych opcií a ich riešenia pomocou parciálnych diferenciálnych rovníc nájde čitateľ v [5], názorné ukážky riešenia pomocou binomických stromov obsahuje [3]. Ostatným oblastiam finančnej matematiky sa venuje [13].

[3]Dixit, Pindyck, 1994, str. [5]

Kapitola 3

Aplikácia vybraných matematických metód vo finančnom plánovaní

Cieľom tejto kapitoly je ukázať, ako možno pomocou matematických metód popísaných v predchádzajúcich častiach riešiť konkrétne plánovacie problémy z praxe. Vzhľadom na rozsiahlosť množiny využiteľných metód a z toho vyplývajúcu disproporciu medzi priestorom potrebným na kvalitnú prezentáciu možností ich aplikácie a priestorom, ktorý máme k dispozícii[1], sme sa rozhodli ďalej venovať len dvom z nich. Zo súboru optimalizačných metód si ukážeme *lineárne programovanie*, nakoľko ide v podnikovej praxi o obľúbenú metódu a to najmä z dôvodu jej relatívnej jednoduchosti, dostupnosti efektívnych spôsobov jej riešenia a nenáročnosti potrebného softvérového vybavenia. Zo súboru metód finančnej matematiky predvedieme použitie *reálnych opcií* ako perspektívnej metódy, ktorej význam pri hodnotení investičných projektov bude podľa nášho názoru v budúcnosti narastať.

3.1 Plánovanie výroby pomocou lineárneho programovania

Efektivita základnej činnosti (z angl. *core business*) každého podniku je kľúčovým faktorom determinujúcim jeho úspešnosť v konkurenčnom prostredí. Základnú činnosť *výrobného podniku* predstavuje *výrobný proces*, od schopnosti výrobného podniku vytvárať čo najväčší výstup pri čo najmenších nákladoch závisí nielen jeho prežitie v krátkodobom horizonte, ale aj množstvo prostriedkov dostupných na investovanie do nových technológií a tým tvorba podmienok na jeho prežitie a rozvoj

[1]vzhľadom na charakter tejto práce

v dlhodobom časovom horizonte. Hlavným nástrojom riadenia výrobného procesu je *výrobný plán*.

V ďalšom texte predstavíme model zostavenia výrobného plánu využívajúci lineárne programovanie. V snahe vyhnúť sa nadmernej všeobecnosti sme si zvolili konkrétny podnik, kde tento model aplikujeme a budeme demonštrovať jeho vlastnosti a prínos k zefektívneniu výrobného procesu.

Podnik ATV, v.d. Strážske, je slovenský strojárenský podnik vyrábajúci súčiastky pre automobilový priemysel (prevažne pre nemecký trh). Nami prezentovaný model sa snaží čo najvernejšie zachytiť vzťahy pôsobiace v jeho transformačnom procese medzi vstupmi a výstupmi, cenou za toto verné zobrazenie je pomerne veľký počet premenných a ohraničení, ktorými sú viazané.

3.1.1 Popis výrobného procesu a jeho premenných

Náš výrobný podnik vyrába dva druhy výrobkov: *spojkovú hlavu* (SHGRAU) a *plynovú vzperu* (PVA). Na ich výrobu sú potrebné *súčiastky*—pre spojkovú hlavu šesť a pre plynovú vzperu päť súčiastok, ktoré podnik môže buď vyrábať z nakúpených *polotovarov* alebo priamo *nakupovať hotové*. Množstvo hotových súčiastok, ktoré možno nakúpiť, je obmedzené, polotovary môže nakupovať neobmedzene. Celková cena nakúpenej súčiastky i polotovaru sa skladá z nákupnej ceny a ceny za dovoz (súčiastok, resp. polotovarov) do podniku. Nakúpené súčiastky je potrebné už iba zmontovať (teda nie sú potrebné žiadne dodatočné práce okrem montážnych). Polotovary sa ďalej spracúvajú na *dvoch typoch strojov* s obmedzenou ročnou kapacitou výroby danou v minútach. Na obidvoch možno uskutočňovať *desať* rôznych *operácií*, pričom na ich uskutočnenie je potrebný rozličný čas (stanovený pomocou noriem) v závislosti od polotovaru, ktorý sa opracuváva a stroja na ktorom operácia prebieha. Stroje sa zároveň líšia aj nákladmi na jednu strojominútu a výrobok. Súčiastky z polotovarov sú vyrábané s určitou chybovosťou (teda napr. ak chceme vyrobiť 100 kusov SHGRAU, potrebujeme na to 100 bezchybných krytov, ak chybovosť výroby krytov je 5%—znamená to, že na 100 bezchybných krytov musíme vyrobiť celkovo 105 krytov, pretože očakávame, že zo 105 krytov bude 5 chybných). Je stanovená cena za minútu ľudskej práce a materiálové i mzdové náklady montáže súčiastok na výrobky. SHGRAU aj PVA sa predávajú za rozličné ceny. Na optimalizáciu výrobného procesu je potrebné zistiť, koľko ktorých výrobkov by mal podnik vyrobiť, aké súčiastky a v akom množstve by mal sám zhotoviť a aké a v akom množstve nakúpiť, na ktorom stroji by mal vykonávať jednotlivé operácie potrebné na výrobu a aký by mal byť ich počet a to tak, aby dosiahol maximálny zisk.

Popis známych premenných:

- n_{vikj}—norma prácnosti pre j-tu operáciu na k-tom stroji pre výrobu i-tej súčiastky v-teho výrobku (konkrétne hodnoty uvedené v 3.1 a 3.2)
- po_{vij}—počet j-tej operácie potrebnej na výrobu i-tej súčiastky v-teho výrobku (konkrétne hodnoty uvedené v 3.1 a 3.2)

Výrobok (v)		**Stroj**	**Číselné označenie operácie (j)**									
SHGRAU (1)			**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
kryt (1)	norma (v Nmin/ks)	I	0,074	0,148	0,086	0,015						
		II	0,100	0,141	0,054	0,024						
	počet operácií (po)		1	1	1	1						
základňa (2)	norma (v Nmin/ks)	I	0,121	0,154	0,123	0,020	0,131	0,188	0,096			
		II	0,126	0,144	0,095	0,047	0,113	0,157	0,088			
	počet operácií (po)		1	2	1	1	1	1	1			
rameno (3)	norma (v Nmin/ks)	I	0,074	0,187		0,020			0,136			
		II	0,071	0,166		0,006			0,144			
	počet operácií (po)		1	1		1			1			
objímka (4)	norma (v Nmin/ks)	I			0,074			0,119				
		II			0,059			0,125				
	počet operácií (po)				1			1				
teleso (5)	norma (v Nmin/ks)	I		0,153	0,056				1,029	0,275	0,113	0,451
		II		0,191	0,058				1,002	0,258	0,112	0,459
	počet operácií (po)			1	1				3	1	1	1
vedenie (6)	norma (v Nmin/ks)	I	0,074	0,177	0,217			0,246	0,070		0,138	
		II	0,052	0,168	0,243			0,250	0,058		0,149	
	počet operácií (po)		1	1	3			1	2		1	

Tabuľka 3.1: Normy a počet operácií potrebné na výrobu súčiastok prvého výrobku

Výrobok (v)		Stroj	Číselné označenie operácie (j)									
PVA (2)			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
valec (1)	norma (v Nmin/ks)	I	0,047	0,094	0,045	0,032			0,059			0,29
		II	0,021	0,088	0,061	0,020			0,034			0,216
	počet operácií (po)		1	2	1	1			2			1
pružina (2)	norma (v Nmin/ks)	I		0,075	0,069	0,013		0,153				
		II		0,062	0,080	0,085		0,112				
	počet operácií (po)			3	1	1		1				
rameno (3)	norma (v Nmin/ks)	I			0,052	0,027				0,247	0,105	0,376
		II			0,058	0,047				0,219	0,101	0,326
	počet operácií (po)				2	1				1	1	1
úchytky (4)	norma (v Nmin/ks)	I	0,033	0,086			0,077					
		II	0,365	0,075			0,066					
	počet operácií (po)		2	2			2					
tesnenie (5)	norma (v Nmin/ks)	I	0,036		0,042	0,013	0,096					
		II	0,046		0,033	0,003	0,085					
	počet operácií (po)		1		1	1	1					

Tabuľka 3.2: Normy a počet operácií potrebné na výrobu súčiastok druhého výrobku

- e_{vi}—chybovosť i-tej súčiastky v-teho výrobku (konkrétne hodnoty uvedené v 3.3)

Výrobok	Súčiastka	Chybovosť výroby (e)
SHGRAU (1)	kryt (1)	5,0%
	základňa (2)	3,0%
	rameno (3)	4,0%
	objímka (4)	3,0%
	teleso (5)	6,0%
	vedenie (6)	1,0%
PVA (2)	valec (1)	4,0%
	pružina (2)	7,0%
	rameno (3)	2,0%
	úchytky pár (4)	3,0%
	tesnenie (5)	5,0%

Tabuľka 3.3: Chybovosť výroby jednotlivých súčiastok

- cp_{vi}—cena polotovaru i-tej súčiastky v-teho výrobku (konkrétne hodnoty uvedené v 3.4)
- cpd_{vi}—cena za dovoz polotovaru i-tej súčiastky v-teho výrobku (konkrétne hodnoty uvedené v 3.4)

Názov polotovaru (i) pre 1. výrobok	Cena za dovoz/ks v Sk (cpd)	Cena za polotovar/ks v Sk (cp)	Suma
kryt (1)	0,5	2,56	3,06
základňa (2)	1,2	6,12	7,32
rameno (3)	0,1	0,5	0,6
objímka (4)	0,04	0,34	0,38
teleso (5)	2,6	9,74	12,34
vedenie (6)	0,7	2,45	3,15

Názov polotovaru (i) pre 2. výrobok	Cena za dovoz/ks v Sk (cpd)	Cena za polotovar/ks v Sk (cp)	Suma
valec (1)	1,1	6,42	7,52
pružina (2)	0,001	0,02	0,021
rameno (3)	0,7	3,54	4,24
úchytky pár (4)	0,3	1,5	1,8
tesnenie (5)	0,01	0,08	0,09

Tabuľka 3.4: Ceny za kúpu a dovoz polotovarov

- cs_{vi}—cena kúpenej i-tej súčiastky v-teho výrobku (konkrétne hodnoty uvedené v 3.5 a 3.6)
- csd_{vi}—cena za dovoz kúpenej i-tej súčiastky v-teho výrobku (konkrétne hodnoty uvedené v 3.5 a 3.6)
- $smax_{vi}$—maximálne množstvo i-tej súčiastky v-teho výrobku, ktoré môže podnik nakúpiť (konkrétne hodnoty uvedené v 3.5 a 3.6)

Názov hotovej súčiastky 1. výrobku	Cena za dovoz/ks v Sk (csd)	Cena za hotovú súčiastku/ks v Sk (cs)	Maximálne možné množstvo na predaj v ks (smax)	Suma
kryt (1)	0,7	5,4	182 000	6,1
základňa (2)	1,4	11,3	480 000	12,7
rameno (3)	0,2	3,6	230 000	3,8
objímka (4)	0,08	1,65	650 000	1,73
teleso (5)	3,1	42	300 000	45,1
vedenie (6)	0,95	8,1	380 000	9,05

Tabuľka 3.5: Ceny za kúpu a dovoz súčiastok prvého výrobku a maximálne nakúpiteľné množstvá

Názov hotovej súčiastky 2. výrobku	Cena za dovoz/ks v Sk (csd)	Cena za hotovú súčiastku/ks v Sk (cs)	Maximálne možné množstvo na predaj v ks (smax)	Suma
valec (1)	1,3	19,4	131 000	20,7
pružina (2)	0,004	1,1	115 000	1,104
rameno (3)	1	21,8	205 000	22,8
úchytky (4)	0,6	4,9	171 000	5,5
tesnenie (5)	0,05	0,5	200 000	0,55

Tabuľka 3.6: Ceny za kúpu a dovoz súčiastok druhého výrobku a maximálne nakúpiteľné množstvá

- kap_k—ročná kapacita k-teho stroja na výrobu oboch výrobkov, $kap_1 = 491\ 520$ min, $kap_2 = 1\ 190\ 400$ min
- K_{vk}—náklady na strojominútu k-teho stroja pre v-ty výrobok (konkrétne hodnoty uvedené v 3.7)

Výrobok	Stroj	Náklady na strojominútu v Sk
SHGRAU	I	4,35
	II	4,15
PVA	I	3,85
	II	3,53

Tabuľka 3.7: Náklady na strojominútu

- L—cena za minútu ľudskej práce stanovená na úroveň 0,80658 Sk/min
- c_v—cena v-teho výrobku, $c_1 = 160$, $c_2 = 110$
- m_v—náklady na montáž v-teho výrobku (konkrétne hodnoty uvedené v 3.8)

Výrobok	Mzdové náklady (v Sk/ks)	Materiálové náklady (v Sk/ks)	Celkové náklady na montáž spolu (v Sk/ks)
SHGRAU	17	8	25
PVA	8	5	13

Tabuľka 3.8: Náklady na montáž výrobkov

Popis neznámych premenných:

- x_v—počet výrobku v (celkovo 2 neznáme)
- x_{vi}—počet i-tej vyrobenej súčiastky v-teho výrobku (celkovo 11 neznámych)
- x_{vikj}—počet j-tej operácie vykonanej k-tym strojom na i-tej súčiastke v-teho výrobku (celkovo 220 neznámych)
- y_{vi}—počet nakúpenej i-tej súčiastky v-teho výrobku (celkovo 11 neznámych)

pričom pre všetky indexy známych aj neznámych premenných platí:

- výrobok $v = 1$ (SHGRAU), 2 (PVA)
- počet súčiastok, z ktorých sa výrobky skladajú $i = 1, 2, \dots 6$ (pre SHGRAU), resp. $1, 2, \dots 5$ (pre PVA)
- stroj $k = I$ (prvý druh stroja), II (druhý druh stroja)
- operácia $j = 1$ (lisovanie), 2 (ohyb), 3 (výstrih), 4 (odmastenie), 5 (dierovanie), 6 (kalibrovanie), 7 (rezanie), 8 (apretácia), 9 (guličkovanie), 10 (eloxovanie)

3.1.2 Formulácia a popis modelu

V modeli použijeme účelovú funkciu v tvare:

$$\max \sum_{v=1}^{2} x_v * c_v - \sum_{v=1}^{2}\sum_{i=1}^{7-v} x_{vi} * (cp_{vi} + cpd_{vi}) - \sum_{v=1}^{2}\sum_{k=I}^{II}\sum_{i=1}^{7-v}\sum_{j=1}^{10}(n_{vikj} * x_{vikj}) * (L + K_{vk}) -$$
$$- \sum_{v=1}^{2}\sum_{i=1}^{7-v} y_{vi} * (cs_{vi} + csd_{vi}) - \sum_{v=1}^{2} m_v x_v \tag{3.1}$$

kde jednotlivé výrazy predstavujú:

- $\sum_{v=1}^{2} x_v * c_v$—celkové tržby dosiahnuté z oboch výrobkov;
- $\sum_{v=1}^{2}\sum_{i=1}^{7-v} x_{vi} * (cp_{vi} + cpd_{vi})$—celkové náklady na dovezené polotovary súčiastok oboch výrobkov;
- $\sum_{v=1}^{2}\sum_{k=I}^{II}\sum_{i=1}^{7-v}\sum_{j=1}^{10}(n_{vikj} * x_{vikj}) * (L + K_{vk})$—prvá zátvorka označuje celkové množstvo času potrebné na vlastnú výrobu všetkých súčiastok oboch výrobkov na obidvoch strojoch a je násobená súčtom mzdových nákladov pripadajúcich na jednu minútu a nákladov na strojominútu;

- $\sum_{v=1}^{2}\sum_{i=1}^{7-v} y_{vi} * (cs_{vi} + csd_{vi})$—celková suma nákladov na nakúpené súčiastky oboch výrobkov;
- $\sum_{v=1}^{2} m_v x_v$—celková suma nákladov na montáž, balenie a expedíciu oboch výrobkov;

Ohraničenia sú v tvare:

$$x_{viIj} + x_{viIIj} = x_{vi}po_{vij} \quad \text{pre všetky} \quad i, j, v \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{1+e_{vi}} x_{vi} + y_{vi} = x_v \quad \text{pre všetky} \quad i, v \tag{3.3}$$

$$y_{vi} \leq smax_{vi} \quad \text{pre všetky} \quad i, v \tag{3.4}$$

$$\sum_{k=I}^{II}\sum_{i=1}^{7-v}\sum_{j=1}^{10}(n_{vikj} * x_{vikj}) \leq kap_{vk} \quad \text{pre všetky} \quad i, j, k, v \tag{3.5}$$

$$x_v, x_{vi}, x_{vikj}, y_{vi} \geq 0 \quad \text{pre všetky} \quad i, j, k, v \tag{3.6}$$

kde

- výraz (3.2) zabezpečuje, aby sa celkový počet rovnakých operácií použitých pri výrobe tej istej súčiastky v-teho výrobku na obidvoch druhoch strojov rovnal celkovému počtu vyrobených súčiastok;
- výraz (3.3) zabezpečuje zohľadnenie chybovosti výroby súčiastok a zároveň, aby podnik nevyrábal, resp. nenakupoval viac súčiastok ako skutočne potrebuje (celkové množstvo nakúpených aj vyrobených súčiastok sa musí rovnať celkovému počtu hotových výrobkov);
- výraz (3.4) berie do úvahy obmedzenosť nákupu súčiastok v-teho výrobku;
- výraz (3.5) zabezpečuje, aby nedošlo k prekročeniu výrobnej kapacity strojov pri výrobe oboch výrobkov.

3.1.3 Zostavenie výrobného plánu (riešenie modelu)

Na riešenie úlohy sme použili matematický softvér Matlab. Hodnota účelovej funkcie—teda prevádzkový výsledok hospodárenia z predaja obidvoch výrobkov—je rovná 75 629 153 Sk. Podnik by mal vyrobiť 300 000 kusov spojkových hláv (x_1) a 867 593 kusov plynových vzpier (x_2). Jednotlivé počty nakupovaných (y_{vi}) i vyrábaných (x_{vi}) súčiastok obidvoch výrobkov sú uvedené v 3.9.

Súčiastka (i)	x_{1i}	y_{1i}
kryt (1)	123 900	182 000
základňa (2)	0	300 000
rameno (3)	72 800	230 000
objímka (4)	0	300 000
teleso (5)	0	300 000
vedenie (6)	0	300 000

Súčiastka (i)	x_{2i}	y_{2i}
valec (1)	766 056	131 000
pružina (2)	805 274	115 000
rameno (3)	675 844	205 000
úchytky pár (4)	717 490	171 000
tesnenie (5)	700 972	200 000

Tabuľka 3.9: Počty vyrábaných a nakúpených súčiastok oboch výrobkov

Počty jednotlivých operácií vykonaných na obidvoch druhoch strojov pri výrobe rozličných súčiastok (x_{vikj}) sú uvedené v 3.10, 3.11, 3.12 a 3.13.

Súčiastka	Počet j-tej operácie vykonanej na prvom druhu stroja (x_{1iIj})									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
kryt (1)	123 900	123 900	0	123 900	0	0	0	0	0	0
základňa (2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
rameno (3)	72 800	0	0	0	0	0	72 800	0	0	0
objímka (4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
teleso (5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
vedenie (6)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabuľka 3.10: Počty operácií vykonaných na stroji I pri výrobe súčiastok prvého výrobku

Súčiastka	Počet j-tej operácie vykonanej na druhom druhu stroja (x_{1iIIj})									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
kryt (1)	0	0	123 900	0	0	0	0	0	0	0
základňa (2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
rameno (3)	0	72 800	0	72 800	0	0	0	0	0	0
objímka (4)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
teleso (5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
vedenie (6)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabuľka 3.11: Počty operácií vykonaných na stroji II pri výrobe súčiastok prvého výrobku

Súčiastka	Počet j-tej operácie vykonanej na prvom druhu stroja (x_{2iIIj})									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
valec (1)	0	1 202 526	766 056	0	0	0	0	0	0	0
pružina (2)	0	0	805 274	805 274	0	0	0	0	0	0
rameno (3)	0	0	1 351 688	675 844	0	0	0	0	675 844	0
úchytky pár (4)	1 434 980	0	0	0	0	0	0	0	0	0
tesnenie (5)	700 972	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabuľka 3.12: Počty operácií vykonaných na stroji I pri výrobe súčiastok druhého výrobku

Súčiastka	Počet j-tej operácie vykonanej na druhom druhu stroja (x_{2iIIj})									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
valec (1)	766 056	329 586	0	766 056	0	0	1 532 112	0	0	766 056
pružina (2)	0	2 415 821	0	0	0	805 274	0	0	0	0
rameno (3)	0	0	0	0	0	0	0	675 844	0	675 844
úchytky pár (4)	0	1 434 980	0	0	1 434 980	0	0	0	0	0
tesnenie (5)	0	0	700 972	700 972	700 972	0	0	0	0	0

Tabuľka 3.13: Počty operácií vykonaných na stroji II pri výrobe súčiastok druhého výrobku

3.1.4 Zhodnotenie modelu

Zhodnotenie výsledkov modelu

Vytvorený model verne zachytáva vzťahy medzi premennými výrobného procesu podniku ATV, v.d. Strážske. Údaje získané jeho optimalizáciou pomocou lineárneho programovania nám umožňujú zostaviť plán výroby. Zároveň sú čiastkovými vstupmi aj pre zhotovenie ďalších plánov ako napr.:

- plán zásob (koľko polotovarov a hotových súčiastok a v akej celkovej hodnote bude potrebné objednať a skladovať)
- plán služieb (aké budú náklady spojené s dopravou a náklady na energie v súvislosti s rozličnou spotrebou využívaných strojov)

- plán mzdových nákladov (v závislosti od množstva a druhu výroby sa odvíja aj počet a kvalifikácia potrebných pracovníkov a teda aj mzdové náklady spoločnosti)
- plán tržieb (aké budú naše výnosy, ak predpokladáme predaj všetkých zhotovených výrobkov)

Výsledky modelu vs. skutočnosť

Údaje použité pri číselnom riešení modelu zodpovedajú realite podniku v období prvého polroka 2007. Za dané obdobie sa skutočný výrobný plán v podniku zostavoval na základe odhadov a skúseností výrobných riadiacich pracovníkov. Pri takomto spôsobe riadenia výroby bol vytvorený prevádzkový výsledok hospodárenia približne 47 miliónov Sk, teda o 28 miliónov menej ako by mohol podnik dosiahnuť jej optimálnym organizovaním (pomocou nášho modelu).

Keďže výstupom riešenia modelu je podrobný plán s detailom až na úrovni jednotlivých súčiastok a operácií, umožňuje nám skúmať príčiny neefektívnosti, ku ktorej v uvedenom období v realite došlo. Hlavnou príčinou bolo nadmerné využívanie stroja č. I a nevyužitie plnej kapacity stroja č. II a to najmä pri operáciách, ktoré vykonáva stroj druhého typu efektívnejšie (lacnejšie na jednotku času).

Vzťah modelu k riziku

Hlavnou výhodou nami zostaveného modelu je jeho jednoduchosť a nenáročnosť riešenia. Daňou za to je však jeho *statickosť* (neflexibilita). Negatívne dôsledky statickosti sa prejavujú pri zmene niektorého z parametrov (napr. zmena predajnej ceny niektorého výrobku). Takáto situácia spôsobí, že aktuálny model je pravdepodobne nepoužiteľný (neoptimálny) a je potrebné ho znova prepočítať (pozitívom je jednoduchosť tohto opätovného prepočítania).

Jedným zo spôsobov ako sa vyrovnať s rizikom zmeny parametra je vykonanie *analýzy citlivosti* modelu na túto zmenu. Pri analýze citlivosti skúmame, ako sa zmení celkový výstup modelu pri čiastkovej zmene niektorého zo vstupných parametrov. Cieľom je identifikovať premenné, na zmenu ktorých je výsledok najviac citlivý. Zistené závery sú užitočné pri riadení v prípadoch, keď dochádza v realite naraz k zmene viacerých parametrov (ak vedenie podniku pozná dôležitosť jednotlivých premenných, môže tomu prispôsobiť svoje rozhodnutia).

3.2 Rozhodovanie o investícii na základe využitia reálnych opcií

Súčasťou finančného plánovania je aj plánovanie využitia voľných finančných prostriedkov, resp. potreby dodatočných finančných zdrojov. Tieto rozhodnutia sú úzko späté s oblasťou investovania. V prípade, že má podnik k dispozícii voľné dlhodobé zdroje (napríklad nevyplatený zisk), musí sa rozhodnúť pre určitý spôsob ich držania. Dochádza tu ku konfliktu dvoch navzájom protichodných cieľov. Prvým je snaha o primeranú platobnú schopnosť—*likviditu*, čo súvisí najmä s plynulosťou výrobného procesu (nákup zásob) a dobrým menom podniku. Druhým cieľom je snaha o čo najväčší zisk—*rentabilitu*. Platí, že čím má daná forma majetku väčšiu likviditu, tým má nižšiu rentabilitu a naopak (napríklad peniaze v hotovosti sú úplne likvidné, ale neprinášajú žiadny zisk, investičný projekt môže dosahovať vysokú rentabilitu, ale keďže je jedinečný, jeho likvidnosť je značne obmedzená). Tento konflikt rieši podnik väčšinou kompromisom, keď časť prostriedkov necháva likvidných a časť investuje.

Pri investovaní má podnik na výber dve základné možnosti. Prvá je investovať do finančných aktív, v tomto prípade sa stáva investorom na finančnom trhu (finančným investovaním, oceňovaním finančných nástrojov a ich derivátov a tvorbou ich optimálneho portfólia sa zaoberajú prvé tri okruhy finančnej matematiky uvedené v podkapitole 2.5).

Druhou možnosťou je investovať do vlastných projektov podniku. Rozhodnutia o budúcich investíciách sú pre podnik nanajvýš dôležité, pretože[2]

- operujú s najväčšími sumami peňazí,
- sú spojené s investovaním do fixných aktív s dlhou životnosťou,
- stoja manažment veľa času,
- determinujú budúcu konkurencieschopnosť podniku a tým aj jeho trhovú hodnotu,
- sú veľmi neisté a rizikové.

V ďalšom texte si ukážeme využitie metódy reálnych opcií pri investičnom rozhodovaní. Rovnako ako v predchádzajúcom príklade, aj tu projekt pochádza z reálneho

[2]Kráľovič, Vlachynský, 2002, str. 62 [11]

podniku. Vzhľadom na skutočnosť, že v čase tvorby tejto práce projekt ešte nebol realizovaný a v záujme zachovania obchodného tajomstva, neuvádzame podrobnosti týkajúce sa identity vystupujúcich subjektov.

3.2.1 Popis projektu a predpoklady riešenia

Spoločnosť AB má možnosť odkúpiť podnik CD zaoberajúci sa banskou činnosťou. V súčasnosti podnik CD ťaží v oblasti XY keramický íl v objeme 12 500 t za rok. Ďalej ho predáva v surovom stave za cenu 550 Sk/t, pričom náklady ťažby sú 200 Sk/t. Po kúpe podniku (aj priamo v okamihu jeho kúpy) má spoločnosť AB možnosť investovať dodatočných 25 mil. Sk na kúpu novej technológie, ktorá by umožnila spracovanie ílu zo surového stavu na sušený a mletý íl a zároveň by umožnila zvýšiť ročný vyťažený objem ílu na 30 000 ton za rok. Právo na ťažbu v oblasti XY platí nasledujúcich 20 rokov, pričom v súčasnosti je možné vyťažiť ešte 600 000 ton ílu (odhadovaná veľkosť ložiska). Cena sušeného mletého ílu je v súčasnosti 3 300 Sk/t, náklady 2 300 Sk/t. Z pohľadu investovania podnik zaujíma maximálna cena, ktorú by mal zaplatiť za podnik CD.

Predpoklady riešenia:

- Hodnota podniku CD závisí od vývoja ceny dvoch produktov: surového ílu a sušeného mletého ílu. Cena sušeného mletého ílu je však v realite závislá od ceny surového ílu (je vstupnou surovinou na jeho výrobu), ceny práce a energie potrebných na jeho ďalšie spracovanie zo surového stavu, pričom práca a energia je tá istá ako pri produkcii surového ílu (tá istá v zmysle kvality nie kvantity—napr. v prípade práce je to rovnako kvalifikovaná práca). Z týchto dôvodov predpokladáme, že ich predajné ceny sa budú vyvíjať proporciálne a to v pomere: *cena sušeného mletého ílu* = 6× *cena surového ílu.*

- *Variabilné náklady* na surový íl a rovnako aj na sušený mletý íl tvoria náklady na prácu a energiu. Pre zjednodušenie modelu (vylúčenie ďalších možných zdrojov variability) predpokladáme, že *budú rásť konštantne 4% za rok* ($f = 0,04$).

- Hodnota projektu za predpokladov uvedených vyššie závisí iba od variability ceny surového ílu. Na modelovanie vývoja ceny surového ílu je možné použiť binomický strom s *parametrami* μ*=0,0173 a* σ*=0,0307* stanovenými na základe expertného odhadu, kde predpokladáme, že cena surového ílu v čase i v uzle j ($S_{i,j}$) môže narásť s pravdepodobnosťou $p = 0,5$ v jednom kroku na $S_{i+1,j} = uS_{i,j}$ alebo poklesnúť s pravdepodobnosťou $p = 0,5$ v jednom kroku na $S_{i+1,j+1} = dS_{i,j}$. Pre výpočet u, d platia vzťahy:

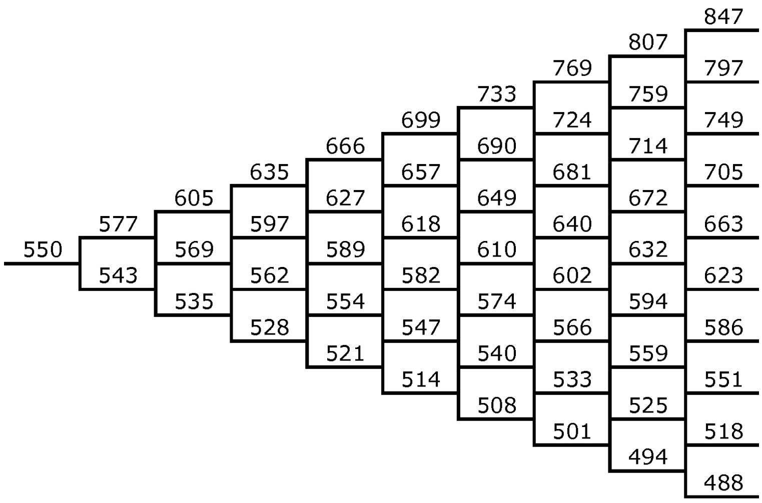
$$u = e^{\mu + \sigma\sqrt{t}}$$

$$d = e^{\mu - \sigma\sqrt{t}}$$

- Uvažujeme s *ročnou bezrizikovou úrokovou mierou* $r = 3,92\%$.

3.2.2 Riešenie

Príklad riešime ako reálnu opciu so životnosťou 20 rokov pomocou binomického stromu, kde jeden rok predstavuje jeden krok. Binomický strom ceny surového ílu skonštruujeme na základe vzťahov pre výpočet $S_{i+1,j}$, $S_{i+1,j+1}$, u, d uvedených v predpokladoch. Hodnoty pre prvých desať rokov sú znázornené na obrázku 3.14 (celý binomický strom je uvedený v prílohe A.1).



Obrázok 3.14: Binomický strom vývoja ceny surového ílu na obdobie desať rokov (v Sk)

Podnik sa na začiatku každého roku (resp. v každom uzle binomického stromu) nachádza v jednom z piatich režimov výroby:

- *stav 1a*—podnik nič nevyrába (odstavil výrobu) a zatiaľ ani v jednom z predošlých období neinvestoval do nákupu novej technológie;

- *stav 1b*—podnik nič nevyrába a v niektorom z predošlých období investoval do nákupu novej technológie;
- *stav 2a*—podnik ťaží len 12 500 ton ílu a predáva ho v surovom stave, pričom v žiadnom z predošlých období neinvestoval do nákupu novej technológie;
- *stav 2b*—podnik ťaží len 12 500 ton ílu a predáva ho v surovom stave, pričom v niektorom z období už investoval do nákupu novej technológie;
- *stav 3*—podnik ťaží 30 000 ton ílu, pričom 12 000 ton predáva v surovom stave a zvyšných 18 000 ton predáva ako sušený mletý íl (investícia teda už bola vykonaná v niektorom z predošlých období);

Zároveň sa na začiatku roka podnik rozhoduje (v závislosti od aktuálnej ceny produktov a výšky nákladov na nich), v akom režime bude v danom roku fungovať—či *nebude vyrábať*, bude *vyrábať len surový íl* (12 500 ton) alebo bude *produkovať surový íl* (12 000 ton) *a sušený mletý íl* (18 000 ton). Pri prechode medzi jednotlivými výrobnými režimami je potrebné uhradiť určité náklady prechodu, resp. urobiť investíciu—viď 3.15.

Náklady prechodu medzi režimami výroby (v Sk)	
1a->2a	1 200 000
1a->3	25 000 000
1b->2b	1 800 000
1b->3	2 400 000
2a->1a	600 000
2a->3	25 000 000
2b->1b	900 000
2b->3	300 000
3->1b	1 500 000
3->2b	700 000

Tabuľka 3.15: Náklady prechodu medzi jednotlivými výrobnými režimami (v Sk)

Keďže sa podnik na začiatku roka v každom uzle môže nachádzať v jednom z piatich stavov, musíme aj hodnotu investičného projektu stanoviť pre každý z týchto stavov. Ak predpokladáme, že podnik sa nachádza na začiatku roka i v uzle j v stave s, súčasná hodnota (k danému roku) všetkých jeho budúcich cash flow sa vypočíta pomocou vzťahu:

$$V_{i,j}^{s} = \max_{\forall x_s \in X_s} \{V_{i,j}^{s \to x_s}\} \tag{3.7}$$

kde X_s je množina všetkých režimov výroby, ktoré si v danom roku môže zvoliť (ak sa na začiatku roka nachádza v stave s) a $V_{i,j}^{s \to x_s}$ predstavuje súčasnú hodnotu (k danému roku) všetkých budúcich cash flow, ktoré získa prepnutím sa do stavu x_s. Keďže investor je racionálny, tak si volí maximum z možných výplat (zvolí najvýhodnejší režim výroby). Tento vzťah môžme ďalej rozpísať:

$$V_{i,j}^{s} = \max_{\forall x_s \in X_s} \{CF_{i,j}^{s \to x_s} + SHV_{i+1}^{x_s}\} \tag{3.8}$$

kde $CF_{i,j}^{s \to x_s}$ označuje cash flow, ktorý podnik získa v danom roku, ak sa prepne zo stavu s do stavu x_s a $SHV_{i+1}^{x_s}$ je súčasná hodnota k začiatku roka i všetkých cash flow, ktoré podnik získa v rokoch $i+1$ a ďalších, ak sa v roku i prepne do stavu x_s. Jednotlivé zložky sa vyrátajú ako

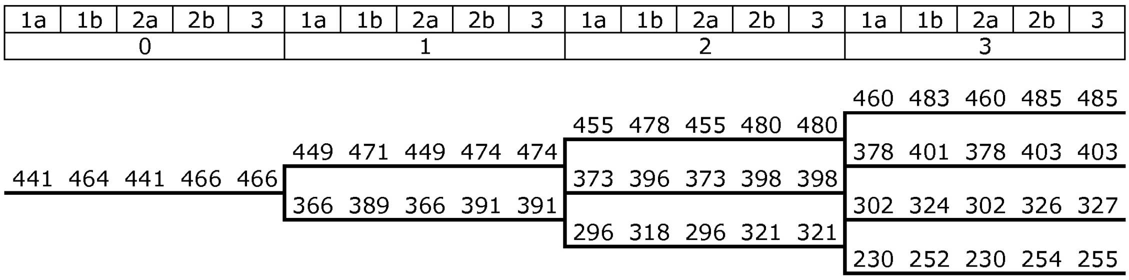
$$CF_{i,j}^{s \to x_s} = -Np^{s \to x_s} + \left\{S_{i,j} - N_1(1+f)^i\right\} T_1^{x_s} + \left\{6 * S_{i,j} - N_2(1+f)^i\right\} T_2^{x_s} \tag{3.9}$$

$$SHV_{i+1}^{x_s} = e^{-r} \left\{qV_{i+1,j}^{x_s} + (1-q)V_{i+1,j+1}^{x_s}\right\} \tag{3.10}$$

kde

- $Np^{s \to x_s}$—náklady prechodu zo stavu s do stavu x_s (viď 3.15);
- $S_{i,j}$—cena surového ílu v roku i a uzle j;
- N_1—variabilné náklady (v roku 0) na výrobu jednej tony surového ílu ($N_1 = 200Sk$);
- f—ročná miera inflácie ($f = 0,04$);
- $T_1^{x_s}$—množstvo predaného surového ílu v danom roku pri režime výroby x_s ($T_1^{x_s} = 0$ ton, ak neťažíme, $T_1^{x_s} = 12\ 500$ ton, ak predávame len surový íl, $T_1^{x_s} = 12\ 000$ ton, ak predávame surový aj sušený íl);
- N_2—variabilné náklady (v roku 0) na výrobu jednej tony sušeného mletého ílu ($N_2 = 2\ 300Sk$);
- $T_2^{x_s}$—množstvo predaného sušeného ílu v danom roku ($T_2^{x_s} = 18\ 000$ ton, ak predávame surový aj sušený íl, inak 0);
- r—ročná bezriziková úroková miera ($r = 0,0392$);
- q—rizikovo neutrálna pravdepodobnosť vypočítaná podľa vzťahu $q = \frac{e^{-r}-d}{u-d}$;

Pri výpočte postupujeme od konca binomického stromu a pomocou vzťahov (3.8), (3.9) a (3.10) vypočítame hodnoty $V_{i,j}^{s}$ v jednotlivých uzloch. Hodnoty projektu v prvých štyroch rokoch v jednotlivých stavoch znázorňuje obrázok 3.16 (celý binomický strom sa nachádza v prílohe A.2).



Obrázok 3.16: Hodnoty projektu v prvých štyroch rokoch v jednotlivých stavoch (v mil. Sk)

Keďže sa podnik v súčasnosti nachádza v stave $2a$, súčasná hodnota projektu je rovná

$$V_0^{2a} = \mathbf{441\ 204\ 284\ Sk}$$

Celkovo môžeme prijať záver, že súčasná hodnota podniku CD (za vyššie uvedených predpokladov a pri zohľadnení možnosti po kúpe podniku CD realizovať dodatočnú investíciu vo výške 25 mil. Sk na nákup novej technológie umožňujúcej vyrábať aj sušený mletý íl a zvýšiť ročne vyťažené množstvo surového ílu) je približne 441 mil. Sk. Ak je podnik CD ponúkaný spoločnosti AB za cenu nie väčšiu ako 441 mil. Sk, mala by spoločnosť AB ponuku prijať.

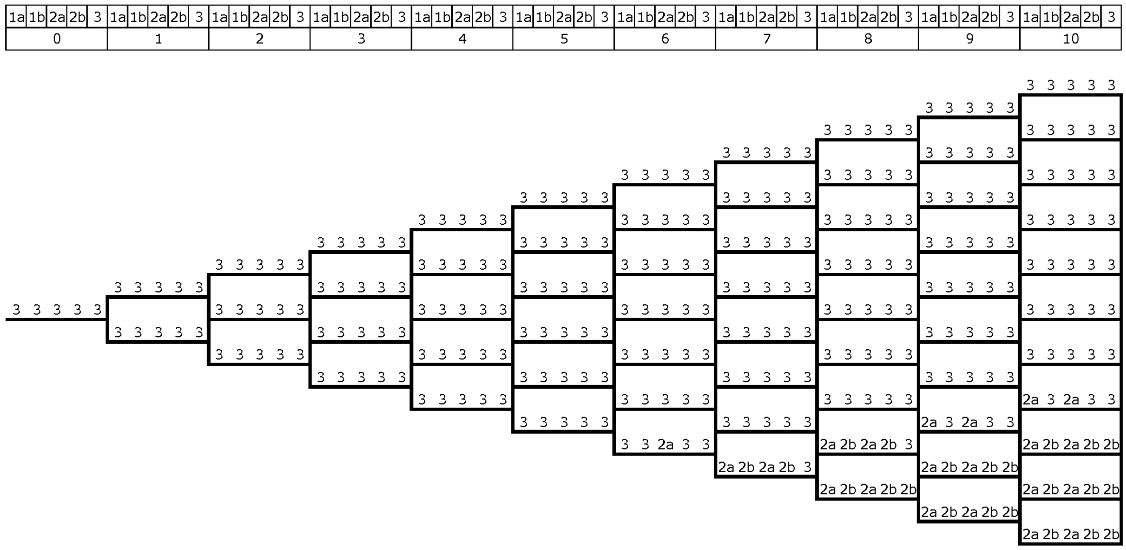
Z pohľadu terminológie (viď napr. Copeland a Antikarov [3]) vystupuje v tomto projekte viacero typov reálnych opcií. Pred uskutočnením investície vo výške 25 mil. Sk môže podnik prepínať medzi režimami výroby $1a$ (neťažiť) a $2a$ (ťažiť len surový íl). Prepnutie režimu výroby z $1a$ do $2a$, ako aj prepnutie z $2a$ do $1a$, sú tzv. *switching option*[3]. Keďže možnosť prepnúť sa môže uskutočniť viackrát (aj tam, aj späť), tak v obidvoch prípadoch ide o *compound switching option*[4].

Po uskutočnení investície vo výške 25 mil. Sk môže podnik prepínať medzi režimami výroby $1b$, $2b$ a 3. Tieto možnosti prepínať sú taktiež compound switching option. Samotná investícia 25 mil. Sk môže byť uskutočnená len raz a to hocikedy v danom období (20 rokov—životnosť opcie), ide o *option to wait*[5]. Keďže si ňou

[3] *switching option*—možnosť prepnutia z jedného režimu výroby do druhého
[4] *compound option*—reálna opcia, ktorej hodnota závisí od iných opcií
[5] *option to wait*—predstavuje možnosť odložiť investičné rozhodnutie

kupujeme vlastne možnosť prepínať sa medzi inými režimami výroby—kupujeme reálne opcie, opäť je táto opcia zložená, je to teda *compound option to wait*.

V priebehu riešenia nám výpočtový algoritmus v každom uzle a pre každý začiatočný stav výroby volil maximálnu z (v danom uzle) možných hodnôt investičného projektu, ktoré zodpovedali jednotlivým akciám podniknuteľným v danom uzle a stave. Ak si do binomického stromu zapíšeme akcie zodpovedajúce daným maximálnym hodnotám, získame strom optimálnych rozhodnutí, ktoré by sme mali uskutočniť v danom uzle a začiatočnom výrobnom režime. Strom optimálnych rozhodnutí v jednotlivých uzloch v čase 0 až 10 znázorňuje obrázok 3.17 (úplný strom je uvedený v prílohe A.3).



Obrázok 3.17: Rozhodnutie o výrobnom režime daného roka v čase 0 až 10

Strom optimálnych rozhodnutí ilustruje ďalší prínos reálnych opcií—umožňujú nám určiť nielen hodnotu možnosti uskutočniť investíciu, ale aj *optimálny čas* jej uskutočnenia.

Záver

Cieľom tejto práce bolo poskytnúť prehľad vybraných metód aplikovanej matematiky využiteľných pri riešení plánovacích problémov podniku.

V rámci teoretickej časti diplomovej práce sme v úvode stručne charakterizovali podstatu a význam finančného plánovania pre podnik. Následne sme sa venovali popisu vybraných metód—uviedli sme typické úlohy, ktoré sú predmetom ich záujmu, a spomenuli najpoužívanejšie algoritmy riešenia. V kontexte ich uplatnenia vo finančnom plánovaní podniku sme svoju pozornosť sústredili na zachytenie ich pozitívnych i negatívnych vlastností, a uvedenie konkrétnych príkladov ich existujúcej i perspektívne možnej aplikácie.

Praktickú časť diplomovej práce sme venovali názornému predvedeniu využitia dvoch zvolených metód—lineárneho programovania a reálnych opcií v procese tvorby finančného plánu v praxi.

Na príklade konkrétneho podniku ATV, v.d. Strážske sme predstavili model zostavenia výrobného plánu využívajúci lineárne programovanie. Poukázali sme na jeho silné (nenáročnosť riešenia) i slabé (statickosť) stránky a celkový prínos k zefektívneniu činnosti podniku v podobe možnosti dosiahnutia väčšieho prevádzkového zisku pri optimálnom riadení výroby.

Metódu reálnych opcií sme využili pri hodnotení skutočnej investičnej príležitosti z praxe, kde sme na základe zostaveného modelu určili hodnotu uvažovaného projektu.

Zaujímavým námetom do budúcnosti spájajúcim metódy aplikovanej matematiky a finančné plánovanie by mohlo byť navrhnutie všeobecne aplikovateľného modelu plánovania konkrétnej oblasti (napr. výroby, marketingu, expedície a pod.) v podnikoch určitého typu (napr. podniky pôsobiace v poľnohospodárstve, banky, obchodné spoločnosti a pod.).

Literatúra

[1] BAUMOL, W. S.: *The Transactions Demand for Cash: An Inventory Theoretic Approach.* Quarterly Journal of Economics, 1952.

[2] BREALEY, R. A., MYERS, S. C.: *Teorie a praxe firemních financí.* Computer Press, Praha 2000.

[3] COPELAND, T.—ANTIKAROV, V.: *Real Options: A Practitioner's Guide.* TEXERE, New York 2001.

[4] DEMEL, J.: *Grafy a jejich aplikace.* Academia, Praha 2002.

[5] DIXIT, A. K.—PINDYCK, R. S.: *Investment under Uncertainity.* Princeton University Press, Princeton 1994.

[6] DOLANSKÝ, V.—MĚKOTA, V.—NĚMEC, V.: *Projektový management.* Grada Publishing, Praha 1996.

[7] HALICKÁ, M.: *Optimálne riadenie I.* Bratislava 1999. Dostupné na: http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/

[8] HAMALA, M.: Študijné texty k prednáškam z nelineárneho programovania,rukopis v knižnici Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského. Bratislava 1998.

[9] KAYE, G. R.: *Financial planning models.* Academic Press, London 1994.

[10] KRÁĽOVIČ, J.: Finančné plánovanie podniku. Elita, Bratislava 1998.

[11] KRÁĽOVIČ, J.—VLACHYNSKÝ, K.—MARKOVIČ, P.: *Finančný manažment.* IURA Edition, Bratislava 2002.

[12] MAJTÁN, M. a kol.: *Manažment.* Sprint vfra, Bratislava 2003.

[13] MELICHERČÍK, I.—OLŠAROVÁ, L.—ÚRADNÍČEK, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky.* Epos, Bratislava 2005.

[14] MYERS, S. C.—POGUE, G. A.: *A Programming Approach to Corporate Financial Management.* The Journal of Finance, Vol. 29, No. 2, p. 579–599, New York 1973. Dostupné na: http://www.jstor.org/pss/2978829

[15] PLESNÍK, J.: *Grafové algoritmy.* Veda, Bratislava 1983.

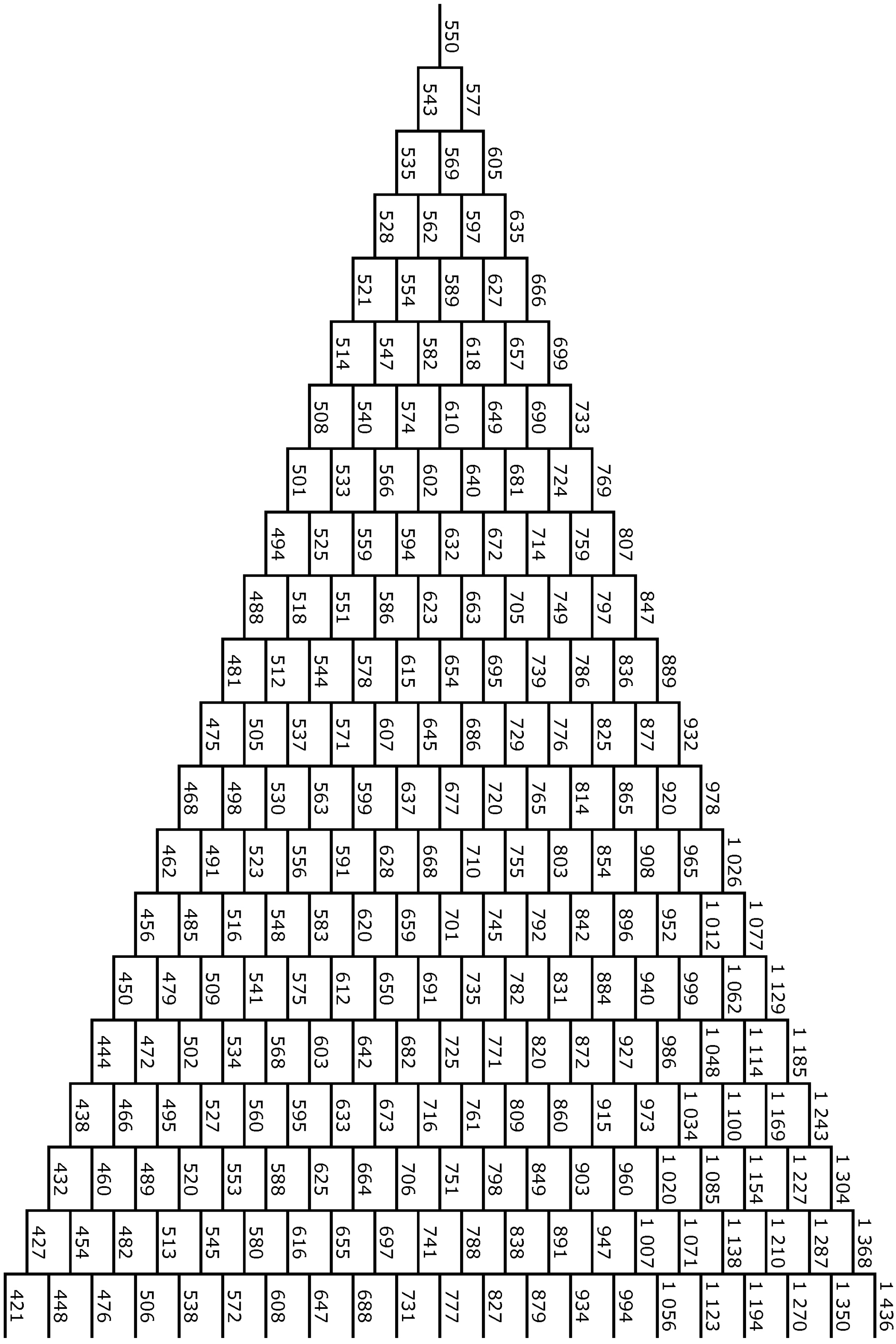
[16] PLESNÍK, J.—DUPAČOVÁ, J.—VLACH, M.: *Lineárne programovanie.* Alfa, Bratislava 1990.

[17] ŠEVČOVIČ, D.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov.* Bratislava 2001. Dostupné na: http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/derivaty/skripta.pdf

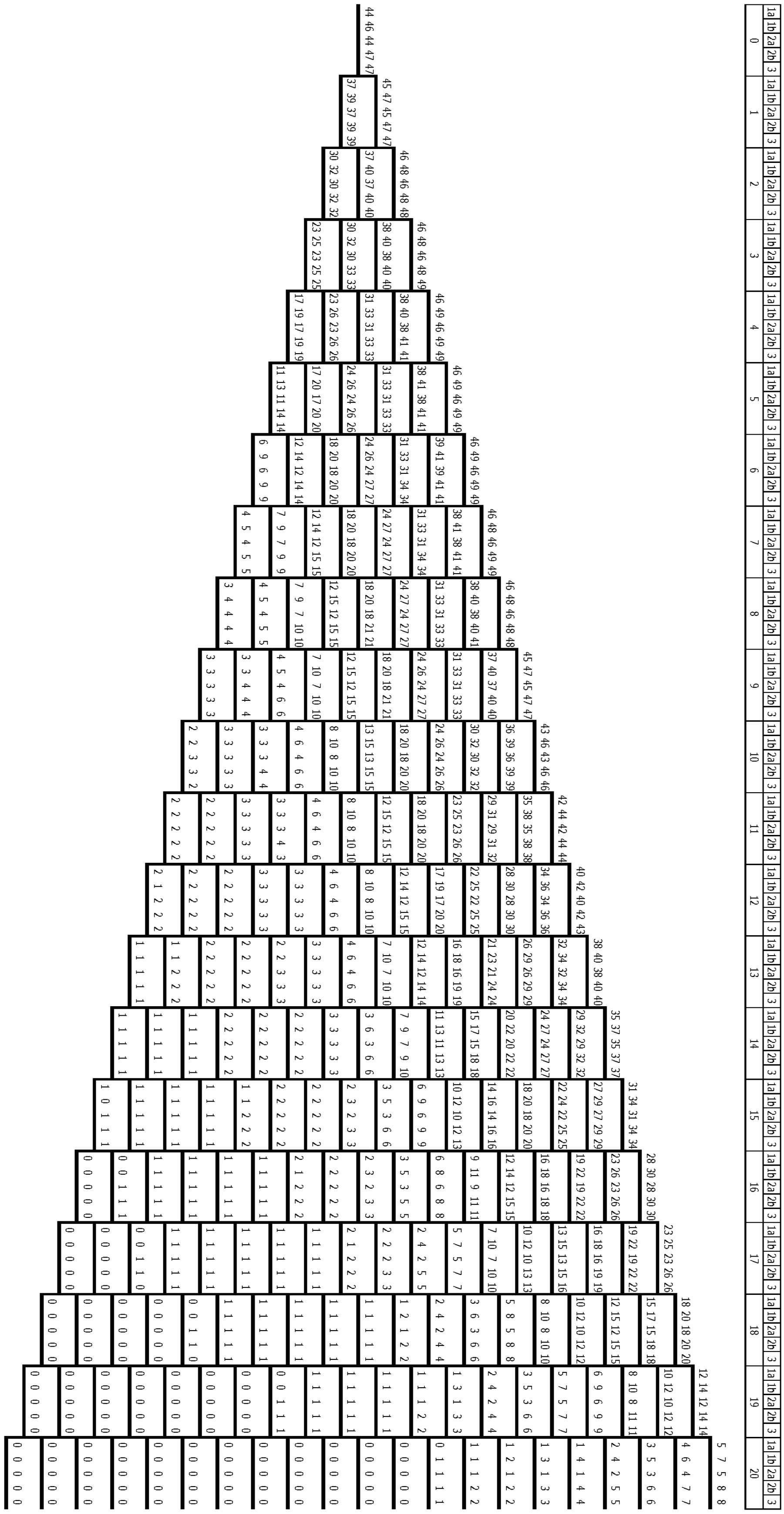
Prílohy

Príloha A

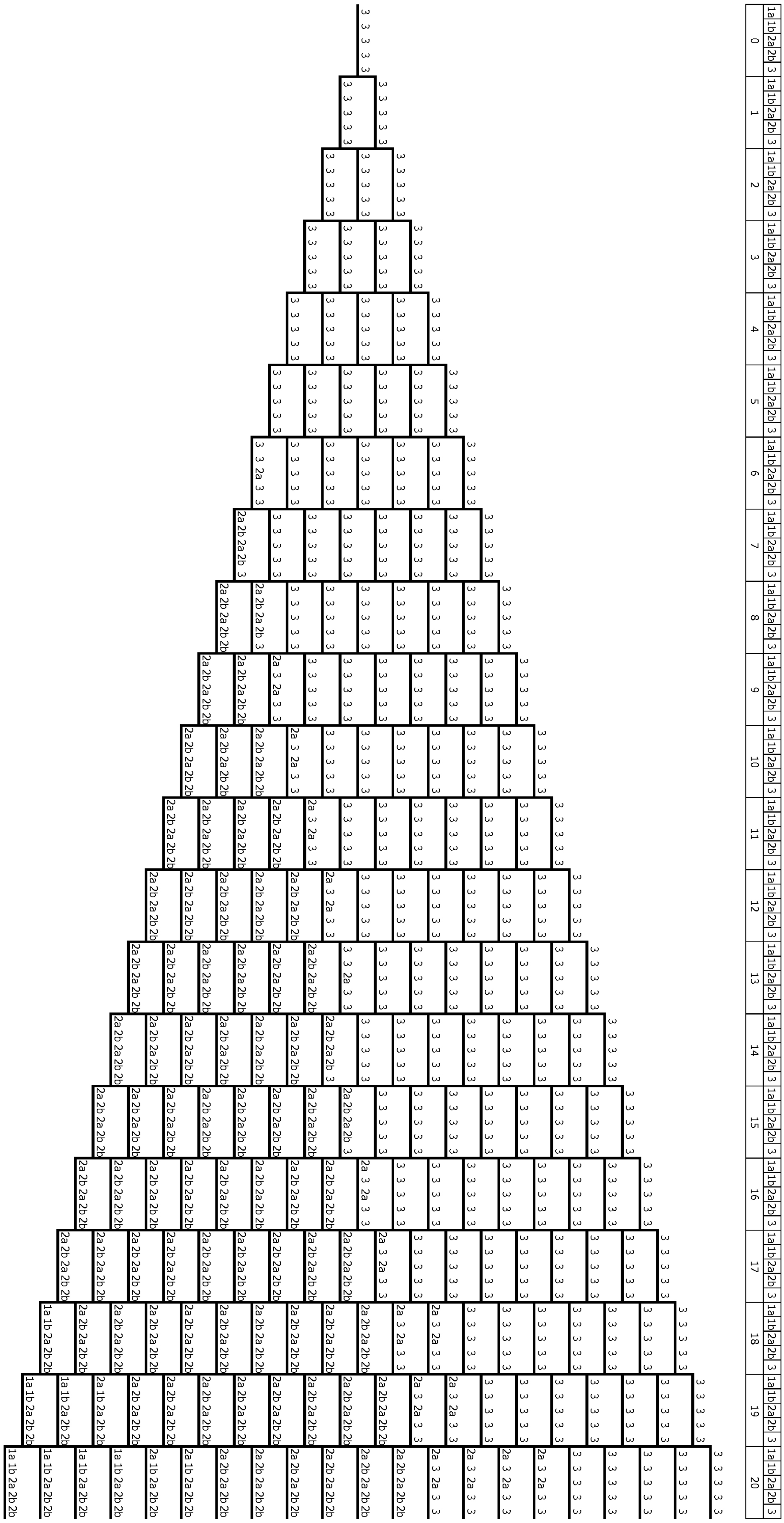
Úplné binomické stromy



Príloha A.1: Binomický strom vývoja ceny surového ílu (v Sk/t)



Príloha A.2: Hodnota projektu v jednotlivých uzloch (v desiatkach miliónov Sk)



Príloha A.3: Rozhodnutie o výrobnom režime daného roka