FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Riešiteľnosť rovníc CGE modelov

Diplomová práca

Bratislava 2008 Lívia Šmátralová

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Ekonomická a finančná matematika

Riešiteľnosť rovníc CGE modelov

Diplomová práca

Diplomant: Lívia Šmátralová

Vedúci diplomovej práce: Prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

Bratislava 2008

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že túto diplomovú pracu som vypracovala samostatne len s použitím uvedenej citovanej literatúry.

V Bratislave, máj 2008 ....

Poďakovanie

Touto cestou by som sa chcela poďakovať môjmu školiteľovi p.prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc., za jeho vysoko odbornú spoluprácu na tejto diplomovej práci. Patrí mu veľká vďaka za množstvo času a trpezlivosti, ktorý mi pri vzniku tejto práce venoval.
Úprimne ďakujem aj svojim rodičom, ktorí ma podporovali počas celého štúdia na univerzite.

Abstrakt

Cieľom tejto diplomovej práce je rozšíriť súčasnú teóriu o modeloch všeobecnej vypočítateľnej rovnováhy (CGE). Uvádzame dôkaz existencie rovnovážneho bodu v jednoduchých CGE modeloch dvoma rôznymi spôsobmi. Najprv podávame nezávislý existenčný dôkaz, potom využijeme Arrow-Debreuovu teóriu o modeloch všeobecnej rovnováhy (GE).

Kľúčové slová: CGE modely, riešiteľnosť rovníc CGE modelov, modely všeobecnej rovnováhy.

Abstract

The purpose of this diploma thesis is to widen the theory about models of computable general equilibrium (CGE). We have prooven the existence of equilibrium point in CGE model by two different methods. The first is an independent proof of existence, the second is by adjusting Arrow-Debreu's theory about models of general equilibrium.

Key words: CGE models, solvability of equations in CGE models, models of general equilibrium.

Obsah

1 Úvod 7

2 CGE modely 8

3 Jednoduchý CGE model 9

3.1 Štruktúra a predpoklady modelu 9

3.1.1 Produkčné sektory 9

3.1.2 Spotrebné sektory 10

3.1.3 Premenné modelu 11

3.2 Rovnice modelu 12

4 Riešiteľnosť rovníc jednoduchého CGE modelu 13

4.1 Voľba typu produkčných a úžitkových funkcií 13

4.2 Model s čisto Cobb-Douglasovou produkčnou funkciou 15

4.2.1 Dôkaz existencie rovnováhy v modeli 16

4.3 Model s čisto Leontieffovou produkčnou funkciou 18

4.4 Model so zmiešanými produkčnými funkciami 20

4.4.1 Dôkaz existencie rovnováhy v modeli 21

5 Arrow-Debreuova teória existencie rovnováhy v ekonomike 24

5.1 Formulácia všeobecnej lemy z Arrow-Debreuovej teórie 24

5.2 CGE model ako abstraktná ekonomika 25

5.2.1 Veta o existencii rovnováhy v abstraktnej ekonomike . 26

5.2.2 Veta o existencii rovnováhy v CGE modeloch 35

6 Záver 39

Literatúra 40

1 Úvod

Modely všeobecnej vypočítaleľnej rovnováhy (Computable General Equilibrium - ďalej len "CGE") sú makroekonomické modely založené na mikroekonomických princípoch optimálneho správania sa subjektov. Používajú sa na modelovanie exogénnych šokov v ekonomike, ako napr. zmeny v daňovej, sociálnej, enviromentálnej, zahranično-obchodnej politike. V literatúre nám nie je známy zdroj, v ktorom by boli komplexne spracované základné teoretické otázky CGE modelov, ako sú existencia riešenia alebo počet riešení. Ak sa zmienka o nich nájde, autori (viď napr. [4, 7, 8]) sa väčšinou odvolajú na Arrow-Debreuovu teóriu [1] o modeloch všeobecnej rovnováhy (General Equilibrium - ďalej len "GE"). Táto teória je spracovaná na klasické modely ekonomickej rovnováhy, ktoré sa od modelov CGE líšia.

Otázka riešiteľnosti CGE modelov je zaujímavá aj preto, že sa na ich riešenie bežne používa software GAMS (General Algebraic Modelling System), ktorý ponúkne riešenie aj vtedy, keď systém rovníc CGE modelu nie je riešiteľný (viď [7]). Bez existenčnej vety teda nie je jasné, či výsledok softwaru GAMS je naozaj priblížením riešenia alebo iba numerickým artefaktom.

Cieľom našej diplomovej práce bolo podať dôkaz existencie riešenia rovníc CGE modelov (ich všeobecný opis a rozdelenie je v kapitole **2**). Keďže CGE modely majú podľa oblasti ich použitia veľmi rozmanité podoby, zamerali sme sa na jednoduchý model (sformulovaný v kapitole **3**) obsiahnutý v prakticky všetkých variantoch modelu.

Najprv sme pre náš model vyvinuli nezávislú techniku dôkazu existencie riešenia rovníc (viď **4**). Potom sme prispôsobili Arrow-Debreuovu teóriu [1] pre náš model (v kapitole **5**).

2 CGE modely

CGE používame na prognózovanie vývoja ekonomiky danej krajiny. Na začiatku predpokladáme, že ekonomika je v rovnovážnom stave. Po zavedení exogénneho šoku sa ekonomika dostane do novej rovnováhy. Nakoniec porovnávame jednotlivé ekonomické veličiny v rovnováhe pred a po zavedení šoku.

Rovnováha v CGE modeloch sa počíta z dát iba z jedného roka, na rozdiel od ekonometrickych modelov, ktoré sú založené na časových radoch. Ako dátová zakladňa slúži matica spoločenských účtov (Social Accounting Matrix - ďalej len "SAM"), ktorá opisuje nominálne toky tovarov, služieb a peňazí v danej ekonomike. SAM matica sa používa na kalibráciu modelov CGE.

CGE modely poznáme:

- statické (v ktorých úplne abstrahujeme od času, predpokladáme, že po exogénnom šoku rovnováha nastane okamžite),
- dynamické (ktoré nám umožňujú sledovať zmeny v rôznych časových obdobiach).

V našej diplomovej práci sa obmedzíme na statické CGE modely.

Analýza rovnováhy v ekonomike pomocou CGE modelov sa skladá z dvoch základných krokov:

- postavenie modelu a kalibrácia parametrov modelu pomocou SAM matice,
- výpočet novej rovnováhy po zavedení exogénneho šoku.

My sa však budeme venovať iba druhému kroku, tj. riešeniu rovníc modelu. Využijeme ale skutočnosť, že model bol kalibráciou vytvorený.

3 Jednoduchý CGE model

CGE modely reálnych ekonomík sú veľmi rôznorodé, zložité a často neprehľadné, preto je ich všeobecná teoretická analýza ťažká. Z tohto dôvodu sa v tejto kapitole obmedzíme na analýzu jednoduchého CGE modelu predstavujúci spoločnú časť takmer všetkých zložitejších modelov.

3.1 Štruktúra a predpoklady modelu

V tejto kapitole sme sa inšpirovali diplomovými prácami [7, 8] z predchádzajúcich rokov.

Predpokladáme, že na všetkých trhoch (trh statkov, práce a kapitálu) vládne dokonalá konkurencia. Tiež predpokladáme, že sa všetky subjekty v ekonomike správajú racionálne. Vyjadrením tohto predpokladu je, že účastníci na trhu maximalizujú svoj zisk, resp. úžitok. Na základe ich vlastností rozdeľujeme ekonomické subjekty do tzv. sektorov:

- produkčné sektory (alebo výrobné odvetvia),
- sektory konečnej spotreby (spotrebitelia, vláda),
- sektor zahraničia (ktorý predstavuje obchodné a platobné vzťahy so zahraničím).

Uvažujme ekonomiku s viacerými výrobnými odvetviami a jedným agregovaným spotrebiteľom (domácnosťami). Všeobecný model zjednodušíme tým, že abstrahujeme od vládneho sektora, investícií, zahraničia atď.

3.1.1 Produkčné sektory

Jedným zjednodušujúcim predpokladom nášho modelu je, že každý produkčný sektor má práve jeden výstup. Produkčné sektory ďalej opisujeme pomocou produkčných funkcií s konštantnými výnosmi z rozsahu. Z predpokladu dokonalej konkurencie a konštantných výnosov z rozsahu vyplýva, že v rovnováhe pri nenulovej konečnej produkcii produkčný sektor generuje nulový zisk, a spolu s predpokladom rovnováhy na trhu dostávame rovnice nulového zisku (alebo peňažnú rovnováhu), ktoré uvedieme v odseku **3.2**.

Vstupmi do výroby sú statky z iných odvetví, práca a kapitál. Predpokladáme, že na trhu pôsobí n výrobných odvetví. Potom produkciu i-teho odvetvia označíme:

$$Y_i = f_i(X_{1i}, \ldots, X_{ni}, L_i, K_i), \tag{3.1}$$

kde vstupné parametre sú:

- X_{ji} - výrobný faktor predstavujúci produkt j-teho odvetvia, pre všetky $j = 1, \ldots, n$,
- L_i - faktor práce,
- K_i - faktor kapitálu.

Voľba produkčnej funkcie f_i je subjektívna, odráža naše predpoklady o substituovateľnosti vstupov do výroby. Ak sú vstupy dokonale nezameniteľné (komplementárne), volíme Leontieffovu produkčnú funkciu; ak sú zameniteľné (substituovateľné), tak podľa miery elasticity si volíme Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu (ak je elasticita rovná jednej) a tzv. CES (Constant Elasticity of Substitution) funkciu (ak je elasticita menšia). V niektorých prípadoch používame kombináciu uvedených produkčných funkcií.

Predpoklad racionality vedie k tomu, že pri danom vektore cien $p = (p_1, \ldots, p_n)$, ceny práce w a kapitálu r sú hodnoty spotrieb faktorov také, aby maximalizovali zisk. Inými slovami sú to podmienené dopyty v zmysle mikroekonomickej teórie:

$$\begin{aligned} X_{ij} &= X_{ij}(p, w, r, Y_i) \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n, \\ L_i &= L_i(p, w, r, Y_i) \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \\ K_i &= K_i(p, w, r, Y_i) \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Vzhľadom na predpoklad konštantnývch výnosov z rozsahu sa však maximálny zisk konečnej nenulovej hodnote produktu dosahuje iba vtedy, ak je nulový.

3.1.2 Spotrebné sektory

Spotrebné sektory (agregované domácnosti, vládu a investície) charakterizujeme pomocou funkcií užitočnosti. Tvar funkcie užitočnosti s konštantnými výnosmi z rozsahu $u(H_1, \ldots, H_n)$ volíme podľa predpokladaného typu preferencií (Leontieffova, Cobb-Douglasova alebo CES funkcia), kde H_i je dopyt spotrebiteľa po výrobkoch i-teho odvetvia. Racionálne sa správajúci spotrebiteľ maximalizuje svoju užitočnosť za podmienky rozpočtového ohraničenia. Riešením tejto úlohy sú Marshallovské dopytové funkcie H_i, ktoré napr. pre agregované domácnosti majú tvar

$$H_i = H_i(M, p) \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{3.3}$$

kde M predstavuje príjem domácností. Predpokladáme, že kapitál a práca sú plne vlastnené domácnosťami. Potom príjem domácností tvoria celkové mzdy a dividendy z kapitálu, teda

$$M = \sum_i wL_i + \sum_i rK_i. \tag{3.4}$$

3.1.3 Premenné modelu

V našom zjednodušenom modeli premenné rozdelíme na endogénne premenné:

- Y_i - produkcia i-teho odvetvia,
- X_{ij} - podmienený dopyt j-teho odvetvia po výrobkoch i-teho odvetvia,
- H_i - marshallovský dopyt domácností po výrobkoch i-teho odvetvia,
- L_i - podmienený dopyt i-teho odvetvia po práci,
- K_i - podmienený dopyt i-teho odvetvia po kapitáli,
- p_i - cena výrobku i-teho odvetvia,
- w - cena práce,
- r - cena kapitálu,

a exogénne premenné:

- $\bar{L}$ - celkové množstvo práce,
- $\bar{K}$ - celkové množstvo kapitálu.

3.2 Rovnice modelu

Rovnice modelu predstavujú rovnováhy na jednotlivých trhoch v ekonomike. Ako sme naznačili v kapitole **3.1**, na všetkých troch trhoch musí vládnuť rovnováha, teda na každom trhu sa dopyt rovná ponuke. Dostávame rovnice pre rovnováhu na trhu statkov:

$$Y_i = \sum_j X_{ij} + H_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{3.5}$$

na trhu práce:

$$\bar{L} = \sum_i L_i, \tag{3.6}$$

a na kapitálovom trhu:

$$\bar{K} = \sum_i K_i. \tag{3.7}$$

CGE modelmi modelujeme reálne ekonomiky, takže predpokladáme kladné ceny statkov:

$$p_i > 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Z odseku **3.1.1** vieme, že v rovnováhe výrobné odvetvia pri nenulovej a konečnej produkcii generujú nulový zisk, tj. na trhu vládne aj peňažná rovnováha, ktorú môžeme vyjadriť pomocou rovníc nulového zisku:

$$p_i Y_i = \sum_j p_j X_{ji} + wL_i + rK_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{3.8}$$

Na konkretizáciu opisu treba do rovníc (3.5)-(3.8) dosadiť dopytové funkcie X_{ij}, H_i, L_i, K_i definované ako v (3.2). K tomu si najprv zvolíme tvar produkčných funkcií výrobných odvetví, resp. úžitkovú funkciu agregovaných domácností. Ako sme uviedli v **3.1.1** a **3.1.2** tieto funkcie sa spravidla vyberajú z trojice: Leontieffova, Cobb-Douglasova, CES funkcia. Parametre zvolených funkcií sa určujú zo SAM matice modelovanej ekonomiky (pozri [8]).

4 Riešiteľnosť rovníc jednoduchého CGE modelu

V tejto kapitole podávame priamy dôkaz existencie, resp. neexistencie rovnováhy v CGE modeloch s troma rôznymi typmi produkčných funkcií.

4.1 Voľba typu produkčných a úžitkových funkcií

Vytvoríme tri rôzne modely, v ktorých funkcie (produkčná a úžitková) sa vyberajú špeciálne.

Funkciu užitočnosti agregovaných domácností si zvolíme Cobb-Douglasovu v každom modeli, čiže bude mať tvar:

$$u(H) = H_1^{\beta_1} \dots H_n^{\beta_n}, \tag{4.1}$$

kde $\sum_i \beta_i = 1$.

Produkčné funkcie výrobných odvetví zvolíme nasledovne:

- čisto Cobb-Douglasove produkčné funkcie v tvare:

$$f_i(X_{1i}, \dots, X_{1n}, L_i, K_i) = \prod_j X_{ji}^{a_{ji}} L_i^{\delta_{Li}} K_i^{\delta_{Ki}}, \tag{4.2}$$

  kde pre parametre platí

$$\sum_j a_{ji} + \delta_{Li} + \delta_{Ki} = 1, \tag{4.3}$$

- čisto Leontieffove produkčné funkcie v tvare:

$$f_i(X_{1i}, \dots, X_{1n}, L_i, K_i) = \min\{\frac{X_{1i}}{a_{1i}}, \dots, \frac{X_{ni}}{a_{ni}}, \frac{L_i}{b_i}, \frac{K_i}{c_i}\}, \tag{4.4}$$

  kde pre parametre platí

$$\sum_j a_{ji} + b_i + c_i = 1. \tag{4.5}$$

- zmiešané produkčné funkcie, čo znamená že sú vnorená s dvoma úrovňami: na vyššej úrovni berieme výrobné vstupy (medzispotrebu) a hodnotu pridávajúce vstupy (prácu a kapitál) ako komplementárne; na nižšej úrovni zostávame pri výrobnej medzispotreby u komplementárnych vstupoch, kým dvojicu vstupov práca a kapitál berieme ako dokonalo zameniteľnú, takže produkčné funkcie budú mať tvar:

$$f_i(X_{1i}, \ldots, X_{1n}, L_i, K_i) = \min\{\frac{X_{1i}}{a_{1i}}, \ldots, \frac{X_{ni}}{a_{ni}}, \frac{L_i^{\delta_{Li}} K_i^{\delta_{Ki}}}{b_i}\}, \tag{4.6}$$

  kde pre parametre platí

$$\begin{aligned} \delta_{Li} + \delta_{Ki} &= 1, \\ \sum_j a_{ji} + b_i &= 1. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Vo všetkých troch prípadoch platí

$$\sum_j a_{ij} + \beta_i = 1. \tag{4.8}$$

Parametre a_{ij}, b_i, c_i, β_i, δ_{Li}, δ_{Ki} sú odvodené (pozri [8]) z matice spoločenských účtov (Social Accounting Matrix - ďalej len "SAM").

4.2 Model s čisto Cobb-Douglasovou produkčnou funkciou

V tomto prípade výrobné odvetvia budú mať Cobb-Douglasove produkčné funkcie (viď (4.2)).

Známym postupom (pozri [4], príloha 1) odvodíme z produkčných funkcií a z funkcie užitočnosti podmienené dopyty výrobných odvetví a Marshallovský dopyt agregovaných domácností ako funkcie cien (statkov, práce a kapitálu). Dostaneme:

$$
\begin{aligned}
X_{ji} &= \frac{a_{ji}}{p_j} Y_i Q_i \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n, \\
L_i &= b_i \frac{\delta_{Li}}{w} Q_i Y_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \\
K_i &= b_i \frac{\delta_{Ki}}{r} Q_i Y_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \\
H_i &= \frac{\beta_i}{p_i}(w\bar{L} + r\bar{K}) \qquad \forall i = 1, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

kde

$$Q_i = \prod_\nu (\frac{p_\nu}{a_{\nu i}})^{a_{\nu i}} (\frac{w}{\delta_{Li}})^{\delta_{Li}} (\frac{r}{\delta_{Ki}})^{\delta_{Ki}} \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Dosadíme tieto vzťahy do rovníc (3.5)-(3.8) a dostávame:

$$Y_i = \sum_j \frac{a_{ij}}{p_i} Y_j Q_j + \frac{\beta_i}{p_i}(w\bar{L} + r\bar{K}) \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{4.9}$$

$$\bar{L} = \sum_i \frac{\delta_{Li}}{w} Q_i Y_i, \tag{4.10}$$

$$\bar{K} = \sum_i \frac{\delta_{Ki}}{r} Q_i Y_i, \tag{4.11}$$

$$p_i Y_i = \sum_j p_j \frac{a_{ji}}{p_j} Y_i Q_i + w \frac{\delta_{Li}}{w} Y_i Q_i + r \frac{\delta_{Ki}}{r} Y_i Q_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{4.12}$$

Úpravou rovnice (4.12) dostaneme:

$$p_i = Q_i = \prod_\nu (\frac{p_\nu}{a_{\nu i}})^{a_{\nu i}} (\frac{w}{\delta_{Li}})^{\delta_{Li}} (\frac{r}{\delta_{Ki}})^{\delta_{Ki}} \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{4.13}$$

Po zlogaritmovaní vzťahu (4.13) a ďalšej úprave dostaneme:

$$\log p_i = \sum_j a_{ji} \log p_j + \delta_{Li} \log w + \delta_{Ki} \log r - c_i \qquad \forall i = 1, \dots, n, \quad (4.14)$$

kde

$$c_i = \sum_j a_{ji} \log a_{ji} + \delta_{Li} \log \delta_{Li} + \delta_{Ki} \log \delta_{Ki} \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

Rovnicu (4.9) možeme upraviť pomocou vzťahu (4.13):

$$p_i Y_i = \sum_j a_{ij} p_j Y_j + \beta_i (w\bar{L} + r\bar{K}) \qquad \forall i = 1, \dots, n. \qquad (4.15)$$

Systém rovníc (4.10),(4.11) spolu s (4.14),(4.15) nám úplne opisuje ekonomiku. Rovnice sú lineárne závislé (viď [8] odsek **3.2.3**). Z toho vyplýva, že zo systému môžeme určiť iba pomery cien. Normalizujeme ich, ako obvykle, tým, že zvolíme $w = 1$ za numeraire.

4.2.1 Dôkaz existencie rovnováhy v modeli

Označíme $\phi_i = \log p_i$ a $\psi_i = p_i Y_i$. Rovnice (4.14),(4.15) prepíšeme pomocou tohto označenia do maticového tvaru:

$$(I - A^T)\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\delta}_K \log r - \boldsymbol{c}, \qquad (4.16)$$

$$(I - A)\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\beta}(\bar{L} + r\bar{K}), \qquad (4.17)$$

kde $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T$, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$, $\boldsymbol{\delta}_K = (\delta_{K1}, \dots, \delta_{Kn})^T$ a $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_n)^T$.

Z predpokladov (4.3)-(4.8) vyplýva:

$$0 \leq a_{ij} < 1, \quad \sum_i a_{ij} < 1, \quad \sum_j a_{ij} < 1.$$

Potom podľa [5] matice $(I - A)$ a $(I - A^T)$ sú invertovateľné a platí:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots.$$

Z toho vyplýva, že $(I-A)^{-1}$,resp. $(I-A^T)^{-1}$ majú kladné prvky. Označíme inverzné matice nasledovne $\hat{A} = (I-A)^{-1}$, resp. $\hat{A}^T = (I-A^T)^{-1}$ a ich prvky $\hat{A} = \{\alpha_{ij}\}$, resp. $\hat{A}^T = \{\alpha_{ji}\}$ a vynásobíme nimi rovnice (4.17), resp.(4.16):

$$\phi_i = \sum_j \alpha_{ji}(\delta_{Kj} \log r - c_j) \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{4.18}$$

$$\psi = \sum_j \alpha_{ij}\beta_j(\bar{L} + r\bar{K}) \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{4.19}$$

Tieto vzťahy prepíšeme do tvaru s pôvodnými premennými:

$$p_i = \exp(\sum_j \alpha_{ji}(\delta_{Kj} \log r - c_j)) \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{4.20}$$

$$p_i Y_i = \sum_j \alpha_{ij}\beta_j(\bar{L} + r\bar{K}) \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{4.21}$$

Ak dosadíme posledný vzťah (4.21) do rovnice (4.10) s použitím vzťahu $p_i = Q_i$ (4.13), po úprave dostaneme:

$$\bar{L} = R(\bar{L} + r\bar{K}), \tag{4.22}$$

kde

$$R = \sum_i \sum_j \delta_{Li}\alpha_{ij}\beta_j > 0.$$

Z tejto rovnice dostaneme explicitný vzorec na vypočítanie r:

$$r = \frac{\bar{L}(1-R)}{R\bar{K}}, \tag{4.23}$$

z ktorého vidíme, že riešenie systému rovníc existuje vždy a je jediné, ak

$$0 < R < 1. \tag{4.24}$$

Dôkaz nerovnosti (4.24) sa nám podarilo dokončiť iba v prípadoch $n = 1$ a $n = 2$. Existencia riešenia však vypýva z kapitoly **5**.

4.3 Model s čisto Leontieffovou produkčnou funkciou

V tomto prípade výrobné odvetvia budú mať Leontieffove produkčné funkcie (viď (4.4)).

Po odvodení dostaneme podmienené dopyty výrobných odvetví a Marshallovský dopyt agregovaných domácností v nasledujúcom tvare:

$$\begin{aligned} X_{ji} &= a_{ji} Y_i \qquad \forall i, j = 1, \dots, n, \\ L_i &= b_i Y_i \qquad \forall i = 1, \dots, n, \\ K_i &= c_i Y_i \qquad \forall i = 1, \dots, n, \\ H_i &= \frac{\beta_i}{p_i}(w\bar{L} + r\bar{K}) \qquad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Dosadením týchto vzťahov do rovníc (3.5)-(3.8) dostaneme:

$$Y_i = \sum_j a_{ij} Y_j + \frac{\beta_i}{p_i}(w\bar{L} + r\bar{K}) \qquad \forall i = 1, \dots, n, \tag{4.25}$$

$$\bar{L} = \sum_i b_i Y_i, \tag{4.26}$$

$$\bar{K} = \sum_i c_i Y_i, \tag{4.27}$$

$$p_i Y_i = \sum_j p_j a_{ji} Y_i + w b_i Y_i + r c_i Y_i \qquad \forall i = 1, \dots, n. \tag{4.28}$$

Z rovnice (4.28) ešte môžeme vykrátiť Y_i a dostaneme:

$$p_i = \sum_j p_j a_{ji} + w b_i + r c_i \qquad \forall i = 1, \dots, n. \tag{4.29}$$

Systém rovníc (4.25)-(4.27) spolu s (4.29) nám úplne opisuje ekonomiku. Rovnice sú, ako aj v odseku **4.1**, lineárne závislé. Normalizujeme ich podobne tým, že zvolíme $w = 1$ za numeraire.

Tento systém rovníc však nie je vždy riešiteľný. Uvedieme jednoduchý príklad CGE modelu, ktorého systém rovníc nemá riešenie. Model predstavuje ekonomika s jedným výrobným odvetvým, t.j. $n = 1$. Takže rovnice (4.25)-(4.27) spolu s (4.29) sa pri $w = 1$ redukujú na rovnice:

$$Y = aY + \frac{\beta}{p}(\bar{L} + r\bar{K}), \tag{4.30}$$

$$\bar{L} = bY, \tag{4.31}$$

$$\bar{K} = cY, \tag{4.32}$$

$$p = pa + b + rc, \tag{4.33}$$

kde v tomto prípade $\beta = 1$.

Z rovnice (4.33) vyjadríme p a dosadíme do (4.30) a upravíme:

$$Y = \frac{\bar{L} + r\bar{K}}{b + rc}. \tag{4.34}$$

Túto rovnicu (4.34) dosadíme do (4.31) a po úprave dostaneme rovnicu:

$$\bar{L}c = \bar{K}b, \tag{4.35}$$

čo je splnené iba výnimočne pre nejaké $0 < b < 1$ a $0 < c < 1$. To značí, že v tomto prípade riešenie nemusí existovať.

4.4 Model so zmiešanými produkčnými funkciami

V tomto prípade výrobné odvetvia budú mať zmiešané produkčné funkcie (viď (4.6)).

Podmienené dopyty výrobných odvetví a Marshallovský dopyt agregovaných domácností nadobudnú nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} X_{ji} &= a_{ji}Y_i \qquad \forall i,j = 1,\dots,n, \\ L_i &= b_i\frac{\delta_{Li}}{w}Q_iY_i \qquad \forall i = 1,\dots,n, \\ K_i &= b_i\frac{\delta_{Ki}}{r}Q_iY_i \qquad \forall i = 1,\dots,n, \\ H_i &= \frac{\beta_i}{p_i}(w\bar{L}+r\bar{K}) \qquad \forall i = 1,\dots,n, \end{aligned} \tag{4.36}$$

kde $Q_i = (\frac{w}{\delta_{Li}})^{\delta_{Li}}(\frac{r}{\delta_{Ki}})^{\delta_{Ki}}$.

Dosadením tých to vzťahov do rovníc (3.5)-(3.8) dostaneme:

$$Y_i = \sum_j a_{ij}Y_j + \frac{\beta_i}{p_i}(w\bar{L}+r\bar{K}) \qquad \forall i = 1,\dots,n, \tag{4.37}$$

$$\bar{L} = \sum_i b_i\frac{\delta_{Li}}{w}Q_iY_i, \tag{4.38}$$

$$\bar{K} = \sum_i b_i\frac{\delta_{Ki}}{r}Q_iY_i, \tag{4.39}$$

$$p_iY_i = \sum_j p_j a_{ji}Y_i + b_iQ_iY_i \qquad \forall i = 1,\dots,n. \tag{4.40}$$

Z rovnice (4.40) ešte môžeme vykrátiť Y_i, ak predpokladáme, že každé výrobné odvetvie produkuje kladné množstvá statkov. Tým dostaneme:

$$p_i = \sum_j p_j a_{ji} + b_iQ_i \qquad \forall i = 1,\dots,n. \tag{4.41}$$

Nový systém rovníc (4.37)-(4.39) spolu s (4.41) nám úplne opisuje ekonomiku. Rovnice sú, ako aj v **4.2**, lineárne závislé. Normalizujeme ich tak, že zvolíme $w = 1$ za numeraire.

4.4.1 Dôkaz existencie rovnováhy v modeli

Systémy rovníc (4.41) a (4.37) pre p_i a Y_i prepíšeme do maticového tvaru:

$$(I - A^T)p = \mathbf{bQ}, \tag{4.42}$$

$$(I - A)\mathbf{Y} = \frac{\boldsymbol{\beta}}{p}(\bar{L} + r\bar{K}), \tag{4.43}$$

kde

$$p = (p_1, \ldots, p_n)^T, \quad \mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T, \quad A = \{a_{ij}\}, \quad \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T,$$

$$\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)^T, \quad \mathbf{bQ} = (b_1Q_1, \ldots, b_nQ_n)^T, \quad \frac{\boldsymbol{\beta}}{p} = \mathrm{diag}\{\frac{\beta_1}{p_1}, \ldots, \frac{\beta_n}{p_n}\}.$$

i-te zložky vektorov pravých strán $\mathbf{bQ}$, resp. $\frac{\boldsymbol{\beta}}{p}(\bar{L} + r\bar{K})$ sú úmerné $r^{\delta_{Ki}}$, resp. $\frac{1}{p_i}$ alebo $\frac{r}{p_i}$. Na výpočet r potom použijeme jednu z rovníc (4.38), (4.39). Druhá z nich je vzhľadom na závislosť rovníc splnená automaticky.

Matice $(I - A)$, resp. $(I - A^T)$ môžeme invertovať z toho istého dôvodu, ako je to uvedené v **4.2.1**.

Ak rovnice (4.42), (4.43) vynásobíme zľava $\hat{A}^T = (I - A^T)^{-1}$, resp. $\hat{A} = (I - A)^{-1}$ dostaneme:

$$p_i = \sum_j \alpha_{ji} b_j Q_j \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{4.44}$$

$$Y_i = \sum_j \alpha_{ij} \frac{\beta_j}{p_j}(\bar{L} + r\bar{K}) \qquad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{4.45}$$

Dosadením (4.45) do rovnice (4.38) po úprave dostávame:

$$\bar{L} = (\bar{L} + r\bar{K}) \sum_j \sum_i \frac{\beta_j}{p_j} \alpha_{ij} b_i \delta_{Li} Q_i. \tag{4.46}$$

Dosadíme (4.44) do (4.46) a rovnicu upravíme:

$$\bar{L} = (\bar{L} + r\bar{K}) \sum_j \frac{\beta_j \sum_i \delta_{Li} \mu_{ij} r^{\delta_{Ki}}}{\sum_i \mu_{ij} r^{\delta_{Ki}}}, \tag{4.47}$$

kde $\mu_{ij} = \frac{\alpha_{ij} b_i}{r^{\delta_{Ki}}} Q_i = \alpha_{ij} b_i \delta_{Li}^{-\delta_{Li}} \delta_{Ki}^{-\delta_{Ki}}$. Ďalej budeme upravovať iba sumu z rovnice (4.47), ktorú označme nasledovne:

$$G(r) = \sum_j \frac{\beta_j \sum_i \delta_{Li} \mu_{ij} r^{\delta_{Ki}}}{\sum_i \mu_{ij} r^{\delta_{Ki}}}. \tag{4.48}$$

Upravíme výraz (4.48) na spoločný menovateľ:

$$G(r) = \frac{\sum_j [\beta_j (\sum_i \delta_{Li} \mu_{ij} r^{\delta_{Ki}}) \prod_{\nu \neq j} (\sum_i \mu_{i\nu} r^{\delta_{Ki}})]}{\prod_j (\sum_i \mu_{ij} r^{\delta_{Ki}})}. \tag{4.49}$$

Označíme

$$\overline{\delta} = \max_i \delta_{Ki}, \text{ resp. } \underline{\delta} = \min_i \delta_{Ki}$$

a vytvoríme indexové množiny

$$\overline{I} = \{i : \delta_{Ki} = \overline{\delta}\} \subset I, \text{ resp. } \underline{I} = \{i : \delta_{Ki} = \underline{\delta}\} \subset I,$$

kde $I = \{1, \ldots, n\}$. Označíme ešte $\tilde{I} = I \setminus (\overline{I} \cup \underline{I})$. S tým, že vieme $\sum_j \beta_j = 1$, výraz (4.49) môžeme upraviť nasledovne:

$$G(r) = \frac{r^{n\overline{\delta}} \sum_{i \in \overline{I}} \delta_{Li} (\prod_j \mu_{ij}) + r^{n\underline{\delta}} \sum_{i \in \underline{I}} \delta_{Li} (\prod_j \mu_{ij}) + \sum_{i \in \tilde{I}} (\delta_{Li} (\prod_j \mu_{ij}) r^{n\delta_{Ki}}) + S}{r^{n\overline{\delta}} \sum_{i \in \overline{I}} (\prod_j \mu_{ij}) + r^{n\underline{\delta}} \sum_{i \in \underline{I}} (\prod_j \mu_{ij}) + \sum_{i \in \tilde{I}} ((\prod_j \mu_{ij}) r^{n\delta_{Ki}}) + T}, \tag{4.50}$$

kde S, resp. T predstavuje súčet členov stupňov menších ako $r^{n\overline{\delta}}$ a väčších ako $r^{n\underline{\delta}}$ v čitateli, resp. v menovateli. Potom

$$G(r) \text{ konverguje k } \frac{\sum_{i \in \overline{I}} \delta_{Li} (\prod_j \mu_{ij})}{\sum_{i \in \overline{I}} (\prod_j \mu_{ij})} = V \quad \text{pre} \quad r \to \infty,$$

resp.

$$G(r) \text{ konverguje k } \frac{\sum_{i \in \underline{I}} \delta_{Li} (\prod_j \mu_{ij})}{\sum_{i \in \underline{I}} (\prod_j \mu_{ij})} = W \quad \text{pre} \quad r \to 0.$$

Keďže $0 < \delta_{Li} < 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n$, potom $0 < V < 1$, resp. $0 < W < 1$.

Výraz (4.50) dosadíme naspäť do rovnice (4.47) a upravíme:

$$\bar{L}(1 - G(r)) = r\bar{K}G(r). \tag{4.51}$$

Ľavá strana rovnice (4.51) konverguje k $(1-V)$ pre $r \to \infty$, resp. k $(1-W)$ pre $r \to 0$. Vieme, že $0 < (1-V) < 1$, taktiež $0 < (1-W) < 1$. Pravá strana rovnice konverguje k nekonečnu pre $r \to \infty$, resp. k nule pre $r \to 0$. Z toho vyplýva, že rovnica (4.51) vždy má aspoň jedno riešenie. Ak je riešení konečne veľa, tak je ich nepárny počet.

5 Arrow-Debreuova teória existencie rovnováhy v ekonomike

Obsahom tejto kapitoly je alternatívny dôkaz existencie rovnováhy pre jednoduché CGE modely vyšetrovanej v kapitole **4**.

Dôkaz je založený na Arrow-Debreuovej teórii existencii rovnováhy pre abstraktné ekonomiky (viď [1]), kde je ňou dokázaná riešiteľnosť GE modelov. CGE modely sa líšia od GE modelov vyšetrovaných v [1], preto nebolo možné dôkaz priamo použiť. Odlišnosť spočíva predovšetkým v dôkaze ohraničenosti modifikovaných produkčných množín a modifikovanej množiny spotrebných košov, na ktoré sa aplikuje všeobecná Arrow-Debreuova lema. Novým prvkom nášho dôkazu oproti [1] je, že ohraničenie vybavení časti faktorov (práce a kapitálu) vieme prostredníctvom čiastkových rovnováh rozšíriť aj na ostatné premenné.

5.1 Formulácia všeobecnej lemy z Arrow-Debreuovej teórie

Pred formuláciou všeobecnej lemy o existencii rovnováhy v ekonomike je potrebné uviesť niekoľko definícií (viď [1]).

Definícia 5.1.1. *Nech $U_1, \ldots, U_\nu$ sú podmnožiny $\mathbb{R}^l$ a nech $U = U_1 \times \cdots \times U_\nu$, $f_\iota : U \to \mathbb{R}$ $(\iota = 1, \ldots, \nu)$. Označme $\bar{U}_\iota = U_1 \times \cdots \times U_{\iota-1} \times U_{\iota+1} \times \cdots \times U_\nu$. Nech $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ je multifunkcia definovaná v každom bode $\bar{a}_\iota \in \bar{U}_\iota$ tak, že $A_\iota(\bar{a}_\iota) \in U_\iota$. Potom $[U_1, \ldots, U_\nu, f_1, \ldots, f_\nu, A_1(\bar{a}_1), \ldots, A_\nu(\bar{a}_\nu)]$ nazývame abstraktná ekonomika.*

Danú ekonomiku môžeme chápať ako hru ν hráčov $\iota = 1, \ldots, \nu$ s výplatnými funkciami f_ι $(\iota = 1, \ldots, \nu)$ a s množinami $A_\iota(\bar{a}_\iota)$, z ktorých si hráči volia svoje stratégie v závislosti od voľby stratégií ostatných hráčov.

Definícia 5.1.2. *a^* nazývame rovnovážnym bodom ekonomiky*

$$[U_1, \ldots, U_\nu, f_1, \ldots, f_\nu, A_1(\bar{a}_1), \ldots, A_\nu(\bar{a}_\nu)],$$

ak $a_\iota^* \in A_\iota(\bar{a}_\iota^*)$ a $f_\iota(\bar{a}_\iota^*, a_\iota^*) = \max_{a_\iota \in A_\iota(\bar{a}_\iota^*)} f_\iota(\bar{a}_\iota^*, a_\iota)$ pre každé $\iota = 1, \ldots, \nu$.

Pre takto definovanú abstraktnú ekonomiku platí nasledujúca lema, ktorá podľa [1] rozširuje Nashovu vetu o existencii rovnovážnych bodov v hrách pre prípad množín stratégií závislých od volieb stratégií protihráčov.

Lema 5.1.1. *Nech je U_ι kompaktná a konvexná možina ($\iota = 1, \ldots, \nu$), $f_\iota(\bar{a}_\iota, a_\iota)$ je spojitá funkcia na U a kvázikonkávna v a_ι pre každé $\bar{a}_\iota$ pre každé $\iota = 1, \ldots, \nu$. Nech je $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ spojitá multifunkcia a množina $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ nech je konvexná a neprázdna pre každé $\iota = 1, \ldots, \nu$. Potom abstraktná ekonomika $[U_1, \ldots, U_\nu, f_1, \ldots, f_\nu, A_1(\bar{a}_1), \ldots, A_\nu(\bar{a}_\nu)]$ má rovnovážny bod.*

Definíciu spojitosti multifunkcie špecifikujeme v dôkaze vety v odseku **5.2.1**.

5.2 CGE model ako abstraktná ekonomika

Aby sme mohli použiť lemu (5.1.1), preformulujeme jednoduchý CGE model do tvaru abstraktnej ekonomiky, ktorá bude vyzerať v našom prípade nasledovne:

$$E = [\bar{H}, \bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_n, \bar{P}; u(H), \langle \bar{y}_1, \bar{p} \rangle, \ldots, \langle \bar{y}_n, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}}; A_H(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{p}), \bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_n, \bar{P}],$$

kde

- $\bar{H}$ predstavuje množinu spotrebných košov, ktorú definujeme nasledovne

$$\bar{H} = \mathbb{R}^n_+ = \{H = (H_1, \ldots, H_n) | H_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n\}, \tag{5.1}$$

- pre každé $j = 1, \ldots, n$ predstavuje $\bar{Y}_j$ produkčnú množinu j-teho odvetvia, ktorú definujeme nasledovne

$$\begin{aligned} \bar{Y}_j = \{\bar{y}_j = (-X_{1j}, \ldots, -X_{j-1,j}, Y_j - X_{jj}, -X_{j+1,j}, \ldots, -X_{nj}, -L_j, -K_j) | \\ | Y_j \leq f_j(X_{1j}, \ldots, X_{nj}, L_j, K_j)\}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

  kde premenné Y_j, X_{ij}, L_j, K_j sú definované v **3.1.3** a f_j je produkčná funkcia j-teho odvetvia,

- $\bar{P}$ predstavuje množinu cenových stratégií "trhového hráča", ktorý určuje ceny s cieľom dosiahnuť rovnováhu ponuky a dopytu. Definujeme ju ako

$$\begin{aligned} \bar{P} = \{\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n, w, r) | \\ | p_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n, w \geq 0, r \geq 0, \sum_i p_i + w + r = 1\}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

  kde premenné p_i, w, r sú definované v **3.1.3**,

- $u : \bar{H} \to \mathbb{R}$ predstavuje funkciu užitočnosti spotrebiteľa, ktorej definícia je uvedená v **4.1**,

- $\langle \bar{y}_j, \bar{p} \rangle$ je funkcia zisku j-teho odvetvia, $\langle \bar{y}_j, \bar{p} \rangle : \bar{Y}_j \times \bar{P} \to \mathbb{R}$, definujeme ju ako skalárny súčin vektorov $\bar{y}_j, \bar{p}$:

$$\langle \bar{y}_j, \bar{p} \rangle = p_j Y_j - \sum_i p_i X_{ij} - wL_j - rK_j. \tag{5.4}$$

  Funkcia zisku j-teho odvetvia je rozdiel medzi príjmami a výdavkami j-teho odvetvia; príjmy predstavuje cena celkového vyrobeného množstva statkov ($p_j Y_j$) a výdavky predstavuje cena celkového množstva statkov potrebných na výrobu v j-tom odvetví ($\sum_j p_j X_{ij}$), tiež cena potrebnej práce a kapitálu v j-tom odvetví (wL_j a rK_j),

- $v_{\bar{p}}$ predstavuje užitočnosť trhu, $v_{\bar{p}} : \bar{H} \times \bar{Y}_1 \times \cdots \times \bar{Y}_n \times \bar{P} \to \mathbb{R}$ a platí

$$v_{\bar{p}}(H, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{p}) = \sum_i p_i (\sum_j X_{ij} + H_i - Y_i) - w \sum_j L_j - r \sum_j K_j. \tag{5.5}$$

- $A_H(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \bar{p})$ je multifunkcia, ktorá určuje ohraničenie pre spotrebiteľa, keďže jeho príjem je limitovaný množstvom práce a kapitálu na trhu, platí

$$A_H = \{H \in \bar{H} | \langle p, H \rangle \leq w \sum_j L_j + r \sum_j K_j\}, \tag{5.6}$$

  kde $p = (p_1, \ldots, p_n)$,

- pre výrobné odvetvia a trhového hráča také ohraničenia nemáme.

5.2.1 Veta o existencii rovnováhy v abstraktnej ekonomike

Lemu (5.1.1) o existencii rovnováhy nemôžme priamo použiť pre ekonomiku definovanú v **5.2**, pretože množiny $\bar{H}, \bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_n$ nie sú ohraničené. Preto ju (podobne ako v [1]) použijeme na modifikovanú ekonomiku $\tilde{E}$, v ktorej množiny $\bar{H}, \bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_n$ nahradíme množnami

$$\tilde{H} = \bar{H} \cap \{x \in \mathbb{R}^n | \ \|x\| \leq c\},$$

resp.

$$\tilde{Y}_j = \bar{Y}_j \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+2} |\ \|x\| \leq c\} \quad \forall j = 1, ..., n,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je kladná konštanta. Označíme teda $\tilde{E}$ ekonomiku

$$\tilde{E} = [\tilde{H}, \tilde{Y_1}, \ldots, \tilde{Y_n}, \bar{P}; u(H), \langle \tilde{y}_1, \bar{p} \rangle, \ldots, \langle \tilde{y}_n, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}}; \tilde{A}_H(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n, \bar{p}), \tilde{Y_1}, \ldots, \tilde{Y_n}, \bar{P}],$$

kde $\tilde{A}_H(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n, \bar{p})$ je analogicky modifikovaná množina.

Veta 5.2.1. *Existuje taká konštanta $c \in \mathbb{R}$, že modifikovaná abstraktná ekonomika*

$$\tilde{E} = [\tilde{H}, \tilde{Y_1}, \ldots, \tilde{Y_n}, \bar{P}; u(H), \langle \tilde{y}_1, \bar{p} \rangle, \ldots, \langle \tilde{y}_n, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}}; \tilde{A}_H(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n, \bar{p}), \tilde{Y_1}, \ldots, \tilde{Y_n}, \bar{P}]$$

s funkciu užitočnosti a produkčnými funkciami definovanými v (4.1) a (4.2), resp. (4.1) a (4.6) má rovnovážny bod.

Poznamenáme, že existencia rovnováhy v takto modifikovanej ekonomike nám postačuje pre aplikáciu na CGE modely.

Dôkaz. Vetu **5.2.1** dokážeme tak, že najskôr nahradíme množiny $\bar{H}$, $\bar{Y_1}, \ldots, \bar{Y_n}$ ohraničenými množinami množiny $\hat{H}, \hat{Y_1}, \ldots, \hat{Y_n}$; tie "umiestníme" do kociek a tým vytvoríme množiny $\tilde{H}, \tilde{Y_1}, \ldots, \tilde{Y_n}$. Aby sme potom pre ekonomiku $\tilde{E}$ mohli aplikovať abstraktnú lemu **5.1.1** z Arrow-Debreuovej teórie, overíme všetky jej predpoklady.

Označme $\bar{Y} = \bar{Y}_1 \times \cdots \times \bar{Y}_n$ a

$$\bar{G} = \{G = (H_1, \ldots, H_n, -L, -K) | (H_1, \ldots, H_n) \in \bar{H}, 0 \leq L \leq \bar{L}, 0 \leq K \leq \bar{K}\}$$

a definujme zobrazenie $Z : \bar{G} \times \bar{Y} \to \mathbb{R}^{n+2}$ vzťahom

$$Z(G, \bar{y}) = G - \sum_j \bar{y}_j \tag{5.7}$$

pre $G \in \bar{G}$ a $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \in \bar{Y}$.

Označíme π_H, resp. π_j prirodzené projekcie množiny $\bar{G}$ do podpriestorov $\{\bar{y} = 0\}$, resp. $\{\bar{y}_{j'} = 0 \ \ \forall j' \neq j \wedge H = 0\}$. Modifikované množiny $\hat{H}, \hat{Y_1}, \ldots, \hat{Y_n}$ definujeme nasledovne:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \pi_H\{(G, \bar{y}) | Z(G, \bar{y}) \leq 0\}, \\ \hat{Y}_j &= \pi_j\{(G, \bar{y}) | Z(G, \bar{y}) \leq 0\} \quad \forall j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Množinu $\hat{H}$ interpretujeme ako množinu spotrebných košov, ktoré sú spotrebiteľovi dostupné, ak by mohol riadiť celú ekonomiku s ohraničeniami iba na celkové množstvo práce a celkové množstvo kapitálu. Množiny $\hat{Y}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ interpretujeme analogicky.

Ohraničenosť množín $\hat{H}, \hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_n, \bar{P}$

Ohraničenosť množiny $\bar{P}$ je jasné z definície simplexu.

Uvažujme množinu $\hat{Y}_j$ pre ľubovoľné j. Chceme ukázať, že je ohraničená. Platí $Z(G, \bar{y}) = G - \sum_j \bar{y}_j \leq 0$. Ak nerovnosť rozpíšeme pri najmenšej, teda nulovej spotrebe $(G = (0, \ldots, 0, -\bar{L}, -\bar{K}))$, dostaneme:

$$\begin{aligned} \sum_j X_{ij} &\leq Y_i \quad \forall i = 1, \ldots, n, \\ \sum_j L_j &\leq L \leq \bar{L}, \\ \sum_j K_j &\leq K \leq \bar{K}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Z (5.9) vyplýva, že stačí dokázať ohraničenosť Y_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Uvažujme najprv čisté Cobb-Douglasove produkčné funkcie (viď (4.2)). Za predpokladu nulovej spotreby spotrebiteľa a pretože $Z(G, \bar{y}) \leq 0$ platí

$$\begin{aligned} X_{ij} &= \xi_{ij} Y_i, \ \sum_j \xi_{ij} \leq 1, \ \xi_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \ldots, n, \\ L_i &= \eta_i \bar{L}, \ \sum_i \eta_i = 1, \ \eta_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n, \\ K_i &= \mu_i \bar{K}, \ \sum_i \mu_i = 1, \ \mu_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Po dosadení do (4.2) dostaneme

$$Y_i \leq f_i = \prod_j (\xi_{ji} Y_j)^{a_{ji}} (\eta_i \bar{L})^{\delta_{Li}} (\mu_i \bar{K})^{\delta_{Ki}} \quad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{5.11}$$

Vzťah (5.11) zlogaritmujeme:

$$\log Y_i \leq \sum_j (a_{ji} \log Y_j) + \theta_i \quad \forall i = 1, \ldots, n, \tag{5.12}$$

kde $\theta_i = \sum_j a_{ji} + \delta_{Li} \log \bar{L} + \delta_{Ki} \log \bar{K} < \infty$.

Vzťah (5.12) zapíšeme do maticového tvaru:

$$(I - A^T)\Lambda \le \theta, \tag{5.13}$$

kde $A^T = \{a_{ji}\}$, $\Lambda = (\log Y_1, \ldots, \log Y_n)^T$ a $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)^T$.

Podľa **4.2.1** pre prvky matice A platí $a_{ji} \in \langle 0, 1)$, $\sum_j a_{ji} < 1$ a existuje inverzná matica k matici $(I - A^T)$, s kladnými prvkami $(I - A^T)^{-1} = \{\alpha_{ij}\}$. Po úprave vzťahu (5.13) dostaneme:

$$\log Y_i \le \sum_j \alpha_{ji}\theta_j \quad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{5.14}$$

Z toho vyplýva, že

$$0 < Y_i \le \exp(\sum_j \alpha_{ji}\theta_j) \quad \forall i = 1, \ldots, n. \tag{5.15}$$

Teda výstup i-teho odvetvia Y_i je ohraničený pre ľubovoľné $i = 1, \ldots, n$.

Uvažujme zmiešané produkčné funkcie (viď (4.4)). Vieme, že L_i aj K_i sú ohraničené zhora pre každé $i = 1, \ldots, n$ ($L_i \le \bar{L}$, resp. $K_i \le \bar{K}$). Potom platí

$$Y_i \le f_i = \min\{\frac{X_{1i}}{a_{1i}}, \ldots, \frac{X_{ni}}{a_{ni}}, \frac{L_i^{\delta_{Li}} K_i^{\delta_{Ki}}}{b_i}\} \le \frac{\bar{L}^{\delta_{Li}} \bar{K}^{\delta_{Ki}}}{b_i}. \tag{5.16}$$

Teda výstup i-teho odvetvia Y_i je ohraničený.

Následne po preverení ohraničenosti modifikovaných produkčných množín $\hat{Y}_j$ ($j = 1, \ldots, n$) pre obe typy produkčných funkcií overíme ohraničenosť modifikovanej množiny spotrebných košov $\hat{H}$. Jej ohraničenosť vyplýva zo vzťahu $Z = G - \sum_j \bar{y}_j \le 0$, lebo vieme, že prvých n zložiek vektora G je z $\bar{H} = \mathbb{R}^n_+$. $\diamond$

Z ohraničenosti množín $\hat{H}, \hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_n$ vyplýva, že existuje taká $c \in \mathbb{R}$ konštanta, že množina $\hat{H}$, resp. množiny $\hat{Y}_j$ ($j = 1, \ldots, n$) sú obiahnuté v "kockách" $C_H = \{x \in \mathbb{R}^n | \; \|x\| \le c\}$, resp. $C_j = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} | \; \|x\| \le c\}$ ($j = 1, \ldots, n$). Označíme

$$\tilde{H} = \bar{H} \cap C_H, \text{ resp. } \quad \tilde{Y}_j = \bar{Y}_j \cap C_j \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Ďalšie predpoklady lemy **5.1.1** budeme teda overovať na týchto modifikovaných množinách.

Uzavretosť množín $\tilde{H}, \tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_n, \bar{P}$

Uzavretosť množín $\tilde{H}, \tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_n$ je zrejmá z ich definície. Uzavretosť množiny $\bar{P}$ je opäť zrejmá, keďže ide o simplex. $\diamond$

Konvexnosť množín $\tilde{H}, \tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_n, \bar{P}$

Konvexnosť množiny $\bar{P}$ je tiež jasné z definície simplexu.

Overíme konvexnosť množín $\bar{H}, \bar{Y}_1, \ldots, \bar{Y}_n$. Potom aj modifikované množiny $\tilde{H}, \tilde{Y}_1, \ldots, \tilde{Y}_n$ budú konvexné, kedže sú prienikom konvexných množín.
Konvexnosť množiny $\bar{H}$ vyplýva tiež z toho, že ju definujeme ako $\bar{H} = \mathbb{R}^n_+$ a vieme, že množina $\mathbb{R}^n_+$ je konvexná.

Nech sú body $\bar{y}^1, \bar{y}^2 \in \bar{Y}_j$ ľubovoľné ($j = 1, \ldots, n$), z toho vyplýva:

$$Y_j^1 \leq f_j(X_{1j}^1, \ldots, X_{nj}^1, L_j^1, K_j^1), \text{ resp. } \; Y_j^2 \leq f_j(X_{1j}^2, \ldots, X_{nj}^2, L_j^2, K_j^2).$$

Ak je skalár $\alpha \in (0,1)$ ľubovoľný, potom z predpokladu konštantných výnosov z rozsahu platí:

$$\alpha Y_j^1 \leq f_j(\alpha X_{1j}^1, \ldots, \alpha X_{nj}^1, \alpha L_j^1, \alpha K_j^1) = \alpha f_j(X_{1j}^1, \ldots, X_{nj}^1, L_j^1, K_j^1), \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}(1-\alpha)Y_j^2 \leq f_j((1-\alpha)X_{1j}^2, \ldots, (1-\alpha)X_{nj}^2, (1-\alpha)L_j^2, (1-\alpha)K_j^2) = \\ = (1-\alpha) f_j(X_{1j}^2, \ldots, X_{nj}^2, L_j^2, K_j^2).\end{aligned} \tag{5.18}$$

Sčítaním nerovností (5.17) a (5.18) dostaneme:

$$\begin{aligned}\alpha Y_j^1 + (1-\alpha)Y_j^2 \leq \alpha f_j(X_{1j}^1, \ldots, X_{nj}^1, L_j^1, K_j^1) + \\ + (1-\alpha) f_j(X_{1j}^2, \ldots, X_{nj}^2, L_j^2, K_j^2),\end{aligned} \tag{5.19}$$

z čoho vidíme, že $\alpha \bar{y}_j^1 + (1-\alpha)\bar{y}_j^2 \in \bar{Y}_j$ a teda množina $\bar{Y}_j$ je konvexná pre každé j. $\diamond$

<u>*Spojitosť funkcií* $u(H), \langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}}$</u>

V jednoduchom modeli ako úžitkovú funkciu spotrebiteľa $u(H)$ uvažujeme Cobb-Douglasovu funkciu (viď (4.1)) a z definície Cobb-Douglasovej funkcie vyplýva, že je spojitá.

Zisková funkcia j-teho výrobného odvetvia $\langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle$ je skalárny súčin a vieme, že skalárny súčin je spojitá funkcia.

Spojitosť funkcie $v_{\bar{p}}$, užitočnosti trhu, vyplýva z jej definície (5.5). $\diamond$

<u>*Kvázikonkávnosť funkcií* $u(H), \langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}}$</u>

Uvedieme najprv definíciu kvázikonkávnosti (viď [2]):

Definícia 5.2.1. *Majme funkciu* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

- *Funkciu* f *nazývame kvázikonkávnou, ak pre ľubovoľné* $a^1, a^2 \in \mathbb{R}^N$ *také, že* $f(a^1) \leq f(a^2)$ *a pre ľubovoľné* $\lambda \in (0, 1)$ *platí*
$$f(\lambda a^1 + (1 - \lambda)a^2) \geq f(a^1).$$
- *Funkciu* f *nazývame ostro kvázikonkávnou, ak pre ľubovoľné* $a^1, a^2 \in \mathbb{R}^N$ *také, že* $a^1 \neq a^2$, $f(a^1) \leq f(a^2)$ *a pre ľubovoľné* $\lambda \in (0, 1)$ *platí*
$$f(\lambda a^1 + (1 - \lambda)a^2) > f(a^1).$$

Kvázikonkávnosť funkcie užitočnosti $u(H)$ je zrejmá, lebo z [2] vieme, že každá konkávna fukcia je kvázikonkávna. Funkciu užitočnosti uvažujeme Cobb-Douglasovu (4.1), ktorá je konkávna.

Ako sme povedali v kapitole (5.2), funkciu zisku j-teho výrobného odvetvia $\langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle$ je vlastne skalárny súčin. Z definície skalárneho súčinu vieme, že je to lineárna funkcia a každá lineárna funkcia je konkávna, teda aj kvázikonkávna.

Kvázikonkávnosť funkcie $v_{\bar{p}}$ (užitočnosti trhu) v premennej $\bar{p} \in \bar{P}$, tiež vyplýva z jej definície (5.5), kedže je to lineárna funkcia v premennej $\bar{p}$ a lineárna funkcia je kvázikonávna. $\diamond$

Spojitosť multifunkcie $\tilde{A}_H$

Ako je to uvedené v [9], multifunkciu nazývame spojitou, ak je hemispojitá zdola a súčasne hemispojitá zhora.

Poznamenávame, že v starších publikáciách (ako aj v [1]) definícia spojitosti multifunkcie sa zhoduje s našou definíciou hemispojitosti zdola a definícia multifunkcie s uzavretým grafom sa zhoduje s našou definíciou hemispojitosti zhora.

Definícia 5.2.2. *Nech je $\Gamma : X \to Y$ multifunkcia taká, že pre ľubovoľný bod $x^0 \in X$ množina $\Gamma(x^0)$ je neprázdna. Ak pre každé $y^0 \in \Gamma(x^0)$ a pre každú postupnosť $\{x^k\} \in X$, ktorá konverguje k x^0 pre $k \longrightarrow \infty$, existuje postupnosť $\{y^k\} \in Y$ taká, že $y^k \longrightarrow y^0$ pre $k \longrightarrow \infty$ a $y^k \in \Gamma(x^k)$, potom multifunkcia Γ sa nazýva hemispojitá zdola v bode $x^0 \in X$ pre $k \longrightarrow \infty$.*

Definícia 5.2.3. *Nech je $\Gamma : X \to Y$ multifunkcia taká, že pre ľubovoľný bod $x^0 \in X$ množina $\Gamma(x^0)$ je neprázdna. Multifunkcia Γ sa nazýva hemispojitá zhora v bode $x^0 \in X$ ak pre každú postupnosť $\{x^k\} \in X$ konvergujúcu k x^0 pre $k \longrightarrow \infty$ ľubovoľná postupnosť $\{y^k\} \in \Gamma(x^k)$ konverguje k $y^0 \in \Gamma(x^0)$.*

Najprv overíme, či je multifunkcia $\tilde{A}_H : \tilde{Y}_1 \times \cdots \times \tilde{Y}_n \times \bar{P} \to \tilde{H}$ hemispojitá zdola v ľubovoľnom bode $(\tilde{y}_1^0, \ldots, \tilde{y}_n^0, \bar{p}^0)$. Množina $\tilde{A}_H(\tilde{y}_1^0, \ldots, \tilde{y}_n^0, \bar{p}^0)$ nie je neprázdna, lebo tam patrí nulový bod z množiny $\tilde{H}$. Pre ľubovoľný bod $H^0 \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^0, \ldots, \tilde{y}_n^0, \bar{p}^0)$ a pre ľubovoľnú postupnosť $\{(\tilde{y}_1^k, \ldots, \tilde{y}_n^k, \bar{p}^k)\}$ konvergujúcu k $(\tilde{y}_1^0, \ldots, \tilde{y}_n^0, \bar{p}^0)$ pre $k \longrightarrow \infty$ hľadáme takú postupnosť $\{H^k\} \in \tilde{H}$ konvergujúcu k H^0 pre $k \longrightarrow \infty$, že $H^k \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^k, \ldots, \tilde{y}_n^k, \bar{p}^k)$. V definícii množiny $\tilde{A}_H$ (5.6) označíme príjem

$$I = w \sum_j L_j + r \sum_j K_j.$$

Potom môžeme písať $\tilde{A}_H = \{H \in \tilde{H} | \langle p, H \rangle \leq I\}$.

Teda pre ľubovoľný bod H^0 spĺňajúci podmienku $\langle p^0, H^0 \rangle \leq I^0$ a pre ľubovoľnú postupnosť $\{(p_1^k, \ldots, p_n^k, I^k)\}$ konvergujúcu k $(p_1^0, \ldots, p_n^0, I^0)$ pre $k \longrightarrow \infty$ hľadáme takú postupnosť $\{H^k\}$ kovergujúcu k H^0 pre $k \longrightarrow \infty$, že platí $\langle p^k, H^k \rangle \leq I^k$.

Rozoberieme dva rôzne prípady, najprv H^0 nech spĺňa podmienku $\langle p^0, H^0 \rangle < I^0$ a v druhom prípade H^0 nech spĺňa podmienku $\langle p^0, H^0 \rangle = I^0$.

Nech je H^0 ľubovoľný bod splňajúci $\langle p^0, H^0\rangle < I^0$ a nech je postupnosť $\{H^k\}$ konštantná: $H^k = H^0$. Potom existuje taká konštanta $N \geq 1$, že pre každé $k \geq N$ bude splnená podmienka $\langle p^k, H^0\rangle \leq I^k$, teda

$$H^k = H^0 \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^k, \ldots, \tilde{y}_n^k, \bar{p}^k).$$

Vieme, že postupnosť $\{(p_1^k, \ldots, p_n^k, I^k)\}$ konverguje k $(p_1^0, \ldots, p_n^0, I^0)$ pre $k \longrightarrow \infty$, a potom $\langle p^0, H^0\rangle \leq I^0$, v tomto prípade $\langle p^0, H^0\rangle < I^0$.

Nech teraz H^0 je ľubovoľný bod splňajúci $\langle p^0, H^0\rangle = I^0$. Postupnosť $\{H^k\}$ skonštruujeme nasledovne:

$$H^k = q^k H^0,$$

kde

$$q^k = \frac{I^k}{\langle p^k, H^0\rangle}.$$

Pre $k \longrightarrow \infty$ platí, že $q^k \longrightarrow \frac{I^0}{\langle p^0, H^0\rangle} = 1$. Potom existuje konštanta $N \geq 1$ taká, že pre každé $k \geq N$ bude splnená podmienka $\langle p^k, \frac{I^k}{\langle p^k, H^0\rangle} H^0\rangle \leq I^k$ a teda $H^k \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^k, \ldots, \tilde{y}_n^k, \bar{p}^k)$. Vieme, že $\{(p_1^k, \ldots, p_n^k, I^k)\} \longrightarrow (p_1^0, \ldots, p_n^0, I^0)$ pre $k \longrightarrow \infty$ a $\langle p^0, H^0\rangle \leq I^0$, v tomto prípade $\langle p^0, H^0\rangle = I^0$.

Tým sme ukázali, že multifunkcia $\tilde{A}_H$ je hemispojitá zdola v ľubovoľnom bode $(\tilde{y}_1^0, \ldots, \tilde{y}_n^0, \bar{p}^0)$.

Ukážeme, že multifunkcia $\tilde{A}_H : \tilde{Y}_1 \times \cdots \times \tilde{Y}_n \times \bar{P} \rightarrow \tilde{H}$ je hemispojitá zhora v ľubovoľnom bode $(\tilde{y}_1^0, \ldots, \tilde{y}_n^0, \bar{p}^0)$. Majme postupnosť bodov $\{(\tilde{y}_1^k, \ldots, \tilde{y}_n^k, \bar{p}^k)\}$ konvergujúcu k bode $(\tilde{y}_1^0, \ldots, \tilde{y}_n^0, \bar{p}^0)$ pre $k \longrightarrow \infty$. Nech je postupnosť $\{H^k\}$ ľubovoľná taká, že $H^k \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^k, \ldots, \tilde{y}_n^k, \bar{p}^k)$ a pre $k \longrightarrow \infty$ platí $H^k \longrightarrow H^0$, kde $H^0 \in \tilde{H}$. Chceme ukázať, že potom $H^0 \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^0, \ldots, \tilde{y}_n^0, \bar{p}^0)$. Vieme, že platí $\langle p^k, H^k\rangle \leq I^k$. Zo spojitosti skalárneho súčinu vyplýva, že pre $k \longrightarrow \infty$ platí $\langle p^0, H^0\rangle \leq I^0$ a teda $H^0 \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^0, \ldots, \tilde{y}_n^0, \bar{p}^0)$.

Teda sme ukázali, že multifunkcia $\tilde{A}_H$ je aj hemispojitá zhora v ľubovoľnom bode $(\tilde{y}_1^0, \ldots, \tilde{y}_n^0, \bar{p}^0)$, teda je spojitá v každom bode množiny $\tilde{Y}_1 \times \cdots \times \tilde{Y}_n \times \bar{P}$. $\diamond$

Neprázdnosť a konvexnosť množiny $\tilde{A}_H$

To, že je množina $\tilde{A}_H$ neprázdna, sme ukázali v dôkaze hemispojitosti zdola ($H = (0, \ldots, 0) \in \tilde{A}_H$).

Z definície množiny $\tilde{A}_H$ je zrejmé, že je konvexná (ide o uzavretý mnohosten (5.6)). $\diamond$

Ukázali sme, že pre modifikovanú ekonomiku $\tilde{E}$ platia všetky predpoklady abstraktnej lemy **5.1.1**, teda ekonomika $\tilde{E}$ má rovnovážny bod. $\square$

5.2.2 Veta o existencii rovnováhy v CGE modeloch

Veta 5.2.2. *Rovnováha modifikovanej ekonomiky $\tilde{E}$ v zmysle lemy* ***5.1.1*** *predstavuje rovnováhu v zodpovedajúcom CGE modeli.*

Dôkaz. Chceme ukázať, že pre rovnovážny bod $(H^*, \tilde{y}_1^*, \ldots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)$ ekonomiky $\tilde{E}$ platia rovnovážne rovnice jednoduchého CGE modelu z odseku **3.2**.

Z definície **5.1.2** rovnovážneho bodu vyplýva:

- pre rovnovážny vektor spotrieb $H^* \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^*, \ldots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)$ platí,

$$u(H^*) = \max_{H \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^*, \ldots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)} u(H), \tag{5.20}$$

  (úžitková funkcia u(H) je definovaná v (4.1)),

- pre rovnovážny produkčný vektor j-teho odvetvia $(j = 1, \ldots, n)$ $\tilde{y}^* \in \tilde{Y}_j$ platí,

$$\langle \tilde{y}_j^*, \bar{p}^* \rangle = \max_{\tilde{y}_j \in \tilde{Y}_j} \langle \tilde{y}_j^*, \bar{p}^* \rangle, \tag{5.21}$$

  (zisková funkcia $\langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle$ je definovaná v (5.4)),

- pre rovnovážny vektor cien $\bar{p}^* \in \bar{P}$ platí,

$$v_{\bar{p}}(H^*, \tilde{y}_1^*, \ldots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*) = \max_{\bar{p} \in \bar{P}} v_{\bar{p}}(H^*, \bar{y}_1^*, \ldots, \bar{y}_n^*, \bar{p}^*), \tag{5.22}$$

  (úžitok $v_{\bar{p}}$ je definovaný v (5.5)).

Z (5.3) vyplýva, že vektor cien $\bar{p}^*$ je nezáporný. Pri našej úžitkovej funkcii (viď (4.1)) pre $p_i^* \to 0$ lokálne (pre ľubovoľné $i = 1, \ldots, n$), resp. pre $w^* \to 0$ alebo $r^* \to 0$ lokálne rastie dopyt po i-tom statku, resp. podmienený dopyt po práci alebo kapitálu nad všetky medze. Preto nie je v rovnováhe možné $p_i^* = 0$ (pre nejaké $i = 1, \ldots, n$), resp. $w^* = 0$ alebo $r^* = 0$. To znamená:

$$\bar{p}^* > 0. \tag{5.23}$$

V dôkaze využijeme fakt, že množina $\tilde{H} \subset \bar{H}$, resp. množiny $\tilde{Y}_j \subset \bar{Y}_j$ pre všetky $j = 1, \ldots, n$.

Z (5.20) a z definície množiny $\tilde{A}_H$ vyplýva, že rovnovážny vektor spotrieb H^* spĺňa nerovnosť

$$\langle p^*, H^* \rangle \leq w^* \sum_j L_j^* + r^* \sum_j K_j^*. \tag{5.24}$$

Z toho, že úžitková funkcia je rastúca a že ide o jej maximalizáciu vyplýva, že v podmienke (5.24) platí rovnosť. Tým sme ukázali vzťahy (3.3)-(3.4).

Z (5.21) a z definície množiny $\bar{Y}_j$ (5.2) ($j = 1, \ldots, n$) vyplýva, že rovnovážny produkčný vektor $\tilde{y}_j^*$ spĺňa nerovnosť

$$Y_j^* \leq f_j(X_{1j}^*, \ldots, X_{nj}^*, L_j^*, K_j^*). \tag{5.25}$$

Zisková funkcia j-teho odvetvia rastie s rastúcou hodnotou výstupu Y_j. Z toho vyplýva, že v podmienke (5.25) platí rovnosť.

Predpokladajme, že v rovnováhe platí $\langle \tilde{y}_j^*, \bar{p}^* \rangle > 0$. Z predpokladu konštantných výnosov z rozsahu vieme, že ak v produkčnej funkcii zväčšíme vstupy C-krát ($C > 1$), potom sa nám zväčší aj výstup C-krát a spolu s výstupom aj zisk j-teho odvetvia. To je v spore s tým, že sa nachádzame v rovnováhe.

Predpokladajme, že v rovnováhe platí $\langle \tilde{y}_j^*, \bar{p}^* \rangle < 0$. Podobne ako v predchádzajúcom prípade, záporný zisk (stratu) j-teho odvetvia môžeme znížiť, ak zmenšíme vstupy C-krát ($0 < C < 1$). Čo je opäť v spore s tým, že sa nachádzame v rovnováhe.

Z toho vyplýva, že v rovnováhe platí $\langle \tilde{y}_j^*, \bar{p}^* \rangle = 0$. Tým sme ukázali, že v príslušnom CGE modeli platí peňažná rovnováha (3.8).

Sčítaním rozpočtového ohraničenia (5.24) a ziskovej funkcie v rovnovážnom bode dostaneme úžitok trhu v rovnovážnom bode:

$$\begin{aligned} & v_{\bar{p}}(H^*, \tilde{y}_1^*, \ldots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*) = \langle p^*, H^* \rangle + \langle \tilde{y}_j^*, p^* \rangle = \\ & = w^* \sum_j L_j^* + r^* \sum_j K_j^* + \\ & + \sum_i p_i^* (\sum_j X_{ij}^* + H_i^* - Y_i^*) - w^* \sum_j L_j^* - r^* \sum_j K_j^* = 0. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Rovnovážny úžitok trhu môžeme napísať aj pomocou vektora Z^* je definovaný ako v (5.7) nasledovne:

$$\begin{aligned}
&v_{\bar{p}}(H^*, \tilde{y}_1^*, \ldots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*) = \\
&= \sum_i p_i^* (\sum_j X_{ij}^* + H_i^* - Y_i^*) - w^* \sum_j L_j^* - r^* \sum_j K_j^* = \\
&= \langle Z^*, \bar{p}^* \rangle .
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Ukážeme, že v rovnováhe platí $Z^* \leq 0$, t.j. $Z_i^* \leq 0$ $(i = 1, \ldots, n+2)$. Predpokladajme, že $Z_\nu^* > 0$ pre nejaké $\nu \in (1, \ldots, n+2)$. Nech

$$\bar{p}' = (\frac{\epsilon}{n+1}, \ldots, \frac{\epsilon}{n+1}, 1-\epsilon, \frac{\epsilon}{n+1}, \ldots, \frac{\epsilon}{n+1})$$

je vektor cien rôzny od vektora rovnovážnych cien $\bar{p}^*$, kde $\epsilon \in (0,1)$ je ľubovoľná konštanta a $1-\epsilon$ je ν-ta zložka $\bar{p}'$. Z (5.22) vyplýva:

$$0 = \langle Z^*, \bar{p}^* \rangle \geq \langle Z^*, \bar{p}' \rangle = (1-\epsilon) Z_\nu^* + \sum_{i \neq \nu} \frac{\epsilon}{n+1} Z_i^* . \tag{5.28}$$

Zo vzťahu (5.31) pre ϵ lokálne idúci k nule dostaneme:

$$0 = \langle Z^*, \bar{p}^* \rangle \geq \langle Z^*, \bar{p}' \rangle = Z_\nu^*, \tag{5.29}$$

Čo je v spore s tým, že $Z_\nu^* > 0$. Z toho vyplýva, že $Z_i^* \leq 0$ pre každé $i = 1, \ldots, n+2$:

$$\begin{aligned}
\sum_j X_{ij}^* + H_i^* - Y_i^* \leq 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \\
\sum_j L_j^* - \bar{L} \leq 0, \\
\sum_j K_j^* - \bar{K} \leq 0.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Z nulového úžitku trhového hráča v rovnováhe (5.26) a z (5.23) vyplýva, že v rovnováhe platí:

$$\begin{aligned}
\sum_j X_{ij}^* + H_i^* - Y_i^* = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n, \\
\sum_j L_j^* - \bar{L} = 0, \\
\sum_j K_j^* - \bar{K} = 0.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Teda v príslušnom CGE modeli platí rovnováha na trhu statkov (3.5), práce (3.6) a kapitálu (3.7). □

Dokázali sme, že pre rovnovážny bod ekonomiky $\tilde{E}$ platia všetky rovnovážne rovnice príslušného CGE modelu. Dôsledok toho je nasledujúca veta.

Veta 5.2.3. *V CGE modeloch s funkciu užitočnosti a produkčnými funkciami, ktoré sú definované v (4.1) a (4.2), resp. (4.1) a (4.6) existuje rovnováha.*

6 Záver

V práci sme vyšetrovali existenciu rovnováhy v jednoduchých CGE modeloch dvoma rozličnými metódami. Zameriavali sme sa na CGE modely s tromi rôznymi typmi produkčných funkcií.

V modeli so zmiešanými produkčnými funkciami sme dokázali existenciu rovnováhy obidvoma metódami.

V modeli s čisto Leontieffovými produkčnými funkciami sme ukázali, že rovnováha nemusí vždy existovať.

Pre model s čisto Cobb-Douglasovými produkčnými funkciami sme dokázali existenciu rovnováhy prispôsobením Arrow-Debreuovej teórie, ale v samostanom dôkaze by bolo treba ukázať existenciu rovnováhy aj vo všeobecnom n-rozmernom prípade.

Ďalej by bolo žiaduce rozšíriť dôkazy na zložitejšie modely zahrňujúce najmä vládu a zahraničie, prípadne rozšíriť túto teóriu aj na oblasť dynamických CGE modelov. Ostáva to predmetom ďalšieho skúmania.

Referencie

[1] Arrow, K., Debreu, G.: *Existence of equilibrium for a competitive economy*,
Econometrica 22, 1954, str. 265-290.

[2] Boyd, S., Vanderberghe, C.: *Convex optimization*,
Cambridge University Press, 2004.

[3] Brunovský, P.: *Riešiteľnosť systémov rovníc CGE modelov*,
v: *Teoretické a metodologické problémy modelov vypočítateľnej všeobecnej ekonomickej rovnováhy*,
editori: Páleník, V., Pekár, J., FMFI UK, 2007, str. 11-14.

[4] Menkyna, R.: *CGE modely a vstupno-výstupné modely*,
Diplomová práca, FMFI UK, 2005.

[5] Nikaido, H.: *Convex Structures and Economic Theory*,
Academic Press, 1968.

[6] Páleník, V.: *Efekty zvýšenia automobilovej produkcie na slovenskú ekonomiku*,
v: *Teoretické a metodologické problémy modelov vypočítateľnej všeobecnej ekonomickej rovnováhy*,
editori: Páleník, V., Pekár, J., FMFI UK, 2007, str. 33-36.

[7] Pániková, L.: *Aleternatívne uzávery CGE modelov*,
Diplomová práca, FMFI UK, 2007.

[8] Sekereš, S.,: *Teória statických a dynamických CGE modelov*,
Diplomová práca, FMFI UK, 2006.

[9] Zákopčan, M.,: *Rovnica dynamického programovania a jej riešenie metódou postupných aproximácií*,
Diplomová práca, FMFI UK, 2005.