

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A
INFORMATIKY

Univerzita Komenského, Bratislava

Aproximácie cien opcií v modeloch so
stochastickou volatilitou

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Lucia Ulrychová

Bratislava, 2008

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A
INFORMATIKY

Univerzita Komenského, Bratislava



Aproximácie cien opcií v modeloch so
stochastickou volatilitou

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Lucia Ulrychová

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Beáta Stehlíková

Bratislava, 2008

Čestne prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracovala samostatne pod vedením
vedúcej diplomovej práce, s pomocou uvedenej literatúry a vedomostí nadobudnutých
počas niekoľkoročného štúdia.

V Bratislave, 28. apríla 2008

Lucia Ulrychová

Ďakujem vedúcej diplomovej práci RNDr. Beáte Stehlákovej za odbornú pomoc, konzultácie, cenné pripomienky počas práce, inšpiratívne nápady, poskytnuté materiály, ale najmä za množstvo času, ochoty a podpory, ktorú mi veľmi počas celej tvorby tejto práce venovala.

Aproximácie cien opcií v modeloch so stochastickou volatilitou

Ekonomická a finančná matematika

Diplomant: Lucia Ulrychová

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Beáta Stehlíková

Apríl, 2008

Abstrakt

V tejto práci sa zaoberáme aproximáciami cien opcií v modeloch so stochastickou volatilitou. Pracujeme s dvomi modelmi, ktoré vo svojich článkoch uviedli ELIAS STEIN, JEREMY STEIN (1991) [8] a neskôr CHOI (2005) [6].

V diplomovej práci sa venujeme najskôr druhému spomínanému modelu, v ktorom zisťujeme, aký vplyv na cenu opcie bude mať vynechanie stochastickej časti v základnej rovnici GARCH modelu. Riešenie odvodzujeme analyticky. Rovnaký postup použijeme aj pre model autorov ELIAS STEIN, JEREMY STEIN (ďalej ako Stein-Stein model). Pre tento model použijeme numerické riešenie. Získané výsledky porovnáme s presnými cenami, ktoré uvádzajú autori vo svojich článkoch.

kľúčové slová: Wienerov proces, Brownov pohyb, Black - Scholesov model, Itóova lema, deterministická volatilita, stochastická volatilita, rizikovo neutrálna pravdepodobnosť, diskretizácia, transformácia

Obsah

1	Úvod	7
2	Základné pojmy, modely pre ceny opcií	8
2.1	Všeobecné finančné deriváty	8
2.2	Opčné deriváty - opcie	8
2.3	Black-Scholesov model	11
2.4	Volatilita	16
2.5	Deterministická volatilita závislá od času	16
2.6	Stochastická volatilita	18
3	Približné riešenia v modeloch so stochastickou volatilitou	20
3.1	Približné analytické riešenie GARCH modelu (Choi, 2005)	20
3.2	Alternatívne odvodenia	22
3.3	Použitie v Stein-Steinovom modeli so stochastickou volatilitou	24
3.4	Nevýhody aproximácie tohto typu	26
3.5	Presnosť aproximácie tohto typu	30
4	Ceny opcií ako náhodné premenné	32
5	Záver	36
	*	

1 Úvod

Finančný svet v súčasnosti patrí k najrýchlejšie sa rozvíjajúcim oblastiam v ekonomike. Vďaka zvyšovaniu sofistikovanosti svojich produktov poskytuje aj väčší podnet na využívanie nových matematických modelov a moderných matematických metód. Zvyšuje sa tým aj dopyt finančných inštitúcií po vysokokvalifikovaných matematikoch, ktorí by boli schopní v praxi aplikovať teoretické vedomosti z oblasti matematiky, ktoré aplikujú napríklad aj na modelovanie cien finančných derivátov.

Dôraz na presnejšie oceňovanie finančných derivátov sa zvýšil v priebehu posledných desaťročí a najmä koncom minulého storočia, kedy sa na finančných trhoch začali výraznejšie prejavovať rôzne nestability. Príčinou týchto javov bolo vo výraznej miere zvýšenie volatility cien akcií, menových kurzov, komodít a úrokových sadzieb, vďaka čomu sa zvýšilo aj riziko investovania do jednotlivých aktív. Práve z dôvodu eliminácie rizika sa začali vo vyššej miere využívať rôzne finančné deriváty.

Cieľom tejto diplomovej práce je bližšie skúmať jeden z druhov finančných derivátov, konkrétne opcií. Zaujímať sa budeme o európske call opcie, ktoré na svoje oceňovanie využívajú ako jeden z parametrov stochastickú volatilitu.

V prvej časti práce sa oboznámime s niektorými základnými pojmami, ktoré sa využívajú pri priamom oceňovaní opcií. Predstavíme si niektoré typy opcií, ako aj základný model na oceňovanie opcií, Black - Scholesov model. Ďalej sa zameriame na vysvetlenie pojmu volatility, deterministickej volatility závislej od času a stochastickej volatility.

V druhej časti uvedieme konkrétne modely využívajúce práve stochastickú volatilitu. Odvodíme približné riešenia týchto modelov, pričom sa zameriame aj na presnosť týchto aproximácií a ich nevýhody.

V poslednej časti sa pozrieme na ceny opcií ako náhodné premenné a odvodíme si ich limitné rozdelenie.

2 Základné pojmy, modely pre ceny opcí

2.1 Všeobecné finančné deriváty

Finančné deriváty sú nástroje, ktoré ako už z názvu vyplýva (derive = odvodiť) sú určitým spôsobom odvodené od rôznych finančných aktív. Pod týmito aktívami môžeme rozumieť rôzne menové kurzy, komodity, rokové miery, ceny akcií alebo burzové indexy. V súčasnosti už dokážeme vytvoriť finančný derivát odvíjajúci sa napríklad aj od stavu počasia prípadne od stavu hladiny nejakej konkrétnej rieky. Vypisovateľ derivátu sa zaväzuje plniť v budúcnosti určité vopred dohodnuté podmienky.

Zo základných typov finančných derivátov spomeňme opčné deriváty, forwardy, futurity a swapy. *Opčným derivátom* sa budeme bližšie venovať v nasledujúcej časti práce. *Forward* je termínovaný kontrakt, ktorý uzatvára vypisovateľ s kupujúcim, kde sa zaväzuje, že vo vopred dohodnutom termíne vypisovateľ kupujúcemu predá prípadne od neho nakúpi vopred dohodnuté množstvo aktíva (devíza, komodita etc.) za vopred dohodnutú cenu. Keďže sa forwardy neuzatvárajú v rámci burzy, dohodnuté podmienky závisia výlučne od strán, ktoré sa na forwarde podieľajú. Na rozdiel od forwardov sa ďalší finančný derivát, *futura*, na burze obchoduje, ktorá stanoví štandardné podmienky, za ktorých môže obchod prebehnúť, ako je minimálny obchodovaný objem alebo životnosť kontraktu. Trh s futurami je kontrolovaný štátnou mocou, ktorú predstavujú štátne orgány kontroly na kapitálovom trhu. Posledným spomenutým finančným nástrojom je *swap*, ktorý možno definovať aj ako dohodu o časovo obmedzenej výmene série platieb medzi dvoma alebo viacerými subjektami. Tieto obchody sa štandardne realizujú mimo burzy.

2.2 Opčné deriváty - opcie

Históriu opčných derivátov možno začať datovať už okolo roku 1200 pred n.l., kedy známy matematik Thales z Milétu vytvoril prvý opčný kontrakt. Thales bol vo svojej dobe očierňovaný pre svoju chudobu, keďže ľudia boli presvedčení, že filozofia, ktorej sa venoval, bola zbytočná pre život. Aristoteles predpokladal, že Thales na základe svojich vedomostí z oblasti astrológie si všimol, že úroda olív v ďalšom roku by mala byť pomerne bohatá. Preto sa rozhodol si za nízku zálohu prenajať všetky stroje na

lisovanie v oblasti, a keďže sa nenašiel nikto iný, kto by si chcel tiež prenajať tieto stroje, majitelia na prenájom za nízku cenu pristúpili nevedomí si skutočnej ceny. Keď nastala sezóna zberu, mnoho ľudí tieto stroje potrebovalo. Thales ich ďalej prenajal, avšak za podmienky, ktoré si sám stanovil a ktoré mu vyhovovali. Na tejto dohode sa mu podarilo zarobiť veľké množstvo peňazí a dokázať, že pre filozofov je jednoduché zbohatnúť vďaka svojim vedomostiam (bližšie v [1])

Vo všeobecnosti je opcia finančný derivát, ktorý svojmu majiteľovi poskytuje právo nie však povinnosť kúpiť alebo predáť aktívum na základe vopred dohodnutých podmienok. Vo finančnom svete rozdeľujeme najjednoduchšie typy opcií na dva základné typy, tzv call opcie a put opcie, podľa toho, aký druh práva svojmu majiteľovi poskytujú. Vlastník call opcie má právo kúpiť aktívum vo vopred dohodnutom čase a za vopred dohodnutú cenu, vlastník put opcie má právo predáť aktívum. Cena, ktorá vystupuje v dohode ako cena, za ktorú chce v budúcnosti majiteľ opcie aktívum kupovať resp. predávať, sa nazýva *expiračná cena (strike price)* a dátum, kedy má opcia nadobudnúť svoju platnosť, sa nazýva *dátum expirácie* alebo *maturita*.

Opcie dokážeme rozdeliť aj na základe ich "správania sa" v čase do maturity. Ak si majiteľ môže uplatniť opciu iba v čase maturity, hovoríme o európskej opcii. Ak si môže majiteľ opcie uplatniť svoje právo kedykoľvek v čase od vypísania opcie až do jej maturity, hovoríme o americkej opcii. Najčastejším obchodovaným typom opcií sú síce americké opcie, avšak z dôvodu jednoduchšej analyzovateľnosti sa ďalej budeme venovať európskemu typu opcií. Ďalej treba pripomenúť, že aj keď sa európske opcie nazývajú európskymi, ich názov sa nevzťahuje iba na burzy na európskych finančných trhoch. Rovnako ako sú európske opcie obchodovateľné kdekoľvek vo svete, sú aj americké opcie neviazané na konkrétne burzy nachádzajúce sa na danom území.

Spomeňme niektoré hlavné burzy v USA:

- New York Stock Exchange (NYSE)
- Philadelphia Stock Exchange (PHSE)
- Chicago Board Options Exchange (CBOE)
- American Stock Exchange (AMEX)
- Pacific Exchange (PCX)

z európskych sú to najmä:

- Amsterdam Exchanges (AEX)
- EUREX
- Swiss Exchange (SWX)

Hodnotu opcie v čase expirácie nazývame *payoff* danej opcie. Predpokladajme, že máme call opciu s expiračnou cenou E a trhovú cenu daného aktíva v čase expirácie je S . Ak platí $S > E$, tak sa oplatí opciu zrealizovať a okamžite obdržanú akciu predať za trhovú cenu so ziskom $S - E$. Inak je opcia bezcenná. Pre hodnotu call opcie v čase expirácie teda platí

$$V(S, T) = \begin{cases} S - E & \text{ak } S > E, \\ 0 & \text{ak } S < E, \end{cases}$$

t.j.

$$V(S, T) = \max(S - E, 0).$$

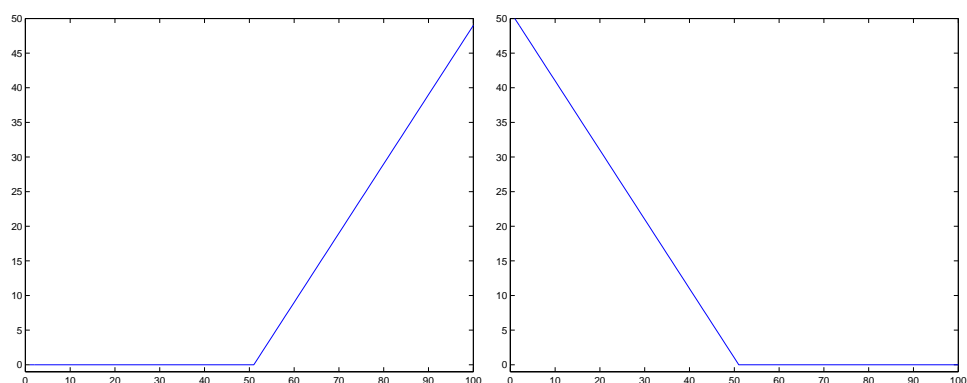
Rovnako sa možno pozrieť aj na hodnotu put opcie v čase expirácie. Ak bude trhovú cenu S aktíva nižšia ako expiračná cena E , nakúpim si na trhu aktívum za trhovú cenu S a následne ho predám za expiračnú cenu E , zisk bude $E - S$. Inak je hodnota opcie nulová, čiže

$$V(S, T) = \begin{cases} E - S & \text{ak } S < E, \\ 0 & \text{ak } S > E, \end{cases}$$

t.j.

$$V(S, T) = \max(0, E - S).$$

Na obrázku 2 môžeme vidieť konkrétny príklad zverejňovania cien opcií konkrétne pre opcie spoločnosti Google Inc. z dňa 23. apríla 2008 so spotovou cenou 549.3895.



Obrázok 1: Payoff put opcie s expiračnou cenou 150.

View By Expiration: [May 08](#) | [Jun 08](#) | [Sep 08](#) | [Dec 08](#) | [Jan 09](#) | [Jan 10](#)

Options Expiring Fri, May 16, 2008

Calls							Strike Price	Puts						
Symbol	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int		Symbol	Last	Change	Bid	Ask	Volume	Open Int
GOPEL.X	72.20	↓ 5.20	71.40	71.90	64	2,044	480.00	GOPOL.X	1.60	0.00	1.55	1.75	381	2,392
GOPEK.X	63.10	↓ 6.10	62.30	62.80	40	2,269	490.00	GOPQK.X	2.50	↑ 0.14	2.40	2.55	232	2,484
GOPEO.X	53.60	↓ 7.20	53.80	54.10	327	10,659	500.00	GOPQO.X	3.80	↑ 0.20	3.70	3.90	484	5,468
GOPEU.X	45.80	↓ 5.70	45.60	46.00	130	4,683	510.00	GOPQU.X	5.60	↑ 0.40	5.50	5.70	354	4,065
GOPEV.X	38.50	↓ 6.00	38.30	38.40	387	4,036	520.00	GOPQV.X	8.00	↑ 0.60	8.00	8.20	800	3,641
GOPEW.X	31.30	↓ 7.00	31.20	31.40	434	2,834	530.00	GOPQW.X	11.20	↑ 1.20	11.20	11.30	1,446	3,134
GOPEX.X	25.50	↓ 4.60	25.30	25.50	632	4,066	540.00	GOPQX.X	15.20	↑ 1.60	15.10	15.20	808	2,372
GOPEY.X	20.30	↓ 4.60	20.30	20.40	2,180	9,252	550.00	GOPQY.X	20.10	↑ 2.25	20.00	20.10	1,380	1,809
GOPEZ.X	15.90	↓ 3.10	15.70	15.90	1,891	5,966	560.00	GOPQZ.X	25.50	↑ 2.50	25.50	25.70	892	2,208
GOPEQ.X	12.30	↓ 2.60	12.10	12.20	1,005	4,259	570.00	GOPQO.X	32.90	↑ 4.30	31.80	32.00	354	1,809
GOOEP.X	9.00	↓ 2.50	9.10	9.30	1,426	3,363	580.00	GOOQP.X	39.00	↑ 4.50	39.00	39.20	219	393
GOOER.X	6.80	↓ 1.70	6.80	7.00	611	2,666	590.00	GOOQR.X	45.60	↑ 4.10	46.60	46.90	111	265
GOOET.X	5.20	↓ 1.50	5.10	5.30	1,862	5,512	600.00	GOOQT.X	52.90	↑ 3.30	54.90	55.30	119	194

Obrázok 2: Ceny call a put opcií na akcie spoločnosti Google Inc.

2.3 Black-Scholesov model

V oblasti oceňovania opcií nastal najväčší prelom začiatkom sedemdesiatych rokov minulého storočia, kedy sa trojici Fischer Black, Myron Scholes a Robert Merton podarilo odvodiť model, ktorý je v súčasnosti známy ako Black-Scholesov prípadne Black-Scholes-Mertonov model [2]. Tento objav bol natoľko významný, že v roku 1997 zaň dostali Robert Merton a Myron Scholes Nobelovu cenu. Fischer Black sa jej bohužiaľ už nedožil.

Pri odvodzovaní svojho modelu použili niekoľko základných predpokladov:

- krátkodobá úroková miera sa v čase nemení a je známa,

- rozdelenie cien aktív je lognormálne,
- aktívum nevyplácajúce dividendy,
- typ opcie je európsky,
- transakčné náklady sú rovné nule.

Predpokladáme, že vývoj cien sa bude správať na základe geometrického Brownovho procesu:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW, \quad (1)$$

kde dW je Wienerov proces, t.j. náhodný proces s nasledujúcimi vlastnosťami:

- $W_0 = 0$,
- dW je náhodná premenná s normálnym rozdelením so strednou hodnotou rovnou nule a disperziou dt ,
- $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ sú nezávislé pre všetky $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$,
- trajektórie procesu sú spojité.

Aby sme ukázali, že z uvedeného predpokladu vyplýva lognormálne rozdelenie cien akcií, budeme potrebovať Itóvu lemu.

Itóva lema: Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice $dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dW$, kde W je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dW.$$

Dôkaz je možné nájsť napríklad v [3].

Pomocou tejto lemy sa dokáže, že ak

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t}, \quad (2)$$

tak diferenciál dS je daný rovnosťou (1). Potom platí

$$\ln S_t = \ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t,$$

čo má normálne rozdelenie z dôvodu normálneho rozdelenia Wienerovho procesu W_t .

Teraz odvodíme Black-Scholes-Mertonovu rovnicu pre cenu derivátu (postup podľa [3]).

Nech Q_V je počet opcií v portfóliu a Q_S je počet akcií v portfóliu, pričom pre obe platí:

$$\begin{aligned} Q > 0 & \quad \text{v portfóliu sa opcie/akcie nachádzajú,} \\ Q < 0 & \quad \text{opcie/akcie dlhujem.} \end{aligned}$$

Budem predpokladať nulový rast investícií, potom platí

$$Q_V V + Q_S S + B = 0, \tag{3}$$

kde B označuje celkový objem finančných prostriedkov investovaných do dlhopisov. Ďalej budeme predpokladať podmienku samofinancovateľnosti portfólia, teda nákup prípadne predaj jednotlivých zložiek portfólia možno realizovať jedine predajom respektíve nákupom inej zložky portfólia. Zmenu počtu opcií/akcií si označíme ako dQ_S/dQ_V a zmenu množstva prostriedkov naviazaných na dlhopisy označíme δB , pričom bude platiť

$$\begin{aligned} dQ > 0 & \quad \text{počet opcií/akcií v portfóliu sa zvýšil,} \\ dQ < 0 & \quad \text{počet opcií/akcií v portfóliu sa znížil.} \end{aligned}$$

Vyššie spomenutú podmienku samofinancovateľnosti portfólia potom dokážeme vyjadriť ako

$$SdQ_S + VdQ_V + \delta B = 0. \tag{4}$$

Celková zmena hodnoty dlhopisov dB sa skladá z dvoch častí. Prvá je zmena na základe nákupu/predaja opcií a akcií v portfóliu δB . Druhá zmena vyjadruje zmenu hodnoty dlhopisov v čase. Rovná sa $rBdt$, kde r vyjadruje fixnú úrokovú sadzbu. Obe tieto zmeny teda vieme vyjadriť ako

$$dB = \delta B + rBdt. \tag{5}$$

Celková zmena portfólia bude teda

$$0 = d(Q_S S + Q_V V + B) = SdQ_S + Q_S dS + VdQ_V + Q_V dV + dB. \tag{6}$$

Z rovnosti pre zmenu hodnoty dlhopisov (5) a podmienky samofinancovateľnosti (4) potom dostávame

$$0 = Q_S dS + Q_V dV + rB dt. \quad (7)$$

Z (3) si vyjadríme B , ktoré potom dosadíme do (7), čím dostávame

$$0 = Q_S dS + Q_V dV - r(Q_S S + Q_V V) dt. \quad (8)$$

Po pre násobení tejto rovnice výrazom Q_V a označení $\Delta = -\frac{Q_S}{Q_V}$ budeme mať

$$0 = dV - \Delta dS - r(V - \Delta S) dt. \quad (9)$$

Na výpočet derivátu použijeme Itóovu lemu. Ak teda cena derivátu $V = V(S, t)$ je hladká funkcia, pričom diferenciál dS je daný rovnosťou (1), tak podľa Itóvej lemy bude dV spĺňať

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dS.$$

Jednoduchými úpravami a dosadením dostaneme

$$0 = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - r(V - \Delta S) \right) dt + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) dS. \quad (10)$$

Na základe princípu konštrukcie bezrizikového portfólia si Δ zvolíme ako $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, čím eliminujeme riziko fluktuácií portfólia. Dosadením dostaneme výslednú Black-Scholes-Mertonovu parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{pre} \quad S \in (0, \infty), t \in (0, T). \quad (11)$$

Táto rovnica je všeobecne platná pre ľubovoľný derivát, preto je nevyhnutné doplniť podmienku, ktorá nám určí, o aký typ derivátu sa jedná. Takúto podmienku nazývame koncovou alebo terminálovou podmienkou. Pre call opciu bude koncová podmienka v tvare

$$V(S, T) = \max(S - E, 0) \quad \text{pre} \quad S \in (0, \infty),$$

a pre put opciu bude vyzeráť

$$V(S, T) = \max(0, E - S) \quad \text{pre} \quad S \in (0, \infty).$$

Princíp riešenia Black - Scholesovej rovnice s danou koncovou podmienkou je založený na sérii transformácií našej pôvodnej parabolickej rovnice, ktorými ju prevedieme do tvaru

$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, kde $(x, t) \in (-\infty, \infty) \times (0, T)$ s danou začiatočnou podmienkou (riešenie na základe [3]). Tento postup riešenia uvedieme pre všeobecný derivát s koncovou podmienkou $\bar{V}(S, T)$.

- Zámena času - transformácia plynutia času od expirácie T k začiatočnému času $t = 0$. Majme novú premennú $\tau = T - t$, pre ktoré bude platiť

$$W(S, \tau) = V(S, T - \tau) \quad \text{teda} \quad V(S, t) = W(S, T - \tau).$$

Koncovú podmienku $\bar{V}(S)$ bude pre prípad európskej call opcie. Ak ďalej budeme uvažovať $dt = -d\tau$, potom rovnica (11) bude mať tvar

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 W}{\partial S^2} - r \frac{\partial W}{\partial S} + rW = 0, \\ W(S, 0) = \bar{V}(S) \quad \text{pre} \quad S \in (0, \infty), \tau \in (0, T). \end{cases}$$

- Logaritmickej transformácie ceny akcie - zavedieme substitúcie $S = e^x$ a zavedieme novú funkciu

$$Z(x, \tau) = W(e^x, \tau) \quad \text{teda} \quad W(S, \tau) = Z(\ln S, \tau).$$

Treba dodať, že $S \in (0, \infty)$ vtedy, keď $x \in (-\infty, \infty)$. Rovnica (11) bude mať teraz tvar

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) \frac{\partial Z}{\partial x} + rZ = 0, \\ Z(x, 0) = \bar{V}(e^x) \quad \text{pre} \quad X \in (0, \infty), \tau \in (0, T). \end{cases}$$

- Transformácia na rovnicu vedenia tepla $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ - elimináciu Z a $\frac{\partial Z}{\partial x}$ dosiahneme exponenciálnou transformáciou

$$u(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} Z(x, \tau),$$

Rovnica (11) potom nadobudne tvar

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \frac{\partial u}{\partial x} + Bu = 0, \\ u(x, 0) = e^{\alpha x} \bar{V}(e^x), \quad \text{pre} \quad x \in (-\infty, \infty), \tau \in (0, T). \end{cases}$$

kde $A = \alpha\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{2} - r$ a $B = (1 + \alpha)r - \beta - \alpha D - \frac{\alpha^2\sigma^2 + \alpha\sigma^2}{2}$. Konštanty α a β určíme tak, aby sme výrazy A a B eliminovali. Pre α a β bude teda platiť

$$\alpha = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r^2}{2\sigma^2}.$$

Výsledný tvar rovnice pre funkciu u potom bude

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(x, 0) = e^{\alpha x} \bar{V}(e^x), \end{cases} \quad \text{pre } x \in (-\infty, \infty), \tau \in (0, T).$$

Vyriešením tejto rovnice a spätnými transformáciami dostaneme riešenie pre európsku call opciu.

$$V_{call} = SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2),$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S/E) - (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (12)$$

a N je distribučná funkcia normalizovaného normálneho rozdelenia. Rovnakým postupom môžeme vypočítať cenu európskej put opcie, alebo na jej určenie použiť put-call paritu. Cena put opcie je daná vzťahom:

$$V_{put} = Ee^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1).$$

2.4 Volatilita

Pod pojmom volatilita je asi najčastejšie chápaná štandardná odchýlka zmeny ceny určitého finančného nástroja. Inými slovami by sa tiež dala nazvať aj ako miera rizika, že nám hodnota daného finančného nástroja klesne prípadne stúpne pod resp. nad nami želanú úroveň. Pri oceňovaní derivátov je tento ukazovateľ veľmi dôležitý, pretože nám ukazuje, ako sa cena aktíva pohybovala v čase, ako veľmi sa vychyľovala. Ak sa pozrieme na najzákladnejší model pre oceňovanie opcií, Black-Scholesov model, vidíme, že autori predpokladali konštantnú volatilitu, kvôli čomu sa tento model nepovažuje za najvhodnejší pre reálne obchodovanie. Dáva však základ pre ďalšie sofistikovanešie modely uvažujúce volatilitu ako závislú od času, prípadne závislú od času a zároveň náhodnú, stochastickú.

2.5 Deterministická volatilita závislá od času

Odvodíme presné riešenie pre výpočet ceny opcií, ak volatilita bude deterministická funkcia času, čiže $\sigma = \sigma(t)$ ([4]). Základná Black-Scholesova rovnica bude platiť aj

naďalej. Riešenie budeme hľadať ako riešenie rovnice

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad \text{kde} \quad S \in (0, \infty), t \in (0, T), \quad (13)$$

s koncovou podmienkou $V(S, T)$ pre $S \in (0, \infty)$, ktorá závisí od typu derivátu.

Majme nasledovné substitúcie

$$\bar{S} = Se^{\alpha(t)},$$

$$\bar{V} = Ve^{\beta(t)},$$

$$\bar{t} = \gamma(t),$$

kde α a γ zvolíme tak, aby všetky časovo závislé koeficienty v (13) boli eliminované. Po dosadení nových premenných bude rovnica (13) vyzeráť nasledovne

$$\dot{\gamma}(t)\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{2}\sigma(t)^2\bar{S}^2\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{S}^2} + (r + \dot{\alpha})\bar{S}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{S}} - (r + \dot{\beta})\bar{V} = 0, \quad (14)$$

kde bodka nad parametrom bude označovať deriváciu parametra podľa času. V nasledujúcom kroku odstránime koeficienty \bar{V} a $\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{S}}$ vhodným výberom parametra α a β :

$$\alpha(t) = r(T - t),$$

$$\beta(t) = r(T - t).$$

Dostaneme

$$\dot{\gamma}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{S}^2} = 0.$$

Ak si zvyšný časovo závislý parameter zvolíme ako

$$\gamma(t) = \int_t^T \sigma^2(\tau)d\tau,$$

odstránime z rovnice (14) funkciu $\sigma(t)$. Dostávame parabolickú parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{2}\bar{S}^2\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{S}^2}, \quad \text{kde} \quad \bar{S} \in (0, \infty), \bar{t} \in (0, \bar{T}), \quad (15)$$

kde $\bar{T} = \int_0^t \sigma^2(t)dt$ so začiatočnou podmienkou $\bar{V}(\bar{S}, 0)$ pre $\bar{S} \in (0, \infty)$, ktorá už obsahuje iba koeficienty nezávislé od času a neobsahuje funkciu σ , takže jej riešenie už od tohto parametra nezávisí. Táto funkcia síce vystupuje v \bar{T} , avšak \bar{T} určuje iba maximálny čas, pre ktorý počítame riešenie rovnice a predchádzajúce časy neovplyvňuje.

Ak si vezmeme za $\bar{V}(\bar{S}, \bar{t})$ riešenie (15), potom zodpovedajúce riešenie (13) po dosadení pôvodných premenných bude mať tvar

$$V(S, T) = e^{r(T-t)} \bar{V} \left(S e^{r(T-t)}, \int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau \right). \quad (16)$$

Ak by sme sa rovnaký prístup použili aj na štandardnú Black-Scholesovu rovnicu s konštantnou volatilitou σ^2 , potom by sme jej riešenie dokázali vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$$V_{BS}(S, T) = e^{-r(T-t)} \bar{V}(S e^{-r(T-t)}, \sigma^2(T-t)). \quad (17)$$

Porovnaním posledných dvoch rovníc nakoniec dostávame, že jednoduchým použitím substitúcie

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(\tau) d\tau, \quad (18)$$

vieme riešenie rovnice (13) vypočítať pomocou Black - Scholesovho vzorca, ak za volatilitu σ^2 dosadíme $\bar{\sigma}^2$ dané vzťahom (18).

2.6 Stochastická volatilita

Ďalej sa zameriame na modely, ktoré vychádzajú z Black-Scholesovho modelu, a zároveň pracujú so stochastickou volatilitou. Tieto modely sú založené Ornstein-Uhlenbeckovom procese, kde volatilitu uvažujeme ako funkciu $\sigma = g(Y)$ tohto stochastického procesu:

$$dY = \alpha(m - Y)dt + f(Y)dW(t).$$

Uvedená rovnica vyjadruje mean-reverting proces, pre ktorý platí, že v čase t idúcom do nekonečna sa Y_t približuje strednej hodnote m rýchlosťou α .

Podľa článku [5] dokážeme rozlíšiť štyri základné modely stochastickej volatility v závislosti od g a f :

1. Ornstein - Uhlenbeckov (OU) model:

Platí, že $g(y) = Y$ a $f(y) = k$, pričom k je kladná konštanta, potom

$$d\sigma = \alpha(m - Y)dt + kdW(t).$$

2. exponenciálny Ornstein - Uhlenbeckov (ExpOU) model:

Pre tento model môžeme povedať, že $g(y) = e^y$ a $f(y) = k$, kde k je opäť kladná

konštanta. Potom σ vyhovuje rovnici

$$d\sigma = \alpha \left[\frac{k^2}{2} - \alpha(\ln \sigma - m) \right] dt + k\sigma dW(t).$$

3. Hestonov model:

Pre Hestonov model platí, že $g(y) = \sqrt{y}$ a $f(y) = k\sqrt{y}$, kde k je kladná konštanta.

Potom

$$d\sigma = \frac{1}{2\sigma} \left[\alpha(m - \sigma^2) - \frac{k}{4} \right] dt + \frac{k}{2} dW(t).$$

4. Hull - Whitov model:

O Hull - Whitovom modeli možno povedať, že $\sigma = \sqrt{y}$ a zároveň $f(y) = ky$, pričom k má rovnaké vlastnosti ako v predchádzajúcich modeloch, potom

$$d\sigma = \frac{1}{2\sigma} \left[\alpha(m - \sigma^2) - \frac{k^2\sigma^2}{4} \right] dt + \frac{k\sigma}{2} dW(t).$$

Deriváty sa aj v modeloch so stochastickou volatilitou oceňujú pomocou parciálnych diferenciálnych rovníc. Nech vývoj ceny akcie je daný rovnicami:

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma_t S_t dW_t,$$

so stochastickou volatilitou vyhovujúcou

$$d\sigma_t = a(\sigma_t, t)dt + b(\sigma_t, t)d\hat{W}_t,$$

tak cena derivátu je riešením rovnice (??), pričom korelácia dW je ρ . Potom cena derivátu $V(t, S, \sigma)$ rieši parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV + \frac{1}{2}b^2(\sigma, t) \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} + \rho\sigma S b(\sigma, t) \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial \sigma} + (a(\sigma, t) + \lambda(\sigma, t)b(\sigma, t)) \frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0$$

$$\text{kde } S \in (0, \infty), t \in (0, T), \sigma \in (0, \infty).$$

Koncová podmienka $v(s, \sigma, T) = g(s)$ pre všetky $s \in R_+$ a $\sigma \in R_+$ závisí od konkrétneho typu derivátu.

3 Približné riešenia v modeloch so stochastickou volatilitou

3.1 Približné analytické riešenie GARCH modelu (Choi, 2005)

Autor odvodil v [6] približné analytické riešenie na oceňovanie opcií v modeli, v ktorom sa volatilita akcie vyvíja podľa GARCH procesu. Tento vzorec je podobný štandardnému Black-Scholesovmu vzorcu. Určuje volatilitu, ktoré dosadzujeme do Black-Scholesovho modelu.

Nech S_t je cena aktíva v čase t a $\sqrt{h_t}$ volatilita. Potom diskretný GARCH model budeme uvažovať v tvare:

$$\ln(S_{t+\Delta}/S_t) = r + \lambda\sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \sqrt{h_t}v_{t+\Delta}$$

$$h_{t+\Delta} = \beta_0 + \beta_1h_t + \beta_2h_t(v_{t+\Delta} - \gamma)^2$$

kde r je bezriziková úroková miera pre časový interval Δ a $v_{t+\Delta}$ je náhodná premenná s normalizovaným normálnym rozdelením. Jednotka prémie za riziko akcie je λ . Parametre modelu sú β_0 , β_1 , β_2 a γ . Rizikovo neutrálna formulácia je

$$\ln(S_{t+\Delta}/S_t) = r - \frac{1}{2}h_t + \sqrt{h_t}u_{t+\Delta}$$

$$h_{t+\Delta} = \beta_0 + \beta_1h_t + \beta_2h_t(u_{t+\Delta} - \gamma_*)^2,$$
(19)

kde $u_{t+\Delta} = V_{t+\Delta}$ a $\gamma_* = \gamma + \lambda$. Na základe výsledkov práce Fostera a Nelsona (1994) možno ukázať, že zmenšovaniu pozorovaného intervalu Δ bude zodpovedať systém spojitý v čase daný rovnicou

$$d \begin{pmatrix} \ln S_t \\ h_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - \frac{1}{2}h_t \\ \beta_0 - \theta h_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sqrt{h_t} & 0 \\ -2\beta_2\gamma_*h_t & \beta_2h_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_{1,t} \\ dW_{2,t} \end{pmatrix},$$
(20)

kde $\theta = 1 - \beta_1 - \beta_2(1 + \gamma_*^2)$ a $W_{1,t}$, $W_{2,t}$ sú nezávislé Wienerove procesy.

Autor ďalej tento spojitý model diskretizoval a odvodil približnú hodnotu pre cenu opcie. Cenu európskej call opcie v čase t s expiračnou cenou E , ktorá expiruje v čase T , možno pomocou jeho aproximácie vyjadriť ako

$$V = S_t N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/E) + (r + \sigma_g^2/2)(T-t)}{\sqrt{(T-t) * \sigma_g}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/E) + (r - \sigma_g^2/2)(T - t)}{\sqrt{(T - t) * \sigma_g}},$$

pričom

$$\sigma_g^2 = \left[\frac{\beta_0}{\theta}(T - t) + \left(h_t - \frac{\beta_0}{\theta} \right) \frac{1 - e^{-\theta(T-t)}}{\theta} \right] / (T - t).$$

Ďalej sme zisťovali, ako bude vyzerat' aproximácia riešenia.

V tabuľkách vidieť porovnanie presných cien počítaných pomocou GARCH modelu a aproximovaných cien vychádzajúcich z alternatívneho odvodenia. V prvej tabuľke máme porovnanie realizované pre rôzne expiračné ceny, v druhej tabuľke sú ceny porovnané pre rôzne časy expirácie dané v dňoch. Uvedené ceny boli počítané pre hodnoty parametrov $r = 0$, $\lambda = 0$, $\beta_0 = 6.575 * 10^{-6}$, $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 0.04$, $\gamma = 0$ a $S = 100$.

Expiračná cena	Presné riešenie	Aproximácia	Relatívna chyba v percentách
95	5,560	5,5823	0,40
97,5	3,712	3,6545	-1,55
100	2,268	2,3812	4,99
102,5	1,263	1,2462	-1,33
105	0,639	0,6853	7,25

Tabuľka 1: Presné a aproximatívne riešenie v závislosti od rôznych expiračných cien.

Expiračný čas	Presné riešenie	Aproximácia	Relatívna chyba v percentách
5	5,012	5,0117	-0,01
10	5,086	5,0651	-0,41
30	5,560	5,5418	-0,33
50	6,030	6,0776	0,79
100	7,028	7,0398	0,17

Tabuľka 2: Presné a aproximatívne riešenie v závislosti od rôznych expiračných časov.

3.2 Alternatívne odvodenia

V kapitole 2.5 sme uviedli oceňovanie opcií v modeli, kde je volatilita deterministickou funkciou času. V tejto kapitole odvodíme aproximáciu riešenia modelu (20) v prípade, že by sme v rovnici pre volatilitu vynechali stochastickú časť.

Stochastická diferenciálna rovnica popisujúca vývoj h_t je

$$dh_t = (\beta_0 - \theta h_t)dt + \sigma h_t dW_t.$$

Uvažovaním iba deterministickej časti procesu dostaneme obyčajnú diferenciálnu rovnicu

$$\frac{dh_t}{dt} = \beta_0 - \theta h_t. \quad (21)$$

Je to lineárna diferenciálna rovnica prvého rádu, ktorá sa dá vyriešiť pomocou variácie konštant. Uvažujme najskôr homogénnu časť $\dot{h}_t^H = -\theta h_t^H$, ktorej partikulárnym riešením je rovnica $h_t^H = e^{-\theta t}$. Riešenie rovnice (21) preto hľadáme v tvare

$$h_t = c_t e^{-\theta t}. \quad (22)$$

Zderivovaním rovnosti (22) dostávame $\dot{h}_t = \dot{c}_t e^{-\theta t} + c_t e^{-\theta t}(-\theta)$. Z rovnice (21) teda dostávame, že funkcia c_t spĺňa $\dot{c}_t e^{-\theta t} - \theta c_t e^{-\theta t} = \beta_0 - \theta c_t e^{-\theta t}$, teda $\dot{c}(t)e^{-\theta t} = \beta$. Všeobecným riešením tejto rovnice je

$$c_t = \frac{\beta_0}{\theta} e^{\theta t} + d,$$

kde d je konštanta. Riešenie rovnice (21) potom bude v tvare

$$h_t = \frac{\beta_0}{\theta} + d e^{-\theta t}$$

Konštantu d určíme z počiatočnej podmienky. Predpokladajme, že $h(0) = h_0$ je dané.

Z toho vyplýva, že

$$h_0 = \frac{\beta_0}{\theta} + d$$

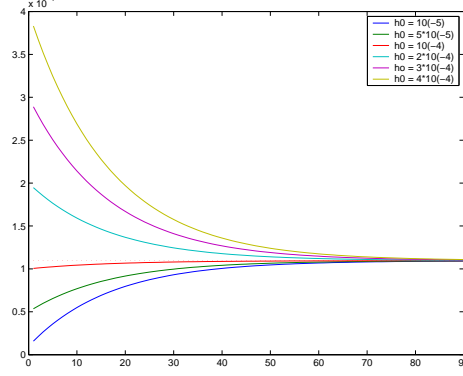
a teda konštanta d sa rovná

$$d = h_0 - \frac{\beta_0}{\theta}.$$

Riešenie rovnice (21) spĺňajúce začiatočnú podmienku $h(0) = h_0$ teda je

$$h_t = \frac{\beta_0}{\theta} + \left(h_0 - \frac{\beta_0}{\theta} \right) e^{-\theta t}. \quad (23)$$

Na obrázku 3 je znázornené riešenie tejto rovnice pre niekoľko začiatočných podmienok h_0 . Parametre β_0, θ sú hodnoty použité pri výpočtoch v článku [6], t.j. $r = 0$, $\beta_0 = 6.575 * 10^{-6}$, $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 0.04$, $\lambda = 0$ a $\gamma = 0$. Jednotkou času je opäť deň, teda na x-ovej osi obrázku 3 je uvedený čas v dňoch.



Obrázok 3: Aproximácia vývoja volatility deterministickou funkciou

Model s časovo závislou volatilitou bol formulovaný pre diferenciál ceny, t.j. dS . Preto vyjadríme model (20) v tomto tvare. Ak označíme $x = \ln S$, tak pričom využitím Itôvej lemy dostávame

$$dS = e^x dx + \frac{1}{2} e^x (dx)^2 = S dx + \frac{1}{2} h S (dw)^2 = S dx + \frac{1}{2} h S dt$$

V maticovom tvare

$$d \begin{pmatrix} S_t \\ h_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S r \\ \beta_0 - \theta h_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} S \sqrt{h_t} & 0 \\ -2\beta_2 \gamma_* h_t & \beta_2 h_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_{1,t} \\ dW_{2,t} \end{pmatrix} \quad (24)$$

Tieto rovnice sú formulované pri rizikovo neutrálnej pravdepodobnosti, kým Black - Schoelsov model je formulovaný pre reálnu pravdepodobnosť. Pri zmene tejto pravdepodobnosti sa rovnica pre volatilitu nezmení, v rovnici pre cenu akcie sa zmení drift. Ten však do vzorca pre oceňovanie opcií nevstupuje, takže môžeme použiť rovnice (24).

Získaný výraz pre h_t zo vzťahu (23) zintegrujeme v hraniciach od 0 po τ a predelíme τ , aby sme získali hodnotu $\bar{\sigma}^2$ vo vzorci (18), ktorú dosadzujeme do Black - Scholesovho vzorca.

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau h_t dt = \left[\frac{\beta_0}{\theta} t - \frac{1}{\theta} \left(h_0 - \frac{\beta_0}{\theta} e^{-\theta t} \right) \right]_0^\tau \frac{1}{\tau} = \left[\frac{\beta_0}{\theta} (T - t) + \left(h_t - \frac{\beta_0}{\theta} \right) \frac{1 - e^{-\theta(T-t)}}{\theta} \right] / (T-t) = \sigma^2$$

Vidíme, že pre uvedený model sú aproximácie cien pomocou deterministickej volatility a vzorca z [6] sa zhodujú.

3.3 Použitie v Stein-Steinovom modeli so stochastickou volatilitou

V nasledujúcej časti sa budeme venovať modelu, ktorý uvažuje ceny akcií sledujúce proces so stochasticky sa meniacou volatilitou. Model navrhli Elias M. Stein a Jeremy C. Stein vo svojom článku *Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach* [8]. Tu si za základ zobrali proces so stochasticky sa meniacim parametrom volatility, ktorú bližšie opisujú rovnice

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma P dW_1, \\ d\sigma &= -\delta(\sigma - \theta) dt + k dW_2, \end{aligned} \tag{25}$$

kde podobne ako v predchádzajúcej časti označujeme cenu akcie ako S , σ je opäť označením pre volatilitu tejto akcie. Parametre k , μ , δ a θ predstavujú konštanty nemenné v čase. Nakoniec dW_1 a dW_2 sú dva nezávislé Wienerove procesy.

Treba tiež dodať, že v ďalšej práci nás bude zaujímať, ako vyzerá $d\sigma^2$, pričom ak späťne naše výsledky dosadíme do (25), kde pracujeme so σ , môžu nastať menšie odchýlky spôsobené tým, že σ uvažujeme ako $\sqrt{\sigma^2} = |\sigma|$. Zaujímáť nás bude, ako bude vyzeráť tento model pre prípad, že by sme podobne ako v prvej časti uvažovali volatilitu v tvare σ^2 . Snažíme sa teda zistiť, čomu sa bude rovnať $d\sigma^2$. Pomocou Itóovej lemy dostávame

$$d\sigma^2 = (-2\sigma\delta(\sigma - \theta) + k^2)dt + kdz_t.$$

Pre zjednodušenie výpočtov si teraz urobíme substitúciu $\sigma^2 = h$ a postupujeme ako v prvej časti práce, teda sa pozrieme, ako veľmi sa zmenia naše hodnoty cien opcií od hodnôt v práci autorov, ak zanedbáme stochastickú časť procesu

$$dh = (-2\sqrt{h}\delta(\sqrt{h} - \theta) + k^2)dt.$$

Prepíšeme do tvaru

$$\dot{h}_t = \frac{dh}{dt} = 2\theta\delta\sqrt{h} - 2\delta h + k^2.$$

Opať použijeme metódu separácie premenných a dostaneme

$$dt = \frac{dh}{2\theta\delta\sqrt{h} - 2\delta h + k^2},$$

$$t = \int \frac{2x}{2\theta\delta x - 2\delta x^2 + k^2} dx = \int \frac{2x}{-2\delta(x^2 - \theta x - \frac{k^2}{2\delta})} dx. \quad (26)$$

Menovateľ rovnice (26) teraz upravujeme metódou úpravy na úplný štvorec

$$= -\frac{1}{\delta} \int \frac{x}{(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{2k^2 + \theta^2\delta}{4\delta}} dx.$$

V ďalšom kroku urobíme substitúciu $x - \frac{1}{2}\theta = u$ a zároveň si výraz $\frac{2k^2 + \theta^2\delta}{4\theta}$ označíme ako n . Výraz bude teraz v tvare

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{\delta} \int \frac{u + \frac{1}{2}\theta}{u^2 - n} du, \\ t &= \frac{1}{\delta} \int \frac{u}{u^2 - n} du - \frac{\theta}{\delta^2} \int \frac{1}{-u^2 + n} du, \\ t &= -\frac{1}{2\delta} |\ln(u^2 - n)| - \frac{\theta}{2n\delta} \int \frac{1}{1 - \left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^2} du, \\ t &= -\frac{1}{2\delta} \ln|u^2 - n| - \frac{\theta\sqrt{n}}{2n\delta} \ln \left| \frac{1 + \frac{u}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{u}{\sqrt{n}}} \right| + c. \end{aligned}$$

Po spätnom dosadení substituovaných parametrov nakoniec dostaneme

$$t = -\frac{1}{2\delta} \left[\ln \left| \left(x_t - \frac{1}{2}\theta\right)^2 - \frac{2k^2 + \theta^2\delta}{4\delta} \right| - \theta \left(\frac{2k^2 + \theta^2\delta}{4\delta}\right)^{-\frac{1}{2}} \ln \left| \frac{1 + \frac{4\delta(x_t - \frac{1}{2}\theta)}{2k^2 + \theta^2\delta}}{1 - \frac{4\delta(x_t - \frac{1}{2}\theta)}{2k^2 + \theta^2\delta}} \right| \right] + c. \quad (27)$$

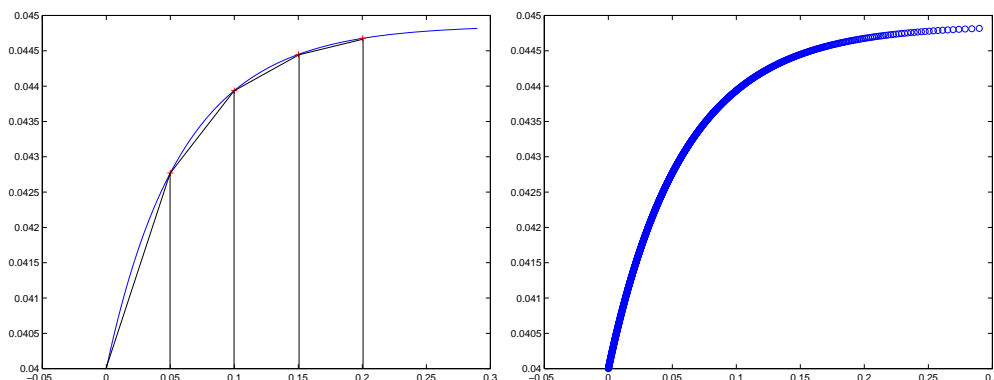
V ďalšej práci sme sa zamerali na programovanie daného modelu. Hodnotu konštanty c sme si vyjadrili na základe vyššie uvedenej rovnice pre $t = 0$.

$$c = \frac{1}{2\delta} \left[\ln \left| \left(x_0 - \frac{1}{2}\theta\right)^2 - \frac{2k^2 + \theta^2\delta}{4\delta} \right| - \theta \left(\frac{2k^2 + \theta^2\delta}{4\delta}\right)^{-\frac{1}{2}} \ln \left| \frac{1 + \frac{4\delta(x_0 - \frac{1}{2}\theta)}{2k^2 + \theta^2\delta}}{1 - \frac{4\delta(x_0 - \frac{1}{2}\theta)}{2k^2 + \theta^2\delta}} \right| \right]$$

Hodnotu integrálu sme vyjadrili pomocou numerickej metódy lichobežníkov. Všeobecným zadaním úlohy, ktorú je možno riešiť lichobežníkovou metódou je zistiť integrál funkcie $f(x)$, ktorá je zadaná ako

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

. Najskôr si interval medzi bodmi a a b rozdelíme na n intervalov. Dostávame teda jednotlivé intervaly ohraničené bodmi $a = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$. Teraz si funkčné hodnoty medzi $x(i)$ a $x(i+1)$, resp. $f(x_i)$ a $f(x_{i+1})$ nahradíme priamkou, čím dostávame lichobežník, ktorého obsah už vieme jednoducho vypočítať.



Obrázok 4: Vľavo ilustrácia lichobežníkovej metódy, vpravo ukážka použitého delenia.

Vytvorili sme vektor x (na obrázku na vertikálnej osi) s rovnomerným delením a zo vzorca (27) sme dopočítali vektor t (na obrázku na horizontálnej osi). Pomocou týchto hodnôt sme počítali integrál uvedenou metódou lichobežníkov.

3.4 Nevýhody aproximácie tohto typu

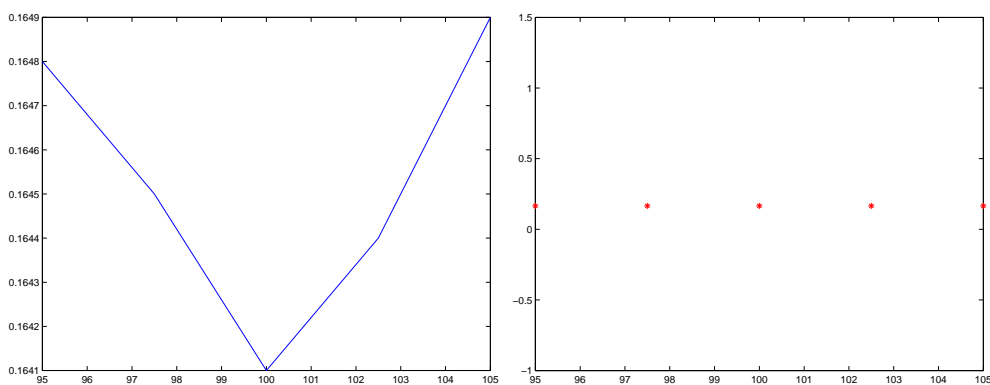
Pri používaní Black - Scholesovho vzorca je jednoduché zistiť hodnoty vstupujúcich členov ako je cena akcie, expiračná cena a čas do expirácie. Pomerne ťažšie je stanoviť úrokovú sadzbu bezkupónových dlhopisov, ktorá je však časovo takmer stála, a preto sa dá viacmenej presne ekonometricky odhadnúť z predchádzajúcich hodnôt. Pri historickej volatilitate už vzniká väčší problém pri určovaní jej hodnoty. Pri ekonometrickom odhade vznikajú otázky, aký časový horizont zvoliť, frekvenciu použitých dát. Implikovanou volatilitou nazývame jediné hľadané číslo $\sigma > 0$ riešiacie implicitnú rovnicu $\bar{V} = V(S, t, \sigma, r)$, kde S , r a t sú dané a tiež je daná hodnota opcie \bar{V} s expiračnou cenou E v čase T . Implikovaná volatilita sa odlišuje od historickej volatility, pretože historická je počítaná z historických cien akcie, ktoré sú známe.

V nasledujúcej tabuľke sú pre porovnanie uvedené hodnoty cien opcií počítané presným riešením GARCH modelu s príslušnou volatilitou a ceny opcií počítané pomocou nami vytvorenej aproximácie pre rôzne expiračné ceny.

Expiračná cena	Presné riešenie	Implikovaná volatilita z presného riešenia	Aproximácia	Implikovaná volatilita z aproximácie
95	5,560	0,1648	5,5823	0,1655
97,5	3,712	0,1645	3,6545	0,1655
100	2,268	0,1641	2,3812	0,1655
102,5	1,263	0,1644	1,2462	0,1655
105	0,639	0,1649	0,6853	0,1655

Tabuľka 3: Implikované volatility z presného a približného riešenia GARCH modelu pre rôzne expiračné ceny.

Grafy závislosti implikovanej volatILITY počítanej z presných riešení GARCH modelu a riešení počítaných pomocou našej aproximácie v závislosti od expiračných cien, tzv volatILITY smile. Vľavo je uvedený graf závislosti pre presné riešenia, vpravo pre riešenia dané aproximáciou.



Obrázok 5: VolatILITY smile pre GARCH model

Ďalej uvádzame porovnanie hodnôt cien opcií počítaných presným riešením GARCH modelu s príslušnou volatILITY a ceny opcií počítané pomocou nami vytvorenej aproximácie pre rôzne časy do expirácie.

Expiračný čas	Presné riešenie	Implikovaná volatilita z presného riešenia	Aproximácia	Implikovaná volatilita z aproximácie
5	5,012	0,1666	5,0117	0,1655
10	5,086	0,1662	5,0651	0,1655
30	5,560	0,1648	5,5418	0,1655
50	6,030	0,1646	6,0776	0,1655
100	7,028	0,1646	7,0398	0,1655

Tabuľka 4: Implikované volatility z presného a približného riešenia GARCH modelu pre rôzne časy do expirácie.

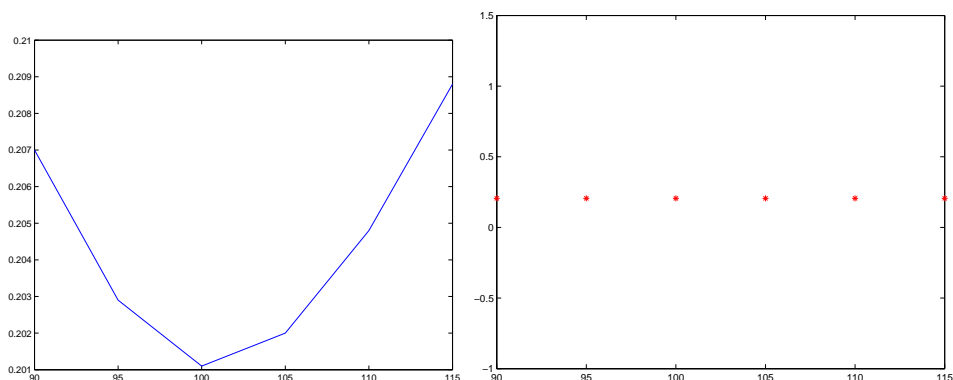
Expiračná cena	Presné riešenie	Implikovaná volatilita z presného riešenia	Aproximácia	Implikovaná volatilita z aproximácie
90	10,77	0,2070	10,7725	0,2056
95	6,21	0,2029	6,2335	0,2056
100	2,72	0,2011	2,7752	0,2056
105	0,85	0,2020	0,8831	0,2056
110	0,19	0,2048	0,1937	0,2056
115	0,03	0,2088	0,0292	0,2056

Tabuľka 5: Implikované volatility z presného a približného riešenia Stein-Steinovho modelu pre čas do expirácie 1 mesiac.

V tabuľke 5 sú pre porovnanie uvedené hodnoty cien opcí počítané presným riešením Stein-Steinovho modelu s príslušnou volatilitou a ceny opcí počítané pomocou aproximácie pre rôzne expiračné ceny s časom do expirácie 1 mesiac.

Obrázok 6 zobrazuje graf závislosti implikovanej volatility počítanej z presných riešení a z riešení našej aproximácie v závislosti od expiračných cien, tzv volatility smile

V tabuľke 6 sú pre porovnanie uvedené hodnoty cien opcí počítané presným riešením garch modelu s príslušnou volatilitou a ceny opcí počítané pomocou nami vytvorenej



Obrázok 6: Volatility smile pre Stein-Steinov model

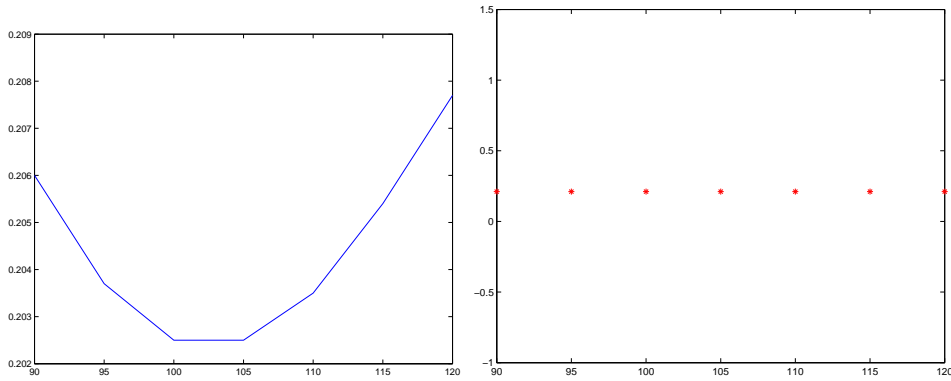
Expiračná cena	Presné riešenie	Implikovaná volatilita z presného riešenia	Aproximácia	Implikovaná volatilita z aproximácie
90	12,6	0,2060	12,6440	0,2108
95	8,55	0,2037	8,6547	0,2108
100	5,28	0,2025	5,4357	0,2108
105	2,95	0,2025	3,1104	0,2108
110	1,50	0,2035	1,6175	0,2108
115	0,70	0,2054	0,7655	0,2108
120	0,31	0,2077	0,331	0,2077

Tabuľka 6: Implikované volatILITY z presného a približného riešenia Stein-Steinovho modelu pre čas do expirácie 3 mesiace.

aproximácie pre rôzne expiračné ceny s časom do expirácie 3 mesiace. Graf závislosti implikovanej volatILITY počítanej z presných riešení a z riešení našej aproximácie v závislosti od expiračných cien, tzv volatility smile

Graf závislosti implikovanej volatILITY počítanej z presných riešení a z riešení našej aproximácie v závislosti od expiračných cien, tzv volatility smile

Z výsledkov vidieť, že implikovaná volatilita počítaná pomocou aproximácie v závislosti od expiračnej ceny je konštantná. Implikovaná volatilita odvodená z presného



Obrázok 7: Volatility smile pre druhy model

riešenia vytvára volatility smile. Závislosť od času do expirácie nevieme posúdiť pre nedostatok pozorovaných hodnôt.

3.5 Presnosť aproximácie tohto typu

Presná cena opcie je stredná hodnota Black - Scholesovej ceny, ak do nej dosadíme $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(S) dS$, kde strednú hodnotu berieme vzhľadom na pravdepodobnostné rozdelenie $\bar{\sigma}^2$.

$$V = \int_0^\infty V_{BS}(\bar{\sigma}^2) f(\bar{\sigma}^2) d\bar{\sigma}^2$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(S) dS$$

Použijeme Taylorov rozvoj $V_{BS}(\bar{\sigma}^2)$ v okolí bodu $\sigma^{*2} = E[\sigma^2]$

$$V = \int_0^\infty [V_{BS}(\sigma^{*2}) + V'_{BS}(\sigma^{*2})(\sigma^{*2} - \bar{\sigma}^2) + \frac{1}{2}V''_{BS}(\sigma^{*2})(\sigma^{*2} - \bar{\sigma}^2)^2 + \frac{1}{6}V'''_{BS}(\sigma^{*2})(\sigma^{*2} - \bar{\sigma}^2)^3 + \dots] f(\bar{\sigma}^2) d\bar{\sigma}^2$$

$$= V_{BS}(\sigma^{*2}) \int_0^\infty f(\bar{\sigma}^2) d\bar{\sigma}^2 + V'_{BS}(\sigma^{*2}) \int_0^\infty (\sigma^{*2} - \bar{\sigma}^2) f(\bar{\sigma}^2) d\bar{\sigma}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}V''_{BS}(\sigma^{*2}) \int_0^\infty (\sigma^{*2} - \bar{\sigma}^2)^2 f(\bar{\sigma}^2) d\bar{\sigma}^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}V'''_{BS}(\sigma^{*2}) \int_0^\infty (\sigma^{*2} - \bar{\sigma}^2)^3 f(\bar{\sigma}^2) d\bar{\sigma}^2 + \dots$$

$$= V_{BS}(\sigma^{*2}) + \frac{1}{2}V''_{BS}(\sigma^{*2})E[(E[\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^2])^2] + \frac{1}{6}V'''_{BS}(\sigma^{*2})E[(E[\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}^2])^3] + \dots \quad (28)$$

Prvý člen rozvoja presnej ceny derivátu je $V_{BS}(\sigma^{*2})$, teda σ^{*2} dosadená do Black - Scholesovho vzorca. Máme teda dva prístupy k výpočtu približnej ceny:

- Zoberieme prvý člen rozvoja (28), t.j. do Black - Scholesovho vzorca dosadíme $\frac{1}{T-t} \int_t^T E[\sigma^2(s)]ds$.
- Použijeme postup z predchádzajúcich kapitol a do Black - Scholesovho vzorca dosadíme $\frac{1}{T-t} \int_t^T E[\tilde{\sigma}^2(s)]ds$, kde $\tilde{\sigma}^2(s)$ je riešením ODR $d\tilde{\sigma}(s) = \alpha(\tilde{\sigma}^2(s))ds$.

Zistíme teraz, kedy sú tieto dva postupy ekvivalentné. V tom prípade očakávame, že naša aproximácia pomocou deterministického vývoja volatility bude presnejšia. Uvidíme, že to platí pre GARCH model, ale nie pre druhý model sstochastickou volatilitou, ktorý sme uvažovali. Tým sa dá vysvetliť, prečo sme v predchádzajúcich častiach dostali presnejšie výsledky pre GARCH model.

Treba teda zistiť, kedy funkcia $g(s) = E[\sigma^2(s)]$ vyhovuje rovnici $dg(s) = \alpha(g(s))ds$. Zo stochastickej diferenciálnej rovnice

$$d\sigma^2 = \alpha(\sigma^2)dt + \beta(\sigma^2)dW$$

môžeme vyjadriť $\sigma^2(s)$ ako

$$\sigma^2(s) = \sigma^2(t) + \int_t^s \alpha(\sigma^2(u))du + \int_t^s \beta(\sigma^2(u))dW,$$

z čoho vyplýva, že

$$E[\sigma^2(s)] = \sigma^2(t) + E\left[\int_t^s \alpha(\sigma^2(u))du\right].$$

To znamená, že

$$\frac{d}{ds}E[\sigma^2(s)] = E[\alpha(\sigma^2(s))].$$

Toto sa má rovnať $\alpha(E[\sigma^2(s)])$. Ak označíme pre prehľadnosť náhodnú premennú $\sigma^2(s)$ ako X , má platiť

$$E[\alpha(X)] = \alpha(E[X]),$$

čo platí pre lineárnu funkciu α tvaru $\alpha(x) = c_1 + c_2x$. To znamená, že uvedené dva prístupy aproximácie riešenia sú ekvivalentné pre lineárny drift.

4 Ceny opcií ako náhodné premenné

Volatilita je náhodná premenná, preto ceny opcií sú náhodné premenné. Budú nás zaujímať vlastnosti týchto náhodných premenných. V tejto časti odvodíme limitné rozdelenie volatility. Najskôr proces vyjadrujúci volatilitu zapíšeme pomocou jedného Wienerovho procesu. Pre tento proces odvodíme limitné rozdelenie. Z rovnice (24) pre spojité verziu nami skúmaného modelu osamostatníme stochastickú časť dh_t a zistíme, aké má pravdepodobnostné rozdelenie. Stochastická časť sa skladá z dvoch nezávislých Wienerových procesov $dW_{1,t}$, $dW_{2,t}$, ktoré vystupujú v tvare

$$-2\beta_2\gamma_*h_t dW_{1,t} + \beta_2h_t dW_{2,t} \quad (29)$$

Keďže o diferenciáli Wienerovho procesu vieme, že je z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou rovnou nule a disperziou rovnou dt , platí

$$-2\beta_2\gamma_*h_t dW_{1,t} \sim N(0, (-2\beta_2\gamma_*h_t)^2 dt),$$

$$\beta_2h_t dW_{2,t} \sim N(0, (\beta_2h_t)^2).$$

Procesy $W_{1,t}$, $W_{2,t}$ sú nezávislé, preto

$$-2\beta_2\gamma_*h_t dW_{1,t} + \beta_2h_t dW_{2,t} \sim N(0, (4\beta_2^2\gamma_*^2h_t^2 + \beta_2^2h_t^2)dt) = N(0, \beta_2^2h_t^2(4\gamma_*^2 + 1)dt)$$

Proces pre volatilitu teda môžeme napísať v tvare

$$dh_t = \beta_2h_t\sqrt{4\gamma_*^2 + 1}dW_t + (\beta_0 - \theta h_t)dt,$$

t.j.

$$dh = (\beta_0 - \theta h_t)dt + qh_t dW_t, \quad (30)$$

kde $q = \beta_2\sqrt{4\gamma_*^2 + 1}$.

V nasledujúcej časti si odvodíme presne limitné pravdepodobnostné rozdelenie nami uvažovaného modelu, ktoré vychádza z odvodenia uvedenom v [9]. Generovaním náhodných čísel z tohto limitného rozdelenia a ich dosadením do približného riešenia môžeme generovať ceny opcií.

Vzťah medzi stochastickou diferenciálnou rovnicou a pravdepodobnostným rozdelením procesu v danom čase sa dá odvodiť z Feynmann - Kacovho vzorca [7]. Ak

$X(0) = X_0$, X vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t)), dW$$

potom hustota $f(t, X(X(t) = X_0))$ náhodnej premennej $X(s)$ bude vyhovovať Fokker-Planckovej parciálnej diferenciálnej rovnici

$$-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial(af)}{\partial h} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} \left(\frac{b^2 f}{2} \right) = 0, \quad (31)$$

so začiatočnou podmienkou $f(0, X) = \delta(X - X_0)$, kde δ je Diracova funkcia.

Ďalej hľadáme iba limitné rozdelenie procesu (30). To znamená, že ak bude existovať $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s, h) =: g(h)$, tak z rovnosti (31) bude vyplývať, že limitná hustota g bude spĺňať stacionárnu rovnicu

$$\frac{\partial ag}{\partial h} + \frac{\partial^2}{\partial h^2} \left(\frac{b^2 g}{2} \right) = 0 \quad \text{pre } h > 0 \quad (32)$$

a normováciu podmienku

$$\int_0^\infty g(y) = 1$$

Ak si teraz zintegrujeme (32) s dolnou hranicou rovnou nule a hornou rovnou y , dostávame

$$-ag + \frac{d}{dh} \left(\frac{b^2 g}{2} \right) - \left[\lim_{h \rightarrow 0} (-ag) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d}{dh} \left(\frac{b^2 g}{2} \right) \right] = 0 \quad (33)$$

Teraz budeme uvažovať, že hustota g bude mať nasledujúce vlastnosti:

- $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$,
- derivácia $g'(h)$ je ohraničená v okolí bodu $h = 0$.

Pre $h \rightarrow 0$ potom dostávame

$$\begin{aligned} -a(h)g(h) &= K(\theta h)g(h) \rightarrow 0, \\ \frac{d}{dh} \left(\frac{b^2(h)g(h)}{2} \right) &= b(h) \frac{db(h)}{dh} g(h) + \frac{b^2(h)}{2} \frac{dg(h)}{dh} = b^2 h g(h) + \frac{b^2 h^2}{2} g'(h) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Z rovnice (33) potom zostane

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{b^2 g(h)}{2} \right) = ag(h).$$

Dosadíme funkcie a, b z nášho procesu:

$$\frac{d}{dh} \frac{q^2 h^2 g(h)}{2} = (\beta_0 - \theta h)g(h),$$

zderivujeme súčin na ľavej strane

$$q^2hg + \frac{q^2h^2}{2}\dot{g} = \beta_0g - \theta hg,$$

a získanú rovnicu upravíme

$$\dot{g}\frac{q^2h^2}{2} = g(\beta_0 - \theta h - q^2h).$$

Vidíme, že táto rovnica sa dá vyriešiť separáciou premenných

$$\frac{\dot{g}}{g} = \frac{2(\beta_0 - \theta h - q^2h)}{q^2h^2}.$$

Integrovaním dostaneme

$$\ln g = -\frac{2\beta_0}{q^2h} - 2\frac{\theta}{q^2} \ln h - 2 \ln h + c,$$

kde c je konštanta. Vyjadríme funkciu

$$g = e^{\left(-\frac{2\beta_0}{q^2h} - 2\frac{\theta}{q^2} \ln h - 2 \ln h + c\right)} = e^{-\frac{2\beta_0}{q^2h}} h^{-2\left(\frac{\theta}{q^2} + 1\right)} d = dh^{-2\left(\frac{\theta}{q^2} + 1\right)} e^{-\frac{2\beta_0}{q^2h}}$$

$$g = dh^{-2\left(\frac{\theta}{q^2} + 1\right)} e^{-\frac{2\beta_0}{q^2h}}$$

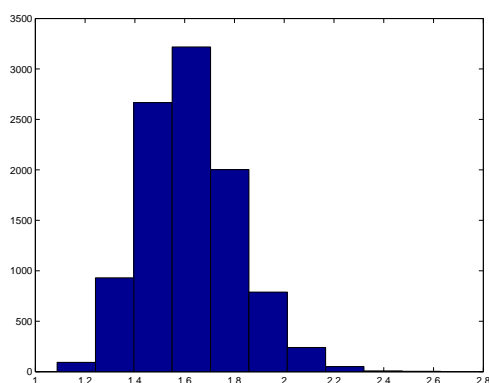
Konštantu d treba určiť tak, aby integrál z funkcie g bol rovný jednej. Nemusíme ju však počítať, lebo vieme, že túto hustotu má inverzné gamma rozdelenie. Inverzné gamma rozdelenie s parametrami α a β má nasledujúce vlastnosti:

- hustota: $f(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{x}}$
- stredná hodnota: $\frac{\beta}{\alpha-1}$
- variancia: $\frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ pre $\alpha > 2$
- ak platí $X \sim Inv-Gamma(k, \theta)$, potom $1/X \sim Gamma(k, \theta)$ Poslednú vlastnosť rozdelenia sme využili pre vytvorenie generátora náhodných čísel so vstupnými parametrami α a β . V našom prípade

$$\alpha = \frac{2\theta}{q^2} + 1 = \frac{2\theta}{\beta_2\sqrt{4\gamma_*^2 + 1}} + 1$$

$$\beta = \frac{2\beta_0}{q^2} = \frac{2\beta_0}{\beta_2\sqrt{4\gamma_*^2 + 1}}$$

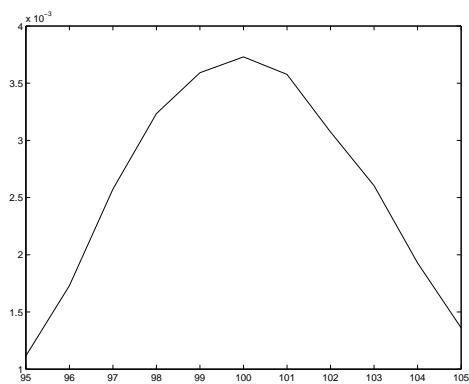
Stredná hodnota rozdelenia v našom prípade je $\frac{\beta_0}{\theta}$



Obrázok 8: Inverzné gamma rozdelenie generované pre 10 000 hodnôt

V obrázku 8 sa môžeme presnejšie pozrieť na histogram inverse gamma rozdelenia generovaného konkrétne pre 10 000 hodnôt.

Ďalej uvádzame graf závislosti disperzie od zmeny expiračných cien , kde na x-ovú os sme zobrazili expiračné ceny a na y-ovú disperzie.



Obrázok 9: Závislosť disperzie od zmeny expiračných cien

5 Záver

V práci sme sa zaoberali modelovaním cien opcií so stochastickou volatilitou. Tieto modely nám poskytujú možnosť získať relatívne presné výsledné hodnoty pri oceňovaní opcií.

V prvej časti sme sa oboznámili s niektorými základnými pojmami z oblasti oceňovania finančných derivátov, konkrétne opcií. Vysvetlili sme si pojem volatility, deterministickej volatility závislej od času a stochastickej volatility a uviedli sme niekoľko konkrétnych príkladov modelov, ktoré sú založené na poslednom type volatility.

V druhej časti sme si predstavili dva konkrétne modely, ktoré sme využívali pre odvodenie aproximácií cien opcií a ich implikovaných volatilit. Aproximácie cien opcií v prvom, GARCH modeli, sme riešili analytickým spôsobom. V druhom modeli, ktorý sme nazvali Stein-Steinov model, sme vzhľadom na nemožnosť použitia analytického postupu museli riešiť aproximáciu numerickým spôsobom, konkrétne lichobežníkovou metódou.

Týmto postupom sme si pre oba modely vypočítali aproximácie cien opcií, a tie sme potom porovnali s presnými riešeniami, ktoré uvádzali autori článkov. Zaujímalo nás, ako veľmi sa odlišujú naše aproximované hodnoty pri počítaní s vynechanou stochastickou časťou modelu od presných riešení.

Počítaním presnosti odhadov sme zistili, že k odchýlkam medzi presným a aproximovaným riešením dochádza aj závislosti od tvaru driftu daného modelu. V prvom modeli nám uvažovaný drift vychádzal v lineárnom tvare. V druhom modeli vychádzal drift konštantný, pričom ďalším skúmaním sme zistili, že presnejšia aproximácia vychádza pre lineárny drift.

Zistili sme teda, že oba modeli sú reálne použiteľné v praxi, pretože nám dávajú dostatočne presnú informáciu o budúcej cene opcie, pričom prvý model s lineárnym driftom aproximuje ceny opcií presnejšie ako druhý model s konštantným driftom.

Referencie

- [1] Aristoteles: Politics. A Treatise on Government, <http://www.gutenberg.org/etext/6762>
- [2] Black, F., Scholes, M., Merton, R.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3 (May - June, 1973), pp. 637 - 654
- [3] Ševčovič, D.: Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov, <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/skripta/derivaty/index.html>
- [4] Wilmott, P., Howison, S., Dewynne, J.: *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge University Press, 1995
- [5] Buchbinder, G.L., Chistilin, K.M.: Multiple Time Scales and the Empirical Models for Stochastic Volatility, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 379, 1st June 2007, pp. 168 - 178
- [6] Choi, Y.: An Analytical Approximation to the Option Formula for the GARCH Model, *International Review of Financial Analysis*, Vol. 14, Issue 2 (2005), pp. 149 - 164
- [7] Goodman, J., Moon, K. S., Szepessy, A., Tempone, R., Zouraris, G.: *Stochastic and Partial Differential Equations with Adapted Numerics*, Chapter 4, NADA, Royal Institute of Technology, Stockholm, <http://www.math.kth.se/szepessy/sdepde.pdf>
- [8] Stein, E., Stein, J.: Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach, *The Review of Financial Studies*, Vol. 4, Issue 4 (1991), pp. 727 - 752
- [9] Stehlíková Beáta, 2004: Analýza dvojfaktorového modelu vývoja úrokovej miery so stochastickou volatilitou, diplomová práca, FMFI UK, <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/>