

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE



**Kalibrácia dvojfaktorového  
konvergenčného modelu úrokových mier**

Diplomová práca

Bratislava 2008

Lenka Valíková

# Kalibrácia dvojfaktorového konvergenčného modelu úrokových mier

## DIPLOMOVÁ PRÁCA

Lenka Valíková

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY**

Študijný odbor: Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Beáta Stehlíková

Bratislava 2008

## Čestné prehlásenie

Týmto prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne pod vedením vedúcej diplomovej práce, s použitím teoretických vedomostí a uvedenej literatúry.

V Bratislave, 28. 04. 2008

.....

*Vlastnoručný podpis*

## **Pod'akovanie**

Úprimne ďakujem vedúcej diplomovej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej za odborné vedenie, rady a všetok čas, ktorý mi venovala. Moja špeciálna vďaka patrí aj Mgr. Eve Jamrichovej. Taktiež ďakujem všetkým, ktorí ma podporovali počas celého štúdia.

## **Abstrakt**

Úroveň úrokových mier je jeden z najdôležitejších nástrojov monetárnej politiky, o ktorý po prijatí eura prídeme. Vplýva na ceny dlhopisov a ostatných derivátov úrokovej miery. Autori konvergenčného modelu, sa zamerali práve na modelovanie úrokových krajín pred prijatím eura. Vyvinuli model, v ktorom prvý faktor je krátkodobá úroková miera konkrétnej krajiny. Druhým je európska úroková miera, o ktorej predpokladajú, že sa z dlhodobého hľadiska približuje k nejakej rovnovážnej hodnote. V práci sa zaoberáme kalibráciou tohto modelu. Porovnáme ju s kalibráciou získanou Vašíčkovým modelom.

## **Kľúčové slová:**

konvergenčný model, úroková miera, dlhopis, výnosové krivky

# Obsah

Úvod	3
<b>1 Základné pojmy</b>	<b>4</b>
<b>2 Modelovanie úrokových mier</b>	<b>8</b>
2.1 Jednofaktorové modely . . . . .	8
2.1.1 Odvodenie PDR na výpočet ceny dlhopisu . .	9
2.1.2 Príklady jednofaktorových modelov . . . . .	11
2.2 Dvojfaktorové modely oceňovania dlhopisov . . . . .	13
2.2.1 Odvodenie PDR na výpočet ceny dlhopisu . .	14
2.2.2 Príklady dvojfaktorových modelov . . . . .	17
<b>3 Konvergenčný model</b>	<b>19</b>
3.1 Európske úrokové miery . . . . .	20
3.1.1 Proces pre okamžitú úrokovú mieru . . . . .	20
3.1.2 Ceny dlhopisov . . . . .	20
3.1.3 Vlastnosti výnosových kriviek . . . . .	22
3.2 Domáce úrokové miery . . . . .	24
3.2.1 Proces pre okamžitú úrokovú mieru . . . . .	24
3.2.2 Ceny dlhopisov . . . . .	24
3.2.3 Vlastnosti výnosových kriviek . . . . .	26
3.3 Empirické výsledky autorov modelu . . . . .	27

<b>4 Kalibrácia Konvergenčného modelu</b>	<b>29</b>
4.1 Európske úrokové miery . . . . .	29
4.2 Domáce úrokové miery . . . . .	39
4.2.1 Voľba počiatočných aproximácií . . . . .	40
<b>Záver</b>	<b>47</b>
<b>Literatúra</b>	<b>47</b>
<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>50</b>
<b>Zoznam tabuliek</b>	<b>51</b>

# Úvod

Úroková miera - cena peňazí vyjadruje koľko musí subjekt zaplatiť, ak si požičiava, alebo koľko dostane pri poskytnutí pôžičky. Na finančnom trhu sa však vo veľkej miere obchoduje s ich derivátmi. Hodnota týchto derivátov závisí práve od hodnôt úrokových mier. Pre čo najpresnejšie oceňovanie derivátov úrokových mier potrebujeme modelovať vývoj práve vývoj úrokových mier.

Aktuálnym modelom pre krajiny v procese pred prijatím eura je napríklad aj dvojfaktorový konvergenčný model, ktorý v práci porovnáваме so známym jednofaktorovým Vašíčkovým modelom.

Práca je rozdelená na štyri časti. V prvej časti definujeme základné pojmy, s ktorými budeme ďalej pracovať. Druhá časť popisuje modelovanie úrokových mier pomocou všeobecného jednofaktorového, ako aj dvojfaktorového modelu. V tejto časti sú odvodené partiálne diferenciálne rovnice na výpočet ceny dlhopisu, ako aj príklady jedno- respektíve dvojfaktorových modelov. V tretej časti predstavujeme konvergenčný model z pohľadu európskych a domácich úrokových mier. Posledná časť pojednáva o kalibrácii modelu. Jej obsahom sú aj konkrétne výsledky našej kalibrácie.



# Kapitola 1

## Základné pojmy

Základný derivát úrokových mier je *dlhopis*. Je to cenný papier, v ktorom sa dlžník zaväzuje majiteľovi, že v stanovenom čase  $T$  vyplatí nominálnu hodnotu a v dohodnutých časových obdobiach mu bude vyplácať pravidelný úrok, tzv. *kupón*. V prípade bezkupónového dlhopisu, ktorým sa budeme zaoberať, dlžník nevypláca pravidelný úrok.

Ak uvažujeme diskontné úročenie, hodnota bezkupónového dlhopisu je

$$P = \frac{F}{(1 + r_n)^n},$$

kde  $P$  je cena dlhopisu,  $F$  je jeho nominálna hodnota,  $r_n$  je časovo meniaci sa úrok. Bezkupónový dlhopis s nominálnou hodnotou  $F = 1$  sa nazýva *diskontný dlhopis*. Cena tohto cenného papiera závisí od okamžitého času  $t$  a od doby jeho splatnosti  $T$ .

Pri spojitom úročení je cena diskontného dlhopisu daná vzťahom:

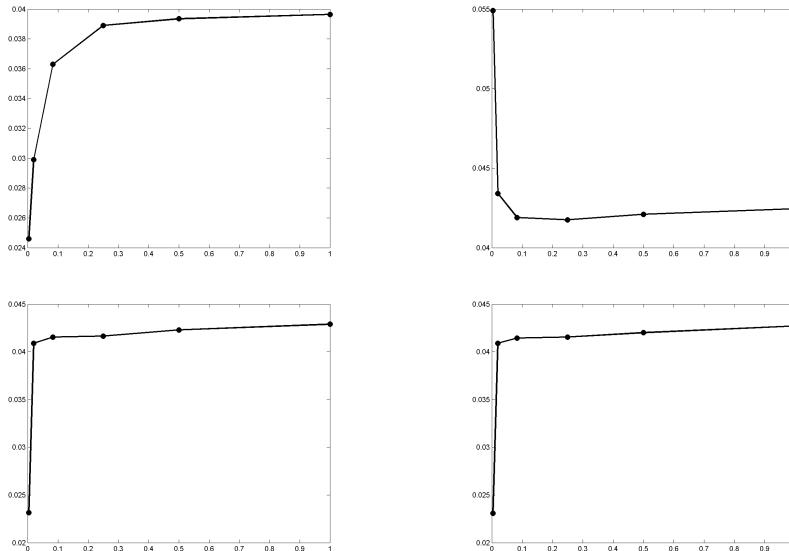
$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)},$$

pričom  $R(t, T)$  je spojitá úroková miera na obdobie od  $t$  do  $T$ . Z predošlého vzťahu vieme vyjadriť spojitý úrok  $R(t, T)$ :

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t}. \quad (1.1)$$

Toto vyjadrenie spojitého úroku nám umožňuje vyjadriť krivku časovej štruktúry úrokových mier, ak poznáme ceny dlhopisov v čase  $t$  pre každú maturitu  $T$ . Výnosová krivka alebo časová štruktúra úrokových mier je závislosť úrokovej miery  $R(t, T)$  od maturity dlhopisu  $T$ . Nakoľko na dlhšiu dobu požičiavame väčšinou s vyšším úrokom, predpokladáme, že krivka bude rastúca. Krivka môže mať aj klesajúci charakter a to pri očakávaní poklesu úrokových mier. Začiatočný bod tejto krivky predstavuje úrok na veľmi krátku dobu a je definovaný nasledovným vzťahom:

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T) = -\frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial T}$$

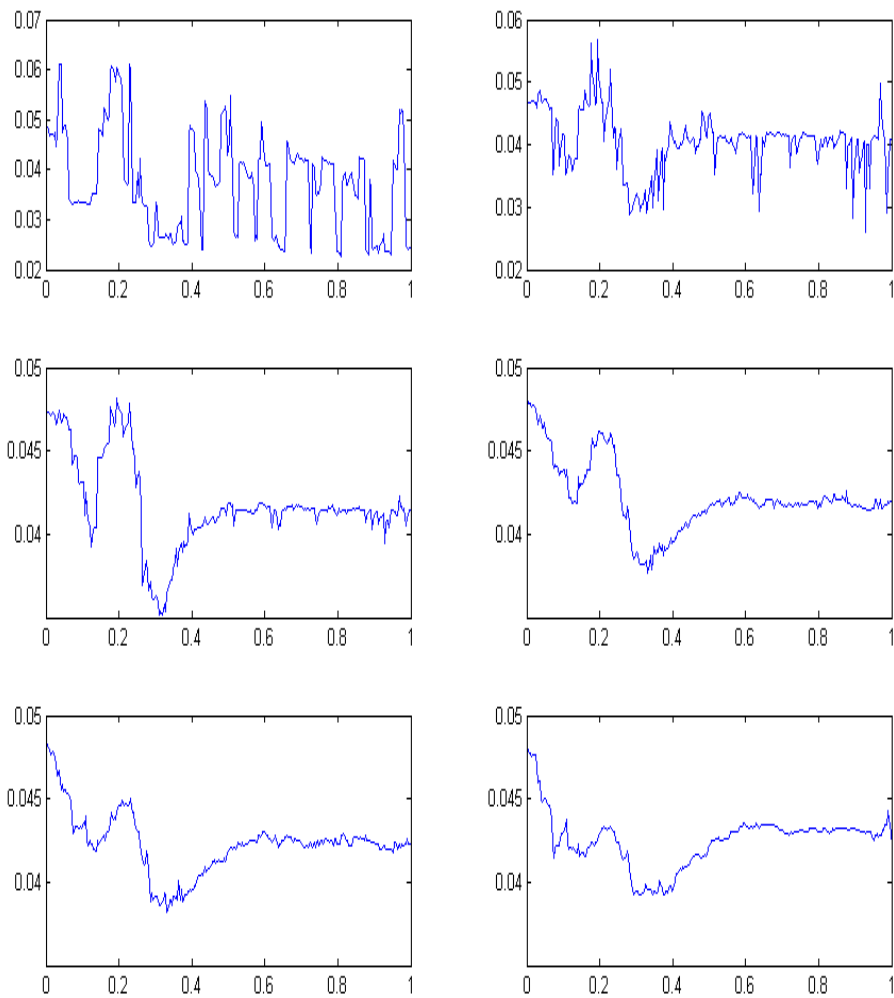


Obrázok 1.1: Časová štruktúra úrokových mier pre dáta *BRIBOR-u* v dňoch 30.3, 29.7, 28.9 a 31.12 2007

Pre ukážku vývoja úrokových mier na jednotlivé časové úseky použijeme úrokové miery *BRIBOR-u*.

*BRIBOR* (Bratislava Interbank Offered Rates) je fixing úrokových sadziieb na trhu medzibankových depozít. Vypočítava sa z kotácií referenčných bánk predstavujúcich aktuálne kótované sadzby k 11. hodine bežného dňa. V súčasnosti je na Slovensku sedem referenčných bánk. Počíta sa ako nevážený aritmetický priemer pri odstránení najvyššej a najnižšej kótovacej hodnoty pre každé kótovacie obdobie (1 deň, 7 dní, 2 týždne, 1, 3, 6, 9 a 12 mesiacov) a to v prípade, že danú lehotu kótujú aspoň tri banky. Na záver sa hodnota zaokrúhli na dve desatinné miesta [5].

Nasledujúce obrázky predstavujú vývoj úrokových mier za obdobia 1 deň, 1 týždeň, 1 mesiac, 3 mesiace, 6 mesiacov a 1 rok po poradí. Použijeme priemer bid a ask hodnoty, ktorý prevedieme na desatinné číslo. S touto priemernou hodnotou budeme pracovať aj neskôr pri kalibrácii.



Obrázok 1.2: Vývoj úrokových mier *BRIBOR*-u v roku 2007

## Kapitola 2

# Modelovanie úrokových mier

V modeloch, ktoré si predstavíme, budeme vychádzať zo stochastického vývoja úrokových mier, nakoľko sa aj v reálnom svete ukazuje ich náhodný vývoj. Na modelovanie tohto vývoja sa používajú stochastické diferenciálne rovnice. Stochastickosť vývoja je daná prítomnosťou Wienerovho procesu  $w$  je vyjadrená stochastickosť rovnice. V diplomovej práci sa budeme zaoberať modelmi, ktoré popisujú vývoj okamžitej úrokovej miery,  $r$

### 2.1 Jednofaktorové modely

Jednofaktorové modely sú najjednoduchšou formou modelovania úrokovej miery. Model pozostáva z jednej rovnice, respektíve z jedného faktoru, ktorý popisuje vývoj okamžitej úrokovej miery. Je popísaná spojitým Markovovským stochastickým procesom, ktorý je daný nasledovnou stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr = u(r, t) dt + w(r, t) dz \quad (2.1)$$

Deterministický člen  $u dt$  vyjadruje okamžitý drift procesu. Náhodnú zložku predstavuje volatilita  $w dz$ , kde  $z$  je Wienerov proces.

### 2.1.1 Odvodenie PDR na výpočet ceny dlhopisu

V modeli predpokladáme, že cena dlhopisu je závislá len od okamžitej úrokovej miery  $r$ , aktuálneho času,  $t$  a maturity,  $T$ . Označme  $B(r, t)$  cenu dlhopisu. Na odvodenie vývoja ceny dlhopisu použijeme Itóovu lemu [4]. Stochastický vývoj ceny dlhopisu je potom daný nasledovne:

$$dB = \left( \frac{\partial B}{\partial t} + u \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) dt + w \frac{\partial B}{\partial r} dz \quad (2.2)$$

Vydelením tejto rovnosti cenou  $B$  dostaneme výraz pre relatívnu zmenu  $\frac{dB}{B}$ :

$$\frac{dB}{B} = \mu_B(r, t) dt + \sigma_B(r, t) dz, \quad (2.3)$$

kde

$$\mu_B(r, t) = \frac{1}{B} \left( \frac{\partial B}{\partial t} + u \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} \right) \quad (2.4)$$

a

$$\sigma_B(r, t) = \frac{1}{B} w \frac{\partial B}{\partial r}. \quad (2.5)$$

Na hedgovanie s dlhopisom si vytvoríme portfólio dvoch dlhopisov s rôznou maturitou  $T_1 \neq T_2$ :

- kúpime dlhopisy s maturitou  $T_1$  v celkovej hodnote  $V_1$
- predáme dlhopisy s maturitou  $T_2$  v celkovej hodnote  $V_2$ .

Potom hodnota nášho portfólia bude  $\pi = V_1 - V_2$ . Ak označíme  $B_1$ ,  $B_2$  ceny dlhopisov s maturitami  $T_1$ ,  $T_2$ , tak počet dlhopisov s maturitami  $T_1$  v našom portfóliu je  $\frac{V_1}{B_1}$  a počet dlhopisov s maturitami

$T_2$  je  $\frac{V_2}{B_2}$ . Zmena hodnoty portfólia potom je

$$\begin{aligned}
d\pi &= dV_1 - dV_2 = \\
&= \frac{V_1}{B_1} \cdot dB_1 + \frac{V_2}{B_2} \cdot dB_2 = \\
&= [V_1\mu_B(r, t, T_1) - V_2\mu_B(r, t, T_2)] dt + \\
&\quad + [V_1\sigma_B(r, t, T_1) - V_2\sigma_B(r, t, T_2)] dz
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Chceme vytvoriť bezrizikové portfólio, čiže portfólio bez stochastického člena  $dz$ . To sa nám podarí nasledovnou voľbou:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\sigma_B(r, t, T_2)}{\sigma_B(r, t, T_2) - \sigma_B(r, t, T_1)} \pi, \\
V_2 &= \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2) - \sigma_B(r, t, T_1)} \pi.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dosadením takto zvolených hodnôt  $V_1$  a  $V_2$  do rovnice vyjadrujúcej zmenu hodnoty portfólia (2.6) dostaneme:

$$d\pi = \pi \left[ \frac{\mu_B(r, t, T_1)\sigma_B(r, t, T_2) - \mu_B(r, t, T_2)\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2) - \sigma_B(r, t, T_1)} \right] dt. \tag{2.8}$$

Bezrizikové portfólio musí zarobiť bezrizikovú okamžitú úrokovú mieru, teda musí platiť

$$d\pi = r(t)\pi dt. \tag{2.9}$$

Rovnice (2.8) a (2.9) majú rovnaké ľavé strany, ich pravé strany preto môžeme dať do rovnosti. Túto vydelíme členom  $\pi dt$ , a dostaneme:

$$\frac{\mu_B(r, t, T_1)\sigma_B(r, t, T_2) - \mu_B(r, t, T_2)\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2) - \sigma_B(r, t, T_1)} = r(t) \tag{2.10}$$

Prenásobíme rovnicu výrazom z menovateľa a upravíme na tvar

$$\begin{aligned}
\mu_B(r, t, T_1)\sigma_B(r, t, T_2) - \mu_B(r, t, T_2)\sigma_B(r, t, T_1) &= \\
&= r(t)\sigma_B(r, t, T_2) - r(t)\sigma_B(r, t, T_1), \\
\mu_B(r, t, T_1)\sigma_B(r, t, T_2) - r(t)\sigma_B(r, t, T_2) &= \\
&= \mu_B(r, t, T_2)\sigma_B(r, t, T_1) - r(t)\sigma_B(r, t, T_1).
\end{aligned}$$

Následne vydelíme rovnicu súčinom  $\sigma_B(r, t, T_1)\sigma_B(r, t, T_2)$  čím dostaneme

$$\frac{\mu_B(r, t, T_1) - r(t)}{\sigma_B(r, t, T_1)} = \frac{\mu_B(r, t, T_2) - r(t)}{\sigma_B(r, t, T_2)}. \quad (2.11)$$

Výrazy na ľavej resp. pravej strane sa líšia maturitou. Keďže maturity  $T_1, T_2$  boli ľubovoľné, z tejto rovnosti vyplýva, že podiel  $\frac{\mu_B(r, t, T) - r(t)}{\sigma_B(r, t, T)}$  je nezávislý od maturity.

Zaveďme označenie

$$\lambda(r, t) = \frac{\mu_B(r, t, T) - r(t)}{\sigma_B(r, t, T)} \quad (2.12)$$

Táto veličina sa nazýva cena rizika pri úrokovej miere  $r$  v čase  $t$ . Vyjadruje nárast očakávanej okamžitej miery návratnosti dlhopisu na pridanú jednotku rizika. Ak za členy  $\mu_B(r, t, T)$  a  $\sigma_B(r, t, T)$  vo výraze (2.12) dosadíme (2.4) a (2.5), postupnými úpravami dostaneme rovnicu pre funkciu  $B(r, t)$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial B}{\partial r} - rB = 0, \quad \text{pre } t < T. \quad (2.13)$$

Koncovou podmienkou je  $B(r, T) = 1$ . Toto je parciálna diferenciálna rovnica, ktorá určuje cenu dlhopisu pre všeobecný tvar jednofaktorového modelu. Zadaním funkcií  $u(r, t)$ ,  $w(r, t)$  a  $\lambda(r, t)$  dostávame konkrétne modely. Vyriešením rovnice (2.13) dostaneme hodnotu dlhopisu v danom modeli.

### 2.1.2 Príklady jednofaktorových modelov

Najznámejšie a najpoužívanéjšie sú modely, v ktorých proces úrokovej miery  $r$  má vlastnosť "mean-reversion":

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma(r, t) dz, \quad \text{pre } \kappa > 0. \quad (2.14)$$



Deterministická zložka alebo drift modelu  $\kappa(\theta - r)$  má vlastnosť "ťahania" úrokovej miery  $r$  k dlhodobej rovnovážnej hodnote  $\theta$ . Ak je úroková miera  $r_t > \theta$ , proces je ťahaný "dolu" k  $\theta$ , teda drift je záporný. Naopak, ak  $r_t < \theta$ , proces ťahá úrokovú mieru "hore", vtedy je drift kladný. Sila tohto priťahovania je daná koeficientom  $\kappa$ .

Uvedieme teraz niekoľko typov modelov:

Jedeným z prvých modelov, ktorý sa pokúšal vysvetliť vývoj úrokovej miery, je *Vašíčkov model*<sup>1</sup> (1977). Vývoj úroku popisuje rovnicou:

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma dz, \quad \text{pre } \kappa, \sigma > 0. \quad (2.15)$$

Drift krátkodobej úrokovej miery,  $\kappa(\theta - r)$  závisí od jej súčasnej hodnoty,  $r_t$ . Volatilita modelu je konštantná. Okamžité úrokové miery Vašíčkovho modelu môžu nadobúdať aj záporné hodnoty [4]. Túto vlastnosť, ako aj konštantnosť volatility odstraňuje *CIR<sup>2</sup> model* (1985). Vývoj úrokovej miery popisuje rovnicou:

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma\sqrt{r} dz, \quad \text{pre } \kappa, \sigma > 0. \quad (2.16)$$

Z počiatočnej kladnej úrokovej miery sa nemôže stať jej hodnota zápornou [3]. Pridanie člena  $\sqrt{r}$  znamená, že volatilita stochastickej zložky procesu závisí od veľkosti úroku. Čím väčší je úrok, tým väčšiu volatilitu model predpokladá.

Existujú aj mnohé iné jednofaktorové modely. [tab.1] Istú množinu z nich vieme zapísať v tvare

$$dr = (\alpha + \beta r) dt + \sigma r^\gamma dw \quad (2.17)$$

<sup>1</sup>[3]

<sup>2</sup>Cox, Ingersoll, Ross [3]

Modely sa líšia v parametroch  $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ . Stochastickú zložku majú všetky z nich. Sú však medzi nimi aj také, ktoré majú deterministickú zložku nulovú. Takéto modely predpokladajú vývoj úrokovej miery za úplne náhodný.

<b>model</b>	<b>tvar</b>
Vašíček	$dr = (\alpha + \beta r) dt + \sigma dw$
Cox, Ingersoll, Ross (1985)	$dr = (\alpha + \beta r) dt + \sigma r^{1/2} dw$
Geometric Brownian model	$dr = \beta r dt + \sigma r dw$
Cox, Ingersoll, Ross (1980)	$dr = \sigma r^{3/2} dw$
Dothan	$dr = \sigma r dw$
Brennan-Schwartz	$dr = (\alpha + \beta r) dt + \sigma r dw$
Constant elasticity of variance model	$dr = \beta r dt + \sigma r^\gamma dw$

Tabuľka 2.1: Jednofaktorové modely

*Chan et al. (1992)* [3] analyzovali modely tvaru (2.17), ktoré zahŕňajú viaceré známe modely [ref na tab] použitím všeobecnej momentovej metódy. Požili dáta výnosov jednomesačných Treasury Bills. Zistili, že modely, v ktorých koeficient závislosti volatility od výšky úroku,  $\gamma$  je  $\gamma \geq 1$  popisujú vývoj krátkodobej úrokovej miery lepšie, ako modely s  $\gamma < 1$ .

## 2.2 Dvojfaktorové modely oceňovania dlhopisov

Hoci jednofaktorové modely popisujú časovú štruktúru úrokových mier dosť dobre, sú nedostatočné v popisovaní správania sa z dlhodobého hľadiska vývoja úrokových mier. Toto vedie k dvojfaktorovým modelom, ktoré zaraďujeme do väčšej skupiny viacfaktorových modelov. Ukazuje sa, že viacfaktorové modely popisujú správanie sa časovej štruktúry úrokových mier lepšie ako jednofaktorové.

V jednofaktorových modeloch bola celá výnosová krivka závislá od jedného stochastického parametra. V dvojfaktorových modeloch nám na zachytenie vývoja modelovanej úrokovej miery budú slúžiť dve rovnice. Všeobecný tvar modelu je:

$$dr = u_r(r, s, t) dt + w_r(r, s, t) dz_1, \quad (2.18)$$

$$ds = u_s(r, s, t) dt + w_s(r, s, t) dz_2. \quad (2.19)$$

V modeli sú dva Wienerové procesy  $z_1$  a  $z_2$ , medzi ktorými je konštantná korelácia  $\rho$ .

### 2.2.1 Odvodenie PDR na výpočet ceny dlhopisu

V dvojfaktorovom modeli predpokladáme, že cena dlhopisu je závislá od okamžitej úrokovej miery  $r$ , druhého faktora  $s$ , aktuálneho času  $t$  a maturity  $T$ .

Nech  $B(r, s, t, T)$  je cena diskontného dlhopisu. Ako pri odvodení PDR na výpočet ceny dlhopisu vo všeobecnom jednofaktorovom modeli, aj tu použijeme Itóovu lemu [4]. Potom stochastický vývoj ceny dlhopisu je:

$$\begin{aligned} dB = & \left( \frac{\partial B}{\partial t} + u_r \frac{\partial B}{\partial r} + u_s \frac{\partial B}{\partial s} + \frac{1}{2} w_r^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \rho w_r w_s \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial s} + \frac{1}{2} w_s^2 \frac{\partial^2 B}{\partial s^2} \right) dt + \\ & + w_r \frac{\partial B}{\partial r} dz_1 + w_s \frac{\partial B}{\partial s} dz_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Predelením tejto rovnosti cenou  $B$  dostaneme výraz pre relatívnu zmenu  $\frac{dB}{B}$ :

$$\frac{dB}{B} = \mu(r, s, t) dt + \sigma_r(r, s, t) dz_1 + \sigma_s(r, s, t) dz_2, \quad (2.21)$$

pričom

$$\begin{aligned} \mu(r, s, t) = \frac{1}{B} \left[ \frac{\partial B}{\partial t} + u_r \frac{\partial B}{\partial r} + u_s \frac{\partial B}{\partial s} + \frac{1}{2} w_r^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \right. \\ \left. + \rho w_r w_s \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial s} + \frac{1}{2} w_s^2 \frac{\partial^2 B}{\partial s^2} \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\sigma_r(t, s, t) = \frac{1}{B} w_r \frac{\partial B}{\partial r} \quad (2.23)$$

a

$$\sigma_s(t, s, t) = \frac{1}{B} w_s \frac{\partial B}{\partial s} \quad (2.24)$$

Na hedgovanie s dlhopisom budeme potrebovať dlhopisy s troma rôznymi maturitami  $T_1 \neq T_2 \neq T_3$ . Dôvodom je prítomnosť dvoch stochastických faktorov v modeli. Skonstruujme teda portfólio dlhopisov:

- s maturitou  $T_1$  v celkovej hodnote  $V_1$ ,
- s maturitou  $T_2$  v celkovej hodnote  $V_2$ ,
- s maturitou  $T_3$  v celkovej hodnote  $V_3$ .

Hodnota nášho portfólia bude  $\pi = V_1 + V_2 + V_3$ . Ak označíme  $B_1, B_2, B_3$  ceny dlhopisov s maturitami  $T_1, T_2$  a  $T_3$ , tak počet dlhopisov s maturitami  $T_1$  v našom portfóliu je  $\frac{V_1}{B_1}$ , počet dlhopisov s maturitami  $T_2$  je  $\frac{V_2}{B_2}$  a počet dlhopisov s maturitami  $T_3$  je  $\frac{V_3}{B_3}$ . Zmena hodnoty portfólia potom je

$$\begin{aligned} d\pi &= dV_1 + dV_2 + dV_3 = \\ &= \frac{V_1}{B_1} \cdot dB_1 + \frac{V_2}{B_2} \cdot dB_2 + \frac{V_3}{B_3} \cdot dB_3 = \\ &= [V_1\mu(T_1) + V_2\mu(T_2) + V_3\mu(T_3)] dt + \\ &\quad + [V_1\sigma_r(T_1) + V_2\sigma_r(T_2) + V_3\sigma_r(T_3)] dz_1 + \\ &\quad + [V_1\sigma_s(T_1) + V_2\sigma_s(T_2) + V_3\sigma_s(T_3)] dz_2. \end{aligned}$$

Teraz potrebujeme vytvoriť bezrizikové portfólio. Urobíme to tak, že stochastické členy položíme rovné 0. Dostaneme:

$$\begin{aligned} V_1\sigma_r(T_1) + V_2\sigma_r(T_2) + V_3\sigma_r(T_3) &= 0, \\ V_1\sigma_s(T_1) + V_2\sigma_s(T_2) + V_3\sigma_s(T_3) &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Zmena hodnoty bezrizikového portfólia teraz bude

$$d\pi = [V_1\mu(T_1) + V_2\mu(T_2) + V_3\mu(T_3)] dt. \quad (2.26)$$

Toto musí zarobiť bezrizikovú okamžitú úrokovú mieru, aby nedošlo k arbitráži, teda musí platiť

$$d\pi = r(V_1 + V_2 + V_3) dt. \quad (2.27)$$

Rovnice (2.26) a (2.27) majú rovnaké ľavé strany, preto ich dáme do rovnosti. Od takto vzniknutej rovnice odpočítame člen  $r(V_1 + V_2 + V_3) dt$ . Upravením členov rovnice dostaneme:

$$V_1[\mu(T_1) - r] + V_2[\mu(T_2) - r] + V_3[\mu(T_3) - r] = 0 \quad (2.28)$$

Rovnice (2.25), (2.28), ktoré musia byť splnené v bezrizikovom portfóliu, tvoria systém troch homogénnych rovníc o troch neznámych  $(V_1, V_2, V_3)$ . Maticovo zapísané:

$$\begin{pmatrix} \sigma_r(T_1) & \sigma_r(T_2) & \sigma_r(T_3) \\ \sigma_s(T_1) & \sigma_s(T_2) & \sigma_s(T_3) \\ \mu(T_1) - r & \mu(T_2) - r & \mu(T_3) - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Netriviálne riešenie dostaneme vtedy, keď sa determinant systému rovná nule.

$$\det \begin{pmatrix} \sigma_r(T_1) & \sigma_r(T_2) & \sigma_r(T_3) \\ \sigma_s(T_1) & \sigma_s(T_2) & \sigma_s(T_3) \\ \mu(T_1) - r & \mu(T_2) - r & \mu(T_3) - r \end{pmatrix} = 0.$$

Táto podmienka platí pre  $T_1, T_2, T_3$ . Toto nám dáva rovnosť

$$\mu(t) - r = \lambda_r(r, s, t)\sigma_r(t) + \lambda_s(r, l, t)\sigma_s(t) \quad (2.30)$$

Člen  $\lambda_r$  predstavuje trhovú cenu rizika na trhu krátkodobých úrokových mier a  $\lambda_s$  trhovú cenu rizika na trhu druhého faktora.  $\lambda_r$  a  $\lambda_s$  sú nezávislé od maturity. Trhová cena rizika vyjadruje nárast očakávanej miery návratnosti dlhopisu na pridanú jednotku rizika. V bezrizikovom portfóliu je trhovú cenu rizika nulová. Ak dosadíme výrazy  $\mu(r, s, t)$ ,  $\sigma_r(r, s, t)$  a  $\sigma_s(r, s, t)$  z (2.22) do (2.30) dostaneme rovnice pre funkciu  $B(r, s, t)$

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{1}{2}w_r^2 \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \rho w_r w_s \frac{\partial^2 B}{\partial r \partial s} + \frac{1}{2}w_s^2 \frac{\partial^2 B}{\partial s^2} + \\ & + (u_r - \lambda_r w_r) \frac{\partial B}{\partial r} + (u_s - \lambda_s w_s) \frac{\partial B}{\partial s} - rB \end{aligned} \quad (2.31)$$

Koncovou podmienkou je  $B(r, s, t) = 1$ . Zadaním funkcií  $u_r, u_s, w_r, w_s, \lambda_r, \lambda_s$  dostávame konkrétne modely. Vyriešením rovnice (2.31) dostávame hodnotu dlhopisu daného modelu.

### 2.2.2 Príklady dvojfaktorových modelov

Model *Brennana* a *Schwartz* (1982) [3] uvažuje za druhý faktor dlhodobú úrokovú mieru  $l$ , prvým faktorom je znovu krátkodobá úroková miera  $r$ . Autori predpokladajú, že sa tieto dva faktory navzájom ovplyvňujú. Všeobecný tvar ich modelu je:

$$dr = \alpha_r(r, l, t) dt + \mu_r(r, l, t) dz_r \quad (2.32)$$

$$dl = \alpha_l(r, l, t) dt + \mu_l(r, l, t) dz_l, \quad (2.33)$$

kde  $dz_r$  a  $dz_l$  sú štandardné Wienerove procesy s konštantnou koreláciou  $\rho$  medzi  $dz_r$  a  $dz_l$ .

Iné modely za druhý faktor zoberú niektorý parameter z jednofaktorového modelu, o ktorom predpokladajú jeho stochastický

vývoj. Takýmto príkladom je napríklad *Fong a Vašíčkov model* (1991). Autori za druhý faktor zvolili volatilitu úrokovej miery. Vychádzali z toho, že volatilita je určujúcou pri oceňovaní aktív:

$$dr = \alpha(r - r) dt + \sqrt{v} dz_1 \quad (2.34)$$

$$dv = \beta(v - v) dt + \xi\sqrt{v} dz_2 \quad (2.35)$$

Druhý faktor je premenná, ktorá súvisí s modelovanou úrokovou mierou. Tieto dva faktory sa navzájom ovplyvňujú.

## Kapitola 3

# Konvergenčný model

Teresa Corso Santamaria a Eduardo S. Schwartz [10] vytvorili dvojfaktorový model popisujúci časovú štruktúru úrokových mier špeciálne pre prístupujúce a členské krajiny Európskej menovej únie (EMU).

Konvergenčný model je stochastický mean-reverting model, ktorý úspešne popisuje proces krátkodobých úrokových mier.

Úroveň úrokových mier vplýva na ceny dlhopisov a ostatných derivátov úrokovej miery. Preto sa vyvíja model, v ktorom prvý faktor je krátkodobá úroková miera konkrétnej krajiny, označovaná  $r_d$ . Druhým je európska úroková miera,  $r_e$ , o ktorej predpokladajú, že sa z dlhodobého hľadiska približuje k nejakej rovnovážnej hodnote. Týmto sa zlepšuje oceňovanie a hedging týchto inštrumentov.



## 3.1 Európske úrokové miery

Európske úrokové miery, predstavujúce jeden faktor modelu, riadi prvá časť definície konvergenčného modelu.

### 3.1.1 Proces pre okamžitú úrokovú mieru

Zadefinujme si teraz proces riadiaci európsku krátkodobú úrokovú mieru

**Definícia 1.** Európsku krátkodobú úrokovú mieru riadi stochastická diferenciálna rovnica:

$$dr_e = c(d - r_e) dt + \sigma_e dz_e, \quad (3.1)$$

kde  $c$  je koeficient rýchlosti prispôsobovania a  $d$  je dlhodobá priemerná úroveň  $r_e$ .

Všimnime si, že parametre  $c$ ,  $d$ ,  $\sigma_e$  zodpovedajú postupne parametrom  $\kappa$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  modelu (2.15). Európska úroková miera je teda riadená Vašíčkovým modelom. Tento fakt využijeme pri kalibrácii modelu.

### 3.1.2 Ceny dlhopisov

Nasledujúce tvrdenie hovorí o oceňovaní európskeho dlhopisu. Z ceny dlhopisu, implikovanej nasledovným tvrdením, získame pomocou (1.1) vzťah pre modelové európske úrokové miery.

**Tvrdenie 1** (Oceňovanie európskych dlhopisov). *Nech  $P(r_e, \tau)$  je cena bezkupónového diskontného dlhopisu s nominálnou hodnotou 1 jednotky európskej meny a dobou splatnosti  $\tau$ . Nech  $r_e$  sú dané procesom (3.1). Potom jeho cena je daná:*

$$P(r_e, \tau) = \exp[F(\tau) - r_e G(\tau)], \quad (3.2)$$

kde

$$G(\tau) = \frac{1 - \exp(-c\tau)}{c}$$

$$F(\tau) = \frac{(G(\tau) - \tau)(c(cd - \lambda_e \sigma_e) - (\sigma_e^2)/2)}{c^2} - \frac{\sigma_e^2(G(\tau))^2}{4c}$$

*Dôkaz.* Chceme dokazať platnosť Tvrdenia 1. V práci sme už odvodili parciálnu diferenciálnu rovnicu na výpočet ceny dlhopisu všeobecného jednofaktorového modelu (2.13). Dosaďme do nej teraz konkrétne tvary funkcií  $u, w, \lambda$ . Za  $u$ , čo predstavuje drift procesu, dosadíme  $c(d - r_e)$ ; za  $w$  dosadíme  $\sigma_e$ , volatilitu procesu. Týmto dostávame:

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma_e^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_e^2} + (c(d - r_e) - \lambda_e \sigma_e) \frac{\partial P}{\partial r_e} - r_e P = 0 \quad \text{pre } \tau > 0 \quad (3.3)$$

Toto je rovnica na oceňovanie dlhopisu, ktorý sa riadi Vašíčkovým modelom (3.1). Predpokladajme riešenie v tvare:

$$P(r, \tau) = e^{F(\tau) - G(\tau) \cdot r_e} = \tilde{F}(\tau) \cdot e^{-G(\tau)r_e} \quad (3.4)$$

Dosadením (3.4) do (3.3) získame pár diferenciálnych rovníc:

$$-\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tau} + (\lambda_e \sigma_e - cd) \tilde{F} G + \frac{1}{2} \sigma_e^2 \tilde{F} G = 0 \quad \text{pre } \tau > 0 \quad (3.5)$$

$$-\frac{\partial G}{\partial \tau} - c \cdot G + 1 = 0 \quad \text{pre } \tau > 0 \quad (3.6)$$

so začiatočnými podmienkami  $\tilde{F}(0) = 1$  a  $G(0) = 0$ . Vyriešením rovníc (3.5) pre  $G(\tau)$  a  $\tilde{F}(\tau)$  a následným dosadením do (3.4) pre  $\tau > 0$  dostávame

$$P(r_e, \tau) = \exp \left[ \frac{(1 - e^{-c\tau})}{c} \cdot \left( \left( d - \frac{\sigma_e \lambda_e}{c} - \frac{\sigma_e^2}{2c^2} \right) - r_e \right) - \left( d - \frac{\sigma_e \lambda_e}{c} - \frac{\sigma_e^2}{2c^2} \right) \tau - \frac{\sigma_e^2}{4c^3} (1 - \exp(-c\tau))^2 \right] \quad (3.7)$$

Označme teraz  $G(\tau) = \frac{1 - e^{-c\tau}}{c}$ . Preusporiadaním členov máme:

$$P(r_e, \tau) = \exp \left[ (G(\tau) - \tau) \left( d - \frac{\sigma_e \lambda_e}{c} - \frac{\sigma_e^2}{2c^2} \right) - \frac{\sigma_e^2}{4c} (G(\tau))^2 - r_e G(\tau) \right].$$

Úpravou menovateľov exponentu dostávame:

$$P(r_e, \tau) = \exp \left[ \frac{(G(\tau) - \tau)(c(cd - \sigma_e \lambda_e) - (\sigma_e^2)/2)}{c^2} - \frac{\sigma_e^2(G(\tau))^2}{4c} - r_e G(\tau) \right].$$

Označením

$$F(\tau) = \frac{(G(\tau) - \tau)(c(cd - \sigma_e \lambda_e) - (\sigma_e^2)/2)}{c^2} - \frac{\sigma_e^2(G(\tau))^2}{4c}$$

dostaneme

$$P(r_e, \tau) = \exp[F(\tau) - r_e G(\tau)],$$

pričom pre  $F(\tau)$  a pre  $G(\tau)$  platia vyššie uvedené označenia  $\square$

### 3.1.3 Vlastnosti výnosových kriviek

Časová štruktúra úrokových mier, alebo výnosová krivka vyjadruje závislosť úrokovej miery  $R(\tau)$  od doby splatnosti dlhopisu  $\tau$ . Tvrdenie 1 nám determinuje jeho cenu. Toto nám postačuje na určenie hodnôt modelových úrokových mier  $R(\tau)$ . (1.1)

Vypočítame si limitu takto dosiahnutých modelových úrokových mier. Chceme vypočítať

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = -\frac{[F(\tau) - r_e G(\tau)]}{\tau}$$

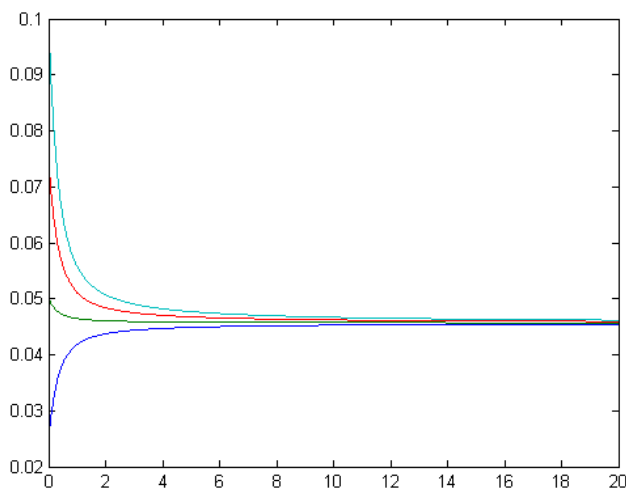
Pre prehľadnosť to vypočítame postupne:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau) \frac{1 - \exp(-c\tau)}{c} = \frac{1}{c} \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} F(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{(G(\tau) - \tau)(c(cd - \sigma_e \lambda_e) - (\sigma_e^2)/2)}{c^2} - \frac{\sigma_e^2(G(\tau))^2}{4c} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{c} - \tau)(c(cd - \sigma_e \lambda_e) - (\sigma_e^2)/2)}{c^2} - \frac{\sigma_e^2(\frac{1}{c})^2}{4c} = \\ &= -\infty \end{aligned}$$

A teraz uz využitím výsledkov čiastočných limít vypočítame:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\infty}{\infty} + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{r_e \frac{1}{c}}{\infty} = \\
 &\stackrel{v_H}{=} \lim_{\tau \rightarrow \infty} - \frac{\frac{\partial F(\tau)}{\partial \tau}}{\frac{\partial F(\tau)}{\partial \tau}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} - \frac{\partial F(\tau)}{\partial \tau} = \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} - \frac{[c(cd - \sigma_e \lambda_e) - (\sigma_e^2)/2][-ce^{-c\tau} - 1]}{c^2} + \frac{\sigma_e^2 e^{-2c\tau}}{2} = \\
 &= \frac{[c(cd - \sigma_e \lambda_e) - (\sigma_e^2)/2]}{c^2} = \\
 &= d - \frac{\sigma_e \lambda_e}{c} + \frac{\sigma_e^2}{2c^2} = R_\infty
 \end{aligned}$$

Tvar výnosovej krivky riadenej Vašíčkovým modelom môže mať rastúcu, klesajúcu, alebo najskôr rastúcu a potom klesajúcu tendenciu. Iné tvary jej tvar nenadobúda [3]. Klesajúcu tendenciu možno vidieť v nasledovnom obrázku 3.1.3. Znázorňuje tvary výnosových kriviek pre rôzne hodnoty úrokových mier.



Obrázok 3.1: Európske výnosové krivky

## 3.2 Domáce úrokové miery

Domáce úrokové miery sú spravidla úroky konkrétnej krajiny, ktorá je v procese pred prijatím eura. Riadi ich druhá časť definície konvergenčného modelu.

### 3.2.1 Proces pre okamžitú úrokovú mieru

Proces riadiaci domácu krátkodobú úrokovú mieru

**Definícia 2.** Domáca krátkodobá úroková miera je stochastický *mean-reverting* proces daný stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dr_d = [a + b(r_e - r_d)] dt + \sigma_d dz_d, \quad (3.8)$$

kde  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma_d$  sú konštanty,  $r_d$  je domáca úroková miera a  $r_e$  európska úroková miera.

Procesy  $dr_e$  a  $dr_d$  sú korelované a koeficientom  $\rho$ , čiže  $dz_d dz_e = \rho dt$ .

Člen  $(r_e - r_d)$  predstavuje zvrat  $r_d$  ku  $r_e$ ,  $b$  je rýchlosť tohto zvratu. Keď je  $a = 0$ , tak drift je  $b(r_e - r_d)$ , teda domáca úroková miera je priťahovaná k európskej úrokovej miere.

### 3.2.2 Ceny dlhopisov

Nasledujúce tvrdenie pojednáva o ocenení domáceho dlhopisu.

**Tvrdenie 2** (Oceňovanie domácich dlhopisov). *Nech  $P(r_d, r_e, \tau)$  je cena bezkupónového diskontného dlhopisu s nominálnou hodnotou 1 jednotky domácej meny a dobou splatnosti  $\tau$ . Nech  $r_d$  sú dané procesom (3.8) a  $r_e$  procesom (3.1). Potom cena tohto dlhopisu je daná:*

$$P(r_d, r_e, \tau) = \exp[A(\tau) - r_d B(\tau) - r_e C(\tau)], \quad (3.9)$$

kde

$$\begin{aligned}
B(\tau) &= \frac{1 - \exp(-b\tau)}{b} \\
C(\tau) &= \frac{bB(\tau)(1 - \exp(-c\tau))}{c} \\
A(\tau) &= \frac{\tau}{2} \left[ -2aB(\tau) + C(\tau)(-2cd + C(\tau)\sigma_e^2 + 2\sigma_e\lambda_e) + \right. \\
&\quad \left. + B(\tau)(2C(\tau)\rho\sigma_d\sigma_e + \sigma_d(2\lambda_d + B(\tau)\sigma_d)) \right]
\end{aligned}$$

*Dôkaz.* Chceme dokazať platnosť Tvrdenia 2. V práci sme už odvodili parciálnu diferenciálnu rovnicu na výpočet ceny dlhopisu všeobecného dvojfaktorového modelu (2.31). Dosadíme do nej teraz konkrétne tvary funkcií  $u_d, u_e, w_d, w_e, \lambda_d, \lambda_e$ . Za  $u_d$ , čo predstavuje drift procesu pre domácu úrokovú mieru, dosadíme  $a + b(r_e - r_d)$ , za  $u_e$ , čo predstavuje drift procesu pre európsku úrokovú mieru, dosadíme  $c(d - r_e)$ , za  $w_d$  dosadíme  $\sigma_d$ , volatilitu procesu pre domácu úrokovú mieru a za  $w_e$  dosadíme  $\sigma_e$ , volatilitu procesu pre európsku úrokovú mieru. Týmto dostávame:

$$\begin{aligned}
&[a + b(r_e - r_d) - \lambda_d\sigma_d]P_{r_d} + [c(d - r_e) - \lambda_e\sigma_e]P_{r_e} + \\
&+ \frac{1}{2}\sigma_d^2P_{r_d r_d} + \frac{1}{2}\sigma_e^2P_{r_e r_e} + \rho\sigma_d\sigma_eP_{r_d r_e} - P_t - r_dP = \quad (3.10) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Začiatočná podmienka tejto parciálnej diferenciálnej rovnice je

$$P(r_d, r_e, 0) = 1.$$

Predpokladajme, že riešenie má tvar (3.9). Nahradením parciálnych derivácií v rovnici (3.10) a zjednodušením preusporiadaním členov

$r_d$  a  $r_e$  dostaneme:

$$\begin{aligned}
& r_d[B(\tau)b + B_\tau - 1] + r_e[C(\tau)c - B(\tau)b + C_\tau] + \\
& + [-aB(\tau) + B(\tau)\lambda_d\sigma_d - C(\tau)cd + C(\tau)\lambda_e\sigma_e + \frac{1}{2}\sigma_d^2B^2(\tau) + \\
& + \frac{1}{2}\sigma_e^2C^2(\tau) + C(\tau)B(\tau)\rho\sigma_d\sigma_e - A_\tau] = \\
& = 0
\end{aligned}
\tag{3.11}$$

Všetky tri výrazy v hranatých zátvorkách musia byť nulové. Riešenia  $A(\tau)$ ,  $B(\tau)$ ,  $C(\tau)$  v (3.9) sa získajú integrovaním doleuvedeného systému troch obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned}
0 &= B(\tau)b + B_\tau - 1 \\
0 &= C(\tau)c - B(\tau)b + C_\tau \\
0 &= -aB(\tau) + B(\tau)\lambda_d\sigma_d - C(\tau)cd + C(\tau)\lambda_e\sigma_e + \frac{1}{2}\sigma_d^2B^2(\tau) + \\
& + \frac{1}{2}\sigma_e^2C^2(\tau) + C(\tau)B(\tau)\rho\sigma_d\sigma_e - A_\tau
\end{aligned}$$

s troma počiatočnými podmienkami

$$A(0) = 0, \quad B(0) = 0, \quad C(0) = 0.$$

□

### 3.2.3 Vlastnosti výnosových kriviek

Takisto ako pre európske aj pre domáce výnosové krivky vypočítame limitu modelovaných úrokových mier.

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} -\frac{A(\tau)}{\tau} + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{r_d B(\tau)}{\tau} + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{r_e C(\tau)}{\tau}$$

Vypočítame si čiastočné limity:

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow \infty} B(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-b\tau}}{b} = \frac{1}{b} \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} C(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} (1 - e^{-c\tau}) = 1 \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} A(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{2} \left[ -\frac{2a}{b} + (-2cd + \sigma_e^2 + 2\sigma_e\lambda_e) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b} \left( 2\rho\sigma_d\sigma_e + \sigma_d \left( 2\lambda_d + \frac{1}{b}\sigma_d \right) \right) \right] = \\ &= \infty\end{aligned}$$

Čiastočné výsledky limit spojíme, čím dostávame:

$$\begin{aligned}\lim_{\tau \rightarrow \infty} R(\tau) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} -\frac{A(\tau)}{\tau} + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{r_d B(\tau)}{\tau} + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{r_e C(\tau)}{\tau} = \\ &\stackrel{\nu_H}{=} \frac{1}{2} \left[ -\frac{2a}{b} + (-2cd + \sigma_e^2 + 2\sigma_e\lambda_e) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b} \left( 2\rho\sigma_d\sigma_e + \sigma_d \left( 2\lambda_d + \frac{1}{b}\sigma_d \right) \right) \right]\end{aligned}$$

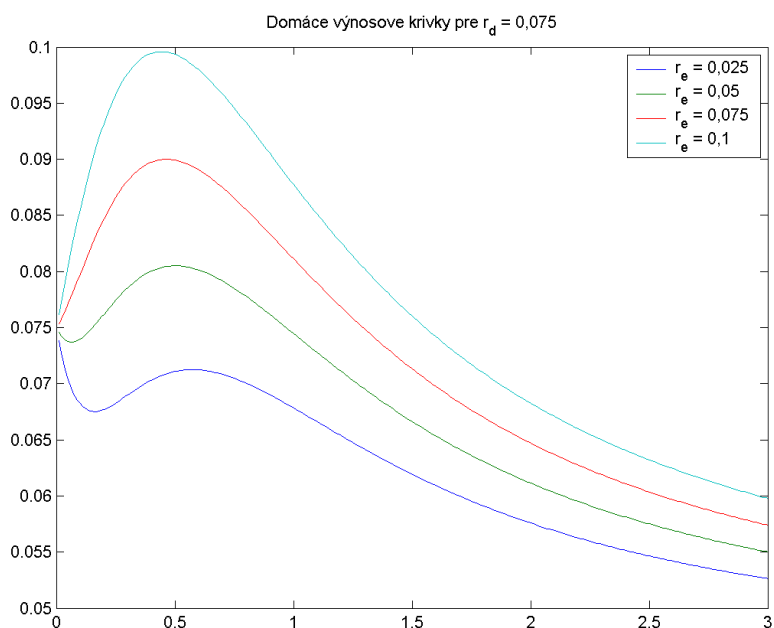
Výnosové krivky dané konvergenčným modelom môžu nadobúdať také tvary, aké výnosové krivky dané Vašíčkovým modelom nemôžu nadobudnúť. Môžu mať napríklad najskôr klesajúcu, potom rastúcu tendenciu, ako je to vidieť na obrázku 3.2 na strane 28 .

### 3.3 Empirické výsledky autorov modelu

Autori v článku [10] porovnávajú Vašíčkov model s ich konvergenčným modelom konkrétne pre španielsky trh dlhopisov. Zistili, že konvergenčným modelom získali lepšie fitovanie namodelovaných úrokových mier so skutočnými úrokovými mierami.

Na odhadovanie parametrov konvergenčného modelu úrokových mier použili všeobecnú metódu momentov. Táto metóda je odolná voči nešpecifikácií správania sa rezíduí. Je vhodná na odhadovanie systému rovníc, ktoré získame použitím iba určitých momentov.





Obrázok 3.2: Domáce výnosové krivky

Vo svojej praktickej časti práce autori za krátkodobé úrokové miery použili Španielske medzibankové úrokové miery na jeden mesiac (priemerné hodnoty ich bid-u a ask-u). Použili týždenné dáta od septembra 1990 do decembra 1997 pre dlhopisy s maturitami 1, 2, 3, 5 a 10 rokov. Celovo použili 1910 dát.

Ukázalo sa, že pri oceňovaní bezkupónových dlhopisov sú chyby menšie použitím konvergenčného modelu, čo predstavuje značné zlepšenie v obchodovaní s dlhopismi, nakoľko sú presnejšie ocenené.

## Kapitola 4

# Kalibrácia Konvergenčného modelu

### 4.1 Európske úrokové miery

Ako sme už spomínali, tvar Vašíčkovho modelu je

$$dr = (\alpha + \beta r) dt + \sigma dw$$

respektíve

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma dw$$

Pričom vzťah parametrov týchto dvoch možností zápisu modelu je :

$$\begin{aligned} \kappa &= -\beta \\ \theta &= -\alpha/\beta \end{aligned} \tag{4.1}$$

Na to, aby sme mohli použiť model, potrebujeme poznať jeho parametre.

Vzťahy na odhad parametrov  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  vychádzajú z diskkrétnej verzie

Vašíčkovho modelu, ktorú si teraz odvodíme.

Rovnicu vyjadrujúcu modelovanú úrokovú mieru

$$dr_s = (\alpha + \beta r_s) ds + \sigma dw_s,$$

vynásobíme členom  $e^{-\beta s}$

$$\begin{aligned} e^{-\beta s} dr_s &= e^{-\beta s}(\alpha + \beta r_s) ds + e^{-\beta s} \sigma dw_s, \\ e^{-\beta s} dr_s &= \alpha e^{-\beta s} ds + \beta e^{-\beta s} r_s ds + \sigma e^{-\beta s} dw_s, \\ e^{-\beta s} dr_s - \beta e^{-\beta s} r_s ds &= \alpha e^{-\beta s} ds + \sigma e^{-\beta s} dw_s. \end{aligned}$$

Ľavá strana rovnosti je derivácia súčinu, čiže môžeme napísať

$$(e^{-\beta s} r_s) ds = \alpha e^{-\beta s} ds + \sigma e^{-\beta s} dw_s$$

alebo

$$\frac{d}{ds}(e^{\beta s}) = \alpha e^{-\beta s} ds + \sigma e^{-\beta s} dw_s$$

Túto rovnosť zintegrujeme od času  $t-1$  po čas  $t$ :

$$\int_{t-1}^t e^{-\beta s} r_s ds = \int_{t-1}^t \alpha e^{-\beta s} ds + \int_{t-1}^t \sigma e^{-\beta s} dw_s$$

Nakoľko  $\sigma$  predstavujúca volatilitu je konštantná, môžeme ju vyňať pred integrál, máme:

$$e^{-\beta t} r_t - e^{-\beta(t-1)} r(t-1) = \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta(t-1)} - e^{-\beta t}) + \sigma \int_{t-1}^t e^{-\beta s} dw_s$$

Rovnicu vynásobíme výrazom  $e^{\beta t}$  a vyjadríme z nej  $r_t$

$$r_t = e^{\beta} r_{t-1} + \frac{\alpha}{\beta} (e^{\beta} - 1) + \sigma e^{-\beta t} \int_{t-1}^t e^{-\beta s} dw_s$$

Ak teraz označíme

$$\epsilon_t = \sigma e^{-\beta t} \int_{t-1}^t e^{-\beta s} dw_s,$$

tak dostaneme diskretnú formu Vašíčkovho modelu

$$r_t = e^{\beta} r_{t-1} + \frac{\alpha}{\beta} + \epsilon_t \quad \text{pre } t = 2, \dots, N \quad (4.2)$$

Rozdelenie  $\epsilon_t$  vyplýva z vlastností Itôovho integrálu (pozri [6]).  $\epsilon_t$  sú normálne rozdelené s nulovou strednou hodnotou a disperziou

$$d^2 = \sigma^2 \cdot \frac{e^{2\beta} - 1}{2\beta}. \quad (4.3)$$

Explicitne dané vzťahy pre odhad parametrov  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  dostaneme ako maximálne vierohodné odhady parametrov  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  funkcie vierohodnosti diskrétného Vašíčkovho modelu (pozri [1]).

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{\log\left(\sum_{t=2}^N r_t\right)\left(\sum_{t=2}^N r_{t-1}\right) - \left[\left(\sum_{t=2}^N r_t r_{t-1}\right)\left(\sum_{t=2}^N 1\right)\right]}{\left(\sum_{t=2}^N r_{t-1}^2\right)\left(\sum_{t=2}^N 1\right) - \left(\sum_{t=2}^N r_t\right)^2} \\ \hat{\alpha} &= \frac{\hat{\beta}}{e^{\hat{\beta}} - 1} \cdot \frac{\sum_{t=2}^N r_t - e^{\hat{\beta}} \sum_{t=2}^N r_{t-1}}{\sum_{t=2}^N 1} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{N-1} \cdot \frac{2\hat{\beta}}{e^{2\hat{\beta}} - 1} \cdot \sum_{t=2}^N (\varepsilon_t^2),\end{aligned}\tag{4.4}$$

kde  $\varepsilon_t = r_t - e^{\hat{\beta}} \cdot r_{t-1} - \hat{\alpha} \cdot \frac{e^{\hat{\beta}} - 1}{\hat{\beta}}$ . Využitím vzťahov (4.1) dostaneme aj odhady  $\kappa$  a  $\theta$ . Vzťahy (4.4) platia za predpokladu, že časový interval je jeden rok. My však pracujeme s dennými dátami, preto musíme získané odhady  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma^2$  vydeliť členom  $1/250$ .  $\sigma$  teda vydeliť  $\sqrt{1/250}$ .

Na odhady parametrov Vašíčkovho modelu sme použili 284 dát *BRIBOR-u* od 1.12 2006 do 22.1.2007 pre každú dobu splatnosti, ktorá je v tabuľke 4.1 na strane 32. Odhady parametrov Vašíčkovho modelu pre dáta *EURIBOR-u* za celý rok 2007 použijeme v konvergenčnom modeli.

Nasledujúce obrázky vyjadrujú závislosť driftu,  $\kappa(\theta - r)$  od úrokovej miery,  $r$  pre rôzne maturity. Drift v tomto prípade predstavuje očakávaný vývoj úroku. Závislosť je klasajúca a výraznejšie sa prejavuje so zväčšujúcou sa maturitou. Inak povedané s rastúcim úrokom sa drift procesu znižuje, výraznejšie však pre dlhopisy s

	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\kappa$	$\theta$
o/n	38,20351898	-1019,457441	0,408163039	1019,457441	0,037474364
1w	48,15061924	-1189,974292	0,219739187	1189,974292	0,040463579
1m	53,74559524	-1286,643089	0,135316047	1286,643089	0,041771953
3m	56,6066609	-1342,635691	0,105870978	1342,635691	0,042160849
6m	58,0332099	-1372,066795	0,093648727	1372,066795	0,042296199
12m	59,44282164	-1398,157287	0,083105236	1398,157287	0,042515118

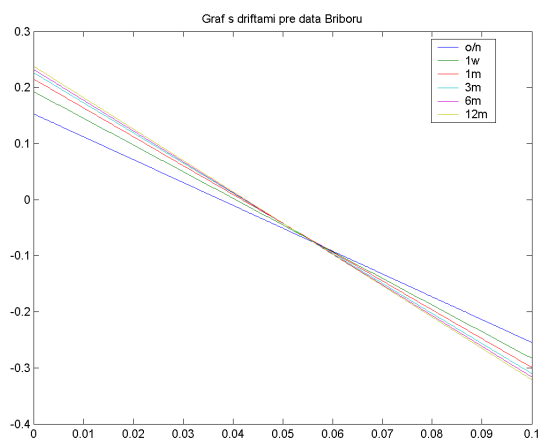
Tabuľka 4.1: Odhady parametrov Vašíčkovho modelu pre denné dáta *BRIBOR*

	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\kappa$	$\theta$
1w	52,68893062	-1329,470361	0,113656868	1329,470361	0,03963152
2w	52,25016303	-1307,796129	0,125123843	1307,796129	0,039952835
3w	51,40921576	-1274,81888	0,142735845	1274,81888	0,040326682
1m	50,99241834	-1249,137383	0,158118466	1249,137383	0,040822106
2m	51,32479221	-1222,810583	0,175737174	1222,810583	0,041972807
3m	51,81803166	-1210,767809	0,184679978	1210,767809	0,042797662
4m	52,66542856	-1222,904176	0,17557417	1222,904176	0,043065867
5m	53,48930936	-1235,418411	0,166633554	1235,418411	0,043296513
6m	54,34248987	-1248,126616	0,158023436	1248,126616	0,043539244
7m	55,07087101	-1259,335813	0,150800185	1259,335813	0,043730092
8m	55,7465254	-1269,588403	0,144460528	1269,588403	0,043909132
9m	56,38989826	-1279,124854	0,138821753	1279,124854	0,044084749
10m	56,93836742	-1287,005714	0,13432597	1287,005714	0,044240959
11m	57,39435076	-1293,267389	0,130855665	1293,267389	0,044379338
12m	57,81261093	-1298,669205	0,127943598	1298,669205	0,044516811

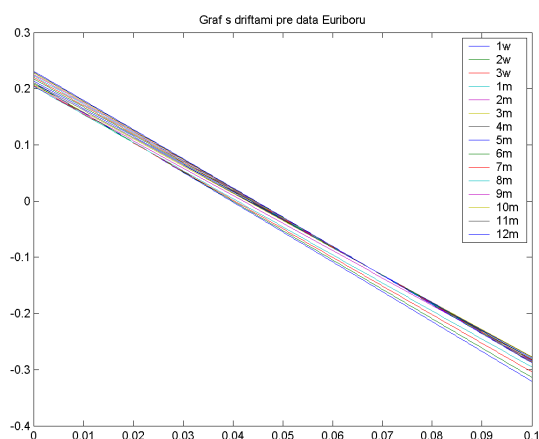
Tabuľka 4.2: Odhady parametrov Vašíčkovho modelu pre denné dáta *EURIBOR*

väšcou maturitou.

Keď už poznáme parametre modelu, ľahko dostaneme namodelované úrokové miery. Na to, ako nám tieto fitujú prislúchajúce skutočné hodnoty úrokových mier nám posluži účelová funkcia vážených štvorcov rozdielov skutočných a namodelovaných dát  $F(\lambda)$ . Takýto



Obrázok 4.1: Závislosť driftu  $\kappa(\theta - r)$  od úrokovej miery  $r$  pre dáta *EURIBOR-u*



Obrázok 4.2: Závislosť driftu  $\kappa(\theta - r)$  od úrokovej miery  $r$  pre dáta *BRIBOR-u*

prístup bol použitý aj v prácach [7], [8], [9].

Časová štruktúra úrokových mier pre Vašíčkov model je

$$R(r, \tau) = R_\infty + (r - R_\infty) \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau} + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3\tau} (1 - e^{-\kappa\tau})^2, \quad (4.5)$$

kde

$$R_\infty = \theta - \frac{\sigma\lambda}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}; \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(r, \tau) = R_\infty. \quad (4.6)$$

$R(r, \tau)$  je modelová úroková miera so splatnosťou danou  $\tau$  pri

okamžitej úrokovej miere  $r$ .

Parametre  $\kappa$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  už máme odhadnuté z okamžitých úrokových mier metódou maximálnej vierohodnosti. Pre dáta *BRIBOR-u* sme za okamžité úrokové miery uvažovali hodnoty overnight, zatiaľ čo pre dáta *EURIBOR-u* to boli úrokové miery na jeden týždeň. V rovnosti (4.5) zostáva parameter  $\lambda$ , trhovú cenu rizika, ktorej hodnota ešte nie je odhadnutá.

Trhovú cenu rizika odhadneme minimalizáciou účelovej funkcie

$$F(\lambda) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m w_{i,j} (R(r_i, \tau_j) - R_{i,j})^2, \quad (4.7)$$

kde  $i = 1, \dots, N$  sú dni, z ktorých máme dáta a  $j = 1, \dots, m$  sú doby splatnosti.  $w_{i,j}$  sú váhy príslušných štvorcov rozdielov modelovej a skutočnej úrokovej miery. V našich výpočtoch sme položili najskôr  $w_{i,j} = 1$ , váhy sú rovnocenné. Potom sme za váhy položili  $\tau$  a na záver sme za váhy zvolili  $\tau^2$ . S váhami rovnými  $\tau^2$  budeme pracovať aj v kalibrácii konvergenčného modelu.

Budeme hľadať minimum účelovej funkcie vzhľadom na  $\lambda$ .

$$\begin{aligned}
F(\lambda) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m w_{i,j} \left( R(r_i, \tau_j) - R_{i,j} \right)^2 = \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m w_{i,j} \left[ \theta - \frac{\sigma\lambda}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} + \left( r_i - \left( \theta - \frac{\sigma\lambda}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) \right) \frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa\tau_j} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3\tau_j} \left( 1 - e^{-\kappa\tau_j} \right) - R_{i,j} \right]^2 \\
\frac{\partial F(\lambda)}{\partial \lambda} &= 2 \cdot \sum_{i,j} w_{i,j} \left[ \underbrace{\theta - \frac{\sigma\lambda}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}}_x + \left( r_i - \underbrace{\left( \theta - \frac{\sigma\lambda}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right)}_x \right) \frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa\tau_j} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3\tau_j} \left( 1 - e^{-\kappa\tau_j} \right) - R_{i,j} \right] \cdot \underbrace{\left( -\frac{\sigma}{\kappa} \left( 1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa\tau_j} \right) \right)}_{a_j} = \\
&= 2 \cdot \sum_{i,j} w_{i,j} \left[ x + \left( r_i - x + \frac{\sigma^2}{4\kappa^2} \right) \frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa\tau_j} - R_{i,j} \right] \cdot a_j = 0
\end{aligned}$$

Predelíme rovnicu dvoma a upravíme ju na tvar

$$\sum_{i,j} w_{i,j} \left[ x \left( 1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa\tau_j} \right) + \left( r_i + \frac{\sigma^2}{4\kappa^2} \right) \frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa\tau_j} - R_{i,j} \right] \cdot a_j = 0$$

za  $x$  opäť dosadíme pôvodný výraz a preniesieme posledný člen rovnosti na ľavej strane na druhú stranu rovnice

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} w_{i,j} \left[ \left( \theta - \frac{\sigma\lambda}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) \left( 1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa\tau_j} \right) + \left( r_i + \frac{\sigma^2}{4\kappa^2} \right) \frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa\tau_j} \right] \cdot a_j = \\
= \sum_{i,j} w_{i,j} R_{i,j} a_j
\end{aligned}$$



preusporiadame výrazy na ľavej strane

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} w_{i,j} & \left[ \underbrace{-\frac{\sigma\lambda}{\kappa} \left(1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa\tau_j}\right)}_{\lambda a_j} + \right. \\ & \left. + \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right) \left(1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa\tau_j}\right) + \left(r_i + \frac{\sigma^2}{4\kappa^2}\right) \frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa\tau_j} \right] \cdot a_j = \\ & = \sum_{i,j} w_{i,j} R_{i,j} a_j. \end{aligned}$$

Ak označíme

$$c_{ij} = \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right) \left(1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa\tau_j}\right) + \left(r_i + \frac{\sigma^2}{4\kappa^2}\right) \frac{1 - e^{-\kappa\tau_j}}{\kappa\tau_j},$$

tak dostaneme zjednodušený zápis celej rovnosti v tvare

$$\sum_{i,j} w_{i,j} \lambda a_j^2 + \sum_{i,j} w_{i,j} c_{ij} a_j = \sum_{i,j} w_{i,j} R_{i,j} a_j,$$

odkiaľ dostaneme hodnotu minima funkcie  $F$  pre

$$\lambda_{\min} = \frac{\sum_{i,j} w_{i,j} R_{i,j} a_j - \sum_{i,j} w_{i,j} c_{ij} a_j}{\sum_{i,j} w_{i,j} a_j^2}.$$

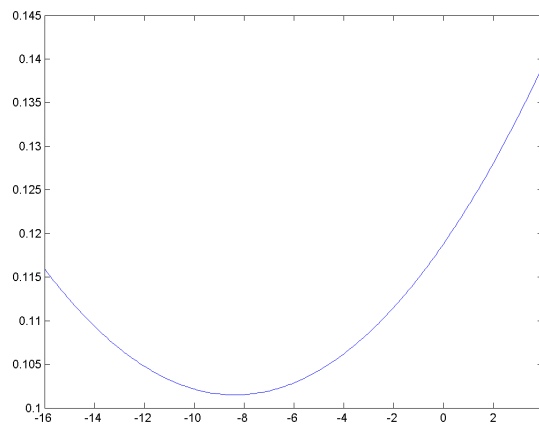
Teda dosadením parametrov  $\kappa$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$  a  $\lambda_{\min}$  do rovnice (4.5) dostaneme namodelované úrokové miery, ktoré dosadíme do účelovej funkcie v rovnici (4.7) Odhady trhových cien rizika a príslušných hodnôt účelových funkcií Vašíčkovho modelu pre dáta *BRIBOR-u* s váhami postupne  $w_{i,j} = 1$ ,  $w_{i,j} = \tau$ ,  $w_{i,j} = \tau^2$  sú uvedené v tabuľke 4.3 na strane 37.

Obrázky 4.3, 4.4 a 4.5 vyjadrujú závislosť účelovej funkcie  $F(\lambda)$  od trhovej ceny rizika  $\lambda$ . Grafom je vždy parabola, ktorej minimum je hodnota účelovej funkcie argumentu, ktorý predstavuje minimálnu hodnotu  $\lambda$ .

Toto bola kalibrácia Vašíčkovho modelu metódou maximálnej vierohodnosti. Je známe, že iba parameter  $\sigma$  je týmto spôsobom

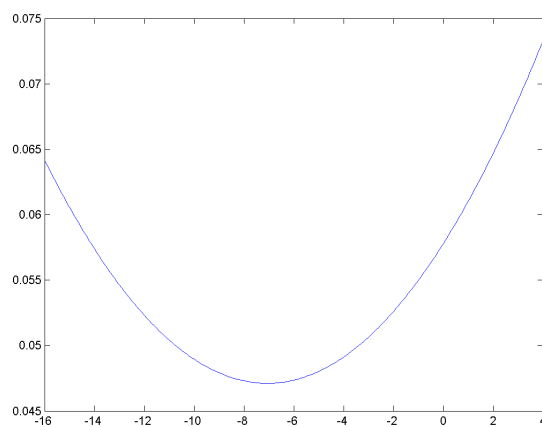
$w_{i,j}$	$\lambda_{min}$
1	-4.1437
$\tau$	-3.5735
$\tau^2$	-3.3562

Tabuľka 4.3: Hodnoty  $\lambda_{min}$  a pre  $w_{i,j} = 1$ ,  $w_{i,j} = \tau$ ,  $w_{i,j} = \tau^2$

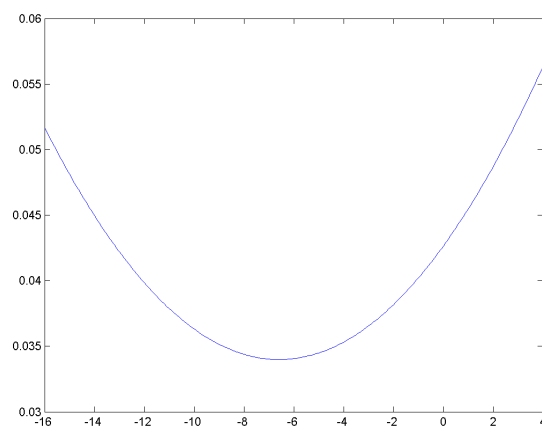


Obrázok 4.3: Závislosť účelovej funkcie  $F$  od trhovej ceny rizika  $\lambda$  Vašíčkovho modelu s  $w_{i,j} = 1$

odhadovaný dostatočne presne, ostatné môžu byť značne vychýlené. Preto sa v [1] odporúča odhadovať metódou maximálnej vierohodnosti len  $\sigma$  a ostatné parametre odhadovať len z výnosových kriviek. V ďalšom postupe volíme dáta z druhého polroka roku 2007, teda dáta od júla do decembra. Dôvodom je zložitejšia optimalizácia ako v predchádzajúcom. Najskôr zavedieme redukciu parametrov vo vzťahu (3.2) označením  $x = cd - \lambda_e \sigma_e$ . Touto redukciou získame nové parametre  $x$ ,  $c$  a  $\sigma_e$ . Počet parametrov sme zredukovali z pôvodného počtu štyri na tri parametre. Ide o inú redukciu, ako v [8], [9]. Na odhad počiatočných hodnôt týchto parametrov  $x$ ,  $c$  a  $\sigma_e$  sme použili metódu maximálnej vierohodnosti. Vyšli nám nasledovné počiatočné aproximácie parametrov:



Obrázok 4.4: Závislosť účelovej funkcie  $F$  od trhovej ceny rizika  $\lambda$  Vašičkovho modelu s  $w_{i,j} = \tau$



Obrázok 4.5: Závislosť účelovej funkcie  $F$  od trhovej ceny rizika  $\lambda$  Vašičkovho modelu s  $w_{i,j} = \tau^2$

$$c_0 = 109,857$$

$$\sigma_e^0 = 0,0117086$$

$$x_0 = 3,98460337312$$

Ďalej optimalizujeme cez  $c$  a  $x$ . Za optimalizačnú metódu sme zvolili Cauchyho metódu najväčšieho spádu s váhami  $w_{i,j} = \tau^2$ . Naše výsledky sú zhrnuté v tabuľke:

$$c = 14,8648$$

$$x = 0,69855$$

Optimálna hodnota účelovej funkcie tejto optimalizácie je  $F(c, x, \sigma_e) = 0.000209984$ .

## 4.2 Domáce úrokové miery

Pripomeňme si tvar dvojfaktorového konvergenčného modelu

$$dr_d = [a + b(r_e - r_d)] dt + \sigma_d dz_d,$$

$$dr_e = c(d - r_e) dt + \sigma_e dz_e.$$

V práci porovnávame Vašíčkov model s konvergenčným modelom. Zaujímá nás, ktorý z modelov lepšie fituje domáce úrokové miery. Zisťujeme to porovnávaním hodnôt ich účelových funkcií.

$$F = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m w_{i,j} (R(r_i, \tau_j) - R_{i,j})^2, \quad (4.8)$$

pričom váhy budú  $w_{i,j} = \tau_j^2$ . Na zistenie hodnoty účelovej funkcie pre konvergenčný model potrebujeme poznať namodelované hodnoty domácich úrokových mier. Sú dané vzťahom

$$R(r_d, r_e, \tau) = -\frac{\ln(P(r_d, r_e, \tau))}{\tau}.$$

Cena domáceho dlhopisu,  $P(r_d, r_e, \tau)$  je určená tvrdením 2. Táto závisí od parametrov  $c, d, \sigma_e, \lambda_e, a, b, \rho, \sigma_d, \lambda_d$ .

Pripomeňme, že sme v kalibrácii európskych úrokových mier zaviedli redukciiu parametrov. Zostali nám parametre  $c$ ,  $x$ ,  $\sigma_e$ . Ich optimálne hodnoty

$$c = 14,8648$$

$$x = 0,69855$$

$$\sigma_e = 0,0117086$$

použijeme pri kalibrácii domácich úrokových mier. Ešte sú tu zvyšné parametre  $a$ ,  $b$ ,  $\rho$ ,  $\sigma_d$ ,  $\lambda_d$ , ktorých počiatočné hodnoty ešte nepoznáme. Zaveďme redukciiu parametrov nasledovným zavedením nového parametra  $y = a - \sigma_d \lambda_d$ . Týmto máme teraz parametre  $y$ ,  $b$ ,  $\sigma_d$  a  $\rho$ . Počiatočné aproximácie modelu sme odhadovali metódou maximálnej vierohodnosti:

$$b_0 = 0,154135$$

$$\sigma_d^0 = 0,34237$$

#### 4.2.1 Voľba počiatočných aproximácií

Predpokladáme, že  $a = 0$ ,  $\rho = 0$ , čiže volatilita procesov sú nekorelované. Pri tomto predpoklade odvodíme aproximáciu funkcie maximálnej vierohodnosti.

$$dr_s = b(r_s^e - r_s) ds + \sigma dw_s$$

Rovosť vynásobíme  $e^{bs}$ , čím dostaneme

$$e^{bs} dr_s + be^{bs} r_s ds = be^{bs} r_s^e ds + \sigma e^{bs} dw_s$$

$$d(e^{bs} r_s) = be^{bs} r_s^e ds + \sigma e^{bs} dw_s$$

Zintegrujeme na intervale  $[t, t + \Delta t]$ :

$$e^{b(t+\Delta t)}r_{t+\Delta t} - e^{bt}r_t = b \int_t^{t+\Delta t} e^{bs}r_s^e ds + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{bs} dw_s$$

Použijeme aproximáciu<sup>1</sup>-budeme predpokladať, že hodnoty  $r_s^e$  sú na intervale  $[t, t + \Delta t]$  konštantné a rovnajú sa  $r_t^e$ . Potom

$$e^{b(t+\Delta t)}r_{t+\Delta t} - e^{bt}r_t = br_t^e \int_t^{t+\Delta t} e^{bs} ds + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{bs} dw_s$$

a teda

$$e^{b(t+\Delta t)}r_{t+\Delta t} - e^{bt}r_t = r_t^e \cdot (e^{b(t+\Delta t)} - e^{bt}) + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{bs} dw_s.$$

Z vlastností Itóovho integrálu [4] dostaneme, že rozdelenie integrálu  $\int_t^{t+\Delta t} e^{bs} dw_s$  je normálne, s nulovou strednou hodnotou a s disperziou

$$\int_t^{t+\Delta t} e^{2bs} ds = \frac{1}{2b} (e^{2b(t+\Delta t)} - e^{2bt}).$$

To znamená, že

$$\begin{aligned} r_{t+\Delta t} &= e^{-b\Delta t} \cdot r_t + (1 - e^{-b\Delta t})r_t^e + \sigma \cdot e^{-b(t+\Delta t)} \cdot N\left(0, \frac{1}{2b} (e^{2b(t+\Delta t)} - e^{2bt})\right) = \\ &= e^{-b\Delta t} \cdot r_t + (1 - e^{-b\Delta t})r_t^e + \epsilon_t, \end{aligned}$$

kde

$$\epsilon_t \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2b} (1 - e^{1-2b\Delta t})\right).$$

Potrebuje ešte začiatočnú aproximáciu parametra  $y$ . Zvolili sme  $y = 0$ , čo zodpovedá  $a = 0$  a  $\lambda_d = 0$ .

Vieme, že hodnota korelácie  $\rho \in \langle -1, 1 \rangle$ . Parameter  $\rho$  neoptimalizujeme, ale volíme ho vo výpočtoch od  $-0.95$  s krokom  $0.05$  do

<sup>1</sup>Poznamenajme, že ide o podobný prístup, ako pri odvodení aproximácie procesu  $dr_s = \kappa(\theta - r_s)dr_s + \sigma r_s^\gamma dw_s$ , kde sa predpokladá, že volatilita  $\sigma r_s^\gamma$  je na intervale  $[t, t + \Delta t]$  konštantná a rovná sa  $\sigma r_t^\gamma$

0.95. Týmto nám zostanú tri parametre, ktoré potrebujeme optimalizovať. Optimalizačnou metódou je opäť Cauchyho gradientná metóda najväčšieho spádu. Výsledky našich optimalizácií pre rôzne hodnoty korelácie sú zhrnuté v tabuľke 4.4.

$\rho$	$\mathbf{F}$	$\mathbf{b}$	$\mathbf{y}$	$\sigma_d$	poznámka
-0,95	0,0000400708	10,4261000	-0,0232523	0,7585900	
-0,90	0,0000263021	39,2855000	-0,0498578	4,3069100	
-0,85	0,0000259646	59,8988000	-0,0506941	7,0801500	
-0,80	0,0000271313	52,8511000	-0,0504717	6,6882200	
-0,75	0,0000293722	39,9673000	-0,0482614	5,3216700	
-0,70	0,0000283577	78,0801000	-0,0536611	12,0898000	
-0,65	0,0000288712	94,8836000	-0,0537316	16,2108000	
-0,60	0,0000608756	12,2157000	-0,0381287	1,8798800	
-0,55	0,0000252359	957,6240000	-0,0434104	181,2980000	
-0,50	0,0000300918	100,7010000	-0,0336979	18,9540000	
-0,45	0,0002413530	2,3470300	0,1075830	-0,2974260	NPR
-0,40	0,0000317859	24,6522000	0,0021134	2,9532800	
-0,35	0,0000773815	5,7258700	0,0522422	-0,1323060	NPR
-0,30	0,0000277171	160,2390000	0,1154380	-29,6741000	NPR
-0,25	0,0003982440	1,4439400	0,1316620	-0,3880590	NPR
-0,20	0,0000221196	23,1822000	0,0365868	0,8173130	
-0,15	0,0002435840	2,9150900	0,0901808	-0,6004650	NPR
-0,10	0,0070525700	0,2737530	0,0545719	0,0575892	
-0,05	0,0027106800	2,7575900	0,0725138	-0,6138400	NPR
0,00	0,0000236211	29,7729000	0,0456789	-2,2169900	NPR
0,05	0,0000216563	27,6405000	0,0417861	-1,0660900	NPR
Pokračovanie na ďalšej strane					

Tabuľka 4.4 – pokračovanie z predchádzajúcej strany

$\rho$	F	b	y	$\sigma_d$	poznámka
0,10	0,0001979750	3,1643900	0,0379017	-0,5364760	NPR
0,15	0,0000264309	415,8680000	0,0975526	88,7734000	
0,20	0,0000269487	189,5440000	0,0937352	33,5198000	
0,25	0,0000268462	88,4281000	0,0881623	12,5121000	
0,30	0,0000249079	104,2740000	0,0826741	11,6788000	
0,35	0,0000241299	43,4571000	0,0777422	3,8434600	
0,40	0,0000228876	36,5816000	0,0731756	2,5470700	
0,45	0,0000222469	28,7724000	0,0682700	1,5279800	
0,50	0,0000217704	27,3558000	0,0643487	1,1231000	
0,55	0,0000214196	27,2719000	0,0603580	0,8370010	
0,60	0,0000211976	28,2728000	0,0563441	0,6192370	
0,65	0,0000210324	29,3197000	0,0561582	0,5857300	
0,70	0,0000214030	24,4930000	0,0556305	0,4351720	
0,75	0,0000209530	28,5315000	0,0533164	0,3887960	
0,80	0,0000213650	24,0784000	0,0509489	0,2363190	
0,85	<b>0,0000208287</b>	29,8003000	0,0487330	0,2003940	
0,90	0,0000208681	28,5958000	0,0467402	0,1184650	
0,95	0,0000208495	28,8381000	0,0449224	0,0582595	

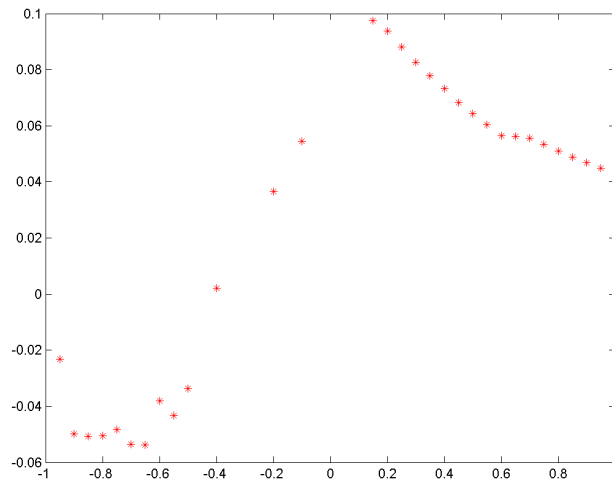
**F** - hodnota účelovej funkcie, **NPR** - nie je prípustné riešenie

Tabuľka 4.4: Optimálne hodnoty parametrov a účelových funkcií pre rôzne hodnoty  $\rho$

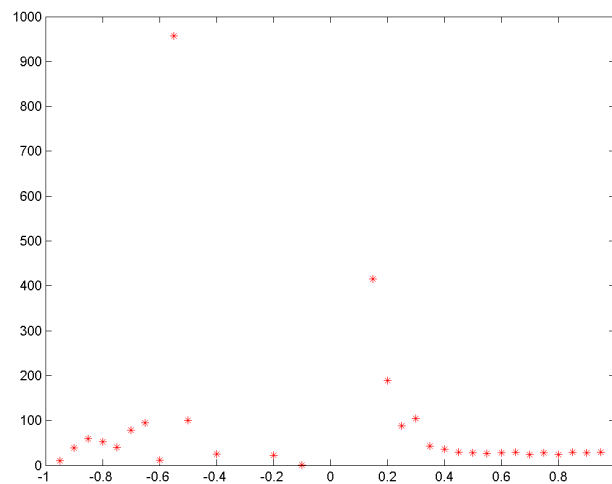
Poznamenajme ešte, že hodnoty parametrov  $b$  a  $\sigma_d$  musia byť kladné. Preto optimalizácie, v ktorých je aspoň jeden z týchto parametrov záporný, budeme považovať za neprípustné riešenia. Závis-



losti optimalizovaných  $y$ ,  $b$ ,  $\sigma_d$  ako aj príslušné hodnoty účelových funkcií od korelácie  $\rho$  sú znázornené v obrázkoch 4.6, 4.7, 4.8, 4.9.

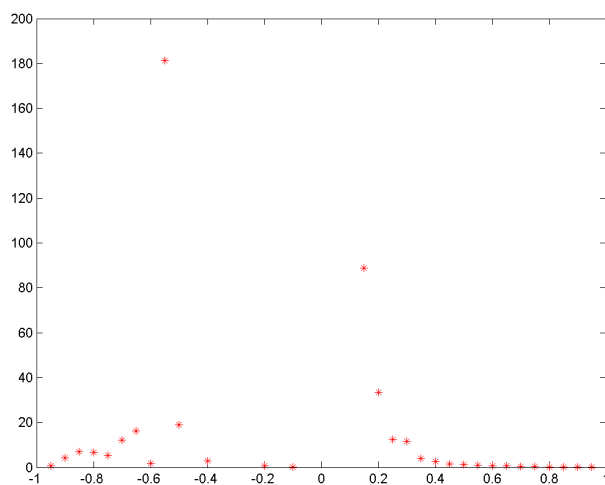


Obrázok 4.6: Závislosť parametra  $y$  od hodnôt korelácie  $\rho$

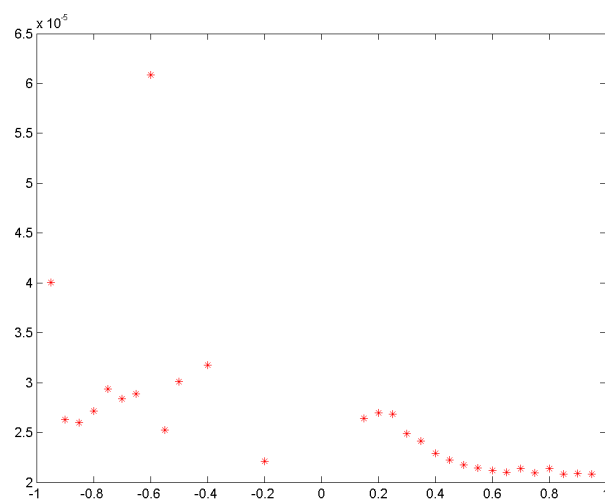


Obrázok 4.7: Závislosť parametra  $b$  od hodnôt korelácie  $\rho$

Pre porovnanie Vašíčkovho modelu s konvergenčným modelom sme domáce úrokové miery modelovali aj pomocou Vašíčka. Počítačné odhady modelu  $dr_d = c(d - r_d)dt + \sigma_d dz_d$  sú odhadnuté



Obrázok 4.8: Závislosť parametra  $\sigma_d$  od hodnôt korelácie  $\rho$



Obrázok 4.9: Závislosť účelovej funkcie od hodnôt korelácie  $\rho$

metódou maximálnej vierohodnosti. Dostali sme

$$c_0 = 328,053$$

$$\sigma_d^0 = 0,070798$$

$$x_0 = 14,0479$$

Parameter  $x$  zodpovedá tomu z redukcie parametrov, teda  $x = cd - \lambda_d \sigma_d$ . Optimalizáciou sme dospeli k hodnotám

$$c = 36,4099$$

$$x = 1,56228,$$

pričom hodnotu  $\sigma_d$  sme už ďalej neoptimalizovali, nakoľko metóda maximálnej vierohodnosti ju odhadla celkom presne. Optimálnou hodnotou účelovej funkcie tejto optimalizácie je  $F(c, x, \sigma_d) = 0.000021024$ . Túto hodnotu porovnávame s minimálnou hodnotou účelovej funkcie z tabuľky 4.4.

---

**optimálna hodnota účelovej funkcie pre domáce úrokové miery**

Vašíčkovým modelom: 0,000021024

konvergenčným modelom: 0,0000208087

---

Rozdiel účelových funkcií z tabuľky 4.4 je až na šiestom desatinom mieste. Menšia hodnota je aj v tomto prípade získaná konvergenčným modelom.

# Záver

Deriváty úrokovej miery sú, ako sme v úvode spomenuli vo veľkej miere obchodovateľnými na finančných trhoch. Ich hodnota závisí od úrokovej miery, ktorú sme modelovali jednofaktorovým Vašíčkovým a dvojfaktorovým konvergenčným modelom.

Cieľom práce bolo porovnať tieto dva modely. Žiadnou voľbou parametrov v konvergenčnom modeli nevieme dostať Vašíčkov model. Vašíčkov model nie je špeciálny prípad konvergenčného modelu. V porovnaní modelov sme sa zamerali na to, ktorý z nich lepšie fituje reálne dáta z pohľadu fitovania výnosových kriviek. Predpokladali sme, že ním bude konvergenčný model.

Náš predpoklad sme ani nepotvrdili, ani nevyvrátili, nakoľko výsledky modelovania boli veľmi podobné. Líšili sa až na šiestom desatinnom mieste. Toto však nie je jediná možnosť, ako modelovať konvergenciu úrokových mier. V modeli by sme napríklad mohli zvoliť inú, ako konštantnú volatilitu, prípadne by sa na modelovanie úrokových mier mohol použiť iný z konvergenčných modelov.

# Literatúra

- [1] Brigo, D. – MerCurio, F.: *Interest rate Models - Theory and Practice*. Springer, 2006
- [2] Euribor. <http://www.euribor.org>
- [3] Kwok, Y.K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*. Springer – Verlag, New York, 1998
- [4] Melicherčík, I. – Olšarová, L. – Úradníček, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*. EPOS, 2005
- [5] Národná banka Slovenska. <http://www.nbs.sk>
- [6] Oksendal, B.: *Stochastic Differential equations. An Introduction with Applications*. Springer – Verlag, 1998
- [7] Stehlíková, B.: *Kalibrácia jednofaktorových modelov úrokových mier*. Rigorózna práca. FMFI UK Bratislava, 2005
- [8] Ševcovic, D. – Urbanova Csajkova, A.: Calibration of one factor interest rate models, *Journal of Electrical Engineering*, 55, No. 12/s (2004), 46-50.
- [9] Ševcovic, D. – Urbanova Csajkova, A.: On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model, *Central European J. of Operation Research*, 13, 2005, 169-188.

- [10] Teresa C. Santamaria – Eduardo S. Schwartz: *Convergence within the EU: Evidence from Interest Rates*, Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA, vol.29, no 2-2000, pp. 243-266

# Zoznam obrázkov

1.1	Časová štruktúra úrokových mier pre dáta <i>BRIBOR-u</i> v dňoch 30.3, 29.7, 28.9 a 31.12 2007 . . . . .	5
1.2	Vývoj úrokových mier <i>BRIBOR-u</i> v roku 2007 . . . . .	7
3.1	Európske výnosové krivky . . . . .	23
3.2	Domáce výnosové krivky . . . . .	28
4.1	Závislosť driftu $\kappa(\theta - r)$ od úrokovej miery $r$ pre dáta <i>EURIBOR-u</i> . . . . .	33
4.2	Závislosť driftu $\kappa(\theta - r)$ od úrokovej miery $r$ pre dáta <i>BRIBOR-u</i> . . . . .	33
4.3	Závislosť účelovej funkcie $F$ od trhovej ceny rizika $\lambda$ Vašíčkovho modelu s $w_{i,j} = 1$ . . . . .	37
4.4	Závislosť účelovej funkcie $F$ od trhovej ceny rizika $\lambda$ Vašíčkovho modelu s $w_{i,j} = \tau$ . . . . .	38
4.5	Závislosť účelovej funkcie $F$ od trhovej ceny rizika $\lambda$ Vašíčkovho modelu s $w_{i,j} = \tau^2$ . . . . .	38
4.6	Závislosť parametra $y$ od hodnôt korelácie $\rho$ . . . . .	44
4.7	Závislosť parametra $b$ od hodnôt korelácie $\rho$ . . . . .	44
4.8	Závislosť parametra $\sigma_d$ od hodnôt korelácie $\rho$ . . . . .	45
4.9	Závislosť účelovej funkcie od hodnôt korelácie $\rho$ . . . . .	45

# Zoznam tabuliek

2.1	Jednofaktorové modely . . . . .	13
4.1	Odhady parametrov Vašíčkovho modelu pre denné dáta <i>BRIBOR</i> . . . . .	32
4.2	Odhady parametrov Vašíčkovho modelu pre denné dáta <i>EURIBOR</i> . . . . .	32
4.3	Hodnoty $\lambda_{min}$ a pre $w_{i,j} = 1$ , $w_{i,j} = \tau$ , $w_{i,j} = \tau^2$ . . .	37
4.4	Optimálne hodnoty parametrov a účelových funkcií pre rôzne hodnoty $\rho$ . . . . .	43