

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



VOLATILITA S DVOMA MOŽNÝMI STAVMI V
MODELOCH CIEN AKCIÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2009

JANA BELANOVÁ

Volatilita s dvoma možnými stavmi v modeloch cien akcií

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Jana Belanová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

Študijný odbor : 9.1.9. Aplikovaná matematika
Študijný program : Ekonomická a finančná matematika

Vedúca diplomovej práce : RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

BRATISLAVA 2009

Prehlásenie

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne a použila som iba zdroje uvedené v zozname literatúry.

V Bratislava dňa 28. apríla 2009

.....
Jana Belanová

Pod'akovanie

Za cenné rady a pripomienky pri vypracovaní tejto diplomovej práce ďakujem mojej vedúcej RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD.

Abstrakt

BELANOVÁ, Jana : *Volatilita s dvoma možnými stavmi v modeloch cien akcií*. [Diplo-
mová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a in-
formatiky. Katedra aplikovanej matematiky. - Vedúca : RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.
Bratislava: FMFIUK, 2009, 44.s

Vo finančnom modelovaní hrá Black-Scholesov model stále významnú úlohu, aj keď ne-
dokáže zachytiť určité pozorované vlastnosti výnosov akcií. Je však snaha hľadať modely,
ktoré by tieto limitácie Black-Scholesovho modelu nemali. Medzi takéto modely patrí aj
model cien akcií s dvoma možnými stavmi volatility, s ktorým sa zaoberám v tejto diplo-
movej práci. Cieľom diplomovej práce je odhadnúť parametre tohoto modelu pomocou
dát o vývoji cien akcie a cien opcií a zistiť ako dobre tento model zodpovedá skutočným
cenám.

Kľúčové slová: skryté Markovove procesy, model s meniacimi sa stavmi, cena opcie,
stochastická volatilita, EM algoritmus, evolučné stratégie.

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Úvod | 7 |
| 1 Modely so stochastickou volatilitou | 8 |
| 1.1 Motivácia | 8 |
| 1.2 Finančné deriváty | 9 |
| 1.3 Opcie | 10 |
| 1.4 Black-Scholesov model | 11 |
| 1.5 Stochastická volatilita | 14 |
| 2 Skrytý Markovov proces s dvoma stavmi pre volatilitu | 16 |
| 2.1 Markovov reťazec | 16 |
| 2.2 Zmena stavu | 18 |
| 2.3 Model pre vývoj ceny akcie | 20 |
| 2.4 EM algoritmus na odhadovanie parametrov | 22 |
| 2.5 Použité dáta | 25 |
| 2.6 Odhady parametrov | 26 |
| 3 Cena opcie s Markovovým modelom | 28 |
| 3.1 Oceňovacia formula | 28 |
| 3.2 Použité dáta | 30 |
| 3.3 Odhady | 31 |
| 3.4 Porovnanie cien | 34 |
| Záver | 37 |
| Literatúra | 38 |
| Prílohy | 40 |

Úvod

V každom časovom priebehu akcií môžeme vidieť určitý dramatický zlom, ak ho sledujeme dostatočne dlhé časové obdobie. Tieto dramatické zmeny môžu byť spôsobené rôznymi faktormi. Z minulosti sú známe prípady ako krach burzy cenných papierov v roku 1987 no aj rôzne iné problémy na finančných trhoch, taktiež vojny, zmeny vo vládnej politike či nekompletné informácie. Tieto zmeny sa prejavujú nárastom volatility, ktorá určitý čas pretrváva a potom sa opäť vracia na nízku úroveň. Túto zmenu ale Black-Scholesov model nie je schopný zachytiť kvôli predpokladu konštantnej volatility.

Tieto pozorované vlastnosti podmienili vznik modelov s meniacimi sa stavmi. Modely s meniacimi sa stavmi sú schopné prispôbiť sa týmto výkyvom vďaka možnosti zmeny volatility. Výskum v uplynulých rokoch v tomto smere pokročil tak, že sme schopní odhadnúť parametre v týchto modeloch a ukazuje sa, že modely s meniacimi sa stavmi dokážu lepšie charakterizovať časový priebeh ako modely len s jedným stavom. V tejto diplomovej práci sa zaoberám modelom s dvoma možnými stavmi, v ktorom sa môže nadobúdať stav s vysokou alebo nízkou volatilitou. Hamilton [16] sa zaoberal takýmito modelmi a na odhad parametrov skonštruoval a maximalizoval logaritmickú funkciu vierohodnosti založenú na pravdepodobnosti zmeny stavu.

Tieto odhady nám okrem potrebných parametrov, poskytujú aj pravdepodobnosti, ktoré určujú, v ktorom stave sa akcia nachádza, t. j. či v stave s vysokou alebo nízkou volatilitou. Zakomponovanie modelu s meniacimi sa stavmi do ceny opcie, nám dáva cenu opcie závislú od daného stavu. To znamená, že ak sa akcia nachádza v stave s vysokou volatilitou, cena opcie bude pochopiteľne nižšia (vzhľadom na riziko) a naopak.

V prvej časti sa venujem vysvetleniu základných pojmov z finančného sveta, taktiež je tu spomenutý Black-Scholesov model a jeho nedostatky. V ďalšej časti je uvedený model pre cenu akcie so začleneným obchodným cyklom a taktiež je tu vysvetlené na čom je tento model založený a ako sa odhadujú potrebné parametre. V poslednej časti sa venujem porovnaniu skutočných cien opcií s opciami vypočítanými pomocou tohoto modelu.

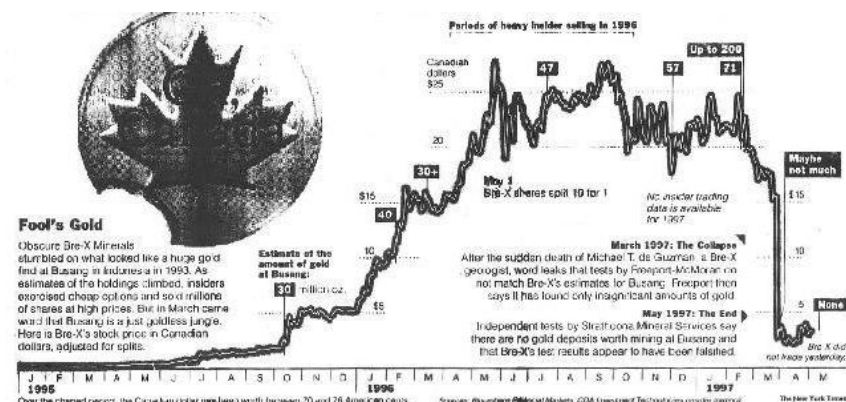
Kapitola 1

Modely so stochastickou volatilitou

1.1 Motivácia

Výrazné zmeny v časovom priebehu akcií môžeme vidieť v nasledujúcom príklade, na ktorý poukázala vo svojej práci Guo [12]. Tu je zobrazený príbeh kanadskej firmy Bre-X, ktorá sa zaoberala ťažbou zlata. Raz narazili na niečo, čo vyzeralo ako veľká zásoba zlata v Indonézii. Pochopiteľne po tomto objave stúpili akcie firmy ale už chvíľu nato výrazne stúpila aj volatilita. Dôvodom sa ukázalo byť to, že niektorí ľudia vo firme vedeli, že testy firmy ukázali, že toto zlato je falošné. Keď sa táto informácia dostala na trh, firma sa rozpadla.

V tomto prípade volatilita vzrástla ako dôsledok nekompletných informácií na trhu, t. j. niektorí ľudia vo firme vedeli viac ako iní a snažili sa túto výhodu zužitkovať. Predávali tým, ktorí verili, že toto zlato je pravé (teda nevedeli všetky dostupné informácie). Informácie na trhu sú len zriedka, ak vôbec niekedy, zdieľané na trhu simultánne všetkými a tento časový rozdiel môže vytvárať arbitrážne príležitosti, ktoré nikdy netrvajú dlho a strácajú sa akonáhle majú všetci všetky informácie.



Obrázok 1.1: Vzostup a pád firmy Bre-X, zdroj: [12]

Tento príklad ukazuje, ako vplývajú nekompletné informácie na zmenu ceny akcie a volatility. Ale okrem informácií, ktoré nie sú zdieľané všetkými, vplývajú na zmenu volatility aj iné faktory ako napríklad vojny, zmeny vo vládnej politike či akákoľvek finančná panika. Práve kvôli týmto zmenám v časových priebehoch, sa začali modelovať ceny akcií pomocou modelu so zakomponovanou informáciou o tom, v ktorom stave sa v danom čase akcia nachádza. Okrem akcií ukazujú podobné zmeny aj úrokové miery a výmenné kurzy.

1.2 Finančné deriváty

Finančné deriváty sú nástroje, ktorých hodnota závisí od príslušných finančných aktív ako napr. akcie, meny, úrokové sadzby, výmenné kurzy, drahé kovy atď. Ich podstata spočíva v tom, že vypisovateľ derivátu sa zaväzuje v budúcnosti plniť určité vopred dohodnuté podmienky. Ich rozvoj nastal koncom 90-tych rokov, kedy nestabilita na finančných trhoch (fluktuácia cien akcií, úrokových mier a výmenných kurzov) spôsobila zvýšené riziká pre investorov. Tieto problémy podnietili rozvoj finančných derivátov až do takej podoby, v akej ich poznáme dnes. Finančné deriváty slúžia ako určité zabezpečenie proti veľkým výkyvom v cenách aktív a tým pádom aj proti veľkým finančným stratám. Niektorí investori ich ale tiež využívajú na profitovanie z priaznivých pohybov na trhu na tzv. špekulatívny zisk.

Základné typy finančných derivátov sú opcie, forwardy, futurity a swapy.

Forwardy sú najstarším typom na zabezpečenie sa proti riziku. Je to dohoda medzi vypisovateľom forwardu a kupujúcim, ktorá predstavuje právo a súčasne povinnosť uplatniť forwardový kontrakt na kúpu resp. predaj aktíva v stanovenom čase za vopred dohodnutú cenu. Forward sa neuzatvára na burze, takže jeho podmienky si určujú medzi sebou len kupujúci a predávajúci.

Futurity sú štandardizované kontrakty a predstavujú dohodu kúpiť resp. predaj aktívum (zahraničné meny, dlhopisy, atď.) v stanovenom čase za vopred dohodnutú cenu. Je to tzv. pevný termínovaný kontrakt. Obchoduje sa s ním na burze, ktorá určuje podmienky kontraktu ako napríklad minimálny obchodovaný objem. Držiteľ futurity má právo, ale nie povinnosť, tento obchod uskutočniť.

Opcie predstavujú právo, nie však povinnosť kúpiť resp. predaj aktívum vo vopred dohodnutom čase za vopred dohodnutú cenu. Existujú dva základné typy opcí : call a put opcia. Call opcia predstavuje právo kúpiť a put opcia právo predať.

Swapy sú dohodou medzi dvoma alebo viacerými partnermi o výmene určitého dohodnutého množstva peňazí vo vopred dohodnutých termínoch v budúcnosti. Štandardne sa tieto obchody realizujú mimo burzy. Swapy sa dajú využívať na zabezpečenie proti určitým rizikám ako napríklad riziku úrokových mier alebo tiež na špekulatívny zisk.

1.3 Opcie

Ako už bolo povedané, opcie predstavujú právo, nie však povinnosť kúpiť alebo predat určitú časť aktíva za vopred dohodnutú cenu (expiračná cena) vo vopred dohodnutom čase (expiračný čas alebo maturita). Toto právo získava kupujúci potom, čo zaplatí vypisovateľovi opčnú prémie. A potom už je len na majiteľovi opcie, či nechá opciu nevyužitú (t. j. nechá ju vypršať) alebo ju využije a vypisovateľ opcie má povinnosť urobiť to, k čomu sa zaviazal. Keďže je uplatnenie opcie podmienené rozhodnutím majiteľa opcie, zaraďujú sa opcie medzi podmienené termínované kontrakty.

Opcie sa dajú rozdeliť na dva základné typy podľa toho, kedy je možné opciu uplatniť. Európske opcie sú také, ktoré je možné uplatniť len v expiračnom čase. Na rozdiel od nich americké opcie je možné využiť od ich vypísania až do expiračného času. S obidvoma typmi sa bežne obchoduje na celom svete (častejšie sa využíva americký typ opcie).

Podľa toho, či sa jedná o opciu, ktorá predstavuje právo kúpiť alebo predat, existujú dva druhy opcií. Call opcia dáva jeho majiteľovi právo kúpiť aktívum, kdežto put opcia predstavuje právo predat aktívum za expiračnú cenu vo vopred dohodnutom expiračnom čase.

Investori a potencionálni kupci majú záujem kupovať opcie, z ktorých môžu mať zisk, preto je pre nich dôležité vedieť aký zisk im daná opcia môže priniesť. Hodnota opcie v expiračnom čase sa nazýva payoff. Ak cena akcie S v expiračnom čase T , na ktorú bola opcia vypísaná, je vyššia ako dohodnutá expiračná cena E , vtedy zisk pre majiteľa call opcie predstavuje rozdiel medzi cenou akcie a expiračnou cenou. V opačnom prípade sa neoplatí majiteľovi túto opciu uplatniť, pretože by na tom stratil a teda bude mať zisk z opcie rovný 0.

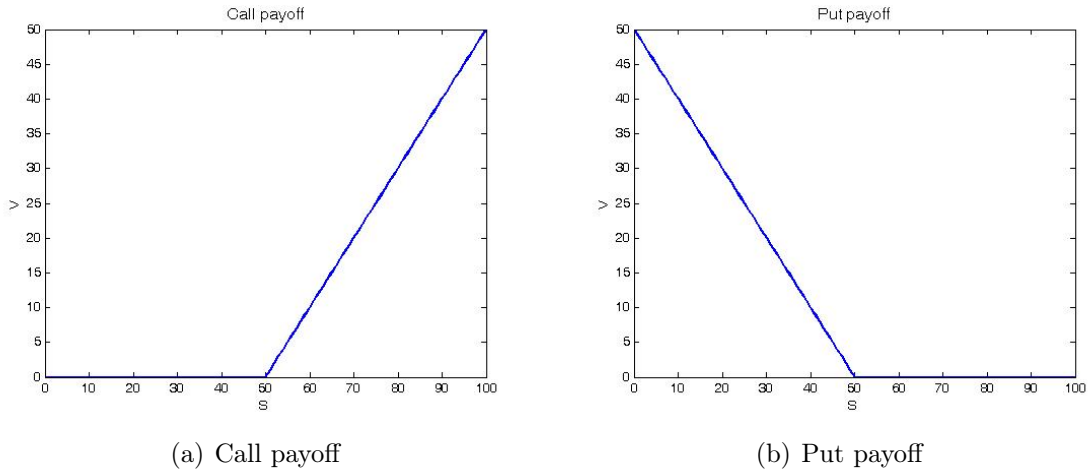
$$V(S, T) = \begin{cases} S - E & \text{ak } S > E \\ 0 & \text{ak } S \leq E \end{cases}$$

takže pre call opciu platí : $V(S, T) = \max(S - E, 0)$.

Keďže put opcia predstavuje právo predat, jej payoff funkcia vyzerá presne naopak. Ak je cena akcie S vyššia ako expiračná cena E , tak pre majiteľa takejto put opcie to predstavuje zisk rovný 0. Ak je však cena akcie S nižšia ako expiračná cena E , má majiteľ zisk rovný rozdielu týchto dvoch cien.

$$V(S, T) = \begin{cases} E - S & \text{ak } S < E \\ 0 & \text{ak } S \geq E \end{cases}$$

takže pre put opciu platí : $V(S, T) = \max(E - S, 0)$.



Obrázok 1.2: Payoff funkcie

1.4 Black-Scholesov model

Pred zhruba 30 rokmi bol publikovaný model na oceňovanie opcií známy ako Black-Scholesov model ¹ (1973). Výrazne pomohol pri oceňovaní opcií a dá sa povedať, že dodnes je to základný kameň pri oceňovaní. Tento model prispel k zvýšenému obchodovaniu s opciami a k vytváraniu nových derivátov na finančných trhoch. Hodnoty, ktoré dostaneme z Black-Scholesovho modelu sa líšia od tých reálnych kvôli zjednodušujúcim predpokladom, na ktorých je založený. Ale aj napriek týmto nedostatkom je oceňovanie Black-Scholesovým modelom veľmi populárne a rozšírené kvôli jeho jednoduchému používaniu a výsledky nám poskytujú aspoň približnú predstavu o cene derivátu.

Predpoklady, na ktorých je tento model založený, sú :

- bezriziková úroková miera je známa a konštantná,
- akcie nevyplácajú dividendy,
- neexistujú transakčné náklady,
- obchodovanie je spojité a v akomkoľvek množstve,
- žiadna arbitrážna príležitosť.

Ďalším predpokladom je, že cena akcie S sa riadi geometrickým Brownovým pohybom

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW,$$

¹Za príspevok k oceňovaniu derivátov dostali Myron Scholes a Robert Merton v roku 1997 Nobelovú cenu za ekonómiu. Fischer Black bol žiaľ už v tom čase po smrti.

kde W je Wienerov proces. Použitím Itóovej lemy², dostaneme, že cena opcie V vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW.$$

Spolu s ďalšími predpokladmi, ktorými sú nulový rast investícií, samofinancovateľnosť portfólia a podmienka nearbitráže, dostaneme známou Black - Scholesovú parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \\ V(S, T) = \max(S - E, 0) \end{cases},$$

pričom druhá rovnica predstavuje koncovú podmienku pre call opciu (ako bolo spomenuté v predchádzajúcej kapitole). Vyriešením tejto rovnice dostaneme cenu pre call opciu :

$$V_{CALL} = SN(d_1) - Ee^{-r\tau} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \quad d_2 = \frac{\ln(S/E) - (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

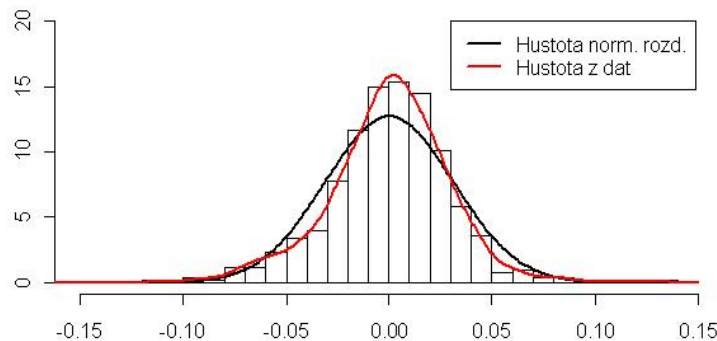
kde τ je čas do expirácie a N je distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia.

Cena pre Put opciu sa dá jednoducho získať pomocou put-call parity :

$$V_{PUT} = V_{CALL} - S + Ee^{-r\tau}.$$

K nedostatkom Black - Scholesovho modelu patria (podľa článku [10]) :

- **Vlastnosť asymetrickej leptokurtózy** - rozdelenie výnosov je zošikmené naľavo a má vyšší vrchol a ťažšie chvosty ako normálne rozdelenie.



Obrázok 1.3: Porovnanie hustôt výnosov firmy Apple. Údaje sú za roky 2007 a 2008.

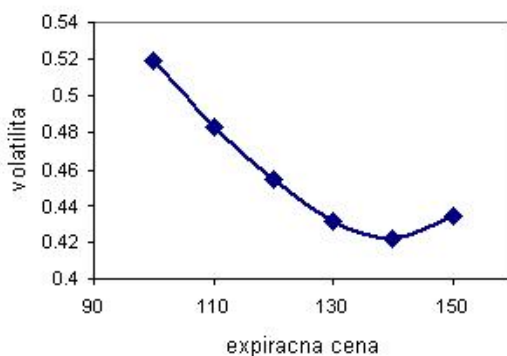
²Podrobné odvodenie sa dá nájsť v práci [20]

Tabuľka 1.1: Štatistiky výnosov firmy Apple (1.1.2007-31.12.2008)

| min | max | stredná hodnota | št. odchýlka | šikmost' | špicatosť |
|----------|---------|-----------------|--------------|----------|-----------|
| -0.19747 | 0.13019 | 0.000036436 | 0.031264448 | -0.5097 | 7.1847 |

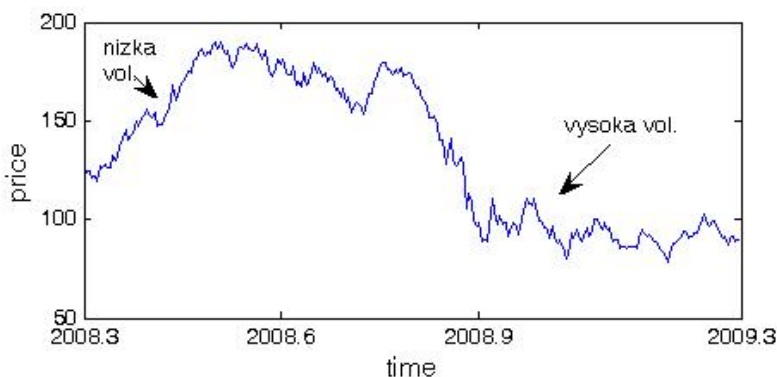
Z grafického porovnania hustoty reálnych dát a normálneho rozdelenia je vidno, že v skutočnosti má vyšší vrchol aj ťažšie chvosty a údaje v tabuľke (tabuľka 1.4) len potvrdzujú všetky tieto vlastnosti, vrátane zošikmenia.

- **Vlastnosť volatility smile** - v Black-Scholesovom modeli sa predpokladá, že volatility je konštantná ale v skutočnosti má vlastnosť "smile", t. j. je to konvexná krivka expiračnej ceny.



Obrázok 1.4: Volatility smile - tabuľka s príslušnými hodnotami v prílohe (tabuľka 3.4)

- **Zhlukovanie volatility** - vysoké hodnoty volatility sú zvyčajne nasledované vysokými a nízke nízky.



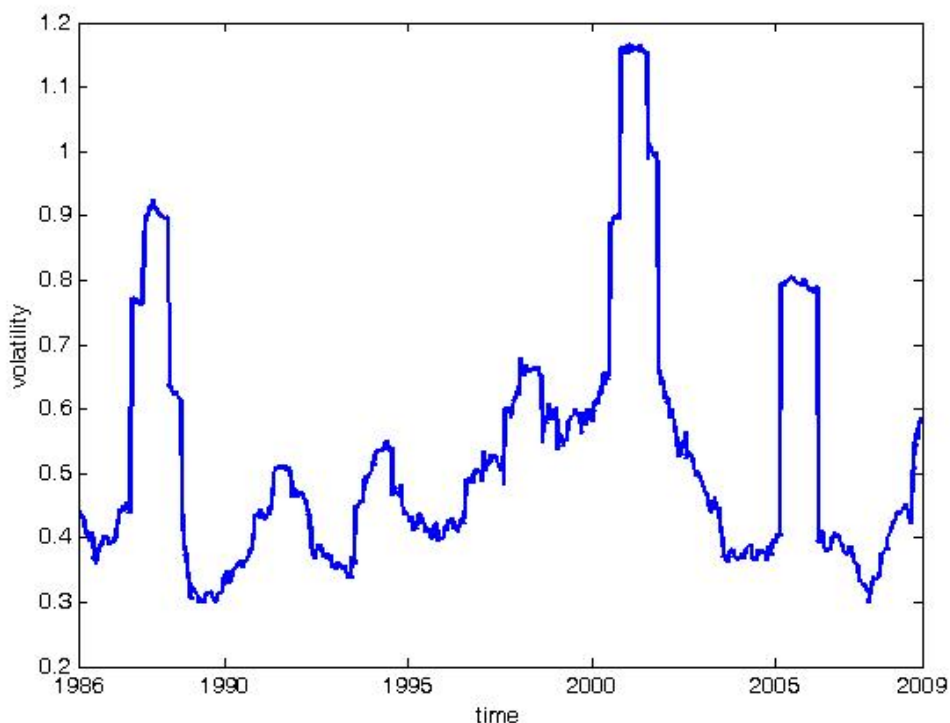
Obrázok 1.5: Zhlukovanie volatility na cenách akcií firmy Apple 1.3.2008-1.3.2009

1.5 Stochastická volatilita

Analýzou reálnych dát sa zistilo, že volatilita na finančných trhoch nie je konštantná, tak ako predpokladali autori Black - Scholesovho modelu, ale že sa časom mení. Vlastne už v roku 1972 Black so Scholesom vedeli, že konštantná volatilita nezodpovedá realite a napísali vo svojej práci [2] (s.416), že je evidentná nekonštantnosť variancie a bude potrebné sa tomuto problému ďalej venovať.

Na ukážku toho, že volatilita sa časom mení, posluží napríklad graf historickej volatility pre firmu Apple za obdobie rokov 1986 až 2008. Táto volatilita bola vypočítaná ako štandardná odchýlka logaritmickej výnosov, prenášaná odmocninou z prevrátenej hodnoty časového kroku (v prípade našich denných dát $\sqrt{250}$).

Prvý vrchol je z októbra 1987 kedy krachla burza cenných papierov, druhý vrchol z roku 2001 bude pravdepodobne spôsobený septembrovým teroristickým útokom v USA a tretí vrchol z roku 2005 je tiež výsledkom teroristického útoku vo Veľkej Británii. Nepochybné bude v ďalších rokoch nasledovať ďalší vrchol spôsobený už začatou finančnou krízou, ktorá začala v USA ale postihla celý svet.



Obrázok 1.6: Historická volatilita pre firmu Apple 1986-2008

Volatilita je ale skrytý proces a aj keď ovplyvňuje ceny akcií, nedá sa priamo zistiť jej

hodnota. Odkedy sa prišlo na to, že volatilita je stochastickým procesom, bola snaha upraviť Black - Scholesov model alebo vymyslieť iný model tak, aby lepšie popisoval realitu. Preto aj vznikla myšlienka modelu s meniacimi sa stavmi, pričom v jednotlivých stavoch je volatilita rôzna. Jedným z týchto modelov je model s dvoma stavmi, ktoré môže volatilita nadobúdať. A práve skúmaniu tohoto modelu sa budeme ďalej venovať.

Kapitola 2

Skrytý Markovov proces s dvoma stavmi pre volatilitu

2.1 Markovov reťazec

V tejto kapitole vysvetlíme pojem Markovovho procesu a podrobne sa zaoberáme vlastnosťami procesu s dvoma stavmi. Táto kapitola je spracovaná podľa prác [4] a [8].

Markovov reťazec¹ je stochastický proces s markovovou vlastnosťou. Táto vlastnosť znamená, že budúci stav závisí len od súčasného stavu, a nie od predchádzajúcich. Na začiatku začneme z nejakého stavu a postupne prechádzame s danou pravdepodobnosťou z jedného stavu do druhého. Z predchádzajúcej časti vieme, že $\epsilon(t)$ je markovov reťazec, ktorý vo všeobecnosti môže nadobúdať niekoľko stavov a platí

$$P(\epsilon(t+1) = j | \epsilon(t) = i, \epsilon(t-1) = k, \dots) = P(\epsilon(t+1) = j | \epsilon(t) = i) = p_{ij}.$$

p_{ij} sa nazýva *prechodová pravdepodobnosť* a je to pravdepodobnosť prechodu zo stavu i do stavu j . Ďalej sa už budeme zaoberať len našim prípadom, v ktorom môžu nastať práve dva stavy. Matica \mathbf{P} pozostávajúca z prechodových pravdepodobností sa nazýva *prechodová matica*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Ak napríklad $p_{11} = 1$ potom sa z matice \mathbf{P} stane horná trojuholníková matica a bude to znamenať, že akonáhle sa proces dostane do stavu 1, už nebude žiadna možnosť návratu do stavu 2. V tomto prípade sa stav 1 nazýva *absorbujúci stav* a Markovov reťazec je redukovateľný. Naopak Markovov reťazec, ktorý nie je redukovateľný sa nazýva neredukovateľný (napríklad Markovov reťazec s dvoma stavmi, kde $p_{11} < 1$ a $p_{22} < 1$).

Nech príchod do stavu je riadený Poissonovým procesom so strednou hodnotou λ . Nech

¹Markovov reťazec je pomenovaný podľa ruského profesora Andreja. A. Markova, ktorý bol známy prácou na teórii stochastických procesov.

$p_{ij}(\Delta t)$ je pravdepodobnosť prechodu zo stavu i do stavu j na intervale dĺžky Δt , potom platí

- pravdepodobnosť prechodu na intervale dĺžky Δt je $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, pričom

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

- pravdepodobnosť zotrvania v danom stave na intervale dĺžky Δt je $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$

Takže v tomto prípade bude matica prechodov \mathbf{P} vyzerat' nasledovne

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11}(\Delta t) & p_{21}(\Delta t) \\ p_{12}(\Delta t) & p_{22}(\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1\Delta t + o(\Delta t) & \lambda_2\Delta t + o(\Delta t) \\ \lambda_1\Delta t + o(\Delta t) & 1 - \lambda_2\Delta t + o(\Delta t) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Ďalej vieme, že

$$\begin{pmatrix} P(\epsilon(t + \Delta t) = 1) \\ P(\epsilon(t + \Delta t) = 2) \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} P(\epsilon(t) = 1) \\ P(\epsilon(t) = 2) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Ak označíme

$$P(t) = \begin{pmatrix} P(\epsilon(t) = 1) \\ P(\epsilon(t) = 2) \end{pmatrix}$$

môžeme vzťah (2.2) prepísať do tvaru

$$P(t + \Delta t) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1\Delta t & \lambda_2\Delta t \\ \lambda_1\Delta t & 1 - \lambda_2\Delta t \end{pmatrix} P(t) + o(\Delta t).$$

Z toho vyplýva, že

$$\begin{aligned} P(t + \Delta t) - P(t) &= (P(\Delta t) - I)P(t) \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda_1\Delta t & \lambda_2\Delta t \\ \lambda_1\Delta t & -\lambda_2\Delta t \end{pmatrix} P(t) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Keď položíme $\Delta t \rightarrow 0$ dostávame

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} &= \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} P(t) \\ \frac{dP}{dt}(t) &= \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} P(t). \end{aligned}$$

Vyriešením týchto diferenciálnych rovníc spolu s podmienkou, že začíname zo stavu 1, čiže $P(\epsilon(0) = 1) = 1, P(\epsilon(0) = 2) = 0$, dostaneme nasledujúce pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} P(\epsilon(t) = 1) &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} (\lambda_2 - \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}) \\ P(\epsilon(t) = 2) &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} (\lambda_1 + \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Limitné rozdelenie

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$$

je konštantné vzhľadom na t , takže $\frac{dP}{dt} = 0$ a teda

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

čo nám spolu s podmienkou, že $P(\epsilon(t) = 1) + P(\epsilon(t) = 2) = 1$ dáva ustálené pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P(\epsilon(t) = 1) &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} P(\epsilon(t) = 2) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

2.2 Zmena stavu

Táto kapitola je spracovaná podľa práce [3]. Zaoberáme sa v nej dôležitou charakteristikou procesu, ktorou je čas, ktorý proces zotrúva v danom stave.

Zmena stavu je náhodnou udalosťou, je nezávislá a časom nemenná. Označme $p_0(t)$ pravdepodobnosť, že na intervale dĺžky t nenastane žiadna udalosť. Je pochopiteľné, že za nulový čas nenastane žiadna udalosť a keďže sú pravdepodobnosti nezávislé bude platiť, že pravdepodobnosť, že nenastane žiadna udalosť za čas $t + s$ bude taká istá ako pravdepodobnosť, že nenastane žiadna udalosť počas času t ani počas času s . Takže matematicky zapísané platí, že :

$$p_0(0) = 1 \tag{2.4}$$

$$p_0(t + s) = p_0(t)p_0(s), \quad t, s > 0 \tag{2.5}$$

Veta 1 *Nech $p_0 : [0, \infty) \rightarrow R^+$ je spojité klesajúca nezáporná funkcia spĺňajúca (2.4), (2.5). Potom platí*

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0. \tag{2.6}$$

Dôkaz: Označme $\lambda = -\ln p_0(1)$ a na základe predpokladu o nezávislosti (2.5), potom platí

$$\begin{aligned} p_0(k) &= \underbrace{p_0(1) \dots p_0(1)}_k \\ p_0(1) &= \underbrace{p_0(1/n) \dots p_0(1/n)}_{1/n} \\ p_0(1/n) &= (p_0(1))^{1/n} \\ p_0(k/n) &= (p_0(1))^{k/n} = e^{-\lambda \frac{k}{n}} \end{aligned}$$

Týmto sme dokázali, že (2.6) platí pre $t \geq 0$ racionálne. Ale v predpokladoch máme, že táto funkcia je spojitá, a tým pádom (2.6) platí aj pre všetky $t \geq 0$ reálne. \square

Ak označíme τ ako dĺžku intervalu medzi dvoma udalosťami potom pravdepodobnosť, že na intervale dĺžky t nastane aspoň jedna udalosť (alebo inak povedané, že sa zmení stav) je

$$P(\tau \leq t) = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

Distribučná funkcia pre τ je

$$f(\tau) = \frac{d(1 - e^{-\lambda\tau})}{d\tau} = \lambda e^{-\lambda\tau},$$

a priemerná dĺžka medzi dvoma zmenami stavu je

$$E[\tau] = \int_0^{\infty} \tau \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

Dĺžka intervalu medzi zmenami stavu má teda exponenciálne rozdelenie. Hodnota $\frac{1}{\lambda}$ predstavuje priemernú dobu medzi udalosťami alebo inak povedané λ predstavuje priemerný počet udalostí za jednotku času.

Zo vzťahu (2.1) môžeme odvodiť približný vzťah medzi λ a pravdepodobnosťami prechodov :

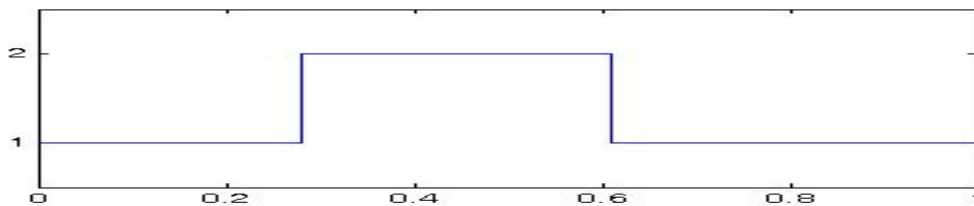
$$p_{12}(\Delta t) \approx \lambda_1 \Delta t.$$

A teda

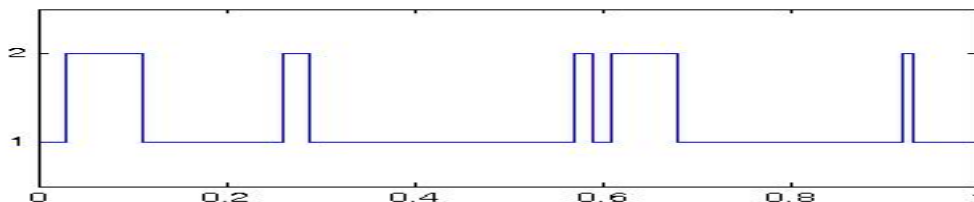
$$\lambda_1 \approx \frac{p_{12}}{\Delta t} \tag{2.7}$$

Na základe predchádzajúceho vzťahu (2.7) vidíme, že ak pravdepodobnosť prechodu zo stavu 1 do stavu 2 je napríklad $p_{12} = 10\%$ potom pri danom kroku $\Delta t = 1/100$ sa bude λ približne rovnať 10 (to znamená, že nastane 10 udalostí resp. prechodov z jedného stavu do druhého).

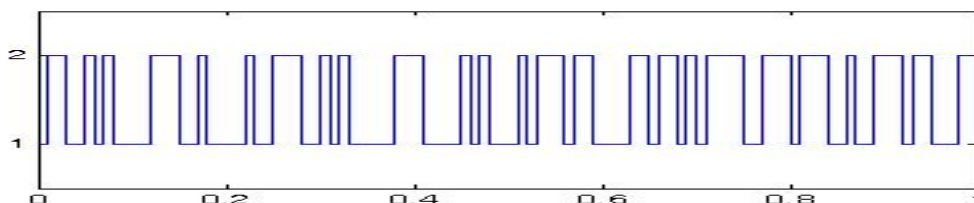
Je pochopiteľné, že čím vyššia pravdepodobnosť prechodov medzi stavmi, tým častejšie sa budú tieto stavy meniť. Toto si ilustrujeme na nasledujúcich príkladoch, kde pre pravdepodobnosti bude platiť, že sa rovnajú : $p_{12} = p_{21}$ a vezmeme postupne $p_{12} = 1\%$, $p_{12} = 10\%$ a 50% . Vygenerovaním stavov pre každú časovú jednotku, sme dostali nasledujúce obrázky.



Obrázok 2.1: Pravdepodobnosť prechodu $p_{12} = p_{21} = 1\%$



Obrázok 2.2: Pravdepodobnosť prechodu $p_{12} = p_{21} = 10\%$



Obrázok 2.3: Pravdepodobnosť prechodu $p_{12} = p_{21} = 50\%$

2.3 Model pre vývoj ceny akcie

Podľa autorov Fuh, Wang a Cheng [9] začleníme do modelovania zmien ceny akcie X_t aj existenciu obchodného cyklu.

$$dX_t = X_t \mu_{\epsilon(t)} dt + X_t \sigma_{\epsilon(t)} dW_t, \quad (2.8)$$

kde $\epsilon(t)$ je stochastický proces, ktorý určuje stav obchodného cyklu a W_t je štandardný Wienerov proces, ktorý je nezávislý na $\epsilon(t)$. Pre každý stav $\epsilon(t)$ je parameter driftu $\mu_{\epsilon(t)}$ a volatility $\sigma_{\epsilon(t)}$ známy, a nadobúda rozdielne hodnoty pre rozdielne stavy $\epsilon(t)$.

Predpokladajme, že $\epsilon(t)$ je markovov proces, ktorý môže nadobúdať niekoľko stavov. V tomto prípade práve dva stavy keďže vieme, že obchodný cyklus môžeme rozdeliť na dva rôzne stavy.

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{cyklus v expanzii} \\ 2 & \text{cyklus v kontrakciách} \end{cases}$$

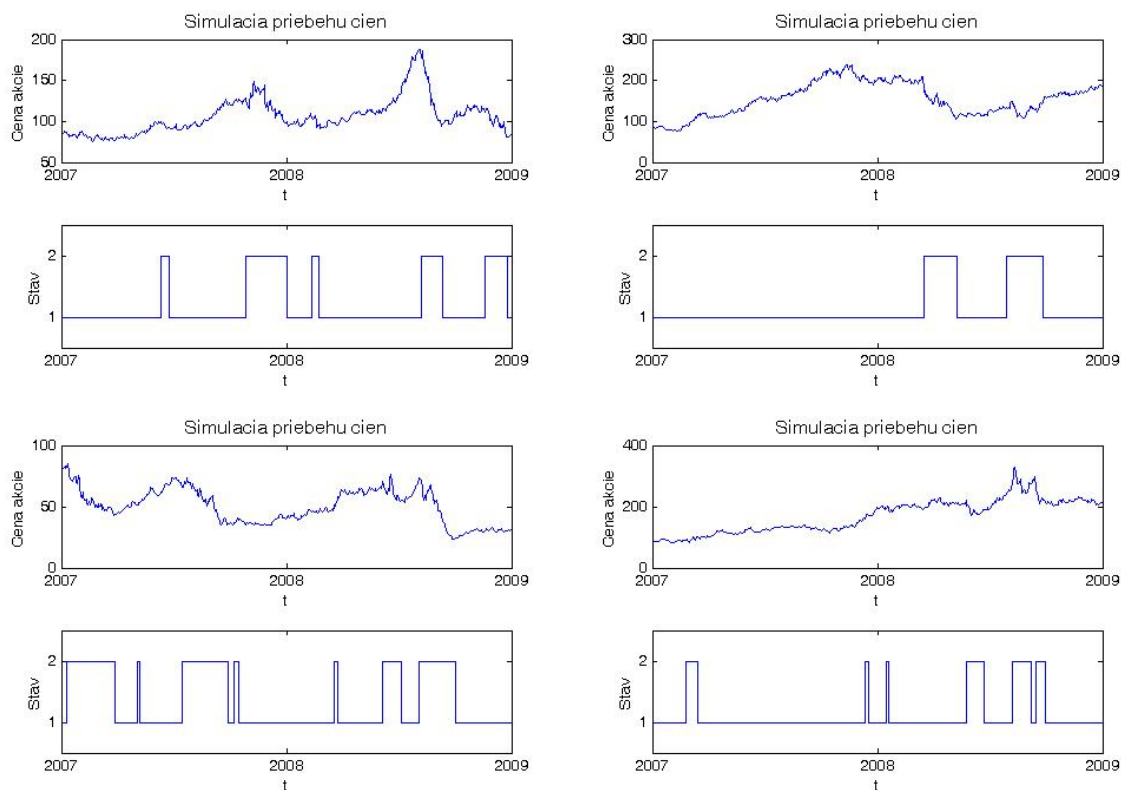
To znamená, že

- ak je cyklus v expanzii platí : $\epsilon(t) = 1, \mu_{\epsilon(t)} = \mu_1, \sigma_{\epsilon(t)} = \sigma_1$
- ak je cyklus v kontrakciách platí : $\epsilon(t) = 2, \mu_{\epsilon(t)} = \mu_2, \sigma_{\epsilon(t)} = \sigma_2$

Predpokladáme, že $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

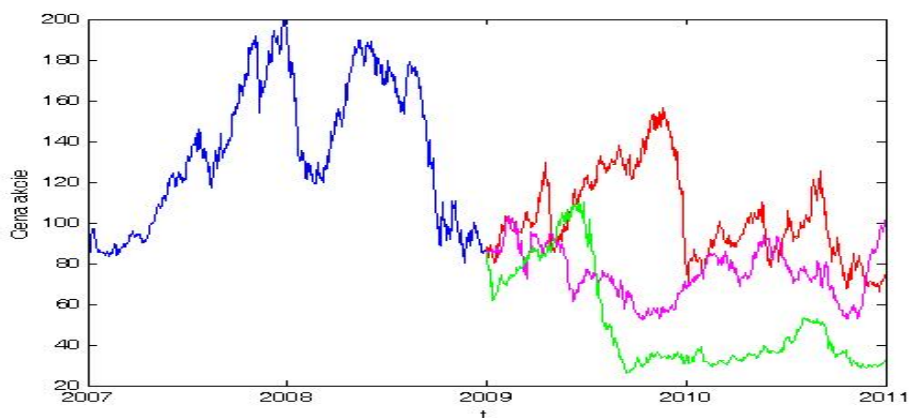
Vďaka zakomponovaniu skrytého Markovovho procesu do Black-Scholesovho modelu, parametre driftu a volatility nadobúdajú rozdielne hodnoty v závislosti od stavu skrytého Markovovho procesu. David [6] v práci *Fluctuating Confidence in Stock Markets: Implications for Returns and Volatility* ukázal, že takýto model (2.8) má vlastnosť asymetrickej leptokurtózy, negatívne zošikmenie a negatívnu koreláciu s budúcou volatilitou. A neskôr Veronesi [21] v práci *Stock market overreactions to bad news in good times...* ukázal, že takýto model je lepší, na vysvetlenie vlastností cien akcií, ako samotný Black-Scholesov model.

Nasledujúce obrázky zobrazujú niekoľko simulácií pre firmu Apple v časovom období dvoch rokov a simulácie budúcich cien v priebehu nasledujúcich dvoch rokov. Tieto simulácie začínajú všetky z rovnakého bodu a to je hodnota akcie firmy Apple na začiatku roka 2007, ktorá bola 83.8 a všetky majú začiatkový stav 1 (takže predpokladáme, že na začiatku roka 2007 budú akcie ešte rásť). Parametre použité pri simuláciách sú: $\mu_1 = 0.7654$, $\mu_2 = -2.0657$, $\sigma_1 = 0.3333$, $\sigma_2 = 0.7646$, $p_{11} = 0.9840$, $p_{22} = 0.9562$. Postup, akým sme tieto parametre odhadli z dát, je uvedený v nasledujúcich kapitolách.



Obrázok 2.4: Simulácie cien akcií spolu s príslušným stavom pre firmu Apple

V prípade simulácií budúcich cien naopak predpokladáme, že sme na začiatku v stave 2, keďže už ceny akcií klesali určitý čas a očakával sa ešte ďalší pokles.



Obrázok 2.5: Simulácie budúcich cien firmy Apple

2.4 EM algoritmus na odhadovanie parametrov

Na to aby sme mohli tento model použiť, potrebujeme vedieť parametre ako stredné hodnoty, volatility či pravdepodobnosti prechodov pre každý stav. Na odhad týchto parametrov použijeme algoritmus a software od Hamiltona [15], ktorý bol publikovaný už v roku 1989. Odvtedy bol využitý na odhady parametrov pre rôzne modely. Napríklad od samotného Hamiltona bol využitý na skúmanie obchodného cyklu resp. HDP [15], na úrokovú mieru [13] alebo aj výmenný kurz [14]. Ďalej napríklad Galagedera [11] využil tento prístup na výnosy akcií a S&P indexu, taktiež Bialkowski [1], Fuh [10] a iní na výnosy akcií.

Program je napísaný v programovacom jazyku GAUSS. Existuje verzia programu, ktorá vyžaduje Gauss-ové procedúry na numerickú optimalizáciu (tu je potrebná ešte aj súčasť, ktorá sa volá Ox Maximizer) a verzia, ktorá ich nevyžaduje. V tejto diplomovej práci je použitá druhá verzia. Na spustenie tohoto programu bol využitý program OxEdit (verzia 5.10) respektíve jeho súčasť OxGauss (boli potrebné aj menšie úpravy pôvodného programu, aby bolo možné tento program vôbec spustiť). Bolo potrebné aj dodanie jeho súčasti M@ximize, čo tvorí isté prepojenie medzi Gauss-ovým programovacím jazykom a Ox-ovým.

Tento algoritmus využíva tzv. EM algoritmus (Expectation-Maximization) - pod tým sa rozumie algoritmus zložený z dvoch krokov: E-krok, v ktorom sa odhaduje stredná hodnota z logaritmu danej funkcie a M-krok, v ktorom sa tato stredná hodnota maximal-

izuje. Túto metódu aplikujeme na logaritmus výnosov akcií, ktorý označíme r_t

$$r_t = \log \left(\frac{X_t}{X_{t-1}} \right),$$

kde platí, že $r_t \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ak sme v stave 1 a $r_t \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ak sme v stave 2. Takže by sme to mohli zapísať nasledovne

$$r_t = \mu_{\epsilon(t)} + \sigma_{\epsilon(t)} Z_t,$$

kde Z_t má štandardné normálne rozdelenie a $\epsilon(t)$ je markovov proces a môže nadobúdať 2 hodnoty, t. j. 1 alebo 2. Napríklad $\epsilon(t) = 1$ pre $t = 1, 2, \dots, t_0$ a $\epsilon(t) = 2$ pre $t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$, kde t_0 je čas, v ktorom nastal určitý zlom (resp. prechod). Teda parametre potrebné na popis výnosov sú variancia σ^2 , stredná hodnota μ a pravdepodobnosti prechodov p_{11}, p_{22} . Keďže $\epsilon(t)$ je realizácia markovho procesu, platí :

$$Pr(\epsilon(t) = j | \epsilon(t-1) = i, \epsilon(t-2) = k, \dots, r_{t-1}, r_{t-2}, \dots) = Pr(\epsilon(t) = j | \epsilon(t-1) = i) = p_{ij}.$$

Pravdepodobnosť zmeny stavu závisí teda len od predchádzajúceho stavu. Označme množinu parametrov $\theta = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \mu_1, \mu_2, p_{11}, p_{22}, \pi_1, \pi_2)$. Pre podmienenú hustotu platí

$$f(r_t | \epsilon(t) = j; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(r_t - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}} \quad \text{pre } j = 1, 2 \quad (2.9)$$

Predpokladáme, že stav $\epsilon(t)$ je generovaný z nejakého pravdepodobnostného rozdelenia a označme nepodmienenú pravdepodobnosť

$$P(\epsilon(t) = j; \theta) = \pi_j \quad \text{pre } j = 1, 2 \quad (2.10)$$

Pričom na začiatku predpokladáme, že²

$$P(\epsilon(0) = j; \theta) = \frac{1 - p_{jj}}{2 - p_{ii} - p_{jj}} \quad \text{pre } i \neq j \quad (2.11)$$

Pre každú udalosť A a B je podmienená pravdepodobnosť udalosti A pri udalosti B daná

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ak predpokladáme, že pravdepodobnosť udalosti B sa nerovná nule, potom pravdepodobnosť, že udalosti A a B sa vyskytnú spolu je

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

²odvodenie môžeme nájsť v práci [16], alebo môžeme jednoducho túto hodnotu položiť rovnú 1/2 alebo odhadnúť pomocou metódy maximálnej vierohodnosti.

Takže pravdepodobnosť, že r_t bude v stave $\epsilon(t) = j$ bude vyzerat' nasledovne :

$$P(r_t, \epsilon(t) = j; \theta) = f(r_t | \epsilon(t) = j; \theta) P(\epsilon(t) = j; \theta) \quad (2.12)$$

a táto pravdepodobnosť sa nazýva združená hustota rozdelenia. Dosadením dostaneme, že

$$P(r_t, \epsilon(t) = j; \theta) = \frac{\pi_j}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(r_t - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}. \quad (2.13)$$

Nepodmienenu hustotu pre r_t dostaneme sčítaním (2.13) cez všetky možné hodnoty j .

$$\begin{aligned} f(r_t; \theta) &= \sum_{j=1}^2 P(r_t, \epsilon(t) = j; \theta) = \\ &= \frac{\pi_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(r_t - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{\pi_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(r_t - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Týmto dostávame logaritmickú vierohodnostnú funkciu

$$L(\theta) = \sum_{t=1}^T \log f(r_t; \theta). \quad (2.15)$$

Odhad parametrov θ dostaneme maximalizáciou vierohodnostnej funkcie, pri podmienkach $\pi_1 + \pi_2 = 1$, $\pi_j \geq 0$ $j = 1, 2$. Odhady parametrov vyzerajú nasledovne³ :

$$\hat{\mu}_j = \frac{\sum_{t=1}^T r_t P(\epsilon(t) = j | r_t; \hat{\theta})}{\sum_{t=1}^T P(\epsilon(t) = j | r_t; \hat{\theta})}, \quad (2.16)$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (r_t - \hat{\mu}_j)^2 P(\epsilon(t) = j | r_t; \hat{\theta})}{\sum_{t=1}^T P(\epsilon(t) = j | r_t; \hat{\theta})}, \quad (2.17)$$

$$\hat{\pi}_j = \frac{\sum_{t=1}^T P(\epsilon(t) = j | r_t; \hat{\theta})}{T}, \quad (2.18)$$

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=2}^T P(\epsilon(t) = j, \epsilon(t-1) = i | r_t; \hat{\theta})}{\sum_{t=2}^T P(\epsilon(t-1) = i | r_t; \hat{\theta})}. \quad (2.19)$$

Tieto odhady dostaneme pomerne jednoducho derivovaním vierohodnostnej funkcie, problémom však je, že tieto odhady sú nelineárne, takže sa nedajú riešiť analyticky pre $\hat{\theta}$ ako funkciu $\{r_1, r_2, \dots, r_t\}$. Hamilton preto zostrojil iteratívny algoritmus na nájdenie odhadu maximálnej vierohodnosti. Tento algoritmus som použila aj ja vo svojich výpočtoch.

Predpokladajme teraz, že vieme, ktoré pozorovanie pochádza zo stavu 1 a ktoré nie.

³podrobný postup odhadov je možné nájsť v práci [16]

Vezmeme $P(\epsilon(t) = j|r_t; \theta) = 1$ pre tie, ktoré pochádzajú zo stavu 1 a $P(\epsilon(t) = j|r_t; \theta) = 0$ pre tie, ktoré pochádzajú zo stavu 2. Potom odhad $\hat{\mu}_j$ bude predstavovať priemernú hodnotu r_t pre tie pozorovania, o ktorých vieme, že sú zo stavu j . Vo všeobecnosti ak pre nejaké pozorovanie $P(\epsilon(t) = j|r_t; \theta)$ je medzi 0 a 1, potom $\hat{\mu}_j$ bude vážený priemer zo všetkých pozorovaní, kde váha pozorovania r_t bude proporcionálna k pravdepodobnosti, že pozorovanie v čase t bolo v stave j . Čím väčšia pravdepodobnosť, že pozorovanie pochádza zo stavu j , tým väčšia váha pre pozorovania pri odhade $\hat{\mu}_j$.

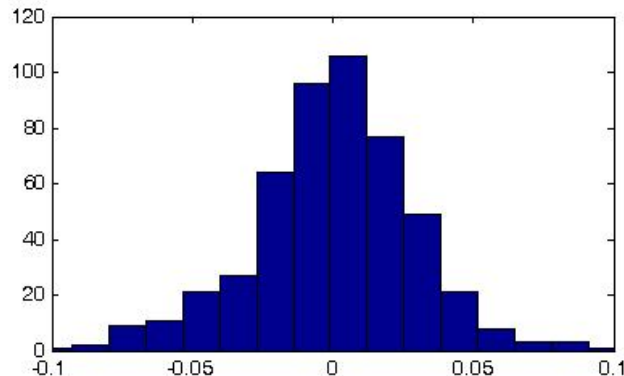
2.5 Použité dáta

Na bližšie skúmanie som si zvolila firmy *Apple*, *Oracle*, *Google* a *Amazon* a ich akcie za obdobie dvoch rokov (Január 2007 - December 2008). Teraz sa budeme venovať iba firme Apple, popis ostatných firiem sa dá nájsť v prílohe B.

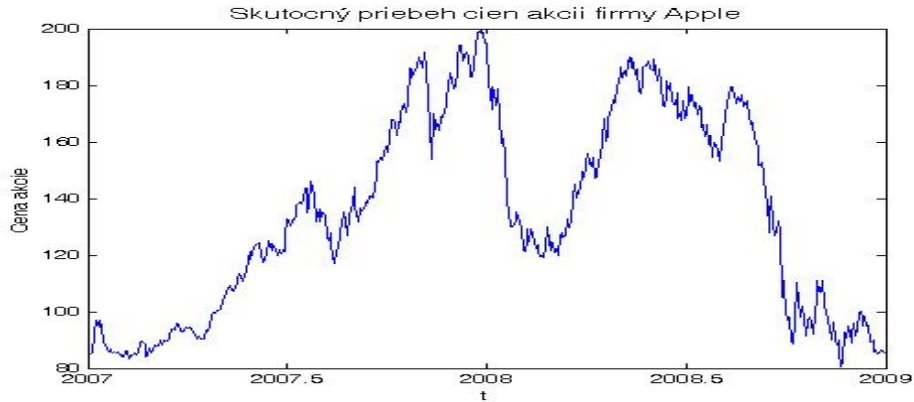
- **Apple**

Firma Apple sa zaoberá dizajnom a výrobou elektronických spotrebičov a softvéru pre zákazníkov. Medzi najznámejšie produkty tejto firmy patrí počítač Macintosh, iPod prehrávač a najnovšie aj iPhone, moderný mobilný telefón s dotykovou obrazovkou. Firma Apple je hlavne známa na americkom kontinente, no jej znak nakúsnutého jablčka sa postupne rozširuje do celého sveta.

Na nasledujúcich obrázkoch môžeme vidieť rozdelenie výnosov a priebeh cien firmy Apple v priebehu rokov 2007 a 2008.



Obrázok 2.6: Rozdelenie výnosov pre firmu Apple



Obrázok 2.7: Priebeh cien firmy Apple v rokoch 2007 a 2008

2.6 Odhady parametrov

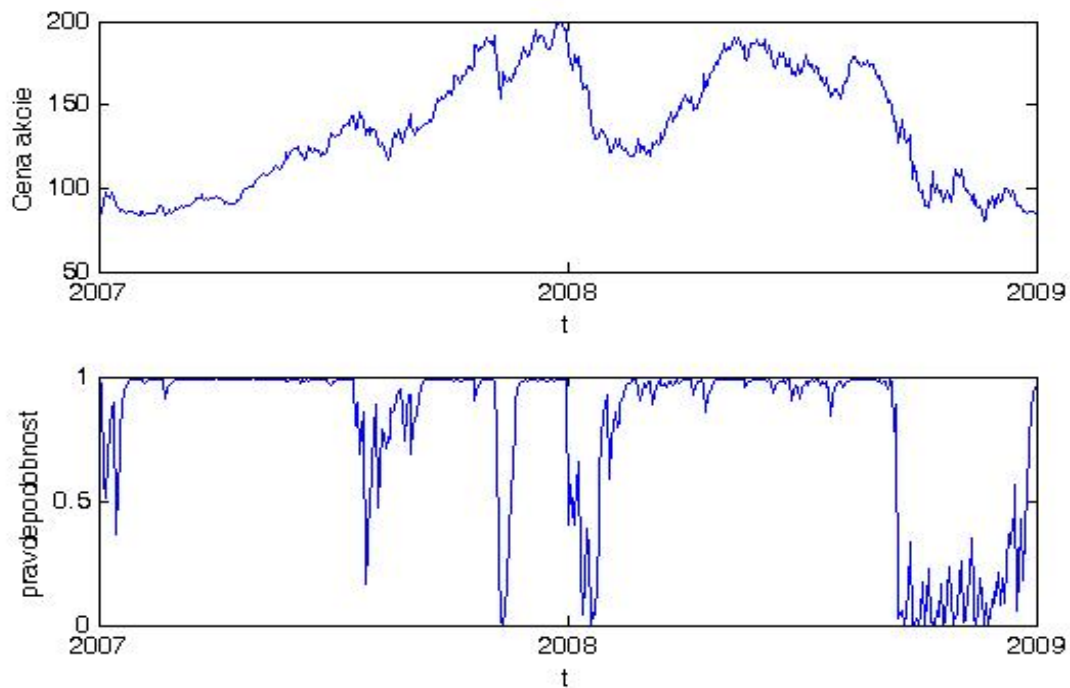
Na prácu s týmto modelom potrebujeme poznať potrebné parametre. Pomocou už spomínaného algoritmu od Hamiltona sme získali odhady jednotlivých parametrov pre každú firmu s príslušnými štandardnými odchýlkami v zátvorke⁴. Tieto odhady sú za obdobie 1.1.2007-31.12.2008.

Tabuľka 2.1: Odhady parametrov

| | μ_1 | μ_2 | σ_1^2 | σ_2^2 | p_{11} | p_{22} |
|---------------|---------------------|---------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| <i>Apple</i> | 0.0031 (0.0012) | -0.0083 (0.0045) | 0.0004 (0.0000) | 0.0023 (0.0004) | 0.9840 (0.0084) | 0.9562 (0.0216) |
| <i>Oracle</i> | -0.0030 (0.0040) | 0.0010 (0.0009) | 0.0017 (0.0003) | 0.0003 (0.0000) | 0.9535 (0.0254) | 0.9865 (0.0074) |
| <i>Google</i> | -0.0054 (0.0034) | 0.0013 (0.0009) | 0.0017 (0.0002) | 0.0002 (0.0000) | 0.9579 (0.0216) | 0.9816 (0.0092) |
| <i>Amazon</i> | 0.0051 (0.0085) | -0.0003 (0.0013) | 0.0054 (0.0010) | 0.0006 (0.0001) | 0.8593 (0.0804) | 0.9737 (0.0156) |

⁴tieto odhady predstavujú odhady pre denné dáta, takže pri ich používaní som použila preškáľovanie t.j. pre násobenie $\mu \cdot 250$ a $\sigma^2 \cdot 250$.

Obrázok 2.8 zobrazuje priebeh cien akcií a k nim prislúchajúcich pravdepodobností, že akcia sa v danom čase nachádza v stave 1. Z týchto grafov môžeme vidieť, že odhady stavov sú celkom dobré. Pretože vždy keď cena akcie klesá, dostávame sa do stavu, v ktorom je pravdepodobnosť, že sme v stave 1 (t. j. v stave, v ktorom akcia rastie) postupne približne rovná nule. Čo správne hovorí o tom, že cena akcie klesá.



Obrázok 2.8: Cena akcie spolu s pravdepodobnosťou, že je v stave 1 pre firmu Apple

Kapitola 3

Cena opcie s Markovovým modelom

3.1 Oceňovacia formula

Týmto modelom sa zaoberala Guo a vo svojej práci [12] *Information and option pricing* z roku 2001 poskytla oceňovaciu formulu pre opcie s Markovovým modelom s meniacimi sa stavmi. Už o rok neskôr ale autori Fuh, Wang a Cheng v práci [9] *Option Pricing in a Black-Scholes Model with Markov Switching* uviedli svoje odvodenie pre tento model (taktiež pomocou Laplaceových transformácií) s konštatovaním, že oceňovacia formula od autorky Guo nie je správna a obsahuje chybu.

V ďalších rokoch sa mi podarilo nájsť chybu v práci, ktorá sa zaoberala oceňovaním takéhoto Markovovho modelu a to v práci autorov Choi a Wirjanto [5] *A simple option-pricing model with changing volatility* z roku 2007. Ich chyba spočíva v zle zadefinovanej funkcii hustoty normálneho rozdelenia na strane 3. My sa teda budeme zaoberať odvodenou oceňovacou formulou pre európsku call opciu od autorov Fuh, Wang a Cheng. Táto práca však tiež obsahuje jednu chybu a to pri definovaní modifikovanej beselovej funkcie, kde nemá byť faktorial pri gamma funkcii.

Model (2.8) uvedený v predchádzajúcej kapitole je bez arbitráže ale nekompletný. Na zkompletizovanie trhu použijeme metódu, ktorú predstavil Duffie (1986)¹. Jej podstata spočíva v tom, že predpokladá existenciu takého trhu v každom čase t , ktorý zaplatí jednu jednotku (napr. euro) v ďalšom čase $\tau(t) = \inf \{u > t | \epsilon(u) \neq \epsilon(t)\}$, keď Markovov reťazec $\epsilon(t)$ zmení stav. Dá sa to chápať aj ako poisťovací kontrakt, ktorý kompenzuje jeho majiteľovi akúkoľvek stratu, ktorá vznikne zmenou stavu. Pretože ak by sa niekto chcel zaistiť proti strate C pri ďalšej zmene stavu, bude držať C takýchto kontraktov na zmenu stavu (change-of-state contract, COS).

Absencia arbitráže je ekvivalentná existenciou pravdepodobnosti Q , ekvivalentnej s P , pod ktorou je cena akéhokoľvek derivátu rovná očakávanej diskontovanej hodnote budúcich

¹ [7] DUFFIE D., HUANG C. F. 1986. *Multiperiod Security Markets with Differential Information*

platieb. Takže proces pre cenu akcie X_t bude mať tvar

$$\frac{dX_t}{X_t} = (r - d_{\epsilon(t)})dt + X_t\sigma_{\epsilon(t)}dW_t^Q \quad (3.1)$$

kde dW_t^Q je štandardný Wienerov proces s rizikovo neutrálnou pravdepodobnosťou Q a $d_{\epsilon(t)} = r - \mu_{\epsilon(t)}$, kde $d_{\epsilon(t)}$ predstavuje cenu zmeny stavu v čase t . Keď sa zmení stav v čase t , rozdiel driftu a bezrizikovej úrokovej miery r je $d_2 - d_1$ a v prípade, že tento rozdiel je nenulový, čiže $d_1 \neq d_2$ vzniká arbitrážna príležitosť.

Označme T_i ako celkový čas medzi 0 a T , počas ktorého $\epsilon(t) = 1$, začínajúc zo stavu i pre $i = 1, 2$. Označme $f_i(t, T)$ pravdepodobnostnú distribučnú funkciu T_i .

Veta 2 *Predpokladajme skrytý Markovov model (2.8) a vezmime si rovnicu (3.1), COS a bezrizikovú úrokovú mieru r , potom bezarbitrážna cena európskej call opcie s expiračným časom T a expiračnou cenou (strike price) K je*

$$\begin{aligned} V_i(T, K, r) &= E[e^{-rT}(X_T - K)^+ | \epsilon(0) = i] \\ &= e^{-rT} \int_0^\infty \int_0^T \frac{y}{y + K} \rho(\ln(y + K), m(t), v(t)) f_i(t, T) dt dy, \end{aligned} \quad (3.2)$$

kde $\rho(x, m(t), v(t))$ je hustota normálneho rozdelenia so strednou hodnotou $m(t)$ a disperziou $v(t)$,

$$\begin{aligned} m(t) &= \ln(X_0) + (d_2 - d_1 - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2))t + (r - d_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2)T \\ v(t) &= (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)t + \sigma_2^2T, \end{aligned}$$

a

$$\rho(x, m(t), v(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v(t)}} e^{-\frac{(x-m(t))^2}{2v(t)}},$$

$$\begin{aligned} f_1(t, T) &= e^{-\lambda_1 T} \delta_1(T - t) + e^{-\lambda_2(T-t) - \lambda_1 t} [\lambda_1 I_0(2(\lambda_1 \lambda_2 t(T - t))^{1/2}) + \\ &\quad + (\frac{\lambda_1 \lambda_2 t}{T - t})^{1/2} I_1(2(\lambda_1 \lambda_2 t(T - t))^{1/2})] \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} f_2(t, T) &= e^{-\lambda_2 T} \delta_1(T - t) + e^{-\lambda_2(T-t) - \lambda_1 t} [\lambda_2 I_0(2(\lambda_1 \lambda_2 t(T - t))^{1/2}) + \\ &\quad + (\frac{\lambda_1 \lambda_2 (T - t)}{t})^{1/2} I_1(2(\lambda_1 \lambda_2 t(T - t))^{1/2})], \end{aligned} \quad (3.4)$$

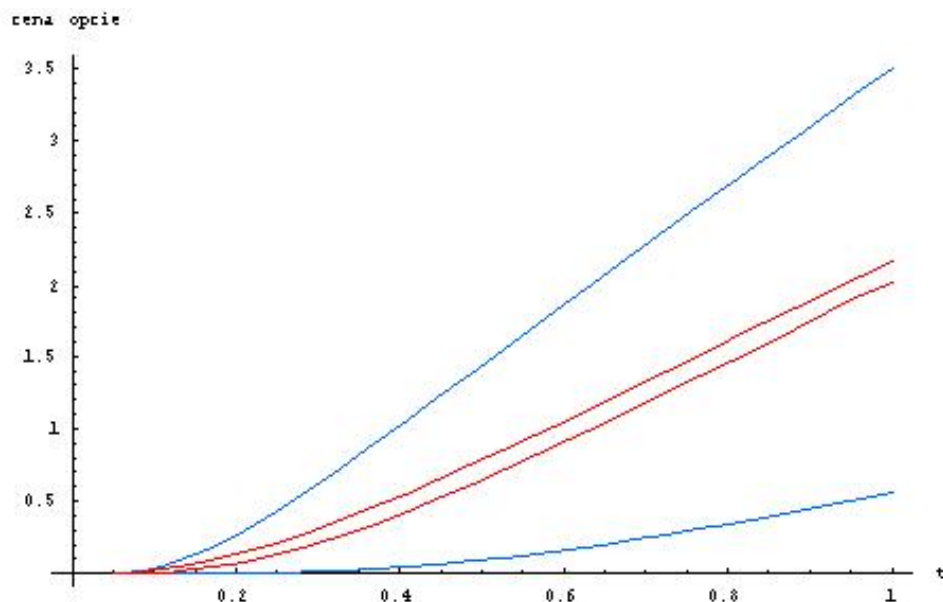
kde I_0 a I_1 sú modifikované Besselové funkcie

$$I_a(z) = (\frac{z}{2})^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{k! \Gamma(k + a + 1)}.$$

Podrobnejšie odvodenie môžete nájsť v práci [10].

Poznámka: Ak $\mu_1 = \mu_2, \sigma_1 = \sigma_2, m(t)$ a $v(t)$ sú nezávislé na t , potom sa rovnica (3.2) redukuje na Black-Scholesovú rovnicu pre európsku call opciu, pozri [9].

Cena opcie teda závisí od počiatočného stavu a ak sa tento stav v priebehu času nemení, dáva tento model takú istú cenu opcie ako Black-Scholesov model pre daný stav. Na obrázku 3.1 sú modrou farbou zobrazené ceny opcií vypočítané pomocou Black-Scholesovho modelu pre stav 1 a 2 a červenou farbou ceny opcií vypočítané pomocou Markovovho modelu s dvoma stavmi daného rovnicou (3.2). Vidíme, že ceny opcií s Markovovým modelom sú ohraničené cenami z Black-Scholesovho modelu [9].



Obrázok 3.1: Porovnanie cien opcií Black-Scholesovým modelom so skrytým Markovovým modelom s dvoma stavmi. Parametre: $X_0 = 100, K = 115, \lambda_1 = \lambda_2 = 10, d_1 = d_2 = 0, r = 0.017, \sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.2$

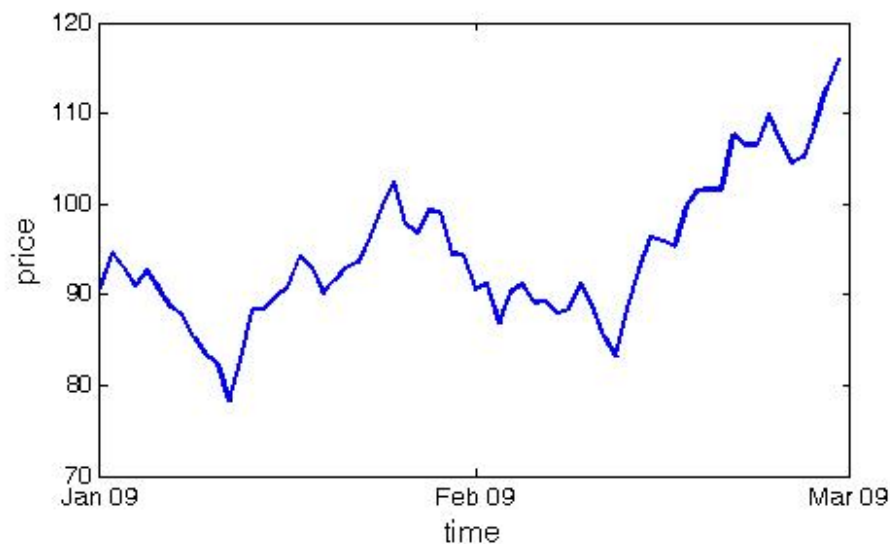
3.2 Použité dáta

Tak ako v celej diplomovej práci, aj v tomto prípade sa budeme zaoberať firmou Apple a konkrétne cenami jej opcií. Bližší popis tejto firmy sa dá nájsť v kapitole 2. No v tomto prípade sa naše dáta trochu zmenia, pretože budeme brať obdobie od 1.1.2007 až po 3.4.2009, keďže sa budeme zaoberať cenami opcií z posledného týždňa t. j. 30.3.-3.4.2009 (tabuľka 3.1).

Tabuľka 3.1: Ceny opcí firmy Apple

| cena akcie | dátum | $K = 80$ | $K = 90$ | $K = 100$ |
|------------|---------|----------|----------|-----------|
| 104.49 | 30.3.09 | 28.18 | 19 | 11.8 |
| 105.12 | 31.3.09 | 28.18 | 17.88 | 10.5 |
| 108.69 | 1.4.09 | 29.5 | 20.6 | 12.85 |
| 112.71 | 2.4.09 | 34.2 | 23.95 | 15.45 |
| 115.99 | 3.4.09 | 36.27 | 27.15 | 18.35 |

Už z vývoju cien za tento týžden je vidno, že cena akcie rastie, takže je predpoklad, že počas celého tohoto týždňa budeme v stave 1. Bližší vývoj za obdobie od začiatku roku 2009 si pozrieme na nasledujúcom vývoji cien.



Obrázok 3.2: Vývoj ceny akcie firmy Apple od Januára po Marec 2009

Po období s vysokou volatilitou a s klesajúcou tendenciou cien, to vyzerá, že ceny začali približne od polovice februára rásť.

3.3 Odhady

Nato, aby sme získali ceny opcí z tohoto modelu, potrebujeme odhadnúť niektoré parametre. Najprv odhadneme potrebné parametre ako aj príslušné stavy, v ktorých sa akcie nachádzajú, pomocou Hamiltonovho algoritmu. Pomocou nich budeme vedieť určiť cenu opcie pre akciu s daným stavom (tabuľka 3.2)

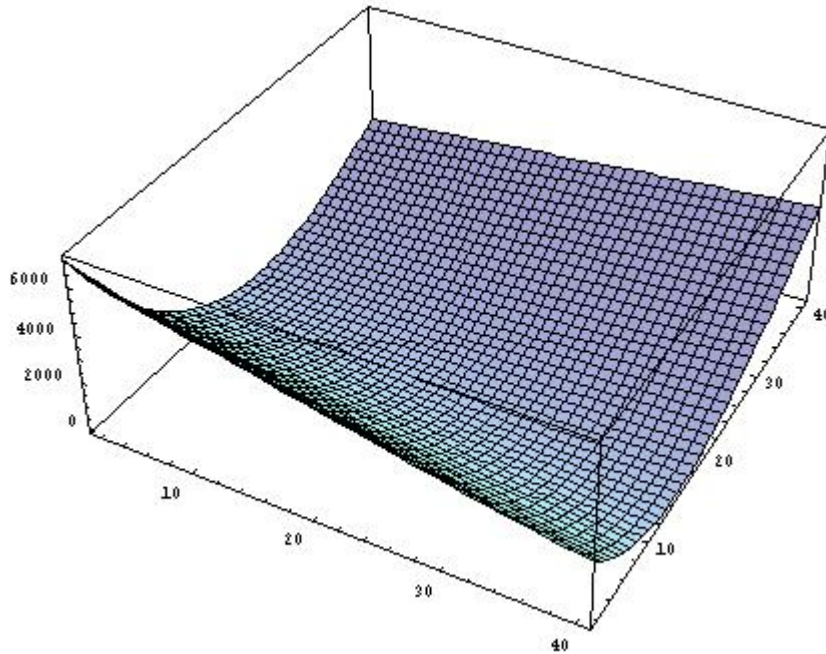
Tabuľka 3.2: Odhady parametrov pre firmu Apple (1.1.2007 - 3.4.2009)

| μ_1 | μ_2 | σ_1^2 | σ_2^2 | p_{11} | p_{22} |
|----------|----------|--------------|--------------|----------|----------|
| 0.0029 | -0.0102 | 0.0006 | 0.0027 | 0.9904 | 0.9537 |
| (0.0012) | (0.0055) | (0.0001) | (0.0005) | (0.0063) | (0.0246) |

Potrebujeme ešte zistiť parametre d_1, d_2 . Hodnoty týchto parametrov dostaneme minimalizáciou rozdielu štvorcov skutočnej ceny opcie a ceny opcie z nášho modelu :

$$\min_{d_1, d_2} \sum_{i=1}^N (V_{real} - V(d_1, d_2))^2 \quad (3.5)$$

Problémom tejto funkcie je, že je nekonvexná a plochá v okolí minima, takže bežné minimalizačné metódy pre tento prípad nebudú fungovať. No aj tak sme vyskúšali zabudované minimalizačné metódy v programe Mathematica ale žiadna z nich podľa očakávaní nekonvergovala kvôli problémom s počítaním gradientu (keďže plochosť funkcie spôsobuje deriváciu blízku nule). Takže sme vyskúšali hľadať minimum stochastickými algoritmy, konkrétne evolučnou stratégiou, ktorej nesporná výhoda spočíva v tom, že bezohľadu na tvar funkcie dokáže určiť jej minimum lebo používa pri výpočte iba funkčné hodnoty. Otázkou však je ako presné toto globálne minimum bude.



Obrázok 3.3: Priebeh minimalizačnej funkcie

Evolučné stratégie (pozri [18]) patria medzi prvé stochastické algoritmy (prvá evolučná stratégia bola vyvinutá v roku 1964 na Berlínskej Technickej Univerzite). Tieto stratégie sú založené na podobnom princípe ako príroda (princíp prežitia silnejšieho jedinca, mutácie a kríženie). Mutácia predstavuje náhodnú zmenu a podstata evolučných stratégií spočíva v tom, že nový jedinec je vytvorený náhodne podľa nasledovnej schémy

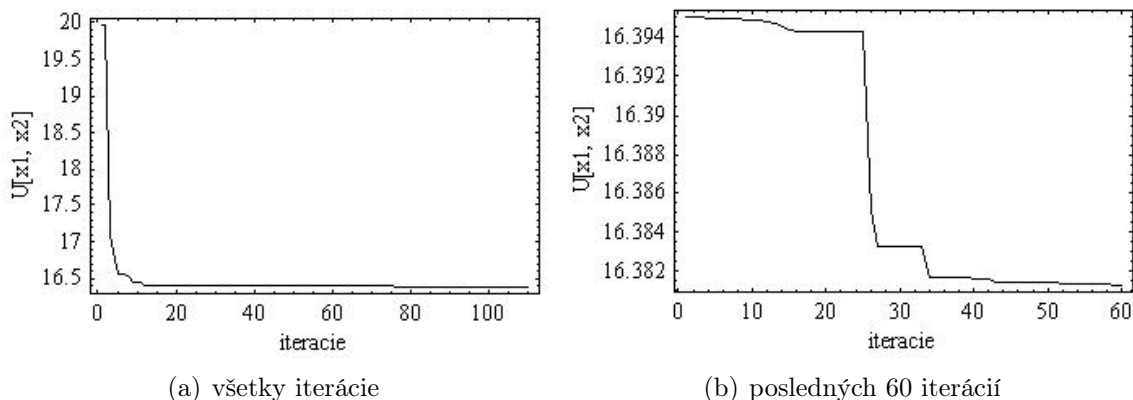
$$x' = x + N(0, \sigma).$$

Štandardná odchýlka σ sa v priebehu mutácií mení podľa 1/5 pravidla. Toto pravidlo hovorí, že ak označíme φ mieru úspešnosti, definovanú tak, že je to pomer úspešných mutácií v priebehu k iterácií, k počtu k iterácií, na základe toho upravujeme σ po určitom počte iterácií takto :

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma c_d \quad \text{pre } \varphi < \frac{1}{5} \\ \sigma' &= \sigma c_i \quad \text{pre } \varphi > \frac{1}{5} \end{aligned}$$

kde $c_i > 1$ a $c_d < 1$. Pomocou tejto úpravy sa štandardná odchýlka zväčšuje alebo znižuje. Pri úspešných iteráciách by mali tieto mutácie pokračovať vo väčších krokoch, naopak pri neúspešných iteráciách v menších krokoch. Hodnoty týchto koeficientov byvajú špecifikované takto : $c_d = 0.82$, $c_i = 1/c_d = 1.22$ (pozri [19]).

Problémom pri týchto výpočtoch bol fakt, že táto funkcia je výpočtovo veľmi zložitá a napríklad 200 iterácií trvá približne 7 hodín (na počítači s takýmito parametrami: Pentium 1.6 GHz, 768 MB RAM). Keďže vo všeobecnosti evolučné stratégie konvergujú ku globálnemu minimu pre nekonečný počet iterácií, tak ale nemôžeme s istotou tvrdiť, že nami nájdené minimum je naozaj globálnym minimom, pretože použitý počet iterácií ledva presiahol hodnotu 1000. Možno na výkonnejšom počítači by bolo možné uskutočniť viac iterácií, no keďže naše možnosti to nedovoľovali, pracovali sme so zistenými hodnotami minima.



Obrázok 3.4: Priebeh evolučnej stratégie

Priebeh minimalizácie nájdeného minima (obrázok 3.4) hovorí o tom, že hodnota účelovej funkcie sa postupne ustálila na hodnote 16.3813 a toto minimum je dosiahnuté pre parametre $d_1 = 2.24808$ a $d_2 = -11.3923$. Táto minimalizácia bola vypočítaná pre 110 iterácií, pričom v každej iterácii sa uskutočnilo hľadanie minima ďalšími 10 iteráciami². Dokopy bolo teda vypočítaných 1100 iterácií a celková doba výpočtu bola 17 hodín.

3.4 Porovnanie cien

Teraz sa pozrieme na porovnanie cien opcií. Pre výpočet cien opcií s dvoma stavmi volatility boli použité nasledujúce parametre : $\lambda_1 = 96.28$, $\lambda_2 = 463.3$, $d_1 = 2.24808$ a $d_2 = -11.3923$, $r = 0.017$, $\sigma_1 = 0.374743$ a $\sigma_2 = 0.824406$. V tabuľke 3.3 vidíme konkrétne porovnanie cien opcií pre každý deň a pre danú expiračnú cenu.

Tabuľka 3.3: Porovnanie cien opcií

| $K = 80$ | reálna cena | odhadnutá | rozdiel | % rozdiel |
|----------------|-------------|-----------|---------|-----------|
| $X_0 = 104.49$ | 28.18 | 26.0265 | 2.1535 | 7.64 |
| $X_0 = 105.12$ | 28.18 | 26.636 | 1.544 | 5.48 |
| $X_0 = 108.69$ | 29.5 | 30.1257 | -0.6257 | -2.12 |
| $X_0 = 112.71$ | 34.2 | 34.1089 | 0.0911 | 0.27 |
| $X_0 = 115.99$ | 36.27 | 37.3855 | -1.1155 | -3.08 |
| $K = 90$ | reálna cena | odhadnutá | rozdiel | % rozdiel |
| $X_0 = 104.49$ | 19 | 17.3251 | 1.6749 | 8.82 |
| $X_0 = 105.12$ | 17.88 | 17.86 | 0.02 | 0.11 |
| $X_0 = 108.69$ | 20.6 | 20.9881 | -0.3881 | -1.88 |
| $X_0 = 112.71$ | 23.95 | 24.6742 | -0.7242 | -3.02 |
| $X_0 = 115.99$ | 27.15 | 27.7786 | -0.6286 | -2.32 |
| $K = 100$ | reálna cena | odhadnutá | rozdiel | % rozdiel |
| $X_0 = 104.49$ | 11.8 | 10.5015 | 1.2985 | 11.00 |
| $X_0 = 105.12$ | 10.5 | 10.9135 | -0.4135 | -3.94 |
| $X_0 = 108.69$ | 12.85 | 13.3959 | -0.5459 | -4.25 |
| $X_0 = 112.71$ | 15.45 | 16.4662 | -1.0162 | -6.58 |
| $X_0 = 115.99$ | 18.35 | 19.1573 | -0.8073 | -4.40 |

Porovnanie cien ukazuje, že rozdiel skutočných cien a vypočítaných pomocou modelu s dvoma stavmi volatility, je menší ako 11.00% a tento rozdiel sa tiež dosahuje len v jednom prípade, pričom v ostatných sa rozdiel nedostal nad 9%. Rozdiely môžu byť zapríčinené rôznymi faktormi. Keďže vládne vo svete finančná kríza, môžu byť tieto rozdiely zapríčinené aj menším obchodovaním s opciami. Výsledky môže tiež ovplyvňovať to, že parametre pre odhad vývoja akcie boli získané pred krízou a pre toto obdobie už nemusia

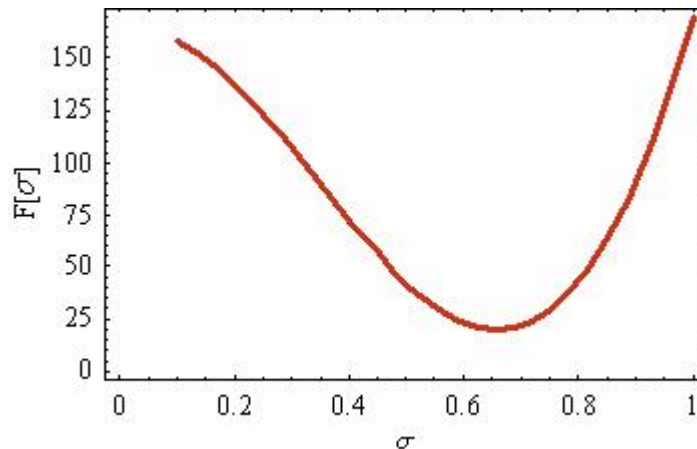
²konkrétny algoritmus sá dá nájsť v prílohe C

zodpovedať skutočnému vývoju. Mohlo by byť zaujímavé zostrojiť algoritmus, ktorý by pri odhadovaní parametrov bral do úvahy súčasne funkciu vierohodnosti aj ceny opcií. Ďalším možným faktorom je určite aj fakt, že tieto porovnania sú uskutočnené len na malej vzorke cien opcií, pretože rozdiel od cien akcií, pre ceny opcií nie sú dostupné historické dáta. Ale aj keby boli tieto dáta dostupné, problémom by sa pravdepodobne ukázalo byť, zvýšená časová náročnosť tohoto výpočtu a teda nemožnosť dopracovať sa v rozumnú dobu k minimu danej funkcie. Taktiež môže hrať rolu aj nami nájdené minimum účelovej funkcie. Je možné, že s výkonnejším počítačom alebo s inou optimalizačnou metódou, by minimum bolo viac presné a teda aj hodnoty opcií, by sa viac približovali reálnym.

Pre lepšiu predstavu o veľkosti týchto chýb porovnáme výsledky s tým, čo nám umožňuje dosiahnuť Black-Scholesov model. Budeme minimalizovať funkciu

$$F(\sigma) = \sum_{i=1}^N (V_{BS}(\sigma) - V_{real})^2,$$

kde $V_{BS}(\sigma)$ je Black-Scholesová cena s parametrom σ . Na obrázku 3.4 je znázornený priebeh funkcie $F(\sigma)$. Jej minimum je v bode 0.65834 a príslušná funkčná hodnota je 19.9379. Zodpovedajúce ceny opcií a chyby sú v tabuľke 3.4.



Obrázok 3.5: Priebeh funkcie $F(\sigma)$

Tabuľka 3.4: Porovnanie cien opcií s cenami z Black-Scholesovho modelu

| $K = 80$ | reálna cena | odhadnutá | rozdiel | % rozdiel |
|----------------|-------------|-----------|---------|-----------|
| $X_0 = 104.49$ | 28.18 | 25.5052 | 2.6748 | 9.49 |
| $X_0 = 105.12$ | 28.18 | 26.0852 | 2.0948 | 7.43 |
| $X_0 = 108.69$ | 29.5 | 29.4181 | 0.0819 | 0.28 |
| $X_0 = 112.71$ | 34.2 | 33.2473 | 0.9527 | 2.79 |
| $X_0 = 115.99$ | 36.27 | 36.4162 | -0.1462 | -0.40 |
| $K = 90$ | reálna cena | odhadnutá | rozdiel | % rozdiel |
| $X_0 = 104.49$ | 19 | 17.3953 | 1.6047 | 8.45 |
| $X_0 = 105.12$ | 17.88 | 17.8997 | -0.0197 | -0.11 |
| $X_0 = 108.69$ | 20.6 | 20.8479 | -0.2479 | -1.20 |
| $X_0 = 112.71$ | 23.95 | 24.3269 | -3.769 | -1.57 |
| $X_0 = 115.99$ | 27.15 | 27.2671 | -0.1171 | -0.43 |
| $K = 100$ | reálna cena | odhadnutá | rozdiel | % rozdiel |
| $X_0 = 104.49$ | 11.8 | 11.0012 | 0.7988 | 6.77 |
| $X_0 = 105.12$ | 10.5 | 11.3995 | -0.8995 | -8.57 |
| $X_0 = 108.69$ | 12.85 | 13.7815 | -0.9315 | -7.25 |
| $X_0 = 112.71$ | 15.45 | 16.6984 | -1.2484 | -8.08 |
| $X_0 = 115.99$ | 18.35 | 19.2406 | -0.8906 | -4.85 |

Hodnota účelovej funkcie $F(\sigma)$ pri Black-Scholesovom modeli je vyššia ako pri modeli s dvoma stavmi volatility. No tento rozdiel sa pri porovnaní s reálnymi cenami opcií veľmi neprejavil. Rozdiel cien opcií z Black-Scholesovho modelu je nižší ako pri modeli s dvoma stavmi pri expiračnej cene 90 vo všetkých 5 dňoch. No pri ostatných cenách má naopak lepšiu úspešnosť model s dvoma stavmi. Zaujímavé je, že model s dvoma stavmi má najvyššiu odchýlku od reálnych cien hneď v prvý deň, t. j. v pondelok. Black-Scholesov model má najhoršie odhady pri expiračnej cene 100, ktorá je blízko skutočnej cene. Tieto porovnania nám nedali jasnú odpoveď na otázku, či je model s dvoma stavmi volatility lepší pre odhady cien opcií ako Black-Scholesov model.

Záver

V práci sme sa zaoberali modelom cien opcií s dvoma stavmi volatility. Tento model zabezpečuje, že volatilita sa časom mení a týmto teda odstraňuje limitujúci predpoklad Black-Scholesovho modelu o konštantnosti volatility. Na použitie tohoto modelu sme ale potrebovali zistiť až 8 parametrov. Väčšinu z nich sme dokázali odhadnúť pomocou softvéru od Hamiltona, no stále nám zostali dva parametre (d_1, d_2), ktoré sme ešte potrebovali odhadnúť.

Potrebovali sme teda minimalizovať rozdiel štvorcov cien skutočných opcií a vypočítaných pomocou nášho modelu. Táto minimalizácia sa ale nedala uskutočniť bežne dostupnými metódami. Vyskúšali sme teda stochastické metódy a konkrétne evolučné stratégie. Výpočet funkčných hodnôt bol veľmi časovo náročný, no pomocou tejto metódy sme dokázali určiť aspoň približné minimum. Následné porovnanie cien opcií nám podľa očakávaní ukázalo, že vypočítané ceny opcií sú blízke reálnym cenám, no ich odchýlka od skutočných cien nie je zanedbateľná. Ani porovnanie s Black-Scholesovým modelom nám nedalo odpoveď na otázku, či je model s dvoma stavmi volatility lepší pre odhady cien opcií.

Bolo by zaujímavé urobiť porovnanie cien opcií na väčšej vzorke dát a taktiež odhadnúť tieto parametre na výkonnejšom počítači. Ďalej by sa dalo zaoberať odhadom budúcich stavov a cien opcií a zistiť, ako by bol tento postup efektívny.

Literatúra

- [1] BIALKOWSKI, J. 2004. *Modelling returns on stock indices for western and central European stock exchanges-Markov switching approach*. South Eastern Europe Journal of Economics 2, 81-100.
- [2] BLACK, F., SCHOLES, M. 1972. *The Valuation of Option Contracts and a Test of Market Efficiency*. The Journal of Finance, Vol. 27, No. 2, pp. 399-417.
- [3] BRUNOVSKÝ, P. *Stochastické modely operačnej analýzy*. Dostupné na internete: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/brunovsky/smoa_text_08_07.pdf>
- [4] CHING, W. K., MICHAEL, K. Ng. 2006. *Markov Chains: Models, Algorithms and Applications*. Birkhäuser. ISBN 9780387293356.
- [5] CHOI, J., WIRJANTO, T. 2007. *A simple option-pricing model with changing volatility*. Working paper. University of Waterloo, Department of Economics.
- [6] DAVID, A. 1997. *Fluctuating Confidence in Stock Markets: Implications for Returns and Volatility*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 32,427-462.
- [7] DUFFIE, D., HUANG, C. F. 1986. *Multiperiod Security Markets with Differential Information: Martingales and Resolution Times*. Journal of Mathematical Economics, 15, 283-303.
- [8] FOUQUE, J. P., PAPANICOLAOU, G., SIRCAR, K. R. 2000. *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*. Cambridge University Press. ISBN 978-0521791632.
- [9] FUH, C.D., WANG, R.H., CHENG, J.C. 2002. *Option Pricing in a Black-Scholes Model with Markov Switching*. Technical Report. Institute of Statistical Science, Academia Sinica, Taipei, Taiwan, Republic of China.
- [10] FUH, C.D., HU, I., LIN, S-K. 2003. *Empirical performance and asset pricing in hidden Markov models*. Communications in Statistics: Theory and Methods, vol. 32, no. 12, pp. 2477-2512. Dostupné na internete: <http://www3.stat.sinica.edu.tw/library/c_tec_rep/2003-02.pdf>

- [11] GALAGEDERA, D.U.A, SHAMI, R.G. 2003. *Association between Markov regime-switching market volatility and beta risk: Evidence from Dow Jones industrial securities*. Working paper.
- [12] GUO, X. 2001. *Information and option pricing*. Journal of Quantitative Finance, 1, 38-44.
- [13] HAMILTON, J.D. 1988. *Rational-expectations econometric analysis of changes in regime: An investigation of the term structure of interest rates*. Journal of Economic Dynamics and Control, vol. 12, issue 2-3, pages 385-423.
- [14] HAMILTON, J.D., ENGEL, CH. 1989. *Long Swings in the Exchange Rate: Are they in the Data and Do Markets Know It?*. NBER Working Papers from National Bureau of Economic Research, No 3165.
- [15] HAMILTON, J.D. 1989. *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle*. Econometrica, 57, 357-384.
- [16] HAMILTON, J.D. 1994. *Time Series Analysis*, Princeton University Press. ISBN 9780691042893.
- [17] HAMILTON, J.D. 2005. *Regime-Switching Models*. The New Palgrave Dictionary of Economics.
- [18] KVASNIČKA, V., POSPÍCHAL, J., TINO, P. 2000. *Evolučné algoritmy*. STU Bratislava.
- [19] RECHENBERG, I. 1973. *Evolutionstrategie: Optimierung technischer systeme nach prinzipien der biologischen evolution*. Frommann-Holzboog. Stuttgart.
- [20] ŠEVČOVIČ, D., STEHLÍKOVÁ, B., MIKULA, K. 2009. *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*. STU Bratislava. ISBN 978-80-227-3014-3.
- [21] VERONESI, P. 1999. *Stock market overreactions to bad news in good times: a rational expectations equilibrium model*. Review of Financial Studies, 12, 5, 975-1007.

Prílohy

A. Tabuľka hodnôt k vlastnosti volatility smile

Hodnoty implikovanej volatility použité pri Obrázku (1.4).

| expiračná cena | hodnota call opcie | im. volatilita |
|----------------|--------------------|----------------|
| 100 | 24 | 0.519 |
| 110 | 16.15 | 0.484 |
| 120 | 9.8 | 0.455 |
| 130 | 5.25 | 0.431 |
| 140 | 2.58 | 0.421 |
| 150 | 1.35 | 0.434 |

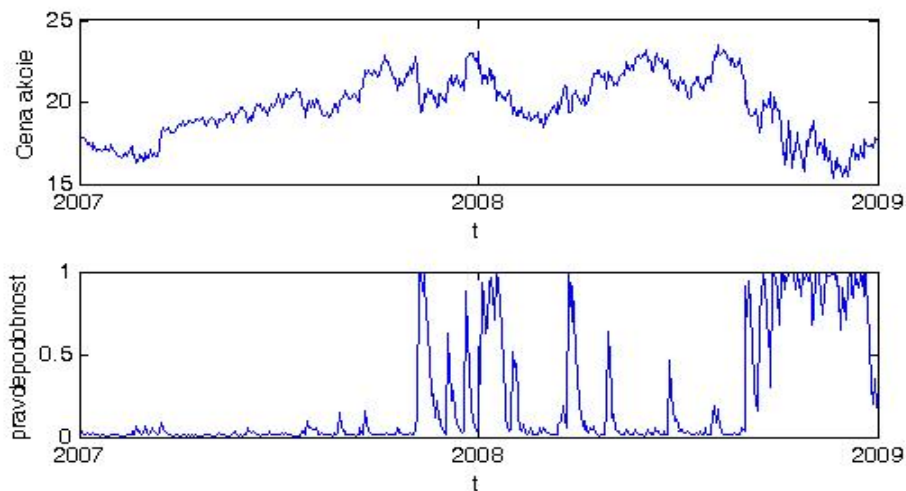
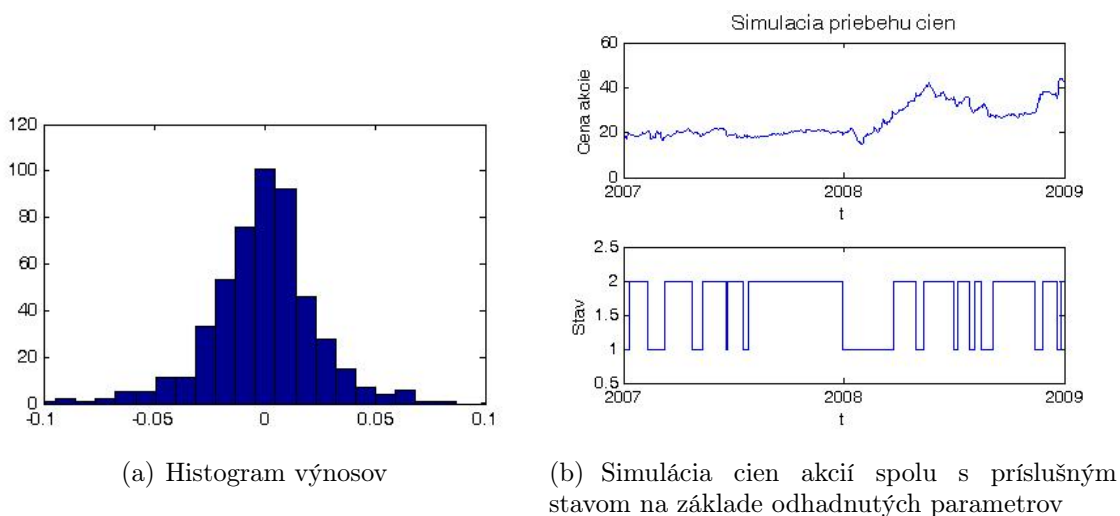
Tabuľka 5: Expiračné ceny s hodnotami opcií a hodnoty implikovanej volatility firmy Apple zo dňa 22.4.2009. Cena akcie $S_0 = 121.76$, dní do maturity: 59, úroková miera 0.8647, maturita v Júni 09

B. Popis dát

V tejto prílohe sú popisy firiem Oracle, Google a Amazon. Sú znázornené priebehy cien s príslušnými odhadnutými pravdepodobnosťami, že sa proces nachádza v stave 1 a tiež simulácie vývoja cien akcií.

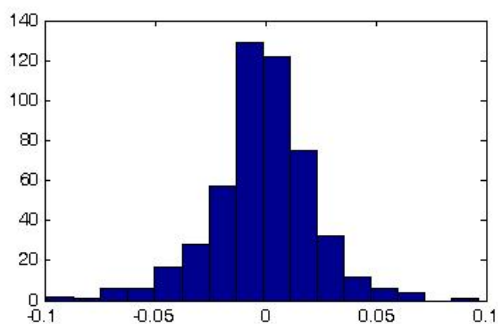
• Oracle

Firma Oracle sa zaoberá vývojom softvérových produktov pre podniky. Jedná sa hlavne o databázové systémy. Známa sa stala vďaka jej prvotine, databáze Oracle. V roku 2007 sa táto firma zaradila na tretie miesto v zozname najväčších softvérových firiem na svete, hneď za firmy ako Microsoft a IBM.

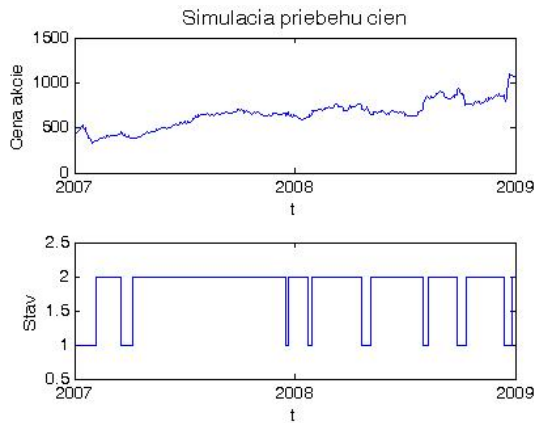


• Google

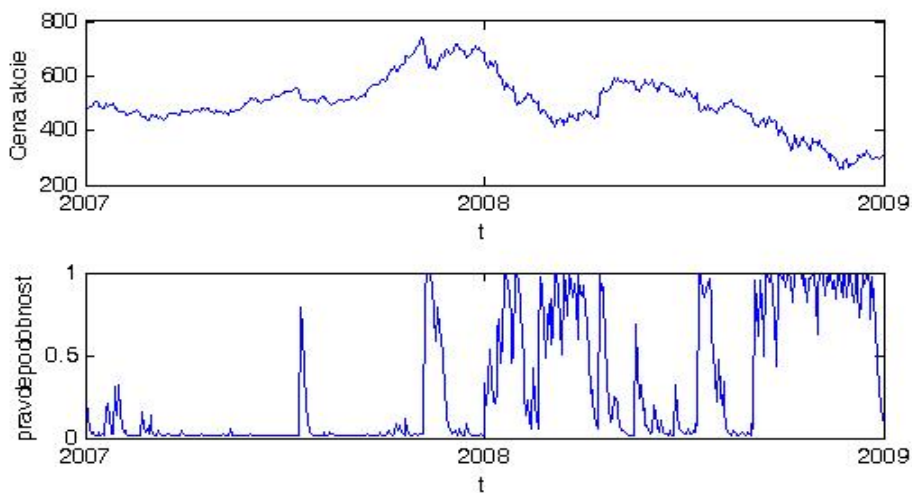
Google je americká firma, ktorú založili dvaja študenti a zarába na reklamách, ktoré sú umiestnené na jej produktoch ako je internetový vyhľadávač, e-mailový klient, mapy, zdieľanie videí a mnohé ďalšie.



(d) Histogram výnosov



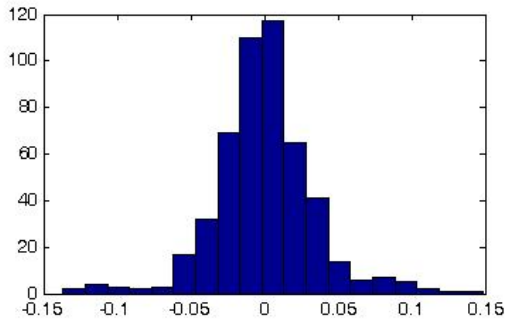
(e) Simulácia cien akcií spolu s príslušným stavom na základe odhadnutých parametrov



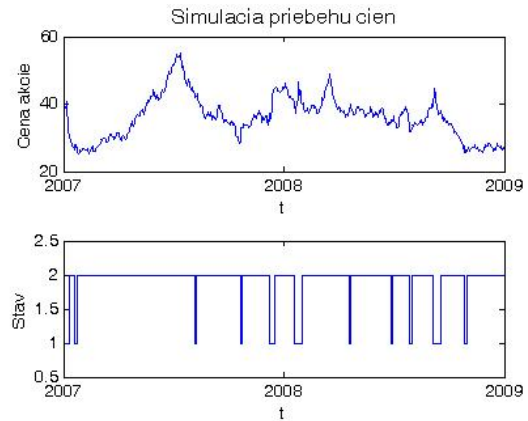
(f) Priebeh cien firmy Google 2007-2008 a odhadnuté pravdepodobnosti, že sa proces nachádza v stave 1

• Amazon

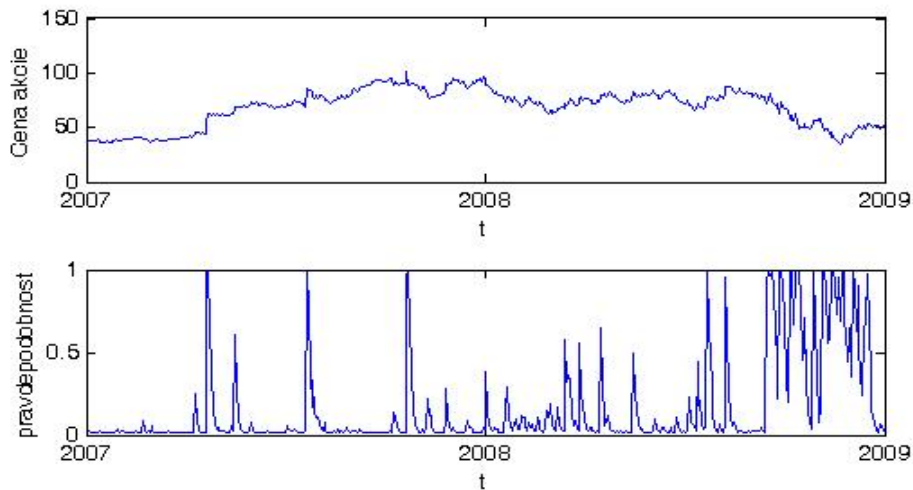
Amazon je spoločnosť zaoberajúca sa obchodom s elektronickými produktami. Je to taktiež najväčší americký online predajca. Táto firma začínala s online predajom kníh a postupne sa jej sortiment rozrástol už skoro na všetky produkty a firma sa rozšírila z amerického kontinentu do Európy aj Ázie.



(g) Histogram výnosov



(h) Simulácia cien akcií spolu s príslušným stavom na základe odhadnutých parametrov



(i) Priebeh cien firmy Amazon 2007-2008 a odhadnuté pravdepodobnosti, že sa proces nachádza v stave 1

C. Algoritmus evolučnej stratégie

V tejto prílohe je kód algoritmu použitej evolučnej stratégie v programe Mathematica. Funkcia $U[x_1, x_2]$ je účelová funkcia definovaná (3.5).

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
RandomNormal[\[Mu]_, \[Sigma]_] := Random[NormalDistribution[\[Mu], \[Sigma]]]
sigma = 2;
cd = 0.82; ci = 1.22;

(* zaciatočne hodnoty *)
x1 = 2; x2 = -10;

Fstara = U[x1, x2];
hodnoty = {Fstara};

q = 0;
qmax = 108;
jmax = 10;

While[q <= qmax,
  j = 0;
  k = 0;
  While[j < jmax,
    j++;
    x1nove = x1 + RandomNormal[0, sigma];
    x2nove = x2 + RandomNormal[0, sigma];

    Fnova = U[x1nove, x2nove];

    If[Fnova < Fstara,
      k++;
      x1 = x1nove;
      x2 = x2nove;
      Fstara = Fnova;
    ]
  ];

  If[(k/jmax) < 0.2, sigma = cd*sigma,];
  If[(k/jmax) > 0.2, sigma = ci*sigma,];

  q++;
]
```