

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE



DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2009

Mária Janková

Multifaktorové modely časovej štruktúry úrokových mier

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Mária Janková

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



9.1.9 Aplikovaná matematika
Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2009

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne, len na základe nadobudnutých teoretických vedomostí, konzultácií a uvedenej literatúry.

V Bratislave, apríl 2009

.....

Mária Janková

PodĀakovanie

*Týmto chcem poĀakovať vedúcemu tejto diplomovej práce Doc. RNDr.
Danielovi ŠevĀoviĀovi, CSc. za trpezlivosť, odborné rady, vedenie a motiváciu.*

Abstrakt

Diplomová práca sa zaoberá multifaktorovými modelmi časovej štruktúry úrokových mier, konkrétne skúma vlastnosti dvojfaktorového modelu, ktorý vznikol ako súčet dvoch skrytých faktorov, z ktorých jeden sleduje jednofaktorový Cox-Ingersoll-Ross proces, a druhý jednofaktorový Vašíčekov proces. Pre tento model uvádzame spriemernenie cien dlhopisov vzhľadom na skryté faktory. Súčasťou práce je analýza vlastností tohto modelu, sledovanie vlastnosti fast mean reversion pre jeden zo skrytých procesov a návrhy algoritmov na získanie optimálnych vstupných parametrov.

klúčové slová: Vašíčekov model, Cox-Ingersoll-Ross model, spriemernenie

Abstract

The diploma thesis deals with multifactor term structure models. It particularly concerns characteristics of a two factor term structure model, which is obtained as a sum of two independent factors, of which one follows Vašíček process and the other Cox-Ingersoll-Ross process. For this model we derive averaged bond prices with respect to hidden factors. The work contains analysis of characteristics of this model, studies the property of fast mean reversion for each of the hidden processes and proposes algorithms for obtaining optimal input parameters of the model.

key words: Vašíček model, Cox-Ingersoll-Ross model, averaging

Obsah

Úvod	6
1 Základné pojmy	7
2 Modely časovej štruktúry	10
2.1 Jednofaktorové modely	10
2.1.1 Prehľad niektorých modelov	11
2.2 Multifaktorové modely	13
2.3 Odvodenie ceny dlhopisu pre jednofaktorový model	16
2.4 Odvodenie ceny dlhopisu pre dvojfaktorový model	18
3 Multifaktorové modely. Kombinovaný Vašíček - CIR model.	20
3.1 Kombinovaný Vašíčkov a CIR model	20
3.2 Fokker - Planckova rovnica	22
3.3 Spriemernenie cien dlhopisu. Nepriame spriemernenie.	26
3.4 Spriemernenie výnosových kriviek. Priame spriemernenie.	30
3.5 Grafický dôkaz spriemerňovania	32
4 Vlastnosti spriemernenia	37

4.1	Fast mean reversion	37
5	Metódy určovania vstupných parametrov	42
5.1	Metóda s nesymetrickým intervalom	42
5.2	Metóda so symetrickým intervalom	45
	Záver	48
	Literatúra	50
	Príloha	52

Úvod

Zmeny hodnôt úrokových mier dlhopisov významne ovplyvňujú rozhodovania pri alokácii investícií a riadení rizika na finančných trhoch: tento fakt spôsobil, že o modelovanie tohto vývinu a jeho výsledky je vo vedeckej i laickej komunite stále veľký záujem.

Táto práca sa zaoberá multifaktorovými modelmi časovej štruktúry úrokových mier, konkrétne dvojfaktorovým modelom, ktorý vznikol ako súčet dvoch skrytých faktorov, z ktorých jeden sleduje jednofaktorový Cox-Ingersoll-Ross proces a druhý jednofaktorový Vašíčekov proces.

Prvá kapitola poskytne čitateľovi ozrejmienie základných pojmov a vzťahov ohľadom úrokových mier a cien dlhopisov. Druhá kapitola poskytuje prehľad najznámejších typov jednofaktorových a multifaktorových modelov časovej štruktúry. Na záver druhej kapitoly uvedieme spôsob odvodenie cien dlhopisov, v prípade, že úroková miera sleduje jednofaktorový alebo viacfaktorový stochastický proces. Tretia kapitola uvádza v literatúre málo spomínaný dvojfaktorový Vašíček-CIR model, pre ktorý odvodíme priemernú cenu dlhopisu, ktorá je prvým krokom k získaniu optimálnych vstupných parametrov úlohy. Vlastnosťami tohto modelu sa zaoberáme v tretej a štvrtej kapitole. Sledujeme vzťah medzi priemernou výnosovou krivkou a výnosovou krivkou získanou priemernením cien dlhopisov. Skúmame vlastnosti časovej štruktúry pre jeden z vytvárajúcich procesov v rýchlej škále. Piata kapitola obsahuje návrhy algoritmov na získanie optimálnych vstupných parametrov.

Kapitola 1

Základné pojmy

Dlhopis je cenný papier, v ktorom sa dlžník zaväzuje splatiť v stanovenej lehote nominálnu hodnotu a v dohodnutých obdobiach bude vyplácať pravidelný kupón, v prípade, že v súčasnosti za neho obdržal dohodnutú sumu, nižšiu ako je jeho nominálna hodnota. Dlhopis, ktorý nevypláca žiadne kupóny, sa nazýva bezkupónový. Pri oceňovaní dlhopisov počítame súčasnú hodnotu budúcich príjmov.

My sa ďalej budeme pre jednoduchosť zaoberať bezkupónovými dlhopismi, konkrétne dlhopismi, ktoré majú v čase maturity nominálnu hodnotu 1. Takéto dlhopisy sa nazývajú diskontné dlhopisy. Pri spojitom úrokovaní môžeme súčasnú cenu diskontného dlhopisu $P(t, T)$ vyjadriť nasledovne:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)},$$

pričom T je čas splatnosti dlhopisu a $R(t, T)$ príslušná úroková miera, ktorá vyjadruje mieru zhodnotenia dlhopisu oproti pôvodnej kúpnej cene. Na tento vzťah sa môžeme pozerať aj z opačnej strany, na základe známych cien dlhopisov vieme určiť časovú štruktúru úrokových mier, ktorá vyjadruje funkcionálnu závislosť medzi časom do maturity diskontného dlhopisu a jeho súčasnou cenou:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t}.$$

Grafické znázornenie tejto závislosti sa nazýva výnosová krivka.

Tvary výnosovej krivky sú a boli predmetmi podrobných skúmaní. Dve hlavné teórie ohľadom zaoberajúce sa vysvetľovaním tvarov kriviek sú teória očakávaní a teória oddelených trhov [13]. Známe sú tri formy teórie očakávaní, a to čistá teória očakávaní, teória likvidity a teória preferovaných umiestnení. Čistá teória očakávaní tvrdí, že tvar výnosovej krivky ovplyvňujú očakávania budúcich úrokových mier. Ak očakávame v budúcnosti vyššie krátkodobé úrokové miery, musia byť súčasné úrokové miery vyššie ako súčasné krátkodobé úrokové miery. Keby to tak nebolo, investori by dali prednosť krátkodobému vkladu a po jeho uplynutí si znovu vybrali krátkodobý vklad, čo im zaistí väčší výnos ako súčasné dlhodobé vklady. Teória likvidity hovorí, že časová štruktúra nie je iba výsledkom očakávania budúcich úrokových mier, ale berie do úvahy nižšiu likviditu dlhobehších vkladov. Vyššia maturita implikuje vyššiu prémii za (nízku) likviditu. Teória preferovaných umiestnení rozdeľuje trh na trhy dlhopisov s rôznymi splatnosťami, ktoré si samé určujú ceny na základe dopytu a ponuky, pričom účastníci trhu môžu z neho vystúpiť a vstúpiť na iný trh, ak im je to výhodné. V teórii oddelených trhov takéto vystúpenie nie je možné.

Bez ohľadu na teórie, v praxi je pozorovateľných niekoľko všeobecných typov výnosových kriviek. Štandardný tvar výnosovej krivky je rastúci. Výnosová krivka s veľkým sklonom signalizuje rozbíhajúcu sa ekonomiku, kde nízke krátkodobé úrokové sadzby podporujú investorov. Invertovaná, teda klesajúca výnosová krivka môže byť signálom recesie, či hospodárskej krízy. Krivka, ktorá v literatúre vystupuje pod názvom „humped“ [7] je rastúca pre nižšie doby do splatnosti, a klesajúca pre vyššie, môže signalizovať prechod k invertovanej krivke, alebo návrat do normálneho stavu.

Začiatok časovej štruktúry úrokových mier, takzvanú short rate $r(t)$ alebo okamžitú úrokovú mieru dostaneme ako $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t, t + \Delta t)$ pre t blížiacu sa k času do splatnosti T , čo sa dá vyjadriť nasledovne:

$$r(t) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}.$$

Short rate nám dáva informáciu o predpokladanom ďalšom priebehu časovej štruktúry. V praxi short rate reprezentujeme takzvaným over-nightom, čo je krátkodobá - jednoduchá - úroková miera, za ktorú si medzi sebou požičiavajú banky.

Pri počítaní súčasnej hodnoty budúcich príjmov sa stretávame s istou náhodnosťou. Zo zjednodušeného pohľadu sú dlhopisy totiž poskytnuté na trh, kde dopyt a ponuka stanoví ich súčasnú cenu. Na jej základe možno dopočítať úrokovú mieru. Vývoj úrokovej miery v čase môžeme teda považovať za stochastický.

Znova z obráteného pohľadu považujme za východiskové aktívum úrokovú mieru a cenu dlhopisu za jej derivát. Referenčné hodnoty úrokovej miery od short-rate cez týždenné až po mesačné a ročné úrokové miery určuje pre Eurozónu EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate). Podľa definície [5] je to medzibanková úroková miera, za ktorú sú poskytované termínované vklady jednou bankou druhej. Podkladom pre jej stanovenie sú medzibankové úrokové miery v 43 európskych bankách (rok 2009) s prvotriednou finančnou reputáciou. Pre Slovensko je podkladovou sadzbou BRIBOR (Bratislava Interbank Offered Rate), rovnako môžeme nájsť údaje PRIBOR (Praha), BUBOR (Budapešť) alebo LIBOR (Londýn).

Iný relevantný typ úrokovej miery je forwardová úroková miera. Forward je dohoda uzavretá v čase t o kúpe dlhopisu v čase T_1 s maturitou v čase T_2 . Vzťah pre určenie forwardovej úrokovej miery má tvar:

$$f(t, T_1, T_2) = -\frac{\ln P(t, T_2) - \ln P(t, T_1)}{T_2 - T_1}.$$

Limitná verzia pre blízke T_1 a T_2 určuje okamžitú forwardovú úrokovú mieru:

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T).$$

Kapitola 2

Modely časovej štruktúry

Modely časovej štruktúry úrokových mier opisujú vývoj výnosovej krivky v čase. V tejto práci sa budeme zaoberať short rate modelmi. Existujú aj modely zaoberajúce sa inými relevantnými premennými, napríklad forwardovou úrokovou mierou. V short rate modeloch, ktoré modelujú vývoj short rate v čase, predstavuje táto kompletnú informáciu pre určenie výsledného tvaru term structure. Vývoj short rate sa modeluje stochastickou diferenciálnou rovnicou alebo rovnicami. Na základe súčasnej úrokovej miery a času do maturity dlhopisu potom dokážeme odvodiť parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu, ktorá je vlastne základnou informáciou, ktorú kupujúci potrebuje vedieť. V prípade jediného stochastického faktora-zdroja neistoty- modelujúcej short rate hovoríme o jednofaktorových modeloch.

2.1 Jednofaktorové modely

Všeobecný tvar stochastickej diferenciálnej rovnice pre short rate je daný driftom $\mu(r, t)$ a volatilitou $\sigma(r, t)$:

$$dr = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dW.$$

Zatiaľ, čo prvá časť vzorca je deterministická, stochastickosť úrokovej miery reprezentuje druhá časť, kde W je Wienerov proces.

Dve hlavné skupiny modelov, na ktoré sa delia modely časovej štruktúry úrokových

mier sú rovnovážne a bezarbitrážne modely. Hlavným rozdielom medzi týmito dvoma skupinami je, že pri rovnovážnych modeloch je súčasná časová štruktúra výstupom modelu, zatiaľ čo pri bezarbitrážnych je vstupom. V rovnovážnych modeloch nebýva drift funkciou času, v bezarbitrážnych naopak áno - a to preto, lebo tvar začiatkovej výnosovej krivky má vplyv na ďalší vývoj short rate [6]. Rastúca začiatková term structure indikuje pravdepodobný rastúci priebeh short rate, klesajúca klesajúci priebeh. Z technickej stránky fakt, že drift je funkciou času poskytuje viac neznámich parametrov, a tým pádom aj možnosť presného opísania začiatkovej krivky.

2.1.1 Prehľad niektorých modelov

Pri časti modelov, ktoré uvedieme, si môžeme všimnúť vlastnosť mean reversion. Takéto modely sa dajú zapísať v tvare:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma(t, r)dW.$$

V dlhodobom horizonte je modelovaná veličina priťahovaná k hodnote θ rýchlosťou κ . Táto vlastnosť je v súlade s ekonomickou teóriou, ktorá hovorí, že úroková miera má dlhodobu tendenciu byť priťahovaná k akejsi priemernej hodnote. Tento fenomén je vysvetľovaný v [8] nasledovne: prílišný nárast úrokovej miery spôsobí pokles dopytu po úveroch, čo následne znova prinúti autority úrokovú mieru znížiť. Proces, ktorý je modelovaný s driftom v tvare $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r)$ sa nazýva Ornstein-Uhlenbeckov mean reversion proces.

Vašíčkov model

Častým tvarom pre short rate model je model

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dW,$$

s volatilitou v tvare σr^γ .

Prvým z takýchto modelov je Vašíčkov model s vlastnosťou mean reversion s voľbou $\gamma = 0$ z roku 1977 v tvare:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dW.$$

Vašíčkov model, ako jeden z prvých short rate modelov vôbec, má svoje nedostatky. Tie spočívajú najmä v možnosti nadobúdania záporných hodnôt úrokovej miery a v konštantnej volatilitate. V prípade modelovania nominálnej úrokovej miery možnosť nadobúdania záporných hodnôt nie je žiadúca; záporné hodnoty môže nadobúdať reálna úroková miera pôsobením inflácie.

Cox-Ingersoll-Ross model

Nedostatok Vašíčkovho modelu spočívajúci v možnosti nadobúdania záporných hodnôt odstraňuje Cox-Ingersoll-Ross (ďalej len CIR) model s voľbou parametra $\gamma = \frac{1}{2}$ model v tvare:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW.$$

Takýto proces sa nazýva aj Bessel square root difúzny proces. Nový tvar volatility $\sigma\sqrt{r}$ za splnenia predpokladu, že $2\kappa\theta > \sigma^2$ a štartovania z kladnej hodnoty zaručí, že proces nenadobúda nulové a záporné hodnoty, a to z nasledujúceho dôvodu. Keď sa úroková miera dostane blízko nuly, výraz $2\kappa\theta > \sigma^2$ nadobúda tiež hodnoty blízke nule, teda volatilita je veľmi nízka. Vtedy zaváži člen θ , a úroková miera sa od nuly akoby „odrazí“.

Rieši sa i problém s konštantnou volatilitou - volatilita je rastúca s úrokovou mierou, teda pri vysokých hodnotách úrokovej miery je väčšia pravdepodobnosť výraznejšej zmeny úrokovej miery.

Spomínané modely patria do kategórie rovnovážnych modelov. Medzi bezarbitrážne modely patrí napríklad Ho-Lee model a Hull White model.

Ho-Lee model

Ho-Lee model bol prvým uvedeným bezarbitrážnym modelom, v pôvodnej verzii ako binomický strom cien dlhopisov. V spojitom prípade má tvar:

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dW.$$

Ako bezarbitrážny model parametrom $\theta(t)$ zabezpečuje kopírovanie počiatočnej štruktúry. Tento parameter určuje priemerný drift, teda smer vývoja r v čase. Nevýhodou tohto modelu sú konštantná volatilita a chýba aj vlastnosť mean-reversion - bez ohľadu na výšku úrokovej miery v danom čase je priemerný smer vývoja r za nasledujúci daný časový úsek rovnaký.

Hull-White model

Model má tvar podobný Vašíčkovmu modelu, ktorý však presne opisuje počiatočnú časovú štruktúru, čo je spôsobené závislosťou driftu od času. Spája vlastnosť mean-reversion a možnosť zachovať úplnú zhodu s ľubovoľnou výnosovou krivkou. Dodatočne, ak sa stanoví takáto požiadavka, umožňuje úplnú zhodu s časovou štruktúrou volatility, minimálne od času 0. Jeden z možných tvarov zápisu je:

$$dr = a \left(\frac{\theta(t)}{a} - r \right) dt + \sigma dW.$$

Vidno, že okrem príbuznosti s Vašíčkovým modelom je model podobný aj Ho-Lee modelu, môžeme ho teda vnímať ako Ho-Lee model s vlastnosťou mean reversion, kde rýchlosť prifahovania k strednej hodnote je a .

Prechodom medzi jednofaktorovými modelmi a viac možností poskytujúcimi viacfaktorovými sú modely s menením režimov (regime switching[12]). Menenie režimu môžeme vnímať ako zmenu v konečnom Markovovskom procese. Zmena fiškálnej alebo moneárnej politiky, ako aj iné ekonomické alebo neekonomické ukazovatele môžu mať za následok rôzne správanie sa úrokovej miery v istých časových intervaloch. Zatiaľ čo parametre sa v klasických short rate modeloch nemenia, parametre v regime switching modeloch sa menia v závislosti od zmeny režimu. Takto tento model zahŕňa rôzne možnosti dlhodobej strednej hodnoty a rôzne tempá priblíženia sa k nej.

2.2 Multifaktorové modely

Hlavnou výhodou jednofaktorových modelov je ich jednoduchosť. Celá výnosová krivka je funkciou jedinej stavovej premennej, ktorá je navyše ešte reálne pozorovateľná (short-

rate). Táto jednoduchosť na jednej strane prináša niekoľko problémov na strane druhej.

Prvým je úplná korelácia zmien výnosovej krivky, teda korelácia dlhopisov rôznych maturít, ktorú empirické pozorovania trhu vyvracajú. Ďalej jednoznačné určenie časovej štruktúry na základe vstupných parametrov pri jednofaktorovom modeli sa ukazuje ako nepostačujúce - rovnaké začiatky term structure môžu aj v realite viesť k rozdielnym tvarom. Typy tvarov výsledných kriviek sú takisto obmedzené. Konkrétne jednofaktorový CIR a Vašíčkov model poskytujú tieto výsledné tvary výnosovej krivky: rastúcu, klesajúcu a „humped“. Invertovanú „humped“ krivku, teda krivku pre nízky čas do maturity klesajúcu a vyšší čas do maturity rastúcu, nám modely neposkytnú [7]. V prípade časovo nezávislých parametrov navyše dochádza k veľmi slabým aproximáciám súčasnej výnosovej krivky. Z týchto dôvodov sa začínajú uvažovať dvojfaktorové a viacfaktorové modely. Treba však pripomenúť, že väčšie množstvo faktorov prináša aj väčšiu výpočtovú náročnosť. Preto treba zvážiť potrebu pridania ďalšieho faktora. Otázkou ostáva, koľko faktorový model by najlepšie popísal term structure.

Najbežnejšie však ostávajú dvojfaktorové modely, pozrime sa na všeobecný tvar:

$$\begin{aligned}dr_t &= \mu_r(r_t, y_t, t)dt + \sigma_r(r_t, y_t, t)dW_t^1, \\dy_t &= \mu_y(r_t, y_t, t)dt + \sigma_y(r_t, y_t, t)dW_t^2.\end{aligned}$$

Nová diferenciálna rovnica modeluje nejaký ďalší zdroj stochastickosti, napríklad inú ekonomickú veličinu na trhu alebo niektorý z faktorov prvej rovnice. Medzi dW_t^1 a dW_t^2 predpokladáme konštantnú koreláciu ρ , t.j. $E(dW_t^1 dW_t^2) = \rho dt$.

V nasledujúcom si uvedieme niekoľko typov multifaktorových modelov v tvare, v ktorom sú parametre modelu nezávislé od času. Aj v prípade takýchto modelov však dochádza k zlepšeniu aproximácie súčasnej výnosovej krivky a odstráneniu perfektnej korelácie cien dlhopisov.

Ďalšia ekonomická veličina ako druhý stochastický faktor

Charakter výnosovej krivky môže byť opísaný prostredníctvom dynamiky 2 stavových premenných r_1 a r_2 , ktoré môžu, ale nemusia, byť nepozorovateľné. V Brennan-

Schwartzovom modeli sa stochastický proces pre krátkodobú úrokovú mieru r blíži k dlhodobej L , ktorá sleduje stochastický proces. Špeciálne v konvergenčnom modeli Corzová a Schwartz [2] vyvinutom pre krajiny Európskej menovej únie stochastický proces pre úrokovú mieru v domácej krajine r_d závisí od celoeurópskej úrokovej miery r_e , ktorá je tiež modelovaná stochastickým procesom. Oba procesy sú teda typu mean reversion, pričom r_e je priťahovaná ku konštantnej dlhodobej strednej hodnote, zatiaľ čo r_d je priťahovaná k strednej hodnote stochastického charakteru, závislej na r_e . Uveďme si tvar tohto modelu:

$$\begin{aligned} dr_e &= c(d - r_e)dt + \sigma_e dW_e, \\ dr_d &= (a + b(r_e - r_d))dt + \sigma_d dW_d. \end{aligned}$$

Jeden z parametrov modelu ako druhý stochastický faktor

Výber volatility za ďalší vysvetľujúci faktor je pomerne častou záležitosťou - vzniká skupina modelov pod názvom modely so stochastickou volatilitou. Uveďme si ako príklad Fong-Vašíčkov model so stochastickou volatilitou, ktorý je rozšírením Vašíčkovho modelu, kde je Ornstein-Uhlenbeckov proces doplnený o stochastickosť volatility:

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa_1(\theta_1 - r)dt + \sqrt{y}dW_t^1, \\ dy_t &= \kappa_2(\theta_2 - y)dt + v\sqrt{y}dW_t^2. \end{aligned}$$

Zaujímavým modelom, ktorý za druhý faktor trhovú cenu rizika, kde oba faktory sledujú Vašíčkov proces, tzv. Vašíčkov model so stochastickou trhovou cenou rizika [10]:

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa_1(\theta_1 - r)dt + \sigma_1 dW_t^1, \\ d\lambda^* &= \kappa_2(\theta_2 - \lambda^*)dt + \sigma_2 dW_t^2, \end{aligned}$$

kde λ^* je stochastická trhová cena rizika. Trhová cena rizika je jeden z parametrov short rate modelu, ktorý však nevystupuje priamo v rovnicovom zápise, avšak pri oceňovaní

2.3. ODVODENIE CENY DLHOPISU PRE JEDNOFAKTOROVÝ MODEL

dlhopisu treba rátať aj s určovaním hodnoty tohto parametra. Tento parameter sa dá interpretovať ako dodatočný výnos ku výnosu zaručenému bezrizikovou úrokovou mierou, ktorý investor očakáva ako kompenzáciu za riziko investovania, ktoré spôsobujú členy dW_t [9]. Bližšie sa trhovou cenou rizika budeme zaoberať neskôr.

Dvojfaktorový CIR a dvojfaktorový Vašíčkov model

V doteraz spomenutých modeloch bola prípustná alebo požadovaná istá miera korelácie medzi procesmi ρ . Modelmi, ktoré nepredpokladajú koreláciu medzi oboma procesmi sú dvojfaktorový CIR a dvojfaktorový Vašíčkov model, ktoré modelujú short rate ako súčet dvoch nepozorovateľných procesov, kde oba sledujú buď Vašíčkov alebo CIR proces. V tomto prípade sú známe aj viacfaktorové verzie modelov. Používanie CIR a Vašíčkovho procesu pri jednofaktorových a takisto dvojfaktorových procesov je výhodné z hľadiska stanovenia ceny dlhopisu, ktorú možno elegantne odvodiť.

2.3 Odvodenie ceny dlhopisu pre jednofaktorový model

Ako sme už spomenuli, primárnou úlohou investora je určiť súčasnú cenu dlhopisu. Poznaním cien pre dlhopisy rôznej maturity, ktoré sú obchodované v ten istý deň, automaticky dostaneme aj časovú štruktúru úrokových mier. Uvažujme model:

$$dr = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dW. \quad (2.1)$$

Predpokladáme, že cena dlhopisu závisí iba od short rate, čo môžeme vyjadriť vzťahom:

$$P(t, T) = P(r_t, t, T).$$

Cieľom ďalšieho postupu bude získať parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu, keď úroková miera sleduje proces (2.1). Hlavným krokom v tomto postupe je využitie Itôovej lemy.

2.3. ODVODENIE CENY DLHOPISU PRE JEDNOFAKTOROVÝ
MODEL

Veta 2.3.1 Itôova lema *Nech $X_t(\omega)$ je Itôov proces*

$$X_t(\omega) = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dW_t(\omega),$$

kde $W_t(\omega)$ je Brownov pohyb v zmysle definície z knihy [11]. Nech $g(x, t) \in C^2([0, \infty] \times R)$. Potom

$$Y_t(\omega) = g(t, X_t(\omega))$$

je tiež Itôov proces a platí:

$$dY_t = \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial g(t, X_t)}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)v^2 dt. \quad (2.2)$$

Využitím Itôovej lemy a konštrukciou bezrizikového portfólia, ktorej podrobnosti sú uvedené napríklad v [9], dostávame rovnicu pre cenu dlhopisu:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0. \quad (2.3)$$

Koncovú podmienku nám dá fakt, že cena dlhopisu v čase T je rovná jeho nominálnej hodnote:

$$P(T, T) = 1.$$

Pri výpočte vstupuje medzi neznáme parametre spolu s parametrami modelu nová premenná - t.z.v. trhovú cenu rizika, interpretovateľná ako prémie navyše pre investora za riziko, ktoré spôsobuje stochastický člen dW . Často býva definovaná ako záporná, vtedy je odmena za riziko kladná.

Ak explicitné riešenie hľadáme v tvare

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r},$$

pre model

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dW,$$

dostávame ho pre 2 hodnoty parametra γ : $\gamma = \frac{1}{2}$ a $\gamma = 0$, čo zodpovedá tvaru CIR a Vašíčkovho modelu.

Tvar explicitného riešenia pre cenu dlhopisu pre Vašíčkov model:

$$B(t, T) = \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)}), \quad (2.4)$$

$$A(t, T) = \exp[(B(t, T) - T + t)R_{inf} - \frac{\sigma^2}{4\kappa}B(t, T)^2], \quad (2.5)$$

$$R_{inf} = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}. \quad (2.6)$$

Tvar explicitného riešenia pre cenu dlhopisu pre CIR:

$$\gamma = \sqrt{(\kappa + \lambda)^2 + 2\sigma^2}, \quad (2.7)$$

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\kappa + \lambda + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}, \quad (2.8)$$

$$A(t, T) = \left[\frac{2\gamma e^{(\kappa + \lambda + \gamma)(T-t)/2}}{(\kappa + \lambda + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}. \quad (2.9)$$

Premenná λ reprezentuje trhovú cenu rizika, v každom prípade sa volí iná. Pri Vašíčkovom modeli je λ konštantná; pri CIR modeli $\lambda = k\sqrt{r}$. Ako vidíme, dostali sme vzorec pre cenu dlhopisu v prípade modelovania CIR a Vašíčkovým modelom, nie je teda nutné numerické riešenie a pri správne odhadnutých parametroch procesu pre úrokovú mieru získavame automaticky aj ocenenie jej derivátu.

2.4 Odvodenie ceny dlhopisu pre dvojfaktorový model

Podobnú parciálnu diferenciálnu rovnicu môžeme zostaviť pre dvojfaktorový model short rate

$$\begin{aligned} dr_t &= \mu_r(r_t, y_t, t)dt + \sigma_r(r_t, y_t, t)dW_t^1, \\ dy_t &= \mu_y(r_t, y_t, t)dt + \sigma_y(r_t, y_t, t)dW_t^2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.4. ODVODENIE CENY DLHOPISU PRE DVOJFAKTOROVÝ
MODEL

a to podobne, ako v prípade jednofaktorového modelu. Použitím viacrozmernej Itôovej lemmy dostávame vzťah stochastickú diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu P s dobou splatnosti T :

$$dP = \mu(T)dt + \tilde{\sigma}_r(T)dW_1 + \tilde{\sigma}_y(T)dW_2,$$

kde

$$\begin{aligned}\mu(T) &= \frac{\partial P}{\partial t} + \mu_r \frac{\partial P}{\partial r} + \mu_y \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \sigma_r^2 \sigma_y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial r}, \\ \tilde{\sigma}_r(T) &= \sigma_r \frac{\partial P}{\partial r}, \\ \tilde{\sigma}_y(T) &= \sigma_y \frac{\partial P}{\partial y}.\end{aligned}$$

Znovu konštrukciou bezrizkového portfólia a využitím princípu bezarbitráže dostávame pre všeobecný dvojfaktorový model v tvare (2.10) parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu P s dobou splatnosti T :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu_r - \lambda_1 \sigma_r) \frac{\partial P}{\partial y} + (\mu_y - \lambda_2 \sigma_y) \frac{\partial P}{\partial r} + \\ \frac{1}{2}\sigma_r^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\sigma_y^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \sigma_y \sigma_r \rho \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial y} - rP = 0.\end{aligned}\tag{2.11}$$

V priebehu konštrukcie bezrizkového portfólia pribudnú opäť trhové ceny rizika, avšak tento krát pôjde o dva nové neznáme parametre λ_1 a λ_2 .

Kapitola 3

Multifaktorové modely. Kombinovaný Vašíček - CIR model.

V literatúre sa často stretávame s multifaktorovými modelmi v tvare:

$$r = \sum_{i=1}^n r_i, \tag{3.1}$$
$$r_i = \mu_i(r_i)dt + \sigma_i(r_i)dW,$$

kde sú za všetky r_i volené buď Vašíčkove, alebo CIR procesy. Na možnosť kombinácie Vašíčkových a CIR procesov sa akoby zabúda. Preto sme si zvolili práve dvojfaktorový model v tvare (3.1), kde jeden faktor sleduje Vašíčkov, a druhý CIR proces za predmet ďalšieho skúmania.

3.1 Kombinovaný Vašíčkov a CIR model

Naším úmyslom je sledovať dvojfaktorový model, taký pre ktorý rovnica (2.11) poskytne explicitné riešenie. Ďalšou požiadavkou je modelovanie trhovo pozorovateľného faktora úrokovej miery dvoma skrytými faktormi, teda dvomi zdrojmi rizika v tvare

$$r = r_1 + r_2.$$

Predpokladáme nezávislosť medzi prírastkami dW_1 a dW_2 , t.j. $E(dW_1dW_2) = 0$.

3.1. KOMBINOVANÝ VAŠÍČKOV A CIR MODEL

Riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (2.11) môžeme hľadať v rôznych tvaroch, my ho budeme hľadať podobne ako pri jednorozmernej parciálnej diferenciálnej rovnici v tvare:

$$P(\tau, r_1, r_2) = A_1(\tau)A_2(\tau)e^{-B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2} \quad (3.2)$$

pre nasledovný model:

$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_2, \\ dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1 r_1^{\gamma_1} dW_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2 r_2^{\gamma_2} dW_2. \end{aligned}$$

Využitím nezávislosti a tvaru, v ktorom máme model môžeme prepísať rovnicu (2.11) na tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + (\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1 \sigma_1 r_1^{\gamma_1}) \frac{\partial P}{\partial r_1} + (\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2 \sigma_2 r_2^{\gamma_2}) \frac{\partial P}{\partial r_2} + \\ \frac{1}{2} \sigma_1^2 r_1^{2\gamma_1} \frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 r_2^{2\gamma_2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} - r_1 P - r_2 P = 0. \end{aligned}$$

Takúto dvojrozmernú PDR si môžeme rozdeliť na dve jednorozmerné. Rovnako tvar pre cenu dlhopisu možno rozdeliť na súčin tvarov cien pre jednofaktorový model, problém sme teda zúžili na dva jednorozmerné. O týchto je známe, že riešením je buď jednofaktorový CIR model alebo jednofaktorový Vašíčkov model. Riešením dvojrozmernej rovnice teda bude dvojfaktorový Vašíčkov model, dvojfaktorový CIR model, alebo kombinácia - jeden skrytý faktor modelovaný CIR procesom, druhý Vašíčkovým modelom. Ukážeme si tvar dvojfaktorového CIR modelu:

$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_2, \\ dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1 \sqrt{r_1} dW_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2 \sqrt{r_2} dW_2. \end{aligned}$$

Voľba parametrov γ_i pre $i = 1, 2$ je $\gamma_i = \frac{1}{2}$. Týmto modelom sa podrobne zaoberá práca [3], ktorá poukazuje na väčšie možnosti tvarov výnosových kriviek dvojfaktorového CIR

modelu oproti jednofaktorovému a poskytuje výsledky modelu pri kalibrácii parametrov pre reálne dáta, pričom základom tejto kalibrácie je spriemernenie cien dlhopisov cez hodnoty skrytých faktorov r_1 a r_2 a minimalizácia špeciálnej účelovej funkcie.

Model, ktorý budeme my ďalej sledovať nazvime dvojfaktorovým Vašíček - CIR modelom:

$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_2, \\ dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1\sqrt{r_1}dW_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2dW_2, \end{aligned}$$

t.j. $\gamma_1 = \frac{1}{2}$ a $\gamma_2 = 0$. Prvý skrytý faktor sleduje CIR proces a druhý Vašíčkov proces.

Keďže poznáme analytické riešenie jednorozmernej parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu aj v prípade CIR aj Vašíčka, máme vlastne kompletne analyticky vyjadrený vzorec na určenie ceny dlhopisu

$$P(\tau, r_1, r_2) = A_1(\tau)A_2(\tau)e^{-B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2},$$

kde A_1, B_1 sú vyjadrené vzťahmi (2.9), (2.8) a A_2, B_2 vzťahmi (2.4) a (2.5). Situácia by bola teraz jednoduchá, keby sme poznali hodnoty r_1 a r_2 , v realite však pozorujeme iba ich súčet. V takomto prípade môžeme použiť na vyrátanie ceny dlhopisu takzvané spriemernenie. Táto metóda využíva limitné pravdepodobnostné rozdelenia skrytých faktorov a podmienenú pravdepodobnosť. V nasledujúcej časti sa oboznámime so získavaním limitných hustôt.

3.2 Fokker - Planckova rovnica

Uvažujme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre úrokovú mieru vo všeobecnom tvare

$$dr = \alpha(r, t)dt + \beta(r, t)dW. \quad (3.3)$$

Hustotu pravdepodobnostného rozdelenia úrokovej miery r_t v čase t v bode r označme

$$f(t, r_t | r(0) = r_0).$$

Pravdepodobnostné rozdelenie teda nezáleží len od času , ktorom sa nachádzame, ale aj od počiatočnej hodnoty short rate r_0 . Príslušnú distribučnú funkciu si potom označme:

$$F(r_t, t) = P(r(t) < r | r(0) = r_0).$$

Informáciu o tomto pravdepodobnostom rozdelení nám poskytne Fokker-Planckova parciálna diferenciálna rovnica. Hustota rozdelenia short rate v čase t totiž spĺňa túto rovnicu (pozri [19]). Fokker-Planckova rovnica má pre (3.3) tvar:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (\beta(r, t)^2 f)}{\partial r^2} - \frac{\partial \alpha(r, t) f}{\partial r}. \quad (3.4)$$

Fokker-Planckova rovnica bola prvý krát použitá na opis Brownho pohybu častice Fokkerom a Planckom. Z matematického hľadiska je to lineárna parabolická parciálna diferenciálna rovnica druhého rádu. Rovnica je rovnicou pohybu pre distribučnú funkciu $f(r, t)$. Voľne povedané je to difúzna rovnica, v ktorej navyše vystupuje člen derivácie prvého rádu podľa polohy r . Používa sa na opis rýchlosti a pozície pre časticu pohybujúcu sa Brownovým pohybom, prúdu v elektrickom obvode, elektrické pole v laseri [14]. Okrem samotného pohybu častice môže byť použitá na zistenie hustoty v čase pre procesy sledujúce Itôve stochastické diferenciálne rovnice v tvare (3.3).

Vráťme sa teraz k rovnici (3.4). Počiatočnú podmienku pre rovnicu (3.3) nám dá štartovacia hodnota short rate. Túto podmienku zapíšeme v tvare:

$$f(r, 0) = \delta(r - r_0). \quad (3.5)$$

Tu $f(r, 0)$ je Diracova delta funkcia v bode r_0 , teda jej hodnota je nula pre každé r rôzne od r_0 a nekonečno v bode nula, pričom $\int_{\mathcal{R}} \delta(r - r_0) dr = 1$. Diracova funkcia v bode a však nie je funkcia v pravom slova zmysle, je to limita postupnosti hustôt normálneho rozdelenia so strednou hodnotou a pre disperziu idúcu k nule.

Na základe Fokker-Planckovej rovnice môžeme dostať hustotu rozdelenia short rate v čase t , za podmienky, že poznáme jej počiatočnú hodnotu r_0 . Hustota rozdelenia sa dá vypočítať pomocou charakteristickej funkcie hľadaného rozdelenia - namiesto hustôt budeme do Fokker-Planckovej rovnice dosadzovať charakteristickú funkciu. Využitím

charakteristickej funkcie [20] náhodnej premennej r_t v tvare $\phi(x) = E(e^{ixr_t})$ vieme dostať tvar hustoty náhodnej premennej r_t napríklad pre Vašíčkov model v tvare

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dW.$$

Rozdelenie je normálne s parametrami:

$$E(r_t) = \theta(1 - e^{-\kappa t}) + r_0 e^{-\kappa t}, \quad D(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t}). \quad (3.6)$$

Nás však bude zaujímať limitná hustota, ktorá už nebude ovplyvnená štartovacou hodnotou úrokovej miery.

Limitná hustota $y(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(r, t)$ je vlastne stacionárnym riešením Fokker-Planckovej rovnice. Toto stacionárne riešenie dostaneme ako riešenie limitnej verzie Fokker-Planckovej rovnice pre $t \rightarrow \infty$:

$$\alpha \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\beta^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}. \quad (3.7)$$

Na základe tejto upravenej Fokker-Planckovej rovnice dostávame limitné hustoty pre oba skryté faktory nami sledovaného modelu. Pre jednoznačnosť riešenia treba pridať podmienku $\int_R y(r) dr = 1$, ktorá zaručí, že riešenie je hustotou.

Riešením rovnice (3.7) pre faktor sledujúci Vašíčkov proces bude limitná hustota $y^{(v)}$ v tvare

$$y^{(v)}(r) = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\kappa(r - \theta)^2}{\sigma^2}\right). \quad (3.8)$$

Ako vidíme, hustota Vašíčkovho procesu v čase t aj jej limitná verzia zodpovedajú tvrdeniu z prvej kapitoly - normálne rozdelenie umožňuje nadobúdanie záporných hodnôt úrokových mier. Limitné normálne rozdelenie má parametre $N(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa})$, ktorého stredná hodnota a disperzia zodpovedajú limite charakteristík pre r_t (3.6) pre $t \rightarrow \infty$.

Pre faktor sledujúci CIR proces

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW$$

má za predpokladu, že $\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2} > 1$ limitná hustota $y^{(c)}$ tvar

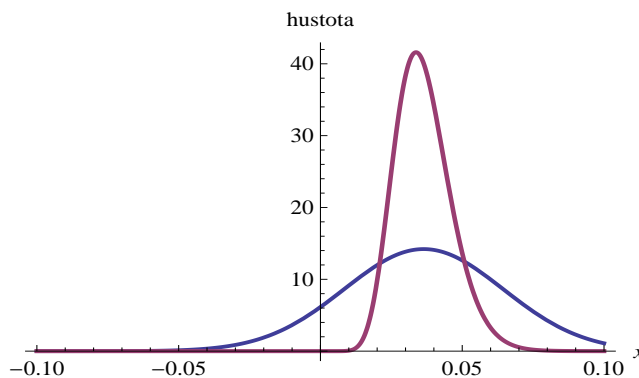
$$y^{(c)}(r) = \begin{cases} \frac{a^b}{\Gamma(b)} e^{-ar} r^{b-1} & \text{pre } r > 0, \\ 0 & \text{pre } r \leq 0, \end{cases} \quad (3.9)$$

pričom

$$\begin{aligned} a &= \frac{2\kappa}{\sigma^2}, \\ b &= \frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Takého rozdelenie zodpovedá Gamma s parametrami (a,b), pričom stredná hodnota a disperzia rozdelenia sú:

$$\begin{aligned} E(r_t) &= \theta, \\ D(r_t) &= \frac{\sigma^2\theta}{2\kappa}. \end{aligned}$$



Obrázok 3.1: Limitné rozdelenie stavovej premennej (úroková miera) pre jednofaktorové modely sledujúce Vašíčkov , resp. CIR proces. Modrou farbou je označená hustota Normálneho rozdelenia, červenou Gamma rozdelenia.

3.3 Spriemernenie cien dlhopisu. Nepriame spriemernenie.

Na základe predchádzajúcich postupov poznáme explicitný tvar riešenia ceny dlhopisu pre dvojfaktorový model a takisto odhady pravdepodobnostného rozdelenia oboch skrytých faktorov v podobe limitných hustôt. Reálne pozorovateľným faktorom je iba short rate, ktorá je súčtom skrytých faktorov $r = r_1 + r_2$, a teda na úplné vyjadrenie ceny dlhopisu $P = P(\tau, r_1, r_2)$ nám chýba informácia o hodnotách r_1 a r_2 . Tu využijeme znalosť limitného rozdelenia r_1 a r_2 a spriemerujeme $P = P(\tau, r_1, r_2)$ cez všetky možné realizácie r_1 a r_2 také, že $r_1 + r_2 = r$. Poznamenaajme ešte, že spriemerňujeme ceny dlhopisov, nie priamo výnosové krivky, preto toto spriemerňovanie nazývame aj nepriame. Spriemerňovaním výnosových kriviek sa budeme zaoberať neskôr v tejto kapitole.

Vychádzame zo vzorca pre podmienenú strednú hodnotu

$$E(g(\xi, \eta)|\xi + \eta \in \Omega) = \frac{\int_{\mathcal{O}} g(\xi, \eta)h(\xi, \eta)d\xi d\eta}{P(\xi + \eta \in \Omega)},$$

$$\mathcal{O} = \{(\xi, \eta)|\xi + \eta \in \Omega\},$$

kde $h(\xi, \eta)$ je združená hustota (ξ, η) . Na základe tohto vzorca potom dostávame vzorec pre podmienenú strednú hodnotu ceny dlhopisu

$$E(P(r, r_1, r_2)|r_1 + r_2 \in \Omega) = \frac{\int_{\mathcal{O}} P(r, r_1, r_2)h(r_1, r_2)dr_1 dr_2}{P(r_1 + r_2 \in \Omega)},$$

$$\mathcal{O} = \{(r_1, r_2)|r_1 + r_2 \in \Omega\}.$$

Združenú hustotu $h(r_1, r_2)$ poznáme, vďaka nezávislosti náhodných premenných dW_1 a dW_2 - a tým pádom aj náhodných premenných r_1 a r_2 - je $h(r_1, r_2) = f(r_1)g(r_2)$, kde $f(x)$ je hustota CIR procesu a $g(x)$ hustota Vašíčkovho procesu. Dosadením prepíšeme vzorec na tvar

$$E(P(r, r_1, r_2)|r_1 + r_2 \in \Omega) = \frac{\int_{\mathcal{O}} P(r, r_1, r_2)f_1(r_1)f_2(r_2)dr_1 dr_2}{\int_{\mathcal{O}} f_1(r_1)f_2(r_2)dr_1 dr_2},$$

$$\mathcal{O} = \{(r_1, r_2)|r_1 + r_2 \in \Omega\}.$$

Označíme si $\mathcal{O}_\epsilon = \langle r - \epsilon, r + \epsilon \rangle$ Na to, aby sme dostali želaný tvar $E(P(r, r_1, r_2)|r_1 + r_2 = r)$, pošleme „šírku pravdepodobnostného pásu“ ϵ okolo r , ktorý

3.3. SPRIEMERNENIE CIEN DLHOPISU. NEPRIAME
SPRIEMERNENIE.

predstavuje množina \mathcal{O}_ϵ k nule. Po úpravách dostaneme tvar pre spriemernenú cenu dlhopisu:

$$\bar{P}(\tau, r) = A_1 A_2 e^{-B_2 r} \frac{\int_0^\infty e^{(B_2 - B_1 - a)s} s^{b-1} e^{\kappa_2(r-s-\theta_2)^2 / \sigma_2^2} ds}{\int_0^\infty e^{-as} s^{b-1} e^{\kappa_2(r-s-\theta_2)^2 / \sigma_2^2} ds}. \quad (3.10)$$

Vzorec (3.10) už nezávislí od skrytých faktorov, na získanie výstupu stačí poskytnúť informáciu o čase do splatnosti a hodnotu short rate. Vzorec by sme si kvôli zjednodušeniu výpočtov radi prepísali do analytického tvaru. Toto je možné urobiť pomocou gamma funkcií a typu hypergeometrických funkcií, ktorý sa dá vyjadriť pomocou gamma funkcií. Tento typ funkcií sa volá Kummerove hypergeometrické funkcie.

Prepis vzorca (3.10) vyzerá nasledovne:

$$\bar{P}(\tau, r) = A_1 A_2 e^{-r B_2} e^{(B_2 - B_1)((r - \theta_2 + \frac{a\nu^4}{2}) - \frac{\nu^4}{4}(B_2 - B_1)^2)} \frac{H(\infty, \frac{r - \theta_2}{\nu} + \frac{a + B_1 - B_2}{2}, b)}{H(\infty, \frac{r - \theta_2}{\nu} + \frac{a\nu}{2}, b)}, \quad (3.11)$$

kde $\nu^2 = \frac{\sigma_2^2}{\kappa_2}$ a

$$H(x, d, c) = \begin{cases} \int_0^x e^{-(t-d)^2} t^{c-1} dt & \text{pre } x > 0, \\ 0 & \text{pre } x \leq 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Funkciu $H(x, d, c)$ vieme analyticky vyjadriť iba pre $x \rightarrow \infty$ (výsledok získaný softvérom Mathematica, pozri aj [1]), čo postačí na úplnú reprezentáciu vzorca (3.10):

$$H(\infty, d, c) = \Gamma\left(\frac{c}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{c}{2}, \frac{1}{2}, d^2\right) + 2d\Gamma\left(\frac{1+c}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1+c}{2}, \frac{3}{2}, d^2\right), \quad (3.13)$$

kde ${}_1F_1$ je Kummerova hypergeometrická funkcia v tvare:

$${}_1F_1(a, b, z) = 1 + \frac{az}{b} + \frac{a(a+1)z^2}{b(b+1)2!} + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)z^n}{b(b+1)\dots(b+n-1)n!} + \dots$$

Kniha [1] ani program Mathematica neposkytujú analytický tvar funkcie $H(x, d, c)$ pre $x \in (0, \infty)$. Podarilo sa nám však nájsť pre túto funkciu dobrú aproximáciu. Postup pri aproximácii je nasledovný:

Znormujeme funkciu $H(x, d, c)$:

$$\tilde{H}(x, d, c) = \frac{H(x, d, c)}{H(\infty, d, c)}, \quad (3.14)$$

3.3. SPRIEMERNENIE CIEN DLHOPISU. NEPRIAME
SPRIEMERNENIE.

a na intervale $(0, \infty)$ aproximujeme $\tilde{H}(x, d, c)$ distribučnou funkciou normálneho rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$; využijeme prístup momentovej metódy, ktorá odhaduje neznáme parametre, tak, že teoretický moment sa rovná výberovému. Znормovaná funkcia je sama tiež distribučnou funkciou, preto ju môžeme považovať za reprezentáciu nejakej náhodnej premennej a vypočítať teoretickú strednú hodnotu a disperziu tohto rozdelenia. Parametre aproximujúceho normálneho rozdelenia potom položíme rovné teoretickým parametrom $\mu = E(X)$ a $\sigma^2 = D(X)$. Výpočet týchto teoretických hodnôt je pomerne jednoduchý, vzhľadom na to, že poznáme explicitný tvar pre $H(\infty, d, c)$:

$$\begin{aligned}\mu &= E(X) = \int_0^x t e^{-(t-d)^2} t^{c-1} dt = H(x, d, c+1), \\ \sigma^2 &= D(X) = \int_0^x t^2 e^{-(t-d)^2} t^{c-1} dt - \mu^2 = H(x, d, c+2) - H(x, d, c+1).\end{aligned}$$

Spriemerovaním sme našli strednú hodnotu ceny dlhopisu P v čase τ do splatnosti za podmienky, $r_1 + r_2 = r$. Ďalšou zaujímavou charakteristikou by mohla byť disperzia, na ktorej nájdenie potrebujeme vypočítať integrál:

$$E(P(r, r_1, r_2)^2 | r_1 + r_2 \in \Omega) = \frac{\int_{\mathcal{O}} P^2(r, r_1, r_2) f_1(r_1) f_2(r_2) dr_1 dr_2}{\int_{\mathcal{O}} f_1(r_1) f_2(r_2) dr_1 dr_2},$$

$$\mathcal{O} = \{(r_1, r_2) | r_1 + r_2 \in \Omega\},$$

kde si znova za \mathcal{O} zvolíme $\mathcal{O}_\epsilon = \langle r - \epsilon, r + \epsilon \rangle$ a šírku „pravdepodobnostného pásu“ znovu pošleme k nule. Dostávame vzorec:

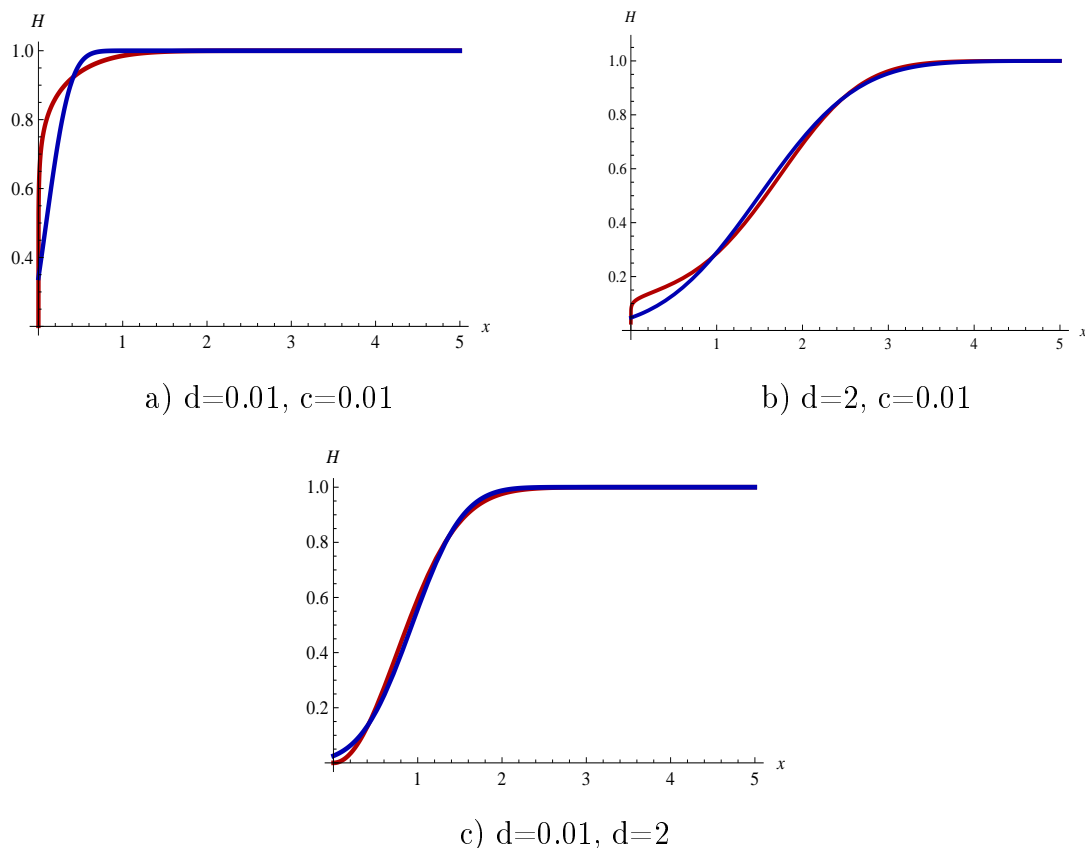
$$\bar{P}^2(\tau, r) = A_1^2 A_2^2 e^{-2B_2 r} \frac{\int_0^\infty e^{(2B_2 - 2B_1 - a)s} s^{b-1} e^{\kappa_2(r-s-\theta_2)^2/\sigma_2^2} ds}{\int_0^\infty e^{-as} s^{b-1} e^{\kappa_2(r-s-\theta_2)^2/\sigma_2^2} ds}. \quad (3.15)$$

Z Čebyševovej nerovnosti pre náhodnú veličinu X platí

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(X)}{\epsilon^2}. \quad (3.16)$$

Pomocou tejto nerovnosti môžeme zostrojiť intervaly spoľahlivosti s ľubovoľnou presnosťou pre náhodnú premennú X . V našom prípade nám pomôže urobiť si predstavu o priebehoch $P(\tau, r_1, r_2 | r_1 + r_2 = r)$. Vykreslíme si takzvané 3-sigmové intervaly, v ktorých sa $P(\tau, r_1, r_2 | r_1 + r_2 = r)$ bude nachádzať s pravdepodobnosťou približne 90 percent.

3.3. SPRIEMERNENIE CIEN DLHOPISU. NEPRIAME SPRIEMERNENIE.

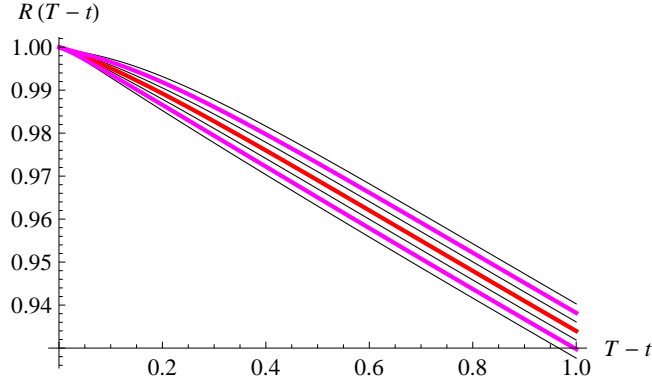


Obrázok 3.2: Aproximácia funkcie $H(x, d, c)$ (červená krivka) distribučnou funkciou normálneho rozdelenia $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (modrá krivka). Pre malé hodnoty parametrov je aproximácia nepresnejšia, čo môžeme vidieť na obrázku a), s rastúcou hodnotou aspoň jedného parametra je funkcia $H(x, d, c)$ aproximovaná presnejšie - obrázky b) a c).

Označme $R(\tau, r)$ výnosovú krivku ktorú získame transformáciou $R(\tau, r) = -\frac{\ln \bar{P}(\tau, r)}{\tau}$. Znázorníme okrem intervalov pre ceny dlhopisu aj intervaly pre príslušnú výnosovú krivku $R(\tau, r)$, v ktorej prípade sú rozdiely názornejšie (Obrázok 3.3 a Obrázok 3.4).

V Prílohe môže čitateľ nájsť rôzne iné typy výnosových kriviek než na Obrázku 3.4, ktoré tento model poskytuje. Medzi nimi sa vyskytuje napríklad invertovaná „humped“ krivka, ktorá je pre nízke časy do maturity klesajúca a pre vyššie klesajúca. Takýto typ krivky neposkytuje ani jeden zo zvažovaných jednofaktorových modelov.

3.4. SPRIEMERNENIE VÝNOSOVÝCH KRIVIEK. PRIAME SPRIEMERNENIE.



Obrázok 3.3: Znázorňuje spriemernenú cenu dlhopisov $\bar{P}(\tau, r)$ (červená krivka), 90-percentný pravdepodobnostný interval (ružová krivka) a niektoré možné priebehy cien dlhopisov (čierne krivky).

3.4 Spriemernenie výnosových kriviek. Priame spriemernenie.

V predchádzajúcom postupe sme prístup spriemernovania použili na nájdenie podmienenej strednej hodnoty pre cenu diskontného dlhopisu. Rovnako by sme však mohli spriemerňovať aj term structure $\bar{R}(\tau, r)$. Vychádzajme zo vzťahu

$$P(\tau, r_1, r_2) = A_1(\tau)A_2(\tau)e^{-B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2}.$$

Potom pre $R(\tau, r_1, r_2)$ platí

$$R(\tau, r_1, r_2) = -\frac{\ln A_1}{\tau} - \frac{\ln A_2}{\tau} + \frac{B_1}{\tau}r_1 + \frac{B_2}{\tau}r_2. \quad (3.17)$$

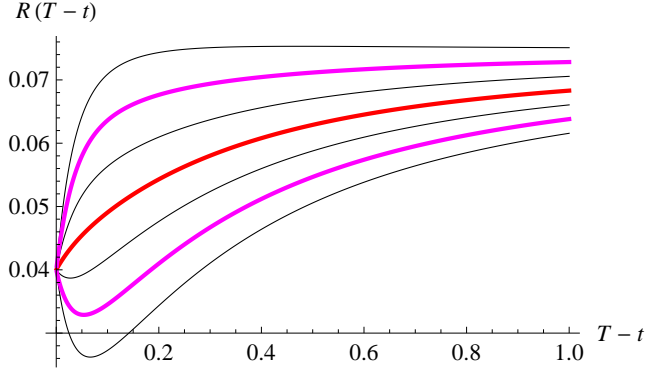
Pomocou tohto vzťahu si vyjadríme tvar pre spriemernenú úrokovú mieru

$$\bar{R}(\tau, r) = -\frac{\ln A_1}{\tau} - \frac{\ln A_2}{\tau} + \frac{B_2}{\tau}r + \left(\frac{B_1}{\tau} - \frac{B_2}{\tau}\right)\bar{r}_1, \quad (3.18)$$

kde spriemernenú strednú hodnotu vieme vyjadriť ako

$$\bar{r}_1(r) = \frac{1}{K} \int_0^\infty r_1 f(r_1) g(r - r_1) dr_1, \quad (3.19)$$

3.4. SPRIEMERNENIE VÝNOSOVÝCH KRIVIEK. PRIAME SPRIEMERNENIE.



Obrázok 3.4: Znázorňuje výnosovú krivku $R(\tau, r)$ pre spriemernené ceny dlhopisu $\bar{P}(\tau, r)$ (červená krivka); 90-percentný pravdepodobnostný interval pre $\bar{P}(\tau, r)$ a ďalšie možné priebehy výnosových kriviek (čierne krivky).

v značení $f(z) = \frac{a^b}{\Gamma(b)} e^{-az} z^{b-1}$ a $g(z) = \sqrt{\frac{\kappa_2}{\pi\sigma_2}} e^{-\frac{\kappa_2(z-\theta_2)}{\sigma_2}}$, a kde

$$K = \int_0^\infty f(s)g(r-s)ds.$$

Využitím vzťahu (3.11) môžeme vyjadrenie \bar{r}_1 prepísať do tvaru:

$$\bar{r}_1(r) = \frac{H(\infty, \frac{r-\theta_2}{\nu} + \frac{a\nu}{2}, b+1)}{H(\infty, \frac{r-\theta_2}{\nu} + \frac{a\nu}{2}, b)}. \quad (3.20)$$

V častiach (3.3) a (3.4) sme použili dva rôzne prístupy spriemerovania, jedným sme rátali spriemernenú cenu dlhopisu $\bar{P}(\tau, r)$ a na jej základe dorátali výnosovú krivku $R(\tau, r)$, druhým sme priamo spriemerovali výnosové krivky, získali sme $\bar{R}(\tau, r)$. Vzťah medzi $R(\tau, r)$ a $\bar{R}(\tau, r)$ získanými týmito dvoma spôsobmi dokážeme určiť pomocou Jensenovej nerovnosti.

Veta 3.4.1 (Jensenova nerovnosť) [21]

Nech φ je reálna funkcia, konvexná na uzavretom intervale $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, $(\forall i \in \hat{n})(x_i \in [a, b])$. Potom

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i), \quad (3.21)$$

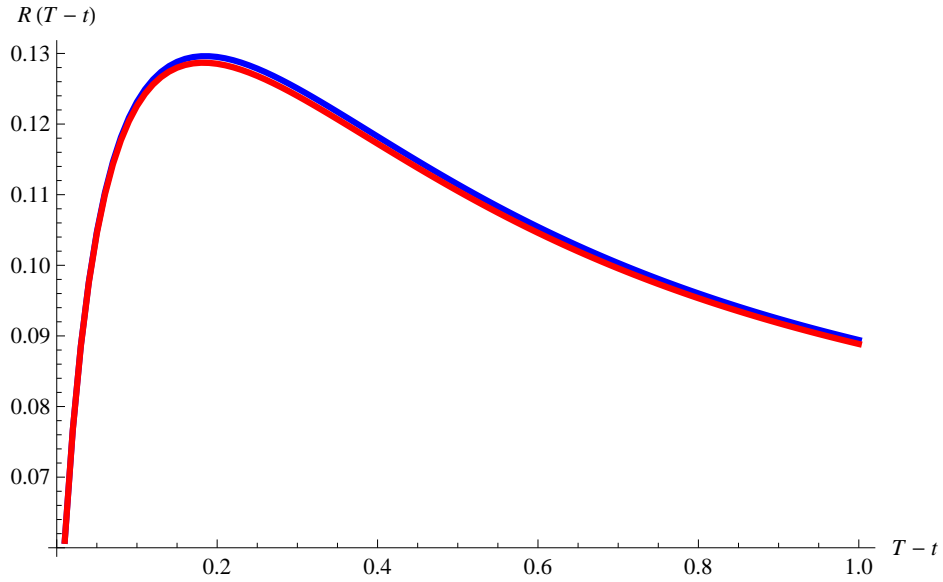
kde pre $\forall i \in \hat{n}$ $\lambda_i \in [0, 1]$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Na základe tejto nerovnosti platí pre strednú hodnotu náhodnej premennej P vzťah $E(\phi(P)) \geq \phi(E(P))$, ak $\phi(x)$ je konvexná funkcia. O vzťahu spriemernej výnosovej krivky $\bar{R}(\tau, r)$ a výnosovej krivky získanej spriemernením cien dlhopisov $\bar{P}(\tau, r)$ vieme aplikovaním tohto vzťahu povedať, že $\bar{R}(\tau, r)$ bude pre tie isté vstupné parametre vždy ležať nad $\bar{P}(\tau, r)$, v extrémnom prípade ju prekryje. V tomto prípade bude $\phi(P) = \frac{-\ln(P)}{\tau}$, kde $\frac{-\ln(P)}{\tau}$ je konvexná funkcia. Na základe empirických pozorovaní sú však tieto rozdiely minimálne, je to spôsobené tým, že v okolí $P = 1$, kde sa vyskytujú vyrátané ceny dlhopisov pre malé hodnoty τ , môžeme aproximovať $\ln P$ Taylorovým rozvojom prvého rádu $\ln P \doteq P - 1$. Blízkosť funkcie ϕ k lineárnej funkcii pre $P \doteq 1$ spôsobí malé rozdiely medzi krivkami. S narastajúcim časom do splatnosti zase rozdiely znižuje rastúce τ .

3.5 Grafický dôkaz spriemerňovania

Z teoretického pohľadu sme si vymedzili krivky, ktorých spriemernením je naša výnosová krivka. Na potvrdenie výsledku získaného spriemerňovaním by sme potrebovali generovať skutočné realizácie z podmieneného rozdelenia $\tilde{h}(r_1, r_2 | r_1 + r_2 = r)$. Na to potrebujeme náhodný výber z hustoty $\tilde{h}(r_1, r_2 | r_1 + r_2 = r)$. Stačí nám uvažovať podmienenú hustotu jedného parametra, keďže hodnoty druhého parametra sú určené vzťahom $r_1 + r_2 = r$. Uveďme si však tvary oboch podmienených hustôt $\tilde{f}(r_1 | r_1 + r_2 = r)$ a $\tilde{g}(r_2 | r_1 + r_2 = r)$. Hustota $\tilde{f}(r_1 | r_1 + r_2 = r)$ má tvar:

$$\tilde{f}(r_1 | r_1 + r_2 = r) = \begin{cases} \frac{f(r_1)g(r-r_1)}{\int_0^\infty f(s)g(r-s)ds} & \text{pre } r_1 > 0, \\ 0 & \text{pre } r_1 \leq 0. \end{cases} \quad (3.22)$$



Obrázok 3.5: Porovnanie výnosových kriviek $R(\tau, r)$ získaných spriemerňovaním ceny dlhopisu $\bar{P}(\tau, r)$ (červená krivka) a spriemernením samotných kriviek $\bar{R}(\tau, r)$ (modrá krivka) pri rovnakých vstupných parametroch.

Hustota $\tilde{g}(r_2|r_1 + r_2 = r)$ má tvar:

$$\tilde{g}(r_2|r_1 + r_2 = r) = \begin{cases} \frac{f(r-r_2)g(r_2)}{\int_{-\infty}^r f(r-s)g(s)ds} & \text{pre } r_2 \in (-\infty, r), \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Vzorec (3.22) sme dostali ako „vedľajší produkt“ pri spriemerňovaní cien dlhopisu, preto sa ním podrobnejšie zaoberať nebudeme. Ukážeme si, ako sme podobným postupom odvodili vzorec (3.23). Pre potreby tohto odvodu musíme rozlišovať medzi náhodnými premennými R_1, R_2 a realizáciami r_1, r_2 . Po odvodení vzorca (3.23) od tohto značenia upustíme. Nech R_1, R_2 a $R_1 + R_2$ sú náhodné premenné, označme $R_1 + R_2 = Z$. Nech $d(r_2, z)$ je funkcia hustoty vektora (R_2, Z) a $p(z)$ hustota náhodnej premennej Z . Hustotu Z dostaneme ako konvolúciu R_1, R_2 ; môžeme použiť tvar z menovateľa vo vzorci (3.22), alebo jeho alternatívny tvar:

$$\int_{-\infty}^z f(z-s)g(s)ds \quad \text{pre } s \in (-\infty, z). \quad (3.24)$$

Potom pre podmienenú hustotu $\tilde{g}(r_2|Z = r)$ platí:

$$\tilde{g}(r_2|Z = r) = \frac{d(r_2, r)}{p(r)} = \frac{f(r - r_2)g(r_2)}{\int_{-\infty}^r f(r - s)g(s)ds} \text{ pre } r_2 < r. \quad (3.25)$$

Tvar hustoty $d(r_2, r)$ sme dostali taktiež zo vzorca pre podmienenú pravdepodobnosť, využili sme, že $d(r_2, r) = g(r_2)q(r|R_2 = r_2)$, kde $q(r|R_2 = r_2)$ je podmienená hustota súčtu $R_1 + R_2 = r$ za podmienky $R_2 = x$. Súčet $R_1 + R_2 = r$, ak $R_2 = r_2$ a zároveň $R_1 = r - r_2$. Vychádzajúc z toho, že R_1 má hustotu $f(r_1)$, bude $d(r_2, r) = g(r_2)f(r - r_2)$. V tomto momente treba zobrať do úvahy aj definičné obory hustôt $f(r_1), f(r_2)$ - určia podmienku $r_2 < r$, keďže definičný obor $f(r_1)$ je $r_1 \in (0, \infty)$.

Určením podmienených hustôt sme úlohu pretransformovali na generovanie z jednorozmernej hustoty. Keďže to nie je štandardne používaná funkcia hustoty, nie je pre ňu v matematických softvéroch zabudovaná funkcia na generovanie náhodných čísel. Medzi známe metódy generovania z menej známich hustôt patria napríklad Markov-Chain Monte Carlo metódy - Metropolis-Hastings algoritmus, či Gibbsov algoritmus, ktoré sú výhodné na generovanie viacrozmerých výberov. Jednorozmerné výbery sa generujú napríklad metódou Inverse transformation [4] alebo metódou Acceptance-Rejection [4]. My sme si zvolili metódu Acceptance rejection.

Veta 3.5.1 von Neumann 1951 [4] *Nech $\{\xi(z), a \leq z \leq b\}$ označuje hustotu náhodnej premennej, ktorá má rozklad*

$$\xi(z) = c\eta(z)\nu(z),$$

kde

$$\begin{aligned} \nu(z) &\geq 0, \int_a^b \nu(z)dz = 1, \\ c &= \sup_z [\xi(z)/\nu(z)], \\ &a \\ a &\leq \eta(z) \leq b. \end{aligned}$$

Nech Z je náhodná premenná s hustotou $\nu(z)$ a R nech je z rovnomerného rozdelenia $\mathcal{U}(0, 1)$. Potom ak $R \leq \eta(Z)$, tak Z má rozdelenie $\xi(z)$.

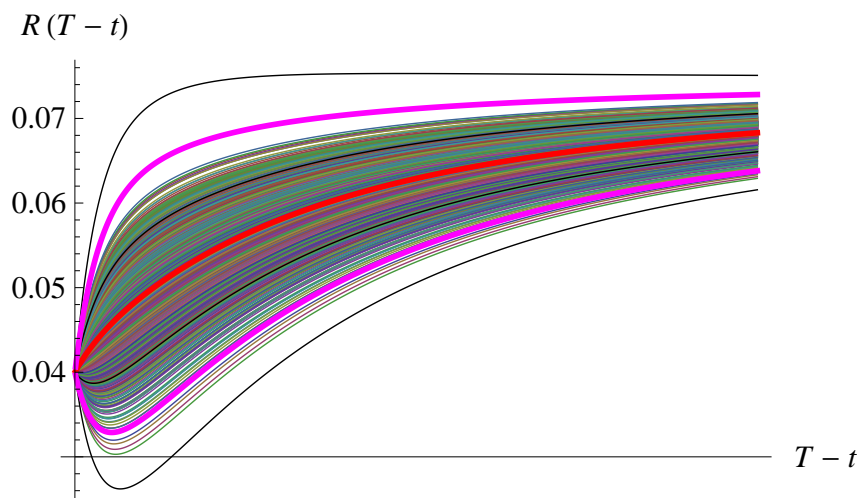
3.5. GRAFICKÝ DŮKAZ SPRIEMERŇOVANIA

Aplikované na náš prípad môžeme označiť hustotu (3.22) ako $\xi(z)$ v tvare $\xi(z) = c\tilde{f}(z)\tilde{g}(r-z)$, pričom $c = \frac{k}{\int_0^\infty f(z)g(r-z)dz}$, kde k je konštanta. Potom

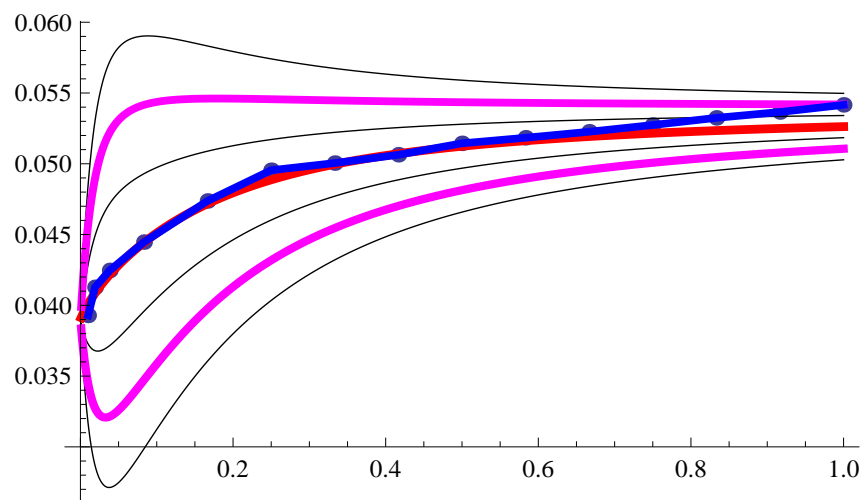
$$\tilde{g}(z) = e^{-\frac{\kappa_2(r-z-\theta_2)^2}{\sigma_2^2}},$$

$$\tilde{f}(z) = \frac{a^b}{\Gamma(b)}e^{-az}r^{b-1}.$$

Skutočné realizácie vidíme v porovnaní s teoretickými hodnotami na Obrázku (3.6). Vidno, že nedosahujú horné pravdepodobnostné intervaly - je to spôsobené tým, že pravdepodobnostné intervaly boli robené všeobecne na základe Čebyševovej nerovnosti, bez ohľadu na hustotu rozdelenia. Tiež hustota, z ktorej generujeme nie je symetricky rozdelená okolo strednej hodnoty, čo vidíme aj na Obrázku (3.6).



Obrázok 3.6: Teoretická priemerná krivka $\bar{R}(\tau, r)$ (červená krivka) a 90 - percentné (ružové krivky), 95 - percentných, resp 45 - percentné pravdepodobnostné intervaly (čierne krivky) v porovnaní s skutočnými realizáciami z rozdelenia $\tilde{h}(r_1, r_2|r_1 + r_2 = r)$.



Obrázok 3.7: Reálne hodnoty LIBOR z 1.7.2008 v porovnaní so priemernou výnosovou krivkou.

Kapitola 4

Vlastnosti spriemernenia

Spriemernenie cien dlhopisov je pomerne zložitý postup, preto sa pozrime na benefity spriemerovania. Krivky získané spriemerovaním dokazujú v niektorých prípadoch variabilitu, ktorú ponúkajú dvojfaktorové modely oproti jednofaktorovým. Stehlíková ukázala neexistenciu jednofaktorového modelu v tvare $dr = \mu(r)dt + \sigma(r)dW$, ktorý by dával spriemernenú cenu dlhopisu pre dvojfaktorový Vašíčkov model [17] a za splnenia predpokladu, že jednofaktorový model nenadobúda záporné hodnoty aj dvojfaktorový CIR model [16] a Fong-Vašíčkov model [17]. Ďalej dokázala pre Fong-Vašíčkov model [15], že za istých podmienok sa variabilita kriviek poskytnutých jednou štartovacou hodnotou úrokovej miery r stráca a celá škála kriviek konverguje k nešpecifikovanému jednofaktorovému modelu, teda k jednej krivke určenej počiatočnou hodnotou short rate r . Tento dôkaz bol založený na tzv. fast mean reverting volatility, teda rýchlej časovej škále pre volatilitu, ktorá je podľa [18] empiricky potvrdená pre viaceré finančné trhy.

4.1 Fast mean reversion

Spomínaný Fong-Vašíčkov model s rýchlou škálou bol uvažovaný v tvare:

$$dr = \kappa_1(\theta_1 - r)dt + \sqrt{y}dW_1,$$

$$dy = \frac{\tilde{\kappa}_2}{\epsilon}(\theta_2 - y)dt + \frac{\tilde{\nu}}{\sqrt{\epsilon}}\sqrt{y}dW_2.$$

Fast mean reverting volatility zodpovedá malým hodnotám ϵ a limite $\epsilon \rightarrow 0$. Druhú rovnicu môžno prepísať v tvare:

$$dy = \kappa_2(\theta_2 - y)dt + \nu\sqrt{y}dW_2,$$

kde $\kappa_2 = \frac{\tilde{\kappa}_2}{\epsilon}$ a $\nu = \frac{\tilde{\nu}}{\epsilon}$, potom rýchla časová škála zodpovedá $\nu \rightarrow \infty$ pričom je zachovaný konštantný pomer $k = \frac{\kappa_2}{\nu^2}$. Myšlienka dôkazu bola založená na vyjadrení rozdielu medzi výnosovými krivkami pre dve ľubovoľné rôzne počiatkové hodnoty volatility $y - y_1$ a y_2 . Pre tento rozdiel bolo následne dokázané, že pre $\nu \rightarrow \infty$ sa rozdiel medzi výnosovými krivkami $R(\tau, r, y_1, \nu)$ a $R(\tau, r, y_2, \nu)$ blíži k nule.

Na vlastnosť fast mean reversion by sme sa chceli pozrieť aj v prípade nášho modelu. Budeme teda skúmať existenciu limitného jednofaktorového modelu, v zmysle konverencie celej škály kriviek generovaných počiatkovou hodnotou r k jednej krivke, ak je jeden z procesov modelujúcich dvojfaktorový CIR-Vašíčkov model typu fast mean reverting. Konkrétne skúmame túto vlastnosť pre Vašíčkov proces. Model uvažujeme v tvare:

$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_2, \\ dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1\sqrt{r}dW_1, \\ dr_2 &= \frac{\tilde{\kappa}_2}{\epsilon}(\theta_2 - r_2)dt + \frac{\tilde{\sigma}_2}{\sqrt{\epsilon}}dW_2, \end{aligned}$$

Pozrime sa bližšie, čo sa stane so priemernou cenou dlhopisu $\bar{P}(\tau, r)$, ak pošleme $\epsilon \rightarrow 0$.

Pre B_2 zo vzťahu $P = A_1A_2e^{-B_1r_1 - B_2r_2}$ platí

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} B_2(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\tilde{\kappa}_2} \left(1 - e^{-\frac{\tilde{\kappa}_2}{\epsilon}\tau}\right) = 0, \quad (4.1)$$

a pre A_2 platí

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_{inf} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta_2 - \frac{\lambda_2 \sigma_2 \sqrt{\epsilon}}{\kappa_2} - \frac{\sigma_2^2 \epsilon}{2\kappa_2^2} = \theta_2, \quad (4.2)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_2(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp \left[\{B_2(\tau) - \tau\} R_{inf} - \frac{\tilde{\sigma}_2^2 \epsilon}{4\tilde{\kappa}_2} B_2(\tau)^2 \right] = e^{-\theta_2 \tau}. \quad (4.3)$$

Na základe predchádzajúcich zistení o veľmi malých rozdieloch medzi spriemernenou výnosovou krivkou $\bar{R}(\tau, r)$ a výnosovou krivkou $R(\tau, r)$ získanou spriemernením cien dlhopisov $\bar{P}(\tau, r)$ použijeme rovno vzťah pre spriemernenú výnosovú krivku a dosadíme do neho $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} B_2(\tau)$ a $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_2(\tau)$.

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \bar{R}_\epsilon(\tau, r) &= \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} -\frac{\ln A_1}{\tau} - \frac{\ln A_2}{\tau} + \frac{B_2}{\tau} r \\ &+ \left(\frac{B_1}{\tau} - \frac{B_2}{\tau} \right) \frac{H(\infty, \frac{r-\theta_2}{\nu} + \frac{a\nu}{2}, b+1)}{H(\infty, \frac{r-\theta_2}{\nu} + \frac{a\nu}{2}, b)} = \\ &-\frac{\ln A_1}{\tau} + \theta_2 + \frac{B_1}{\tau} \frac{H(\infty, \frac{r-\theta_2}{\nu} + \frac{a\nu}{2}, b+1)}{H(\infty, \frac{r-\theta_2}{\nu} + \frac{a\nu}{2}, b)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Čo sa týka limity spriemernených kriviek $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{R}_\epsilon(\tau, r)$, ktorú sme si už odvodili, pre cenu dlhopisu na základe odvodenia platí:

$$P_\epsilon(\tau, r) = A_1(\tau) \exp \left[-\theta_2 \tau - B_1 \frac{H(\infty, \frac{r-\theta_2}{\nu} + \frac{a\nu}{2}, b+1)}{H(\infty, \frac{r-\theta_2}{\nu} + \frac{a\nu}{2}, b)} \right],$$

teda zjednodušene P_ϵ môžeme zapísať v tvare:

$$P_\epsilon(\tau, r) = C(\tau) e^{-B_1(\tau)D(r)} \quad (4.5)$$

Predpokladáme, že pre tento tvar by sa postupom podobným postupu v [16] dalo dokázať, že neexistuje jednofaktorový model v tvare $dr = \mu(r)dt + \sigma(r)dW$, ktorý by dával rovnakú cenu dlhopisu, ako limitný tvar $P_\epsilon(\tau, r)$. Rovnako by sme toto tvrdenie mohli skúmať pre samotnú spriemernenú cenu dlhopisu, bez prítomnosti rýchlej škály.

Ak zohľadníme, že $A_2 = A_2(\epsilon)$ a $B_2 = B_2(\epsilon)$, môžeme $R(\tau, r_1, r - r_1)$ označiť ako $R_\epsilon(\tau, r_1, r - r_1)$. Pozrime sa teraz na $R_\epsilon(\tau, r_1, r - r_1)$ a $R_\epsilon(\tau, \tilde{r}_1, r - \tilde{r}_1)$ pre dve ľubovoľné

rôzne kombinácie $r = r_1 + r_2$ a $r = \tilde{r}_1 + \tilde{r}_2$. Pre $R(\tau, r_1, r - r_1)$ a $R(\tau, \tilde{r}_1, r - \tilde{r}_1)$ platí:

$$\begin{aligned} R_\epsilon(\tau, r_1, r - r_1) - R_\epsilon(\tau, \tilde{r}_1, r - \tilde{r}_1) &= -\frac{\ln A_1}{\tau} - \frac{\ln A_2(\epsilon)}{\tau} + \frac{B_1}{\tau}r_1 + \frac{B_2(\epsilon)}{\tau}r_2 + \frac{\ln A_1}{\tau} \\ &+ \frac{\ln A_2(\epsilon)}{\tau} - \frac{B_1}{\tau}\tilde{r}_1 - \frac{B_2(\epsilon)}{\tau}\tilde{r}_2 = \frac{B_1r_1}{\tau} - \frac{B_1\tilde{r}_1}{\tau} \\ &+ \frac{B_2(\epsilon)r_2}{\tau} - \frac{B_2(\epsilon)\tilde{r}_2}{\tau}. \end{aligned}$$

Pre $\epsilon \rightarrow 0$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} R_\epsilon(\tau, r_1, r - r_1) - R_\epsilon(\tau, \tilde{r}_1, r - \tilde{r}_1) = \frac{B_1r_1}{\tau} - \frac{B_1\tilde{r}_1}{\tau}. \quad (4.6)$$

Vidíme, že rozdiel medzi výnosovými krivkami sa pre $\epsilon \rightarrow 0$ neblíži k nule, teda neexistuje limitná krivka, ku ktorej by sa krivky generované rovnakou počiatočnou hodnotou r blížili, ak uvažujeme faktor sledujúci Vašíčkov proces v rýchlej škále. Tento výsledok nám poskytuje ešte ďalší poznatok, a to že, pre $\epsilon \rightarrow 0$ je $R_\epsilon(\tau, r_1, r - r_1)$ rastúcou funkciou r_1 .

V predchádzajúcom postupe sme sledovali rýchlu škálu pre Vašíčkov proces. Rovnako môžeme uvažovať faktor sledujúci CIR proces v rýchlej škále:

$$\begin{aligned} r &= r_1 + r_2, \\ dr_1 &= \frac{\tilde{\kappa}_1}{\epsilon}(\theta_1 - r_1)dt + \frac{\tilde{\sigma}_1\sqrt{r}}{\sqrt{\epsilon}}dW_1, \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2dW_2. \end{aligned}$$

Limitné tvary $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} B_1(\tau)$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_1(\tau)$ vieme určiť:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} B_1(\tau) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2(e^{\gamma_\epsilon \tau} - 1)}{\left(\frac{\tilde{\kappa}_1}{\epsilon} + \lambda_1 + \gamma_\epsilon\right)(e^{\gamma_\epsilon \tau} - 1) + 2\gamma_\epsilon} = 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_1(\tau) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{2\gamma_\epsilon e^{(\frac{\tilde{\kappa}_1}{\epsilon} + \lambda_1 + \gamma_\epsilon)\tau/2}}{\left(\frac{\tilde{\kappa}_1}{\epsilon} + \lambda_1 + \gamma_\epsilon\right)(e^{\gamma_\epsilon \tau} - 1) + 2\gamma_\epsilon} \right]^{\frac{2\tilde{\kappa}_1\theta_1}{\tilde{\sigma}_1^2}} = e^{-\tau\theta_1}. \end{aligned}$$

kde

$$\gamma_\epsilon = \sqrt{\left(\frac{\tilde{\kappa}_1}{\epsilon} + \lambda\right)^2 + \frac{2\tilde{\sigma}_1^2}{\epsilon}}.$$

Kapitola 5

Metódy určovania vstupných parametrov

Existuje množstvo metód kalibrácie short-rate modelov. V práci [3] bola použitá minimalizácia účelovej funkcie, ktorá imituje metódu najmenších štvorcov a využíva priemernú výnosovú krivku. Všeobecne sa pri kalibrácii využívajú rôzne metódy napríklad Kalmanov filter v spojení s Quasi-Maximum Likelihood metódou alebo Markov Chain Monte Carlo.

Predmetom tejto kapitoly navrhnuť algoritmus na získanie optimálnych vstupných parametrov pre dvojfaktorový Vašíček-CIR model.

5.1 Metóda s nesymetrickým intervalom

Nech $r, \theta_1, \theta_2, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2$ sú pevne dané. Jediným pohyblivým parametrom ostáva r_1 , resp. r_2 , keďže druhý z dvojice parametrov je určený vzťahom $r_1 + r_2 = r$. Vyberme si za sledovaný parameter parameter r_1 . Rozdelenie hustoty tohto parametra, za predpokladu, že r je dané má tvar:

$$\tilde{h}(r - r_1, r) = \frac{f(r - r_1)g(r_1)}{K} \quad \text{pre } r_1 \in (0, \infty),$$

kde $K = \int_0^\infty f(r - s)g(s)ds$. Zo známeho podmieneného rozdelenia r_1 (3.21) vieme pre ľubovoľné $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ určiť $P(\bar{r}_1 - \delta_1 \leq r_1 \leq \bar{r}_1 + \delta_2)$. Vhodnou voľbou $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$

k predpísanej hladine spoľahlivosti α nájdeme interval $\langle \bar{r}_1 - \delta_1, \bar{r}_1 + \delta_2 \rangle$ tak, že

$$P(\bar{r}_1 - \delta_1 \leq r_1 \leq \bar{r}_1 + \delta_2) = 1 - \alpha.$$

Ľahko vidno, že takto dostávame $(1 - \alpha)100\%$ interval spoľahlivosti nielen pre r_1 , ale aj pre výnosové krivky generované hodnotami r_1 a pevne stanovenými parametrami $r, \theta_1, \theta_2, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2$. Naozaj,

$$\begin{aligned} P(R(\tau, \bar{r}_1 - \delta_1, r - \bar{r}_1 + \delta_1) \leq R(\tau, r_1, r - r_1) \leq R(\tau, \bar{r}_1 + \delta_2, r - \bar{r}_1 - \delta_2)) \\ = P(\bar{r}_1 - \delta_1 \leq r_1 \leq \bar{r}_1 + \delta_2) = 1 - \alpha, \end{aligned}$$

kde sme využili monotónnosťou funkcie $R(\tau, r_1, r - r_1)$ v parametri r_1 . V ďalšom budeme potrebovať poznať aj typ monotónnosti tejto funkcie, t.j. kedy je rastúca, resp. klesajúca. Pre výnosovú krivku

$$R(\tau, r_1, r - r_1) = -\frac{\ln A_1(\tau)}{\tau} - \frac{\ln A_2(\tau)}{\tau} + \frac{B_2(\tau)}{\tau}r + \frac{(B_1(\tau) - B_2(\tau))}{\tau}r_1$$

bude $R(\tau, r_1, r - r_1)$ monotónne rastúca funkcia r_1 , ak $B_2(\tau) < B_1(\tau)$ a monotónne klesajúca funkcia r_1 , ak $B_2(\tau) > B_1(\tau)$. Z analýzy funkcií $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$ vyplýva, že sú obe rastúce, konkávne, s hodnotou $B_1(0) = B_2(0) = 0$ a limitami $\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_1(\tau) = \frac{2}{\gamma + \kappa_1 + \lambda_1}$ a $\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_2(\tau) = \frac{1}{\kappa_2}$. V takomto prípade sa funkcie pretnú maximálne v jednom bode, kedy sa jeden typ monotónnosti mení na druhý. Zvoľme parametre $\kappa_2, \kappa_1, \lambda_1, \sigma_1$ tak, aby

$$\kappa_2 - \gamma > \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{\kappa_1 + \lambda_1}{2\gamma} \right). \quad (5.1)$$

Za tohto predpokladu bude $B_2(\tau) < B_1(\tau)$ pre $\forall \tau > 0$ a $R(\tau, r_1, r - r_1)$ monotónne rastúca funkcia r_1 . V ďalšom predpokladáme, že parametre spĺňajú podmienku (5.1), čo zaručí, že $R(\tau, r_1, r - r_1)$ bude monotónne rastúca funkcia parametra r_1 .

Po ozrejmění vzťahov a stanovení typu monotónnosti funkcie $R(\tau, r_1, r - r_1)$ v r_1 prejdeme k samotnému algoritmu na určenie optimálnych vstupných parametrov. Tieto parametre budú závisieť od hodnôt reálnej výnosovej krivky R^{Real} , ktorej diskkrétne hodnoty R_i^{Real} sú udávané v časoch τ_i pre $i = 1, 2, \dots, n$. Postup definujeme v dvoch

krokoch.

V prvom kroku vyčleníme pomocou kriviek $R(\tau, r_1, r - r_1)$ oblasť, v ktorej sa budú nachádzať hodnoty R^{Real} , označme si ich $R(\tau, r_1^d, r - r_1^d)$ a $R(\tau, r_1^h, r - r_1^h)$. Budeme sa snažiť určiť „minimálnu“ oblasť, ktorá ešte bude obsahovať hodnoty R^{Real} . Toto môžeme premietnuť do priestoru parametra r_1 tak, že vyberáme z r_1^d, r_1^h s vlastnosťou $(1 - \alpha(r_1^d, r_1^h))$ tak, že:

$$r_1^{d*}, r_1^{h*} = \arg \min_{r_1^d, r_1^h} \int_{r_1^d}^{r_1^h} \frac{f(r - r_1)g(r_1)}{K} dr_1,$$

za podmienky

$$R(\tau_i, r_1^d, r - r_1^d) \leq R^{Real}(\tau_i) \leq R(\tau_i, r_1^h, r - r_1^h)$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$.

čo je ekvivalentné hľadaniu argumentu maxima $\arg \max_{r_1^d, r_1^h} \alpha(r_1^d, r_1^h)$ za danej podmienky. Jednoduchý spôsob riešenia tejto úlohy si teraz uvedieme. Využijúc vyššie predpokladanú rastúcosť funkcie $R(\tau, r_1, r - r_1)$ v r_1 a spojitosť rozdelenia r_1 a tým pádom aj rozdelenia $R(\tau, r_1, r - r_1)$ v τ , môžeme potvrdiť, že hranice oblasti budú tvoriť práva dve krivky (vyplýva z monotónnosti). Zo spojitosti rozdelenia zase vyplýva, že každá hraničná krivka bude prechádzať niektorou z hodnôt výnosovej krivky R_i^{Real} . Potom zvolíme za r_1^{d*} a r_1^{h*} :

$$r_1^{d*} = \min_i \{r_i; R(\tau_i, r, r_1^i) = R_i^{Real}\},$$

$$r_1^{h*} = \max_i \{r_i; R(\tau_i, r, r_1^i) = R_i^{Real}\},$$

čo je možné vďaka nami vopred určenej rastúcosťi funkcie $R(\tau, r_1, r - r_1)$ v r_1 . Konkrétnu hodnotu r_1^i pre krivku určenú dvojicou $\{R_i^{Real}, \tau_i\}$ vyrátame na základe vzťahu (3.15) prepisom do tvaru:

$$r_1^i = \frac{R_i \tau_i}{B_1(\tau_i) - B_2(\tau_i)} + \frac{\ln A_1(\tau_i)}{B_1(\tau_i) - B_2(\tau_i)} + \frac{\ln A_2(\tau_i)}{B_1(\tau_i) - B_2(\tau_i)} - \frac{B_2(\tau_i)r}{B_1(\tau_i) - B_2(\tau_i)}.$$

V ďalšom kroku budeme maximalizovať $\alpha(r_1^{d*}, r_1^{h*})$ cez všetky hodnoty parametrov $r, \theta_1, \theta_2, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2$. Pri niektorých voľbách parametrov $r, \theta_1, \theta_2, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2,$

λ_1, λ_2 však nemusíme dostať interval $\langle r_1^{d*}, r_1^{h*} \rangle$, okolo strednej hodnoty \bar{r}_1 . Bolo by vhodné, aby \bar{r}_1 bolo z intervalu $\langle r_1^{d*}, r_1^{h*} \rangle$, preto dáme požiadavku, aby r_1^{d*}, r_1^{h*} spĺňali túto podmienku. Ďalej musia spĺňať $r_1^{d*} > 0, r_1^{h*} > 0$, čo sa dá zredukovať na podmienku $r_1^{d*} > 0$. Opačný prípad, teda $r_1^{d*} < 0$, by znamenal, že k niektorej z dvojíc $\{R_i^{Real}, \tau_i\}$ pri konkrétnych pevne stanovených vstupných parametroch nevieme nájsť r_1^i z definičného oboru podmienenej hustoty r_1 , a teda tieto parametre neboli dobre zvolené. Na základe predchádzajúcich záverov a podmienok sformulujeme úlohu:

$$\begin{aligned} \min_{r, \theta_1, \theta_2, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2} \int_{r_1^{d*}}^{r_1^{h*}} \frac{f(r - r_1)g(r_1)}{K} dr_1, \\ r_1^{d*} = \min_i \{r_i; R(\tau_i, r, r_1^i) = R_i^{Real}\}, \\ r_1^{h*} = \max_i \{r_i; R(\tau_i, r, r_1^i) = R_i^{Real}\}, \\ r_1^{d*} > 0, \\ \bar{r}_1 \in \langle r_1^{d*}, r_1^{h*} \rangle. \end{aligned}$$

Zvolenie minimalizácie cez všetky parametre $r, \theta_1, \theta_2, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2$ ako nástroja na nájdenie optimálneho riešenia má za cieľ minimalizovať vzdialenosť medzi r_1^{d*} a r_1^{h*} . Predpokladáme, že takýmto spôsobom sa nám podarí odstrániť prílišnú variabilitu kriviek $R(\tau, r_1^{d*}, r - r_1^{d*})$ a $R(\tau, r_1^{h*}, r - r_1^{h*})$ a nájsť vstupné parametre, pre ktoré budú $R(\tau, r_1^{d*}, r - r_1^{d*})$ a $R(\tau, r_1^{h*}, r - r_1^{h*})$ najlepšie popisovať vývoj R^{Real} .

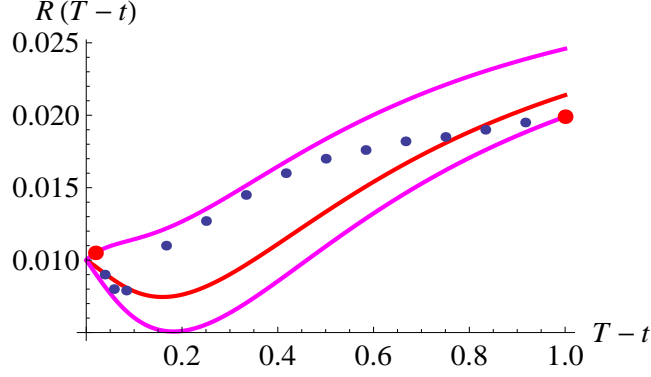
5.2 Metóda so symetrickým intervalom

Ukážeme si teraz trochu modifikovaný prístup k hľadaniu optimálnych $r, \theta_1, \theta_2, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2$. Pripomeňme si z predchádzajúceho algoritmu, že vhodnou voľbou $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ k predpísanej hladine spoľahlivosti α nájdeme interval $\langle \bar{r}_1 - \delta_1, \bar{r}_1 + \delta_2 \rangle$ tak, že

$$P(\bar{r}_1 - \delta_1 \leq r_1 \leq \bar{r}_1 + \delta_2) = 1 - \alpha.$$

Nech $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, teda interval bude symetrický okolo strednej hodnoty \bar{r}_1 . Potom môžeme tvrdiť, že pre konkrétne α existuje jediné $\delta(\alpha)$ také, že

$$P(\bar{r}_1 - \delta(\alpha) \leq r_1 \leq \bar{r}_1 + \delta(\alpha)) = 1 - \alpha.$$



Obrázok 5.1: Hraničné krivky pri metóde s nesymetrickým intervalom (ružové krivky). Na ilustráciu je znázornená aj priemerná výnosová krivka (červená krivka). Vidíme, že hraničné krivky prechádzajú hodnotami reálnej úrokovej miery R_i^{Real} .

Postup algoritmu bude podobný predchádzajúcemu postupu, znovu určený v dvoch krokoch. V prvom kroku budeme maximalizovať:

$$\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha \in (0,1)} 1 - \int_{\bar{r}_1 - \delta(\alpha)}^{\bar{r}_1 + \delta(\alpha)} \frac{f(r - r_1)g(r_1)}{K} dr_1,$$

za podmienky

$$R(\tau_i, \bar{r}_1 - \delta(\alpha), r - \bar{r}_1 + \delta(\alpha)) \leq R^{Real}(\tau_i) \leq R(\tau_i, \bar{r}_1 + \delta(\alpha), r - \bar{r}_1 - \delta(\alpha))$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$.

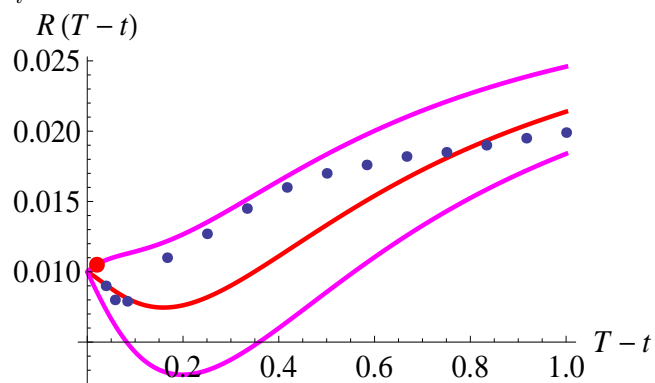
V druhom kroku maximalizujeme $\hat{\alpha}(r, \theta_1, \theta_2, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2)$ cez prípustné hodnoty parametrov $r, \theta_1, \theta_2, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2$. Konečný tvar úlohy je:

$$\begin{aligned} \max_{r, \theta_1, \theta_2, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2} \hat{\alpha} = \\ = \max_{r, \theta_1, \theta_2, \kappa_1, \kappa_2, \sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \lambda_2} \arg \max_{\alpha \in (0,1)} 1 - \int_{\bar{r}_1 - \delta(\alpha)}^{\bar{r}_1 + \delta(\alpha)} \frac{f(r - r_1)g(r_1)}{K} dr_1, \\ R(\tau_i, \bar{r}_1 - \delta(\alpha), r - \bar{r}_1 + \delta(\alpha)) \leq R^{Real}(\tau_i) \leq R(\tau_i, \bar{r}_1 + \delta(\alpha), r - \bar{r}_1 - \delta(\alpha)) \end{aligned}$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$.

Výhody tohto prístupu spočívajú v jednoduchšej formulácii úlohy; zaniká však možnosť asymetrických intervalov okolo \bar{r}_1 .

Obrázok 5.2: Hraničné krivky získané metódou s nesymetrickým intervalom. Narozdiel od metódy so symetrickým intervalom, pri tejto metóde nemusia obe hraničné krivky prechádzať niektorou z hodnôt R_i^{Real} .



Záver

Predmetom skúmania tejto práce boli multifaktorové modely časovej štruktúry úrokových mier. V prvých dvoch kapitolách sme sa venovali úvodu do problematiky, kde sme si priblížili jednofaktorové, a následne aj dvojfaktorové a viacfaktorové modely. V druhej kapitole sme takisto načrtli spôsob výpočtu cien dlhopisov, ak sa úroková miera vyvíja podľa scenára určeného jednofaktorovým alebo dvojfaktorovým modelom.

V tretej kapitole sme uviedli netradičný typ modelu, ktorý sa skladá zo súčtu dvoch nezávislých skrytých procesov, z ktorých jeden sleduje Vašíčkov, a druhý CIR proces a pre ktorý vieme určiť explicitne vzorec na ocenenie dlhopisov. Pre tento model sme následne navrhli spriemerovanie cien dlhopisov cez všetky hodnoty skrytých procesov, ako prípravu na kalibráciu parametrov. Takisto sa podarilo nájsť analytické vyjadrenie pre toto spriemernenie, prostredníctvom zavedenia špeciálnej funkcie, ktorej explicitný tvar je neznámy, ale ktorú sa nám podarilo aproximovať pomocou distribučnej funkcie normálneho rozdelenia. Ďalej sme sa venovali vzťahom medzi spriemernenou výnosovou krivkou a spriemernenou cenou dlhopisu, ktoré sú z hľadiska praktického využitia zameniteľné - reálne však spriemernená výnosová krivka leží nad výnosovou krivkou získanou spriemernením dlhopisov alebo sa nachádza na tej istej úrovni. Zo štatistického hľadiska sme sa zaoberali generovaním z podmienenej hustoty, ktorého výsledky podporili správnosť tvaru pre spriemernenú výnosovú krivku. Ako nástroj kalibrácie sa hneď ponúka známa minimalizácia účelovej funkcie. My sme však navrhli dva iné rozličné prístupy na získanie parametrov úlohy.

Práca poskytuje aj množstvo otázok, ktorými by bolo možné sa ďalej zaoberať - či už

je to overenie efektívnosti navrhnutých algoritmov na získanie vstupných parametrov, alebo otázka nastolená v štvrtej kapitole ohľadom existencie jednofaktorového modelu, ktorý by poskytoval ceny dlhopisov rovnaké, aké nám dáva spriemernenie.

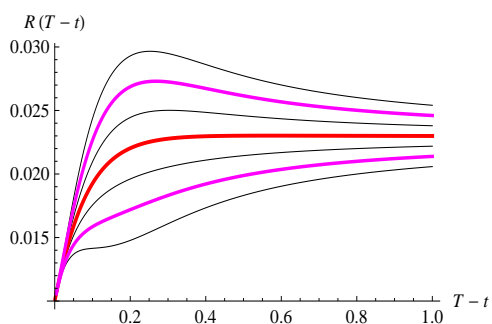
Literatúra

- [1] Abramowitz M., Stegun I.: Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, And Mathematical Tables. National Bureau of Standards, 10th printing, 1972.
- [2] Corzo, Schwartz: Convergence Within the EU: Evidence from Interest Rates. Economic Notes, Vol. 29, No. 2, July 2000.
- [3] Čintalová Z.: Spriemerneňovanie časových štruktúr výnosových kriviek a ich kalibrácia. Diplomová práca, 2007.
- [4] Fishman George S.: Monte Carlo, Concepts, Algorithms and Applications. Springer 1995.
- [5] <http://www.euribor.org>.
- [6] Hull, J.: Options, Futures and Other Derivatives. Prentice Hall, 4th edition, 2000.
- [7] Keller-Ressel M., Steiner T.: Yield Curve Shapes and the Asymptotic Short Rate Distribution in Affine One-Factor Models. Finance & Stochastics 12/2 (2008).
- [8] Kwok, Y.K.: Mathematical Models of Financial Derivatives. Springer - Verlag, 1998.
- [9] Leško T.: Metóda faktorovej dekompozície pri kalibrácii viacfaktorových modelov. Diplomová práca, 2007.
- [10] Lund J.: A Model for Studying the Effect of EMU on European Yield Curves. European Finance Review, Vol 2 (1999), 321-363.

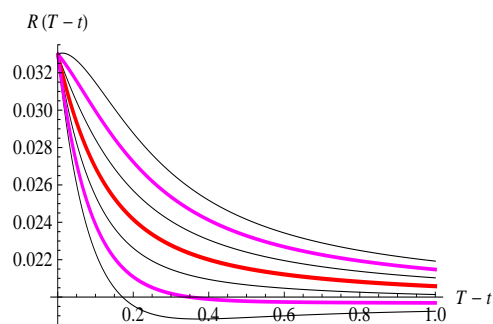
-
- [11] Melicherčík I., Olšarová, L., Úradníček V.: Kapitoly z finančnej matematiky I,II. Bratia Sabovci, 2005.
- [12] Nieh C., Shu Wu, Zeng Y.: Regime Shifts and the Term Structure of Interest Rates. Handbook of Quantitative Finance and Risk Management, Springer Academic Publishers (akceptované).
- [13] Revenda Z.: Peněžní ekonomie a bankovníctví. Management press, 3rd edition, Praha, 2002.
- [14] Risken H.: The Fokker-Planck equation; Methods of Solution and Applications. 2nd edition, Springer.
- [15] Stehlíková B.: Fast Mean Reverting Volatility in Fong-Vasicek Model of Interest Rates. Journal of Electrical Engineering, 57, No.12/s, 2006, pp.-65-97.
- [16] Stehlíková B.: Averaged Bond Prices in Generalized Cox-Ingersoll-Ross Model of Interest Rates. Proceedings of 5th Actuarial and Financial Mathematics Day, 2007, pp.77-87.
- [17] Stehlíková B.: Averaged Bond Prices for Fong-Vasicek and the Generalized Vasicek Interest Rates Models. Proceeding of MMEI, 2007, pp. 166-175.
- [18] Stehlíková B: Mathematical analysis of term structure models. Dissertation thesis. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK, 2008.
- [19] Ševčovič D., Stehlíková B: On non-existence of a one factor interest rate model for volatility averaged generalized Fong-Vasicek term structures, Proceedings of the Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2008 Takachiho / University of Miyazaki, Miyazaki, Japan, September 1-7, 2008, pp. 40-48.
- [20] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K.: Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2009.
- [21] Štěpán, J.: Teorie pravděpodobnosti. Academia 1987, Praha.

Príloha

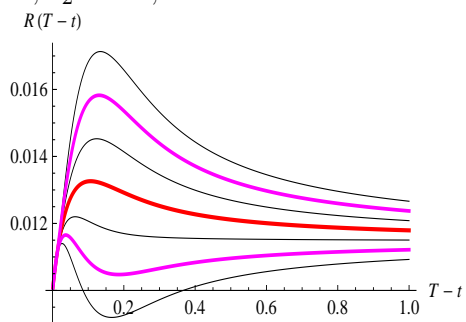
Niektoré tvary spriemernenej výnosovej krivky pri dvojfaktorovom Vašíček-CIR modeli (červená krivka), 3 – σ -ové intervaly spoľahlivosti (ružová krivka) a niektoré ďalšie možné tvary výnosových kriviek (čierne krivky):



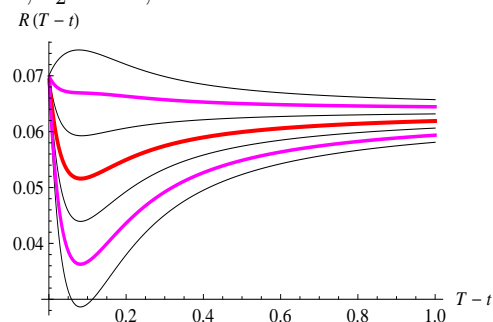
Obrázok 5.3: $\kappa_1 = 20, \kappa_2 = 18, \sigma_1 = 10, \sigma_2 = 2, \theta_1 = 0.03, \theta_2 = 0.01, \lambda_1 = -2.4, \lambda_2 = 0.2, r = 0.01$



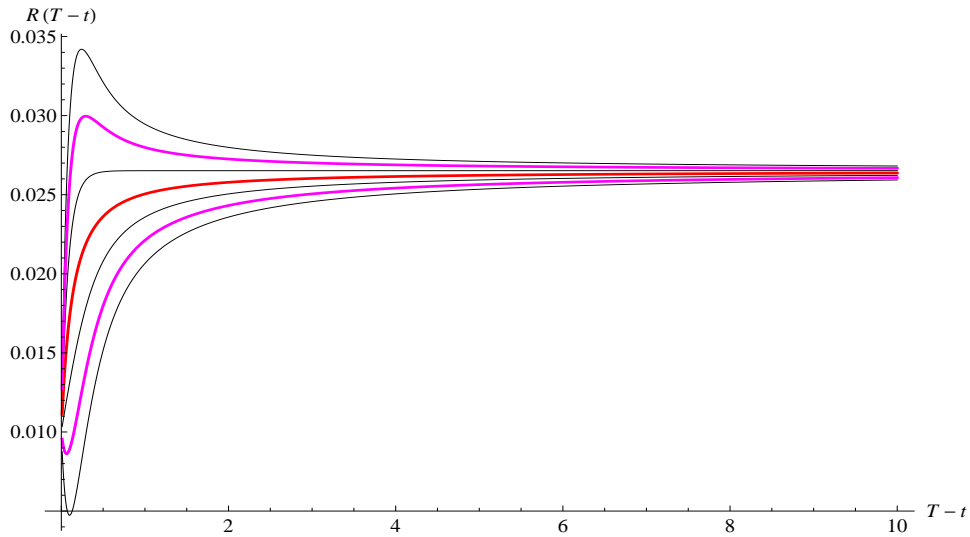
Obrázok 5.4: $\kappa_1 = 6.9, \kappa_2 = 12, \sigma_1 = 5, \sigma_2 = 0.5, \theta_1 = 0.012, \theta_2 = 0.015, \lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = 0.1, r = 0.033$



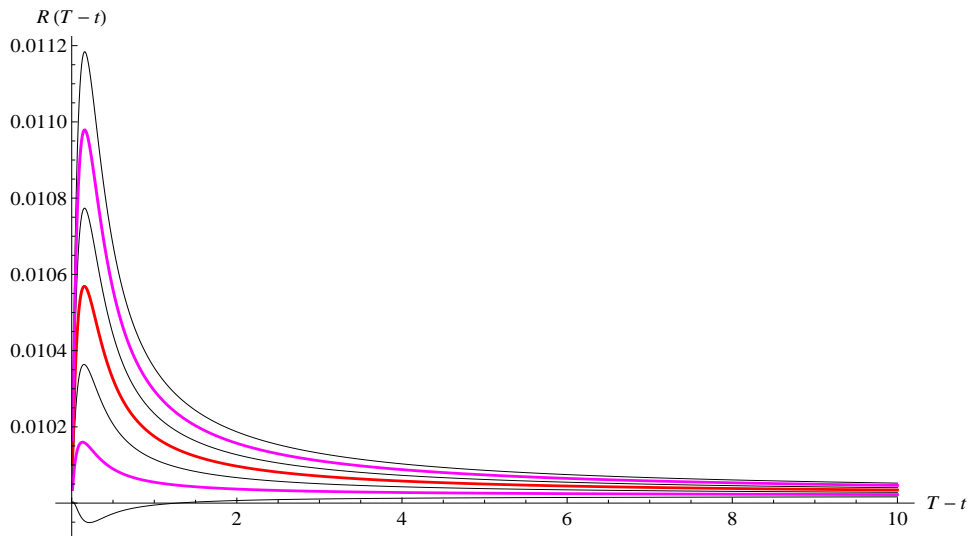
Obrázok 5.5: $\kappa_1 = 15, \kappa_2 = 10, \sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0.02, \theta_1 = 0.01, \theta_2 = 0.01, \lambda_1 = -7, \lambda_2 = 0.2, r = 0.01$



Obrázok 5.6: $\kappa_1 = 4, \kappa_2 = 50, \sigma_1 = 10, \sigma_2 = 1, \theta_1 = 0.07, \theta_2 = 0.04, \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0.4, r = 0.07$



Obrázok 5.7: $\kappa_1 = 15, \kappa_2 = 10, \sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2, \theta_1 = 0.03, \theta_2 = 0.015, \lambda_1 = -7, \lambda_2 = 0.2, r = 0.01$



Obrázok 5.8: $\kappa_1 = 15, \kappa_2 = 10, \sigma_1 = 5, \sigma_2 = 0.01, \theta_1 = 0.005, \theta_2 = 0.005, \lambda_1 = -1.5, \lambda_2 = 0.2, r = 0.01$

Procedúra na získanie tvarov výnosových kriviek :

```
data = ReadList["vstup.txt", Number];
k1 = data[[1]];
k2 = data[[2]];
sigma1 = data[[3]];
sigma2 = data[[4]];
theta1 = data[[5]];
theta2 = data[[6]];
lambda1 = data[[7]];
lambda2 = data[[8]];
r = data[[9]];

tauZ = Range[1000]*0.001;
Rspriem = Range[1000]*0.01;
RspriemPlusDisperzia = Range[1000]*0.01;
RspriemMinusDisperzia = Range[1000]*0.01;
P1 = Range[1000]*0.01;
P2 = Range[1000]*0.01;
P3 = Range[1000]*0.01;
P4 = Range[1000]*0.01;
P = Range[1000]*0.01;
PnaDruhu = Range[1000]*0.01;

a = (2*k1)/sigma1^2;
b = (2*k1*theta1)/sigma1^2;

For[i = 1, i < 1001, i++,
tau = tauZ[[i]];
Rinf = theta2 - (lambda2*sigma2)/k2 - (sigma2^2/(2*k2^2));
B2 = (1/k2)*(1 - Exp[-k2*tau]);
A2 = Exp[(Rinf*(B2 - tau) - (sigma2^2/(4*k2))*B2^2)];

gama1 = Sqrt[(k1 + lambda1)^2 + 2*sigma1^2];
menovatel1 = (k1 + lambda1 + gama1)*(Exp[gama1*tau] - 1) + 2*gama1;
B1 = 2*(Exp[gama1*tau] - 1)/menovatel1;
A1 = ((2*gama1*Exp[tau*(k1 + lambda1 + gama1)/2])/
menovatel1)^((2*k1*theta1)/(sigma1^2));

hornyInt =
NIntegrate[x^(b - 1)*Exp[x*(B2 - B1 - a)]
*Exp[-((r - x - theta2)^2)/(sigma2^2/k2)], {x, 0, Infinity}];
dolnyInt = NIntegrate[x^(b - 1)*Exp[x*(-a)]
*Exp[-((r - x - theta2)^2)/(sigma2^2/k2)], {x, 0, Infinity}];

HDisperzia = NIntegrate[x^(b - 1)
*Exp[x*(2*B2 - 2*B1 - a)]
*Exp[-((r - x - theta2)^2)/(sigma2^2/k2)], {x, 0, Infinity}];

P[[i]] = A1*A2*Exp[-B2*r]*hornyInt/dolnyInt;
PnaDruhu[[i]] = A1^2*A2^2*Exp[-B2*2*r]*HDisperzia/dolnyInt;
Disperzia = PnaDruhu[[i]] - P[[i]]^2;
```



```

Rspriem[[i]] = -Log[P[[i]]]/tau;
RspriemPlusDisperzia[[i]] = -Log[P[[i]] + 3*Sqrt[Disperzia]]/tau;
RspriemMinusDisperzia[[i]] = -Log[P[[i]] - 3*Sqrt[Disperzia]]/tau;
P1[[i]] = -Log[P[[i]] + 1.5*Sqrt[Disperzia]]/tau;
P2[[i]] = -Log[P[[i]] - 1.5*Sqrt[Disperzia]]/tau;
P3[[i]] = -Log[P[[i]] - 4.5*Sqrt[Disperzia]]/tau;
P4[[i]] = -Log[P[[i]] + 4.5*Sqrt[Disperzia]]/tau;

peknekrivky =
ListPlot[{Table[{tauZ[[i]], P1[[i]]}, {i, 1, 1000}],
Table[{tauZ[[i]], P2[[i]]}, {i, 1, 1000}],
Table[{tauZ[[i]], P3[[i]]}, {i, 1, 1000}],
Table[{tauZ[[i]], P4[[i]]}, {i, 1, 1000}],
Table[{tauZ[[i]], Rspriem[[i]]}, {i, 1, 1000}],
Table[{tauZ[[i]], RspriemPlusDisperzia[[i]]}, {i, 1, 1000}],
Table[{tauZ[[i]], RspriemMinusDisperzia[[i]]}, {i, 1, 1000}]],
PlotStyle -> {{RGBColor[0, 0, 0]}, RGBColor[0, 0, 0],
RGBColor[0, 0, 0],
RGBColor[0, 0, 0], {RGBColor[1, 0, 0],
Thick}, {RGBColor[1, 0, 1], Thick}, { RGBColor[1, 0, 1],
Thick}, {RGBColor[0, 0, 1], Thick}},
AxesLabel -> {T - t, R (T - t)}, BaseStyle -> {FontSize -> 11},
Joined -> True, PlotRange -> All]
]

```

Procedúra metódy Acceptance-Rejection pri vstupných parametroch určených v predchádzajúcej procedúre:

```

Vygenerovane = Range[1000];
h[z_] = (a^b/Gamma[b])*z^(b - 1)*Exp[z*(-a)];
g[z_] = Exp[-((r - z - theta2)^2)/(sigma2^2/k2)];

For[i = 1, i < 1001, i++, par = 0; zgen = 0; u = 0;
While[par == 0,
zgen = RandomReal[GammaDistribution[b, 1/a]];
" generovanie z hustoty h[z]"
u = RandomReal[UniformDistribution[{0, 1}]];
If[g[zgen] >= u, par = 1; Vygenerovane[[i]] = zgen]
]
]

```