

UNIVERZITA KOMENSKÉHO
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2009

Peter Klátik

DYNAMICKÁ TEÓRIA ZÁSOB

Diplomová práca

PETER KLÁTIK



UNIVERZITA KOMENSKÉHO
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Študijný program: 9.1.9 Aplikovaná matematika
Študijný odbor: Ekonomická a finančná matematika
Vedúci práce: Prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

Bratislava 2009

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne, iba s pomocou nadobudnutých teoretických vedomostí, konzultácií a použitej literatúry uvedenej v zozname.

V Bratislave, 29.4.2009

.....

Pod'akovanie

Úprimne ďakujem svojmu diplomovému vedúcemu, Prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc., za cenné návrhy a pripomienky, odbornú pomoc, ochotu, trpezlivosť a všetok venovaný čas strávený pri riešení problémov.

Abstrakt

Práca sa zaoberá modelovaním skladu pri rôznych typoch dopytu a hľadaním optimálnych politík z pohľadu prevádzkovateľa. Jej cieľom je podrobne preskúmať špecifiká stochastického dopytu, ktorý je reprezentovaný Lévyho procesmi, najmä Wienerovým a Poissonovým procesom. Najprv sme odvodili vlastnosti týchto procesov užitočné pri modelovaní skladu, aby sme s ich pomocou mohli nájsť nákladové funkcie. Ako sa ukázalo, nie vždy je možné určiť optimum analyticky, v niektorých prípadoch je preto potrebné použiť aproximácie a numerické algoritmy, ktoré možno priamo aplikovať v praxi.

Kľúčové slová: Wienerov proces, Poissonov proces, model skladu, stochastický dopyt, nákladová funkcia

Abstract

This thesis studies the modeling of a warehouse for different types of demand and attempts to find optimal policies from the perspective of the operator. Its purpose is to analyse the specifics of stochastic demand, which is represented by Lévy processes, especially by Wiener and Poisson process. First, we derive some properties of these processes useful in modeling the warehouse to use them for finding cost functions. As shown, since it is not always possible to determine the optimum analytically, in some cases one has to use approximations and numerical algorithms, which can be directly applied in practice.

Keywords: Wiener Process, Poisson Process, Warehouse model, Stochastic demand, Cost function

Abstrakt

Die Diplomarbeit beschäftigt sich mit Modellierung des Lagers bei verschiedenen Typen der Nachfrage und mit der Suche nach optimalen Politiken aus der Sicht des Betreibers. Ihr Ziel ist es Spezifika der stochastischen Nachfrage ausführlich zu untersuchen, die durch Lévy-Prozesse, vor allem durch den Wiener- und Poisson-Prozess vertreten sind. Zuerst haben wir die Eigenschaften dieser Prozesse abgeleitet, die bei der Lagermodellierung nützlich sind, um mit ihrer Hilfe die Kostenfunktionen finden zu können. Wie es sich gezeigt hat, war es nicht immer möglich das Optimum analytisch zu bestimmen, in manchen Fällen war es deshalb notwendig Approximationen und numerische Algorithmen zu gebrauchen, die man direkt in der Praxis anwenden kann.

Stichworte: Wiener-Prozess, Poisson-Prozess, Lagermodell, stochastische Nachfrage, Kostenfunktion

Obsah

Úvod	2
1. Princípy teórie zásob	3
1.1 Koncept teórie zásob	3
1.2 Formulácia úlohy teórie zásob	4
2. Model skladu a deterministický dopyt	7
2.1 Model skladu	7
2.2 Úloha s konštantným dopytom	9
3. Stochastické procesy	12
3.1 Úvod do stochastických procesov	12
3.2 Wienerov proces	13
3.2.1 Definície a základné vlastnosti	13
3.2.2 Úlohy súvisiace s Wienerovým procesom	14
3.3 Poissonov proces	20
3.3.1 Definície a základné vlastnosti	20
3.3.2 Úlohy súvisiace s Poissonovým procesom	21
4. Dopyt modelovaný stochastickým procesom	24
4.1 Dopyt modelovaný Wienerovým procesom s driftom	24
4.1.1 Štandardný model s lineárnym driftom bez deficitu	26
4.1.2 Zovšeobecný model s lineárnym driftom bez deficitu	27
4.1.3 Optimálne riešenie	29
4.1.4 Model s prípustným deficitom	32
4.2 Dopyt modelovaný homogénnym Poissonovým procesom	35
4.2.1 Štandardný model bez deficitu	35
4.2.2 Model bez deficitu s čiastočne deliteľným tovarom	37
4.2.3 Model s prípustnosťou deficitu a oneskorenou dodávkou	37
4.2.4 Úloha teórie zásob s periodickou kontrolou	38
4.2.5 Úloha teórie zásob so signalizáciou	42
4.2.6 Porovnanie prístupov	44
Záver	46
Literatúra	47
Príloha	i

Úvod

V posledných desaťročiach sa výrazne rozmohlo používanie matematiky v modelovaní a riešení praktických problémov, najmä z oblasti financií a ekonómie. Ukázalo sa, že zákonitosti, ktoré boli pozorované pôvodne v iných vedách, s miernou modifikáciou veľmi dobre opisujú správanie sa rôznych procesov, ktoré možno pozorovať v každodennom živote. Ako príklady možno spomenúť Poissonov proces a Brownov pohyb.

V tridsiatych rokoch 20. storočia sformuloval Norbert Wiener presný matematický model pohybu, ktorý pozoroval botanik Robert Brown pri náhodnom pohybe peľových zrníčok v plyne alebo kvapaline. Veľký pokrok nastal, keď Kiyoshi Itô vytvoril teóriu „správania sa“ tohoto procesu a v sedemdesiatych rokoch využil Robert C. Merton danú teóriu na opis správania sa finančných trhov. Ako sa ukázalo, tento (Brownov) pohyb, s miernymi modifikáciami, opisuje veľmi dobre nielen správanie sa aktív na akciových trhoch, ale aj napríklad vývoj dopytu alebo ponuky po istej komodite za dané časové obdobie alebo zásobu peňazí v pokladni. Niektorým problémom, ktoré sa dali riešiť s istými zanedbaniami aj bez využitia náhodných procesov, dáva tento nový prístup hranice zjednodušenia, ktoré výraznejšie neovplyvnia výsledky.

Jednou z oblastí, kde modelovanie pomocou náhodných procesov opisuje skutočnosť lepšie ako deterministický model, je teória zásob. Základná myšlienka spočíva v tom, že dopyt po statkoch, ktoré sú k dispozícii (napríklad na sklade), bude modelovaný pomocou náhodného procesu a úlohou bude nájsť takú výšku a periodicitu dodávok nových zásob, aby boli minimalizované náklady na skladovanie týchto statkov, resp. straty z ich držania, alebo nedostatku.

Práca je rozdelená na štyri kapitoly. Prvá kapitola opisuje základné princípy teórie zásob, definuje matematické značenie a vysvetľuje pojem dopytu, skladu, prevádzkovateľa skladu a politiky. V druhej kapitole je na základe týchto princípov vytvorený všeobecný model, ktorý je následne aplikovaný na základný typ dopytu - deterministický dopyt s konštantnou intenzitou. Formuly pre optimálnu politiku, odvodené v tejto časti, možno nájsť v mnohej literatúre a patria medzi fundamenty teórie zásob.

Jadro diplomovej práce spočíva v tretej a štvrtej kapitole. Tretia kapitola ponúka úvod do teórie stochastických procesov s dôrazom na najvýznamnejšie Lévyho procesy – Wienerov a Poissonov proces. Pre tieto dva procesy sú odvodené niektoré netriviálne vlastnosti, ktoré hrajú kľúčovú úlohu pri modelovaní dopytu. Ako sa ukáže v štvrtej kapitole, práve tieto vlastnosti spôsobujú rozdiely medzi jednotlivými prístupmi pri formulácii nákladovej funkcie, a teda aj pri hľadaní optimálnej politiky.

Práca obsahuje 15 ilustrácií a je koncipovaná tak, aby hlavným myšlienkam porozumel aj čitateľ bez hlbších znalostí matematickej analýzy a stochastických procesov.

Kapitola 1

Princípy teórie zásob

1.1 Koncept teórie zásob

Všeobecne možno základnú úlohu teórie zásob opísať nasledovným spôsobom: daný je sklad, ktorý nepretržite skladuje jeden druh výrobku. Výrobky zo skladu ubúdajú na základe dopytu, ktorý určujú zákazníci. V momente, keď sú splnené isté, vopred stanovené podmienky (nastal určitý čas, zásoby klesli na určitú úroveň), objedná sa ďalšia dodávka a cieľom je zvoliť takú politiku¹, aby sa minimalizovali celkové náklady na jednotku času. Úlohy sa môžu líšiť v závislosti od nasledovných kritérií:

1. časový horizont, na ktorom sa sklad prevádzkuje: *konečný* a *nekonečný*
2. dopyt zákazníkov po výrobkoch: *deterministický* a *stochastický*
3. doba príchodu ďalšej dodávky: *nulová* (okamžitá dodávka) a *nenulová* (oneskorená dodávka)
4. deficit zásob na sklade: *neprípustný* (stav zásob musí byť vždy nezáporný) a *prípustný* (stav môže byť aj záporný)
5. deliteľnosť tovaru: *obmedzene* a *neobmedzene deliteľný*
6. kapacita skladu: *ohraničená* a *neohraničená*

1. Pokiaľ je časový horizont konečný, je daný koncový čas T_{max} a celkové náklady na jednotku času sa minimalizujú na intervale $[0, T_{max}]$. Ak je časový horizont nekonečný, náklady na jednotku času nemusia byť dobre definované, a preto treba cieľ formulovať inak².

2. Deterministický dopyt je úplne charakterizovaný časovým priebehom jeho intenzity, ktorý vyjadruje okamžitý dopyt po výrobku za jednotku času. V prípade stochastického dopytu je vhodné modelovať ho ako súčet deterministickej a stochastickej časti, pričom deterministická zložka vyjadruje dlhodobý trend (napríklad lineárna funkcia, periodická funkcia, ...) a stochastická zložka reprezentuje krátkodobé náhodné fluktuácie.

3. Ak je dodávka okamžitá, v momente jej objednania dôjde k doplneniu zásob, pri oneskorenej dodávke dôjde k doplneniu zásob až o nejaký časový interval δ neskôr, ako bola dodávka objednaná. Práve dĺžka dodávky je jeden z faktorov určujúcich formuláciu politiky prevádzkovateľa skladu: Ak je dodávka okamžitá, v každej perióde sa hľadá optimálna výška dodávky. Ak je dodávka oneskorená, okrem optimálnej výšky sa v každej perióde hľadá aj optimálny moment, kedy treba požiadať o ďalšiu dodávku. V praxi sa možno častejšie stretnúť s oneskorenou dodávkou, ako sa však neskôr ukáže, tento prípad je vzhľadom na dvojrozmernú optimalizáciu matematicky omnoho zložitejší.

¹ pojem politika bude mať v ďalšom texte rôzny význam, preto tu nie je bližšie špecifikované, o akú optimalizáciu sa jedná

² Presná formulácia je v (1.3) a (1.4).

4. Možnosť deficitu úzko súvisí s dĺžkou dodávky: ak je dodávka oneskorená, na netriviálnom časovom intervale môže dôjsť k nedostatku zásob. Nedostatok zásob spôsobuje prevádzkovateľovi skladu náklady (strata dobrého mena, dlh voči zákazníkom), ktoré však pri neprípustnosti deficitu nemožno odmerať. Oneskorená dodávka teda implikuje prípustnosť deficitu a naopak, neprípustnosť deficitu implikuje okamžitú dodávku.

5. Hoci je prirodzenejšie uvažovať sklad, ktorý skladuje kusový tovar, matematicky je jednoduchšie modelovať sklad s neobmedzene deliteľným tovarom. Dopyt po kusovom tovare totiž nemožno modelovať spojitou funkciou, keďže takmer vždy by dopyt za nejaký časový interval nebol celé číslo. V prípade kusového tovaru preto musí byť dopyt modelovaný nespojitou, schodovitou funkciou, kde dlhodobý trend je nulový a samotnú schodovitú funkciu vyjadruje bodový stochastický proces. Čiastočne deliteľný tovar (napríklad výrobok deliteľný na n kusov) možno považovať za nedeliteľný a sformulovať novú úlohu, kde by sa za jeden výrobok považovala časť $1/n$ pôvodného výrobku a adekvátne by sa upravili aj ostatné parametre.

6. Delenie skladu z hľadiska obmedzenia jeho kapacity nemá z matematického, resp. optimalizačného hľadiska zmysel. Ak by totiž bola stanovená nejaká kapacita, úlohu možno riešiť pre neohraničený sklad a ak by optimálna výška dodávky bola vyššia ako je kapacita skladu, objedná sa dodávka práve vo výške tohto ohraničenia (v prípade oneskorenej dodávky k nej prislúchajúci moment objednania ďalej).

1.2 Formulácia úlohy teórie zásob

Pre úlohu teórie zásob zavedme nasledovné označenie:

- (1) $\lambda(t)$ hustota dopytu po výrobku v čase t za jednotku času, $\lambda(t) \geq 0$
- (2) $D(a, b)$ sumárny dopyt po výrobku v časovom intervale $[a, a + b)$
- (3) i poradové číslo dodávky (pre prvú dodávku platí $i = 0$)
- (4) T_i čas, kedy príde i -ta dodávka na sklad; $T_0 = 0$
- (5) T_{i+1}^- čas, kedy sa objedná ďalšia dodávka
- (6) T_{max} koncový čas, do ktorého je sklad prevádzkovaný
- (7) δ doba dodávky (čas od objednania po príchod dodávky)
- (8) Q_i výška i -tej dodávky
- (9) $Q(t)$ stav zásob na sklade v čase t
- (10) r_i dĺžka i -tej periódy (čas medzi príchodom i -tej a $i + 1$. dodávky)
- (11) s_i $r_i - \delta$ (čas medzi príchodom i -tej a objednaním $i + 1$. dodávky)
- (12) R_i stredná hodnota r_i
- (13) $C_D(x)$ náklady na dodávku, ktorej výška je x , C_D je neklesajúca
- (14) $C_M(x)$ náklady na skladovanie x výrobkov za jednotku času, C_M je neklesajúca
- (15) $C_S(x)$ náklady na dlh za jednotku času, pokiaľ je na sklade x výrobkov (v tomto prípade je x záporné a predstavuje dlh skladu voči zákazníkom), C_S je nerastúca
- (16) C_i celkové náklady na i -tu periódu (náklady na skladovanie + náklady na dlh + náklady na dodávku)
- (17) c_i celkové náklady na jednotku času počas i -tej periódy

Na základe (2.2) je zrejmé, že dopyt možno ekvivalentne zadať pomocou $\lambda(t)$ z (1) alebo $D(a, b)$ z (2). Úloha teórie zásob je teda úplne zadaná zvolením (1), (6), (7), (13), (14), (15), alebo zvolením (2), (6), (7), (13), (14), (15). Pre takto zadanú úlohu sa hľadá optimálna

politika, ktorá minimalizuje celkové náklady na jednotku času. Politiku počas i -tej periódy označme ako Q_i v prípade okamžitej dodávky, resp. dvojicu $[Q_i, T_{i+1}^-]$ v prípade oneskorenej dodávky. Politiku (počas celej prevádzky skladu) označme ako vektor $\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2, \dots)$ v prípade okamžitej dodávky, resp. dvojicu vektorov $[\mathbf{Q}, \mathbf{T}] = ([Q_0, T_1^-], [Q_1, T_2^-], [Q_2, T_3^-], \dots)$ v prípade oneskorenej dodávky. Cieľom prevádzkovateľa skladu je nájsť optimálnu politiku, ktorej definícia sa líši pre konečný a nekonečný časový horizont. Pri konečnom časovom horizonte, teda ak $T_{max} < \infty$ je dané, je minimalizácia nákladov na jednotku času ekvivalentná s minimalizáciou celkových nákladov, a teda optimálnu politiku možno definovať ako

$$\hat{\mathbf{Q}} = \arg \min_{\mathbf{Q}, k} \sum_{i=0}^{k-1} E[C_i] \quad (1.1)$$

v prípade okamžitej dodávky, resp. ako

$$[\hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{T}}] = \arg \min_{\mathbf{Q}, \mathbf{T}, k} \sum_{i=0}^{k-1} E[C_i] \quad (1.2)$$

v prípade oneskorenej dodávky.

Problém (1.2) (a ekvivalentne aj (1.1)) možno sformulovať ako úlohu dynamického programovania: Q_i a T_{i+1}^- sú riadiace premenné, T_i je stavová premenná, $\sum E[C_i]$ je účelová funkcia, $T_{i+1}^- = T_{i+1}^- + \delta$ je stavová diferenčná rovnica a ohraničenia na riadiace a stavovú premennú sú interval $[0, \infty)$. Je zrejmé, že hoci je daný koncový čas T_{max} , nie je určený počet periód, pre ktoré treba hľadať optimálnu politiku, a teda náklady treba optimalizovať aj vzhľadom na k . Ide tak o neautonómnu úlohu s voľným časom v zmysle klasifikácie úloh optimálneho riadenia³, s danou koncovou podmienkou $r_k = T_{max}$.

Metódy riešenia úloh dynamického programovania možno nájsť napr. v [12] a na základe [12] platí, že (1.1) a (1.2) treba riešiť pre každé pevne zvolené k ako úlohu s pevným časom na $[0, k]$ a spomedzi takto získaných riešení vybrať to, v ktorom účelová funkcia nadobúda najmenšiu hodnotu⁴.

Ak je časový horizont nekonečný, cieľ prevádzkovateľa skladu sa nemusí dať formulovať ako minimalizácia celkových nákladov na jednotku času. Formálne povedané, ak uvažujeme optimálnu politiku podľa (1.1) alebo (1.2) ako súbor funkcií premennej T_{max} (každé \hat{Q}_i , resp. \hat{T}_{i+1}^- predstavuje funkciu premennej T_{max}), nemusí existovať ich limita pre $T_{max} \rightarrow \infty$. Cieľom je preto minimalizovať náklady na jednotku času postupne v každej perióde, čím vzniká rekurentný vzťah

$$\begin{aligned} \hat{Q}_i &= \arg \min_{Q_i} E \left[\frac{C_i}{r_i} \mid r_i = x \right] \\ \hat{T}_{i+1}^- &= \hat{T}_i^- + R_i \end{aligned} \quad (1.3)$$

v prípade okamžitej dodávky, resp.

$$\begin{aligned} [\hat{Q}_i, \hat{T}_{i+1}^-] &= \arg \min_{Q_i, T_{i+1}^-} E \left[\frac{C_i}{r_i} \mid r_i = x \right] \\ \hat{T}_{i+1}^- &= \hat{T}_i^- + R_i \end{aligned} \quad (1.4)$$

v prípade oneskorenej dodávky. Pre názornejšie vysvetlenie, $E \left[\frac{C_i}{r_i} \mid r_i = x \right]$ predstavuje dvojkrovú strednú hodnotu. V prvom kroku sa počíta $E_{C_i} \left[\frac{C_i}{r_i} \mid r_i = x \right]$ pre nejaké pevne

³ Podľa klasifikácie v [12]

⁴ Existuje viacero metód, ako postupne voliť k , ktoré pri rozumne zadanej úlohe patrí do ohraničeného intervalu. Pokiaľ je časový horizont dostatočne veľký, pre malé k budú príliš veľké náklady na skladovanie a pre veľké k budú príliš veľké náklady na dodávky.

zvolené x (keďže aj C_i je náhodná premenná) a dostaneme tak funkciu závislú od x , ktorú označme $g(x)$. $g(x)$ predstavuje očakávané náklady na i -tu periódu za podmienky, že dĺžka tejto periódy je x . V druhom kroku sa počíta $E_x[g(x)]$ cez všetky prípustné hodnoty x , teda je potrebné poznať hustotu rozdelenia dĺžky periódy, $f_x(t)$.

Ak je dopyt deterministický, v (1.1) – (1.4) možno stredné hodnoty vynechať, $C_i | r_i$ nahradiť C_i a navyše platí $R_i = r_i$. V ďalšom texte sa zameriavam na výpočet nákladov a ich optimalizáciu počas jednej periódy, keďže prechodom medzi jednotlivými periódami sa zaoberá dynamické programovanie a pri špeciálnych tvaroch dopytovej funkcie je optimálna politika pre každú periódu rovnaká.

Kapitola 2

Model skladu a deterministický dopyt

Cieľom tejto kapitoly je vytvoriť model skladu opisujúci priebeh skladovania a dopĺňania zásob a optimalizovať náklady v prípade, že sa skladuje jeden druh nekonečne deliteľného výrobku a dopyt po ňom je deterministický.

2.1 Model skladu

Predpokladajme, že dopyt po výrobku je po častiach spojitá a nezáporná deterministická funkcia času. V momente, keď sú splnené isté, vopred stanovené podmienky (nastal určitý čas, zásoby klesli na určitú úroveň), treba objednať ďalšiu dodávku, ktorá môže byť buď okamžitá, alebo oneskorená.

Nech je dodávka okamžitá. Predpokladajme, že záporné množstvo zásob na sklade je neprípustné. V časovom intervale $[T, T + t]$ je celkový dopyt rovný

$$D(T, t) = \int_T^{T+t} \lambda(s) ds. \quad (2.1)$$

Treba si uvedomiť, že ako $\lambda(t)$, tak aj $D(T, t)$ plne charakterizujú správanie sa zákazníkov a spolu s určením (6), (7), (12), (13), (14) poskytujú jednoznačné zadanie úlohy. Navyše, zadanie pomocou $\lambda(t)$ a $D(T, t)$ je ekvivalentné: pre dané $\lambda(t)$ je možné pomocou (2.1) vypočítať $D(T, t)$ a naopak, pre dané $D(T, t)$ možno vypočítať $\lambda(t)$ ako

$$\frac{\partial D(T, t)}{\partial t} = \lambda(T + t). \quad (2.2)$$

Z (2.1) vyplýva, že pokiaľ je úloha zadaná pomocou $D(T, t)$, musí spĺňať nasledovné vlastnosti:

- a) $D(a, 0) = 0$
- b) $D(a, b) + D(a + b, c) = D(a, b + c)$

Sklad funguje tak, že v čase $T_0 = 0$ dôjde k nulej dodávke zásob o výške Q_0 . Od tohto momentu dochádza k čerpaniu výrobkov zo skladu a za čas t sa vyčerpá $D(0, t)$. V momente, keď $D(0, t) = Q_0$, dôjde k vyčerpaniu zásob a niekedy od tohto momentu treba požiadať o takú ďalšiu dodávku, aby bolo v čase jej príchodu na sklade Q_1 kusov výrobku.

Argument, prečo nepožiadať o dodávku ešte počas nenulového stavu zásob, je nasledovný: predpokladajme opak. Nech optimálna dĺžka periódy je a , ale zásoby sa

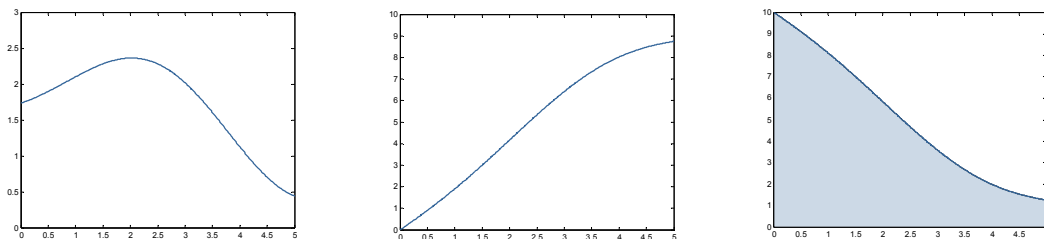
vyčerpajú neskôr, až v čase $a + b$. Ak by sme dĺžku periódy predĺžili o nejaký čas $\varepsilon < b$ (tak, aby $a - \varepsilon$ bolo ešte v tej istej perióde), náklady na skladovanie počas tohto intervalu by boli $c_s \int_a^{a+\varepsilon} Q(t) dt$. Stav zásob, $Q(t)$, je však v jednej perióde nerastúca funkcia a preto pre všetky t_1 z intervalu $[a - \varepsilon, a]$ a pre všetky t_2 z intervalu $[a, a + \varepsilon]$ platí $Q(t_1) \geq Q(t_2)$, teda aj $\int_{a-\varepsilon}^a Q(t) dt \geq \int_a^{a+\varepsilon} Q(t) dt$. Z toho je zrejmé, že predĺžením periódy o ε sa znížia náklady na skladovanie na jednotku času, teda a by nebolo optimálne. Dĺžka i -tej periódy $r_i = T_{i+1} - T_i$ je preto rovná

$$r_i = \sup\{t \geq 0 : D(T_i, t) \leq Q_i\}, \quad (2.3)$$

keďže dodávka je okamžitá a neoplatí sa doviezť nový tovar skôr ako v momente, keď začne byť po ňom nenulový dopyt, ináč by totiž na sklade zbytočne stál. Náklady na dodávku sú $C_D(Q_i)$, náklady na skladovanie závisia od stavu zásob $Q(t)$, ich hodnotu označme $C_M[Q(t)]$. V praxi sa najčastejšie využíva $C_M[Q(t)] = a$, alebo $C_M[Q(t)] = bQ(t)$. Celkové náklady na i -tu periódu sú

$$C_i = C(Q_i) = C_D(Q_i) + \int_0^{r_i} C_M[Q_i - D(T_i, t)] dt, \quad (2.4)$$

kde r_i je definované v (1.2), $D(T_i, t)$ je definované v (1.1) a dĺžka tejto periódy je r_i .



Obr.2.1: Príklad $\lambda(t)$ na intervale $[0, 5]$, k nej prislúchajúca $D(T, t)$ a náklady na skladovanie.

Predpokladajme teraz, že i -ta dodávka nie je okamžitá, ale trvá istý konštantný čas δ . Dodávku teda treba objednávať v nejakom čase T_{i+1}^- a pre dĺžku periódy platí

$$\begin{aligned} r_i &= T_{i+1}^- - T_i + \delta \\ T_{i+1}^- &= T_{i+1}^- + \delta \end{aligned} \quad (2.5)$$

V čase T_{i+1}^- môže byť stav zásob kladný, ale aj záporný. Takisto, aj pokiaľ sa dodávka objedná ešte počas kladného stavu zásob, môže sa stať, že príde až v momente „chýbajúcich“ zásob. Toto všetko závisí od formulácie nákladovej funkcie pre chýbajúci tovar a môže sa stať, že optimálny čas T_{i+1}^- na ďalšiu dodávku bude až vtedy, keď už bude tovar chýbať. Označme teda $C_s[Q(t)]$ náklady v prípade zápornej hodnoty funkcie $Q(t)$ (napríklad dlh voči zákazníkom, strata dobrého mena pre nedostatok tovaru).

Na stanovenie optimálneho momentu pre ďalšiu dodávku sa možno pozerat' dvomi spôsobmi: 1.) požiadať o novú dodávku v takom čase T_{i+1}^- , keď zásoby klesnú na istú kritickú úroveň q , 2.) požiadať o novú dodávku vo vopred stanovenom čase T_{i+1}^- . Keďže pre dopytovú funkciu nemusí striktnie platiť $\lambda(t) > 0$, a teda nemusí byť prostá, dopyt môže byť nenulový na netriviálnom intervale a čas T_{i+1}^- podľa 1. spôsobu nemusí byť definovaný jednoznačne. Preto je vhodnejšie hľadať optimálny čas novej dodávky podľa 2. spôsobu a náklady na i -tu periódu tak sú

$$C_i = C(Q_i) = C_D(Q_i) + \int_0^{r_i} C_M(Q_i - D(T_i, t))^+ + C_S(Q_i - D(T_i, t))^- dt \quad (2.6)$$

Vzťahy (2.6), resp. (2.4) spolu s (2.3) slúžia na výpočet hodnoty účelovej funkcie v (1.1) a (1.2), prípadne ako minimalizovaná funkcia v (1.3) a (1.4).

2.2 Úloha s konštantným dopytom

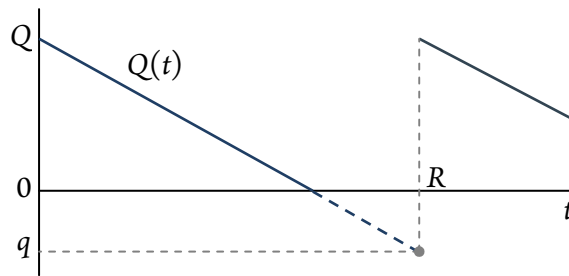
Uvažujme nasledovný problém deterministickej teórie zásob na nekonečnom horizonte, pričom deficit zásob na sklade je prípustný:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lambda & \lambda &> 0 \\ C_D(Q_i) &= c_d & c_d &> 0 \\ C_M[Q(t)] &= c_s Q(t) & c_s &> 0 \\ C_S[Q(t)] &= -c^- Q(t) & c^- &> 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Za týchto podmienok možno stále rozlíšiť dva prípady – keď je dodávka okamžitá, alebo oneskorená. Keďže dopyt je deterministický, pokiaľ by bola dodávka oneskorená, dĺžka dodávky by jednoznačne určovala, koľko tovaru by sa minulo od momentu objednania po moment príchodu ďalšej dodávky. Ak by teda prevádzkovateľ skladu chcel, aby dodávka prišla v momente, keď zásoby klesnú na určitú hodnotu q , presne by vedel, kedy ju má objednať. Oneskorená dodávka preto pri deterministickom modeli nevnáša žiadnu neistotu a v ďalšom texte sa možno zaoberať iba okamžitou dodávkou.

Vzhľadom k tomu, že dopyt je v čase konštantný, optimálna politika bude v každej perióde rovnaká, a teda index označujúci číslo periódy možno vynechať. Keďže je deficit zásob prípustný, úlohou prevádzkovateľa skladu je okrem optimálnej výšky dodávky určiť aj okamih, kedy treba objednať ďalšiu dodávku. Je zrejmé, že $D(t, \Delta t) = \lambda \Delta t$, teda sumárny dopyt v intervale $[t, t + \Delta t]$ je pre ľubovoľné t prostá funkcia. Na optimálny okamih pre ďalšiu dodávku sa preto možno pozeráť ekvivalentne dvomi spôsobmi: 1. hľadať čas R , kedy treba požiadať o dodávku, ktorému prislúcha jednoznačne určený kritický stav zásob q ; 2. hľadať stav zásob q , ktorému prislúcha jednoznačne určený čas R (Obr. 2.2). Z matematického hľadiska je jednoduchší 2. prístup, v každej perióde teda pôjde o optimalizáciu nákladov podľa Q a q . Treba podotknúť, že $Q \in [0, \infty)$, kým $q \in (-\infty, Q]$.

Existuje viacero spôsobov, ako oceňovať straty spôsobené deficitom. Jednou z možností je závislosť od dĺžky časového intervalu, kedy dochádza k deficitu; v zvolenej úlohe však straty závisia aj od výšky samotného deficitu – podobne ako náklady na skladovanie závisia od výšky zásob. Takto zvolené náklady na deficit možno chápať nasledovným spôsobom: v momente, keď sa zásoby vyčerpajú, začína byť dopyt zákazníkov neuspokojený. Skladu tak vzniká dlh, ktorý sa musí niekedy (pri príchode ďalšej dodávky) zákazníkom splatiť a tento dlh je priamo úmerný neuspokojenému dopytu. Nech \hat{q} je optimálne množstvo zásob, v ktorom treba objednať ďalšiu dodávku a optimálne je, aby bolo po príchode dodávky na sklade \hat{Q} kusov výrobku. Výška dodávky je $\hat{Q} - \hat{q}$, keďže \hat{q} výrobkov ostalo na sklade z minulej periódy, resp. predstavuje dlh voči zákazníkom z minulej periódy. To však neovplyvňuje optimálnu politiku, keďže náklady na dodávku nezávisia od výšky dodávky.

Obr.2.2: Príklad politiky $[Q, q]$.

Úlohu (2.7) treba rozdeliť na dva prípady: ak $q \geq 0$ a $q < 0$. Je zrejmé, že dĺžka periódy je $R = (Q - q) / \lambda$. Ak $q \geq 0$, označme optimálne hodnoty indexom p . Celkové náklady na jednotku času sú

$$\begin{aligned} c(Q, q) &= C(Q, q) / R \\ &= \left(c_d + c_s \frac{(Q - q)(Q + q)}{2\lambda} \right) \frac{\lambda}{Q - q} \\ &= c_d \frac{\lambda}{Q - q} + c_s \frac{Q + q}{2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

a minimum \hat{Q}, \hat{q} možno nájsť ako riešenie sústavy

$$\frac{\partial c(Q, q)}{\partial Q} = \frac{\partial c(Q, q)}{\partial q} = 0. \quad (2.9)$$

Sústava (2.9) však nemá riešenie a z tvaru (2.8) vidno, že ak $q \rightarrow -\infty$, $c(Q, q) \rightarrow -\infty$ pre ľubovoľné Q . Z podmienok $Q \geq 0$, $q \geq 0$ preto dostávame

$$\hat{q}_p = 0, \quad \hat{Q}_p = \sqrt{\frac{2\lambda c_d}{c_s}} \quad (2.10)$$

a náklady na jednotku času sú

$$\hat{c}_p = \sqrt{2\lambda c_s c_d}. \quad (2.11)$$

Ak $q < 0$, označme optimálne hodnoty indexom n . K nákladom oproti (2.8) pribudnú náklady na deficit, teda platí

$$\begin{aligned} c(Q, q) &= C(Q, q) / R \\ &= \left(c_d + c_s \frac{Q^2}{2\lambda} + c^- \frac{q^2}{2\lambda} \right) \frac{\lambda}{Q - q} \\ &= \frac{2c_d\lambda + c_s Q^2 + c^- q^2}{2(Q - q)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

a \hat{Q}, \hat{q} možno vypočítať analogicky podľa (2.9). Optimálna výška dodávky je

$$\hat{Q}_n = \sqrt{\frac{2\lambda c^- c_d}{c_s (c^- + c_s)}}, \quad (2.13)$$

optimálny stav zásob pre objednanie ďalšej dodávky je

$$\hat{q}_n = -\sqrt{\frac{2\lambda c_s c_d}{c^- (c^- + c_s)}}, \quad (2.14)$$

medzi dvoma dodávkami uplynie čas

$$\hat{R}_n = \sqrt{\frac{2c_d(c^- + c_s)}{\lambda c^- c_s}} \quad (2.15)$$

a náklady na jednotku času sú

$$\hat{c}_n = \sqrt{\frac{2\lambda c_d c^- c_s}{c^- + c_s}}. \quad (2.16)$$

Keďže cieľom je minimalizovať náklady na jednotku času, porovnaním (2.11) a (2.16) dostávame

$$\hat{c}_n = \sqrt{\frac{2\lambda c_d c^- c_s}{c^- + c_s}} = \sqrt{2\lambda c_d c_s} \sqrt{\frac{c^-}{c^- + c_s}} < \sqrt{2\lambda c_d c_s} = \hat{c}_p,$$

teda pre optimálnu politiku $[\hat{Q}, \hat{q}]$ vždy platí (2.13) – (2.16). Navyše, pomocou (2.13) – (2.16) možno vyriešiť aj úlohu s neprípustným deficitom, zvolením $c^- \rightarrow \infty$. Potom platí

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \lim_{c^- \rightarrow \infty} \hat{Q} = \sqrt{\frac{2\lambda c_d}{c_s}} \\ \tilde{q} &= \lim_{c^- \rightarrow \infty} \hat{q} = 0 \\ \tilde{R} &= \lim_{c^- \rightarrow \infty} \hat{R} = \sqrt{\frac{2c_d}{\lambda c_s}} \\ \tilde{c} &= \lim_{c^- \rightarrow \infty} \hat{c} = \sqrt{2\lambda c_d c_s} \end{aligned} \quad (2.17)$$

čo je ekvivalentné s výsledkami v [11].

Kapitola 3

Stochastické procesy

3.1 Úvod do stochastických procesov

Málokedy býva dopyt po výrobku rovnomerný v čase. Uvažujme rovnaký model ako v predchádzajúcej kapitole, s tým rozdielom, že celkový dopyt má náhodný charakter, ktorý možno opísať náhodným procesom. Podobne ako pri skutočnom trhu možno tento náhodný proces rozložiť na deterministickú a stochastickú zložku. Deterministickú zložku reprezentuje dlhodobý trend (napríklad lineárna funkcia, periodická funkcia, ...) a stochastickú zložku reprezentuje náhodný proces, spĺňajúci isté praktické a formálne vlastnosti.

Definícia 3.1. *Stochastický proces $\{X(t), t \geq 0\}$ s vlastnosťami:*

- $X(0) = 0$
- $X(t)$ má nezávislé a stacionárne prírastky, teda pre $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ sú prírastky $X(t_n) - X(t_{n-1}), X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), \dots, X(t_2) - X(t_1)$ nezávislé náhodné premenné a ak $s < t$, $X(t) - X(s)$ a $X(t-s)$ majú rovnaké rozdelenie, t.j. $P[X(t) - X(s) \in dz] = P[X(t-s) \in dz]$
- $X(t)$ je stochasticky spojitý, t.j. pre $\forall a > 0, s \geq 0 \lim_{t \rightarrow s} P[|X(t) - X(s)| > a] = 0$

sa nazýva Lévyho proces.

Prvá vlastnosť Lévyho procesov v súvislosti s modelovaním dopytu je zrejماً – keďže dopyt za nulový časový interval je nulový, aj jeho náhodná zložka musí byť nulová. Druhá vlastnosť hovorí, že dopyt, resp. jeho náhodnosť v nejakom časovom intervale nezávisí od dopytu po začiatok tohto intervalu. A napokon, stochastická spojitosť je síce iba technický, ale napriek tomu dôležitý predpoklad na to, aby sa s takto definovanými procesmi dalo vhodne narábať. Podrobnú teóriu o Lévyho procesoch možno nájsť napríklad v [20] a [21].

Veta 3.2 (Lévyho - Chinčinova). *Ak $X = (X(t), t \geq 0)$ je Lévyho proces, potom pre jeho charakteristickú funkciu $\phi_t(u) = E[e^{iuX(t)}]$ platí $\phi_t(u) = e^{t\eta(u)}$ pre každé $t \geq 0$ a $u \in \mathbb{R}$, kde*

$$\eta(u) = ib \cdot u - \frac{1}{2} u \cdot au + \int_{\mathbb{R} - \{0\}} [e^{iu \cdot y} - 1 - iu \cdot y 1_{\|y\| < 1}(y)] \nu(dy) \quad (3.1)$$

pre nejaké $b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ a mieru ν na $\mathbb{R} - \{0\}$, pre ktorú platí $\int_{\mathbb{R} - \{0\}} [\|y\|^2 \wedge 1] \nu(dy) < \infty$.

Z Vety 3.2 je teda zrejماً, že každý Lévyho proces sa dá jednoznačne charakterizovať trojicou (b, a, ν) . Pomocou [5] možno tieto tri zložky vysvetliť nasledovne: b reprezentuje lineárnu deterministickú (driftovú) časť procesu $X(t)$, a vyjadruje varianciu Brownovho

pohybu a ν je Lévyho miera v (3.2). Navyše, na základe Lévyho-Itôvej dekompozície Lévyho procesov [5] vyjadruje Lévyho miera čisto skokový proces.

Ak teda uvažujeme $b=0$ (keďže v zvolenom modeli dopytu je deterministická časť modelovaná samostatne, nie ako súčasť procesu $X(t)$, prípadne nemusí byť lineárna), každý Lévyho proces možno vyjadriť ako Brownov pohyb, skokový proces, alebo ich kombináciu. V ďalšom texte sa preto budem zaoberať dvomi „reprezentatívnymi“ procesmi: Wienerovým procesom, čo je matematická formalizácia štandardného Brownovho pohybu, a Poissonovým procesom, čo je typický a v praxi najčastejšie sa vyskytujúci príklad skokového procesu. Charakteristika Wienerovho procesu je zrejme $(0,1,0)$ a charakteristika Poissonovho procesu je $(0,0,\lambda\delta_1)$, kde δ_1 je Diracovo rozdelenie sústreďujúce hmotu v bode 1⁵, teda za jednotku času nastane λ skokov, ktorých veľkosť je 1.

V ďalšom texte bude užitočné aproximovať Poissonovo rozdelenie normálnym, na čo slúži nasledovná veta:

Veta 3.3 (centrálne limitná veta [19]). *Nech ξ_1, ξ_2, \dots je postupnosť nezávislých a rovnako rozdelených náhodných premenných s konečnou varianciou, $\mu = E[\xi_i]$, $\sigma^2 = \text{var}[\xi_i]$, $\zeta_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Potom*

$$\frac{\zeta_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

3.2 Wienerov proces

Wienerov proces je často označovaný aj ako štandardný Brownov pohyb. Ide o jeden zo základných náhodných procesov, často používaný v matematike, fyzike a ekonómii, z ktorého boli odvodené mnohé ďalšie procesy a na jeho základe vznikli niektoré nové vedné disciplíny.

3.2.1 Definície a základné vlastnosti

Štandardný Wienerov proces

Definícia 3.4. *Stochastický proces $\{w(t), t \geq 0\}$ s vlastnosťami:*

- $w(0) = 0$,
- $w(t)$ má nezávislé prírastky, t.j. pre $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ sú prírastky $w(t_n) - w(t_{n-1}), w(t_{n-1}) - w(t_{n-2}), \dots, w(t_2) - w(t_1)$ nezávislé náhodné premenné,
- pre $\forall t \geq 0$ a $h > 0$ platí $w(t+h) - w(t) \sim N(0, h)$, kde $N(\mu, \sigma^2)$ je normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a disperziou σ^2
- funkcia $t \mapsto w(t)$ je skoro všade spojitá,

sa nazýva Wienerov proces.

Z definície je zrejmé, že $w(t)$ má v každom čase normálne rozdelenie s $E[w(t)] = 0$ a $\text{var}[w(t)] = t$. Z toho vyplýva tzv. škálovacia vlastnosť Wienerovho procesu, $w(t) \sim \sqrt{c}w\left(\frac{t}{c}\right)$ (v zmysle distribučnej funkcie) pre ľubovoľné $c > 0$, pretože $\sqrt{c}w\left(\frac{t}{c}\right)$ má tiež normálne rozdelenie a platí $E\left[\sqrt{c}w\left(\frac{t}{c}\right)\right] = \sqrt{c}E\left[w\left(\frac{t}{c}\right)\right] = 0$ a $\text{var}\left[\sqrt{c}w\left(\frac{t}{c}\right)\right] = c\text{var}\left[w\left(\frac{t}{c}\right)\right] = t$.

⁵ Diracovo rozdelenie δ_μ sústreďujúce hmotu v bode μ je pomocou distribučnej funkcie definované nasledovne: $F(x) = 1$ ak $x \geq \mu$, 0 ak $x < \mu$.

Keďže $E[w(t)] = 0$ pre všetky $t \geq 0$, možno ho považovať za akési náhodné fluktuácie okolo daného očakávaného, dlhodobého stavu, teda ide o zvyšok po očistení dopytu od trendu.

Wienerov process driftom

Definícia 3.5. Stochastický proces $\{w^\mu(t), t \geq 0\}$ spĺňajúci $w^\mu(t) = \mu t + w(t)$, $\mu \in \mathbb{R}$ sa nazýva Wienerov proces s driftom.

Proces $w^\mu(t)$ sa niekedy označuje ako Wienerov proces s lineárnym driftom, keďže deterministická časť μt je lineárna. Zrejme platí $E[w^\mu(t)] = \mu t$, $\text{var}[w^\mu(t)] = t$. Takto definovaný proces nemá škálovaciu vlastnosť, keďže pre ľubovoľné $a, c > 0$ platí $E[aw^\mu(\frac{t}{c})] = \frac{a}{c}E[w^\mu(t)]$, kým $\text{var}[aw^\mu(\frac{t}{c})] = \frac{a^2}{c} \text{var}[w^\mu(t)]$. Z toho však vyplýva tzv. podobnosť procesov (v zmysle distribučnej funkcie), teda $\sqrt{c}w^\mu(\frac{t}{c}) \sim w^{\frac{\mu}{\sqrt{c}}}(t)$ pre ľubovoľné $c > 0$. Inak povedané, časový vývoj Wienerovho procesu s ľubovoľným kladným (záporným) driftom sa dá jednoznačne opísať pomocou vývoju procesu s jedným konkrétnym kladným (záporným) driftom, napríklad $\mu = 1$ ($\mu = -1$). V tomto prípade by platilo $w^\mu(t) = \mu^{-1}w^1(\mu^2 t)$.

Wienerov proces s driftom a všeobecnou stochastickou časťou

Definícia 3.6. Stochastický proces $\{w_\sigma^\mu(t), t \geq 0\}$ spĺňajúci $w_\sigma^\mu(t) = \mu t + \sigma w(t)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ sa nazýva Wienerov proces s driftom a všeobecnou stochastickou časťou.

Analogicky ako pri Wienerovom procese s driftom možno ukázať podobnosť pre procesy $w_\sigma^\mu(t)$ a $w^1(t)$ pre $\mu > 0$, resp. $w_\sigma^\mu(t)$ a $w^{-1}(t)$ pre $\mu < 0$. Z definície 3.5 je zrejmé, že

$$w_\sigma^\mu(t) = \mu t + \sigma w(t) = \sigma \left(\frac{\mu}{\sigma} t + w(t) \right) = \sigma w^{\frac{\mu}{\sigma}}(t).$$

Využitím podobnosti dostávame

$$w^{\frac{\mu}{\sigma}}(t) \sim \sigma w^\mu \left(\frac{t}{\sigma^2} \right)$$

a po vynormovaní driftu na $|\mu| = 1$,

$$w^\mu \left(\frac{t}{\sigma^2} \right) \sim \frac{1}{|\mu|} w^{\text{sgn}(\mu)} \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} t \right)$$

dostávame pre $\mu < 0$

$$w_\sigma^\mu(t) \sim \frac{\sigma^2}{-\mu} w^{-1} \left(\frac{\mu^2}{\sigma^2} t \right). \quad (3.2)$$

Vzťah (3.2) je veľmi užitočný pri výpočte, resp. pri tabelovaní hodnôt formúl súvisiacich s „všeobecným“ Wienerovým procesom (napríklad $\int_a^b w_\sigma^\mu(t) dt$). Formulu totiž netreba hľadať pre všeobecný tvar $w_\sigma^\mu(t)$, ale stačí pre $w^1(t)$, $w^{-1}(t)$ a $w(t)$. Namiesto funkcie troch premenných (μ, σ, t) dostávame tri funkciu jednej premennej, t : pre $\mu = 0, \pm 1$.

Vzhľadom k tomu, že Wienerovým procesom budeme v ďalšom texte modelovať stav zásob na sklade počas jednej periódy, očakávaný stav zásob možno považovať za klesajúcu funkciu, preto $\mu < 0$.

3.2.2 Úlohy súvisiace s Wienerovým procesom

Rozdelenie passage time

Označme $W_\sigma^\mu(x_0, t) = x_0 + w_\sigma^\mu(t)$ a $r = \inf\{t \geq 0: W_\sigma^\mu(x_0, t) = 0\}$. r sa nazýva *passage time* (t.j. čas, kedy proces $W_\sigma^\mu(x_0, t)$ dosiahne hodnotu 0).

Veta 3.7 ([3], [9]). Pre hustotu $f_r(t)$, $t \geq 0$ náhodnej premennej r platí

$$f_r(t) = \frac{x_0}{\sqrt{2\pi t^3} \sigma} e^{-\frac{(x_0 + \mu t)^2}{2t\sigma^2}}, \quad (3.3)$$

pre distribučnú funkciu $F_r(t)$, $t \geq 0$ platí

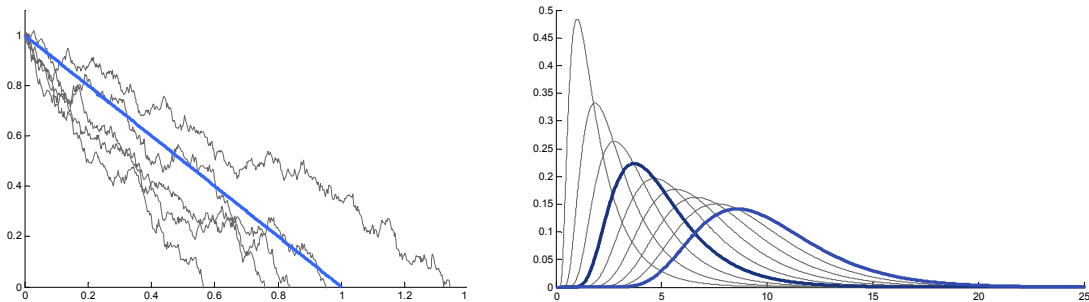
$$F_r(t) = 1 - \Phi\left(\frac{x_0 + \mu t}{\sqrt{t}\sigma}\right) + e^{-\frac{2\mu x_0}{\sigma^2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{x_0 - \mu t}{\sqrt{t}\sigma}\right)\right), \quad (3.4)$$

kde $\Phi(z)$ je distribučná funkcia $N(0,1)$ a stredná hodnota r , R je rovná

$$R = E[r] = \int_0^\infty t f_r(t) dt = -\frac{x_0}{\mu}. \quad (3.5)$$

Vzťah (3.5) dokazuje zaujímavú vlastnosť Wienerovho procesu:

$$E[r] = \inf\{t \geq 0 : E[W_\sigma^\mu(x_0, t)] = 0\}.$$



Obr.3.1: Vľavo: rôzne realizácie procesu $W_1^{-1}(1, t)$, svetlomodrou je zobrazený drift. Vpravo: hustota $f_r(t)$ pre $\mu = -1$, $x_0 = 2, 3, \dots, 10$, tmavomodrou je zobrazená hodnota $x_0 = 5$, svetlomodrou $x_0 = 10$.

Rozdelenie $\int_0^r W_1^\mu(x_0, t) dt$

Označme $Z = \int_0^r W_1^\mu(x_0, t) dt$. Treba si uvedomiť, že v Z vystupujú dve náhodnosti – passage time r a realizácie $W_1^\mu(x_0, t)$ v prípade $r = x$ pre nejaké pevne zvolené x . Z teda možno chápať dvomi spôsobmi – buď ako náhodný vektor $(r, S)^T$, kde r vyjadruje passage time, S vyjadruje $\int_0^r W_1^\mu(x_0, t) dt$ pri podmienke r , alebo ako náhodnú premennú $a = \int_0^r W_1^\mu(x_0, t) dt$ bez podmienky na r .

Veta 3.8. ([4]). Pre hustotu $f_a(x)$ náhodnej premennej a platí

$$f_a(x) = \frac{e^{x_0}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Ai}(\tau_u - x_0 \tau_u^{-1/2}) \text{Bi}(\tau_u) - \text{Bi}(\tau_u - x_0 \tau_u^{-1/2}) \text{Ai}(\tau_u)}{\text{Ai}^2(\tau_u) + \text{Bi}^2(\tau_u)} e^{-x} du,$$

kde $\tau_u = (2u)^{-2/3}$ a $\text{Ai}(z)$ a $\text{Bi}(z)$ sú štandardné, lineárne nezávislé riešenia Airyho diferenciálnej rovnice $y''(z) - zy(z) = 0$. Jej stredná hodnota A je rovná

$$A = E[a] = \frac{x_0}{2\mu^2} - \frac{x_0^2}{2\mu}. \quad (3.6)$$

Vzťah (3.6) možno napísať ako $\frac{1}{2} \cdot \frac{x_0}{-\mu} \cdot \left\{x_0 - \frac{1}{\mu}\right\}$, kde $\frac{x_0}{-\mu} = E[r]$ je priemerná hodnota passage time a $\frac{1}{2} \left\{x_0 - \frac{1}{\mu}\right\}$ je priemerná hodnota $W_1^\mu(x_0, t)$ v intervale $[0, r]$. Ak by teda $E[S|r=x]$ závisela lineárne od x , možno sformulovať nasledovné tvrdenie:

Tvrdenie 3.9 (bez dôkazu). Nech $x, x_0 \geq 0$ a $\mu < 0$ je dané. Potom pre $E[S|r=x]$ platí

$$E[S|r=x] = \frac{1}{2} x \left(x_0 - \frac{1}{\mu}\right). \quad (3.7)$$

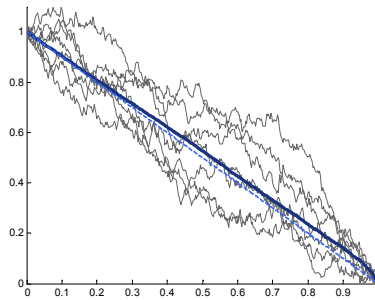
Z definície S a a je zrejme, že $E[a] = E_x[E_S[S|r=x]] = \int_0^\infty E_S[S|r=x]f_r(x)dx$. Keďže $\int_0^\infty xf_r(x)dx = -\frac{x_0}{\mu}$, dosadením do (3.7) je (3.6) splnené.

Tvrdenie 3.10. Nech $x_0 \geq 0$ a $\mu < 0$ je dané. Potom

$$E_x\left[\frac{E[S]}{r} \mid r = x\right] = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{1}{\mu}\right). \quad (3.8)$$

Dôkaz s využitím tvrdenia 3.9.

$$\begin{aligned} E_x\left[\frac{E[S]}{r} \mid r = x\right] &= \int_0^\infty \left(\frac{E[S]}{r} \mid r = x\right) f_r(x) dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{1}{\mu}\right) f_r(x) dx \\ &= \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{1}{\mu}\right) \int_0^\infty f_r(x) dx = \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{1}{\mu}\right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Obr.3.2: realizácie procesu $W_1^{-1}(1,t)$ pri podmienke $r=1$ (teda *first passage time* = 1), tmavomodrou farbou je vyznačená stredná hodnota procesu spĺňajúceho danú podmienku, svetlomodrá zobrazuje drift.

Rozdelenie $\int_0^b (W_\sigma^\mu(x_0,t))^+ dt$ a $\int_0^b (W_\sigma^\mu(x_0,t))^- dt$

Nech $b > 0$ je dané. Uvažujme obsah pod kladnou časťou procesu $W_\sigma^\mu(x_0,t)$. Je zrejme, že výsledok závisí od 4 parametrov, (b, μ, σ, x_0) , čo však možno na základe (3.2) transformovať na dvojrozmerný problém (\hat{b}, \hat{x}_0) . Platí totiž

$$\begin{aligned} \int_0^b (W_\sigma^\mu(x_0,t))^+ dt &= \int_0^b (x_0 + w_\sigma^\mu(t))^+ dt \sim \frac{\sigma^2}{\mu^2} \int_0^{\frac{b\mu^2}{\sigma^2}} \left(x_0 + \frac{\sigma^2}{|\mu|} w^{-1}(t)\right)^+ dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\mu^2} \frac{\sigma^2}{|\mu|} \int_0^{\frac{b\mu^2}{\sigma^2}} \left(\frac{|\mu|}{\sigma^2} x_0 + w^{-1}(t)\right)^+ dt = \frac{\sigma^4}{|\mu|\mu^2} \int_0^{\frac{b\mu^2}{\sigma^2}} \left(\frac{|\mu|}{\sigma^2} x_0 + w^{-1}(t)\right)^+ dt \end{aligned} \quad (3.9)$$

pričom sme využili vlastnosť

$$\int_0^b f(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^{ab} f(t) dt.$$

Stačí teda poznať $\int_0^{\hat{b}} (\hat{x}_0 + w^{-1}(t))^+ dt$ pre všetky $\hat{b}, \hat{x}_0 \geq 0$.

Keďže pre každú trajektóriu platí $\int_0^b W_\sigma^\mu(x_0,t) dt = \int_0^b (W_\sigma^\mu(x_0,t))^+ dt + \int_0^b (W_\sigma^\mu(x_0,t))^- dt$, platí to aj pre ich stredné hodnoty. Navyše

$$E\left[\int_0^b W_\sigma^\mu(x_0,t) dt\right] = \int_0^b E[W_\sigma^\mu(x_0,t) dt] = \int_0^b (x_0 - \mu t) dt = x_0 b - \frac{\mu b^2}{2},$$

teda

$$\int_0^b (W_\sigma^\mu(x_0,t))^- dt = x_0 b - \frac{\mu b^2}{2} - \int_0^b (W_\sigma^\mu(x_0,t))^+ dt.$$

Miernou modifikáciou špeciálneho prípadu, keď $b=1$, $\sigma=1$, $\mu=0$ a $x_0=0$ sa zaoberal Takács v [2]. Presnejšie povedané, vyjadril hustotu $f_{\xi}(x)$ náhodnej premennej $\xi = \int_0^1 |w(t)| dt$ v tvare nekonečného súčtu hypergeometrických a Airyho funkcií. Ukázal, že $E[\xi] = \frac{4}{3\sqrt{2\pi}}$ (*).

Medzi $E[\int_0^1 |w(t)| dt]$ a $E[\int_0^1 (w(t))^+ dt]$ existuje zrejmy súvis. Ku každej trajektórii $w(t)$, $t \in [0,1]$ existuje „opačná“ trajektória $\tilde{w}(t) = -w(t)$, tieto majú rovnakú „pravdepodobnosť“ (tzv. reflection principle) a preto platí $E[\int_0^1 (w(t))^+ dt] = -E[\int_0^1 (w(t))^- dt]$. Samozrejme, každá trajektória má v skutočnosti nulovú pravdepodobnosť, preto ide iba o intuitívne vysvetlenie. Keďže $E[\int_0^1 |w(t)| dt] = E[\int_0^1 (w(t))^+ dt] - E[\int_0^1 (w(t))^- dt]$, $E[\int_0^1 (w(t))^+ dt] = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}}$.

Problém vzniká pri hľadaní vzťahu $E[\int_0^b (x_0 + w^{-1}(t))^+ dt]$. Ukázalo sa, že už aj v prípade nulového driftu a nulového počiatočného stavu ide o veľmi komplikovanú úlohu, hoci s prekvapujúco jednoduchým výsledkom (*). Navyše, pre všeobecné hodnoty b a x_0 nebol tento problém na základe mojich doterajších zistení vyriešený, a preto je možné nájsť $E[\int_0^b (x_0 + w^{-1}(t))^+ dt]$ iba numericky pre konkrétne hodnoty b a x_0 (viď. Tab. 3.3). Pri formulácii nákladov v úlohe teórie zásob sa však ukáže, že existuje prístup, pri ktorom stačí poznať tieto hodnoty pre $x_0 = 0$. Označme preto $\Psi^+(b) = E[\int_0^b (w^{-1}(t))^+ dt]$. Podrobné dáta o $\Psi^+(b)$ možno nájsť v Tab. 3.4 a Obr. 3.5.

Podmienená stredná hodnota

Veta 3.11. *Nech $a \in \mathbb{R}$ a $\tau \in \mathbb{R}^+$. Potom pre všetky $t \in [0, \tau]$ platí*

$$E[W_{\sigma}^{\mu}(x_0, t) | W_{\sigma}^{\mu}(x_0, \tau) = a] = x_0 + \frac{a - x_0}{\tau} t \quad (3.10)$$

bez ohľadu na μ .

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $x_0 = 0$ a $\sigma = 1$. Ak by to neplatilo, zavedením $U_{\sigma}^{\mu}(t) = W_{\sigma}^{\mu}(x_0, t) - x_0$ a využitím podobnosti trajektórii Wienerovho procesu dostávame, že existuje $U^{\mu}(t)$ s rovnakými vlastnosťami ako $W_{\sigma}^{\mu}(x_0, t)$. Na odvodenie podmienenej hustoty $f_{U^{\mu}(t)}(s | U^{\mu}(\tau) = a)$ využijeme spojitú verziu Bayesovej formuly

$$f_X(x | Y = y) = \frac{f_Y(y | X = x) f_X(x)}{f_Y(y)}$$

a nezávislosť a normálne rozdelenie prírastkov U^{μ} : $U^{\mu}(s) \sim N(\mu s, s)$, $U^{\mu}(\tau) \sim N(\mu \tau, \tau)$ a $U^{\mu}(\tau) - U^{\mu}(s) \sim N(\mu(\tau - s), \tau - s)$. Z toho dostávame

$$\begin{aligned} f_{U^{\mu}(t)}(s | U^{\mu}(\tau) = a) &= \frac{f_{U^{\mu}(\tau)}(a | U^{\mu}(t) = s) f_{U^{\mu}(t)}(s)}{f_{U^{\mu}(\tau)}(a)} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-t)}} e^{-\frac{(a-s-\mu(\tau-t))^2}{2(\tau-t)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(s-\mu t)^2}{2t}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(a-\mu\tau)^2}{2\tau}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\tau}{(\tau-t)t}} e^{-\frac{(a-s-\mu(\tau-t))^2}{2(\tau-t)} - \frac{(s-\mu t)^2}{2t} + \frac{(a-\mu\tau)^2}{2\tau}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\tau}{(\tau-t)t}} e^{-\frac{\tau(s-\frac{a}{\tau}t)^2}{2(\tau-t)t}} \end{aligned}$$

teda

$$f_{U^\mu(t)}(s|U^\mu(\tau) = a) \sim N\left(\frac{a}{\tau}t, \frac{(\tau-t)t}{\tau}\right), \quad (3.11)$$

z čoho vyplýva, že $E[U^\mu(t)|U^\mu(\tau) = a] = \frac{a}{\tau}t$ a po spätnom transformovaní dostávame (3.10).■

		b									
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
x_0	0.0	0,006	0,015	0,025	0,035	0,045	0,055	0,065	0,074	0,083	0,092
	0.1	0,012	0,024	0,038	0,051	0,064	0,076	0,088	0,099	0,101	0,120
	0.2	0,019	0,037	0,054	0,071	0,087	0,102	0,117	0,131	0,143	0,156
	0.3	0,027	0,051	0,074	0,095	0,115	0,134	0,151	0,168	0,183	0,198
	0.4	0,036	0,067	0,096	0,121	0,146	0,169	0,190	0,209	0,228	0,245
	0.5	0,045	0,084	0,119	0,151	0,181	0,207	0,233	0,256	0,278	0,299
	0.6	0,055	0,103	0,145	0,183	0,218	0,250	0,280	0,308	0,333	0,357
	0.7	0,065	0,121	0,172	0,217	0,258	0,296	0,331	0,362	0,392	0,419
	0.8	0,075	0,141	0,200	0,252	0,300	0,344	0,384	0,420	0,454	0,487
	0.9	0,085	0,161	0,228	0,288	0,343	0,393	0,440	0,482	0,521	0,569
1.0	0,095	0,180	0,257	0,326	0,389	0,446	0,498	0,548	0,593	0,633	

		b									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_0	0	0,092	0,158	0,197	0,219	0,232	0,240	0,244	0,244	0,247	0,249
	1	0,633	0,919	1,067	1,147	1,192	1,217	1,228	1,242	1,239	1,244
	2	1,517	2,313	2,730	2,957	3,087	3,156	3,198	3,218	3,231	3,234
	3	2,501	4,080	4,999	5,533	5,836	6,003	6,104	6,158	6,213	6,219
	4	3,500	6,018	7,670	8,700	9,325	9,710	9,927	10,047	10,137	10,199
	5	4,500	8,001	10,550	12,280	13,405	14,120	14,576	14,824	14,986	15,125
	6	5,500	10,002	13,509	16,101	17,904	19,133	19,883	20,406	20,746	20,960
	7	6,500	12,000	16,501	20,021	22,665	24,525	25,851	26,696	27,253	27,663
	8	7,499	13,999	19,503	24,011	27,551	30,240	32,183	33,560	34,494	35,118
	9	8,501	16,002	22,501	28,006	32,516	36,099	38,813	40,828	42,272	43,276
	10	9,501	18,001	25,500	31,999	37,500	42,026	45,642	48,365	50,475	51,971

		b									
		0.1	0.2	0.5	1	2	5	10	20	50	100
x_0	0	0,006	0,015	0,045	0,092	0,158	0,232	0,249	0,251	0,251	0,251
	0.1	0,011	0,025	0,063	0,120	0,197	0,282	0,302	0,304	0,305	0,306
	0.2	0,018	0,037	0,087	0,156	0,247	0,347	0,365	0,368	0,370	0,371
	0.5	0,045	0,084	0,180	0,298	0,446	0,592	0,621	0,622	0,623	0,624
	1	0,095	0,180	0,389	0,634	0,922	1,191	1,242	1,245	1,248	1,251
	2	0,195	0,380	0,875	1,517	2,310	3,086	3,245	3,246	3,250	3,251
	5	0,495	0,980	2,375	4,500	8,004	13,422	15,103	15,235	15,248	15,260
	10	0,995	1,980	4,875	9,499	18,003	37,517	52,000	55,164	55,194	55,227
	20	1,995	3,980	9,875	19,501	37,997	87,503	150,023	204,192	210,297	211,303
	50	4,995	9,980	24,876	49,500	98,000	237,507	450,017	800,243	1261,01	1276,32
	100	9,995	19,980	49,875	99,500	198,004	487,499	949,973	1800,11	3750,07	5021,40

Tab.3.3: Výsledky simulácií $E[\int_0^b (x_0 + w^{-1}(t))^+ dt]$ pre rôzne hodnoty b a x_0 . Pre každú dvojicu (b, x_0) bol interval $[0, b]$ diskretizovaný na $\sqrt{b} \cdot 10^3$ bodov a proces $x_0 + w^{-1}(t)$ bol simulovaný 10^6 -krát.

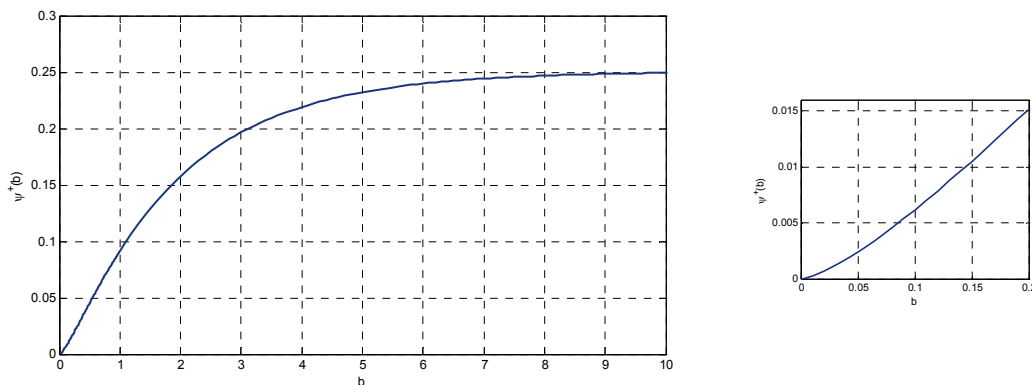
b	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0,00000	0,00024	0,00066	0,00117	0,00175	0,00239	0,00308	0,00381	0,00456	0,00535
0.1	0,00616	0,00700	0,00785	0,00872	0,00961	0,01052	0,01143	0,01236	0,01330	0,01424
0.2	0,01520	0,01616	0,01714	0,01812	0,01910	0,02010	0,02109	0,02209	0,02309	0,02409
0.3	0,02510	0,02611	0,02712	0,02813	0,02915	0,03016	0,03118	0,03219	0,03321	0,03423
0.4	0,03524	0,03625	0,03726	0,03828	0,03929	0,04030	0,04131	0,04232	0,04332	0,04433
0.5	0,04533	0,04633	0,04733	0,04833	0,04932	0,05031	0,05131	0,05229	0,05328	0,05427
0.6	0,05525	0,05623	0,05720	0,05817	0,05914	0,06011	0,06107	0,06203	0,06299	0,06394
0.7	0,06489	0,06584	0,06678	0,06772	0,06866	0,06959	0,07052	0,07145	0,07238	0,07330
0.8	0,07421	0,07513	0,07604	0,07695	0,07785	0,07875	0,07965	0,08054	0,08143	0,08232
0.9	0,08320	0,08408	0,08496	0,08583	0,08669	0,08756	0,08842	0,08927	0,09012	0,09097

b	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9
1	0,09181	0,10001	0,10780	0,11520	0,12225	0,12896	0,13534	0,14140	0,14715	0,15263
2	0,15783	0,16276	0,16744	0,17185	0,17604	0,17999	0,18374	0,18728	0,19064	0,19383
3	0,19685	0,19971	0,20242	0,20497	0,20738	0,20963	0,21176	0,21377	0,21569	0,21750
4	0,21922	0,22085	0,22241	0,22389	0,22529	0,22661	0,22786	0,22904	0,23016	0,23123
5	0,23224	0,23321	0,23411	0,23497	0,23579	0,23657	0,23730	0,23801	0,23868	0,23931
6	0,23991	0,24047	0,24101	0,24152	0,24200	0,24246	0,24289	0,24329	0,24368	0,24404
7	0,24439	0,24471	0,24502	0,24531	0,24559	0,24585	0,24610	0,24634	0,24656	0,24677
8	0,24697	0,24716	0,24735	0,24752	0,24769	0,24785	0,24800	0,24815	0,24829	0,24842
9	0,24855	0,24867	0,24878	0,24888	0,24898	0,24907	0,24916	0,24924	0,24932	0,24940

b	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	0,24947	0,24998	0,25029	0,25048	0,25060	0,25068	0,25073	0,25076	0,25078	0,25080

b	20	22	24	26	28	30	40	50	100	1000
	0,25081	0,25082	0,25082	0,25083	0,25083	0,25084	0,25085	0,25085	0,25086	0,25086

Tab.3.4: Výsledky simulácií $\Psi^+(b)$. Pre každé b bol interval $[0, b]$ diskretizovaný na $\sqrt{b} \cdot 10^3$ bodov a proces $w^{-1}(t)$ bol simulovaný 10^6 -krát.



Obr.3.5: Graf $\Psi^+(b)$. Vľavo: $b \in [0, 10]$, vpravo: $b \in [0, 0.2]$. Hoci je $\Psi^+(b)$ na väčšine svojho definičného oboru konkávna, pre b blízke 0 je $\Psi^+(b)$ konvexná. Túto vlastnosť možno vysvetliť tak, že pre malé hodnoty b má náhodnosť procesu $w(t)$ väčší vplyv na celkový obsah pod kladnou časťou, ako jeho drift.

3.3 Poissonov proces

Poissonov proces $X(t)$ vyjadruje počet udalostí rovnakého typu, ktoré nastali do času t (začínajúc v čase 0). Analogicky platí, že počet udalostí v časovom intervale $[a, b)$ je rovný $X(b) - X(a)$ a má Poissonovo rozdelenie.

3.3.1 Definície a základné vlastnosti

Definícia 3.12. Stochastický proces $\{X(t), t \geq 0\}$ s vlastnosťami:

- $X(t)$ má nezávislé prírastky, t.j. pre $\forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ sú prírastky $X(t_n) - X(t_{n-1}), X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), \dots, X(t_2) - X(t_1)$ nezávislé náhodné premenné,
- $\lim_{\Delta t \downarrow 0} P(X(t + \Delta t) - X(t) = 1) = \lambda \Delta t$,
- $\lim_{\Delta t \downarrow 0} P(X(t + \Delta t) - X(t) > 1) = 0$

sa nazýva homogénny Poissonov proces s parametrom λ

Veta 3.13. ([11]). Pre pravdepodobnostné rozdelenie Poissonovho procesu platí

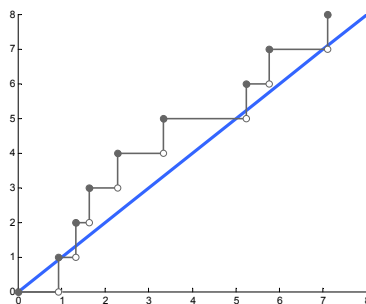
$$P[X(T+t) - X(T) = k] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (3.12)$$

pre ľubovoľné T .

Pravdepodobnostné rozdelenie Poissonovho procesu má teda Poissonovo rozdelenie s parametrom λt . Sila Vety 3.13 spočíva práve v tom, že existuje jediný proces, ktorý spĺňa vlastnosti uvedené v Definícii 3.12 a tento proces má práve Poissonovo rozdelenie s parametrom λt .

Na realizácie Poissonovho procesu sa možno pozerat' dvomi spôsobmi: 1.) ako na funkciu času $t \mapsto X(t)$, v tom prípade ide o nezápornú neklesajúcu funkciu polospojité sprava (t.j. $\lim_{s \downarrow t} X(s) = X(t)$, viď Obr. 3.6), ktorá nadobúda iba celočíselné hodnoty, jej počiatok je v bode $[0,0]$ a k skoku dochádza vtedy, keď nastane udalosť, 2.) ako na body na kladnej polosi $[0, \infty)$ vyjadrujúce čas, ktorý uplynie medzi dvomi udalosťami (preto je Poissonov proces zarad'ovaný do kategórie tzv. bodových procesov). Reprezentácie pomocou 1.) a 2.) sú ekvivalentné a zo známosti jednej možno vyjadriť druhú.

Pre homogénny poissonov proces platí $E[X(t)] = \lambda t$, kde $\lambda = \text{konšt.}$ je daný priemerný počet skokov (udalostí) za jednotku času. Ak $\lambda = \lambda(t)$ závisí od času, ide o nehomogénny Poissonov proces a platí $E[X(t)] = \int_0^t \lambda(t) dt$. V oboch prípadoch teda už samotný proces opisuje okrem náhodnosti výskytu udalostí (padanie gólov, príchod zákazníkov, dopyt po výrobkoch) aj ich dlhodobý trend.



Obr.3.6: realizácia Poissonovho procesu pre $\lambda = 1$; k 8. udalosti došlo približne v čase $t = 7,1$, lineárnou funkciou je znázornený dlhodobý trend ($f(t) = \lambda t$).

Momenty Poissonovho procesu

Stredná hodnota Poissonovho procesu, $E[X(t)]$ je

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P[X(t) = k] = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \lambda t \end{aligned} \quad (3.13)$$

a keďže pre $E[X(t)^2]$ platí

$$\begin{aligned} E[X(t)^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot P[X(t) = k] = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda t e^{-\lambda t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\ &= \lambda t e^{-\lambda t} \left(\lambda t \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} + e^{\lambda t} \right) = \lambda t e^{-\lambda t} (\lambda t e^{\lambda t} + e^{\lambda t}) = (\lambda t)^2 + \lambda t \end{aligned}$$

jeho disperzia je rovná

$$\text{var}[X(t)] = E[X(t)^2] - E[X(t)]^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t. \quad (3.14)$$

Generovanie trajektórií Poissonovho procesu

Označme čas, kedy došlo k i -tej udalosti, ako t_i . Z 1. vlastnosti Poissonovho procesu máme, že t_i sú nezávislé a rovnako rozdelené náhodné premenné. Čas, ktorý uplynie medzi dvomi udalosťami je spojitá náhodná premenná S s distribučnou funkciou

$$F_S(t) = P[S \leq t] = 1 - P[S > t] = 1 - e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t},$$

pričom sme využili vlastnosť, že na intervale dĺžky t nastalo 0 udalostí. Platí teda $S \sim \text{Exp}(\lambda)$ a hustota S je daná ako

$$f_S(t) = F_S'(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (3.15)$$

čo je hustota exponenciálneho rozdelenia s parametrom λ a jeho stredná hodnota je rovná $E[S] = \lambda^{-1}$. Medzi (3.13) a (3.15) je zrejмый súvis - ak za jednotku času nastane priemerne λ udalostí, priemerná doba medzi dvomi udalosťami je λ^{-1} .

Vzhľadom k tomu, že proces $X(t)$ má nezávislé prírastky, jeho trajektórie možno konštruovať pomocou (3.15) postupne, nasledovným algoritmom:

- 1: $i = 0; \tau = 0;$
- 2: realizácia $S \sim \text{Exp}(\lambda)$
- 3: $X(t) = i \quad \forall t \in [\tau, \tau + S)$
- 4: $i = i + 1; \tau = \tau + S; \text{GOTO } 2$

3.3.2 Úlohy súvisiace s Poissonovým procesom**Rozdelenie času n -tej udalosti**

Označme T_n čas, kedy dôjde k n -tej udalosti. T_n je spojitá náhodná premenná definovaná ako

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : X(t) = n\}$$

a zrejme pre ňu platí

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = 1 - P(T_n > t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Pomocou distribučnej funkcie možno jednoducho odvodiť hustotu: $f_{T_n}(t) = F_{T_n}'(t)$,

$$\begin{aligned} f_{T_n}(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(\lambda t)^{k-1} \lambda}{k!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(\lambda t)^k}{k!} - \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \left(1 + \left(\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} - 1 \right) \right) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{\lambda (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned} \quad (3.16)$$

a strednú hodnotu $E[T_n]$

$$\begin{aligned} E[T_n] &= \int_0^{\infty} t f_{T_n}(t) dt = \int_0^{\infty} t \frac{\lambda (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} (\lambda t)^n e^{-\lambda t} dt = \left| \begin{array}{l} \lambda t = s \\ dt = ds / \lambda \end{array} \right| \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} s^n e^{-s} \frac{ds}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda (n-1)!} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{\lambda (n-1)!} = \frac{n}{\lambda} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Podmienená stredná hodnota

Veta 3.14. Nech $n \in \mathbb{N}$ a $\tau \in \mathbb{R}^+$. Potom pre všetky $t \in [0, \tau]$ platí

$$E[X(t) | X(\tau) = n] = t \frac{\tau}{n} \quad (3.18)$$

bez ohľadu na λ .

Dôkaz. Proces $X(t)$ možno vyjadriť pomocou náhodného vektora $\xi = (t_0, t_1, t_2, \dots, t_n)^T$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \tau$, kde t_i vyjadruje čas, kedy došlo k i -tej udalosti. Pre podmienenú distribučnú funkciu $F_{\xi}(\mathbf{s} | X(\tau) = n)$, $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_n)$, $s_0 = 0$ platí

$$P[t_1 \leq s_1, \dots, t_n \leq s_n | X(\tau) = n] = \frac{P[\{t_1 \leq s_1, \dots, t_n \leq s_n\} \cap \{X(\tau) = n\}]}{P[X(\tau) = n]}$$

Využitím vlastnosti $t_{i+1} - t_i \leq u \Leftrightarrow X(t_i + u) - X(t_i) = 1$ a stacionarity Poissonovho procesu $\{X(t_i + u) - X(t_i) = 1\} = \{X(u) = 1\}$ dostávame

$$\begin{aligned} p &= P[\{t_1 \leq s_1, \dots, t_n \leq s_n\} \cap \{X(\tau) = n\}] \\ &= P[X(s_1) - X(s_0) = 1, \dots, X(s_n) - X(s_{n-1}) = 1, X(\tau) - X(s_n) = 0] \\ &= \left(\prod_{i=1}^n P[X(s_i) - X(s_{i-1}) = 1] \right) P[X(\tau) - X(s_n) = 0] \\ &= \left(\prod_{i=1}^n e^{-\lambda(s_i - s_{i-1})} \lambda (s_i - s_{i-1}) \right) e^{-\lambda(\tau - s_n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\prod_{i=1}^n (s_i - s_{i-1}) \right) \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n (s_i - s_{i-1}) - \lambda(\tau - s_n)} \\
&= \left(\prod_{i=1}^n (s_i - s_{i-1}) \right) \lambda^n e^{-\lambda \tau}
\end{aligned}$$

teda,

$$P[t_1 \leq s_1, \dots, t_n \leq s_n | X(\tau) = n] = \frac{\lambda^n e^{-\lambda \tau} \prod_{i=1}^n (s_i - s_{i-1})}{(\lambda \tau)^n e^{-\lambda \tau}} = \frac{n!}{\tau^n} \prod_{i=1}^n (s_i - s_{i-1})$$

a pre podmienenú hustotu

$$f_{\xi}(\mathbf{s} | X(\tau) = n) = \frac{\partial^n}{\partial s_1 \dots \partial s_n} [t_1 \leq s_1, \dots, t_n \leq s_n | X(\tau) = n]$$

platí

$$f_{\xi}(\mathbf{s} | X(\tau) = n) = \frac{n!}{\tau^n} \quad (3.19)$$

bez ohľadu na λ .

Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblasť, na ktorej má náhodný vektor $(t_1, \dots, t_n)^T$ nenulovú hustotu. Keďže n -tica t_1, \dots, t_n je usporiadaná a platí $0 < t_1 < \dots < t_n < \tau$, Ω je definovaná ako $\Omega = \{x_n \in \mathbb{R}_+^n : 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \tau\}$. Ukážeme, že všetky t_i sú z rovnomerného rozdelenia. Aby dané tvrdenie platilo, hustota t_i musí byť pre všetky i konštantná – označme ju c a navyše musí platiť $\int_{\Omega} c \, dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$. Keďže $\int_{\Omega} 1 \, dx_1 dx_2 \dots dx_n = \frac{\tau^n}{n!}$, $c = \frac{n!}{\tau^n}$.

Náhodný vektor $(t_1, \dots, t_n)^T$ preto možno považovať za usporiadanú n -ticu nezávislých náhodných premenných s rovnomerným rozdelením na $[0, \tau]$. Hustota rovnomerného rozdelenia spĺňa $f_{t_i}(t) = \tau^{-1}$ pre $t \in [0, \tau]$, 0 ináč.

Označme $Y(t) = \#\{i : t_i \leq t\}$, teda počet udalostí, ktoré nastali do času t . Je zrejmé, že $Y(t) \sim (X(t) | x(\tau) = n)$. Keďže t_i sú z rovnomerného rozdelenia,

$$P[Y(t) = k] = \binom{n}{k} (t\tau^{-1})^k (1 - t\tau^{-1})^{n-k},$$

teda $Y(t) \sim \text{bin}(n, t\tau^{-1})$. Preto $E[Y(t)] = E[X(t) | x(\tau) = n] = nt\tau^{-1}$. ■

Dôsledok 3.15. Ak $t_n = \tau$, potom

$$E[X(t) | x(\tau) = n] = \frac{(n-1)t}{\tau} \quad \forall t \in [0, \tau) \quad (3.20)$$

Dôsledok 3.15 vyplýva bezprostredne z Vety 3.14, keďže $X(\tau - \varepsilon) = n - 1$ pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$.

Kapitola 4

Dopyt modelovaný stochastickým procesom

V súlade s predchádzajúcou teoretickou kapitolou možno celkový dopyt opísať procesom s časovo nezávislými prírastkami; avšak aj v takomto náhodnom procese možno pozorovať trend. Všeobecne možno celkový dopyt v čase $[T, T + t)$ označiť ako $D(T, t)$ a platí

$$D(T, t) = F[T, t, L(t)], \quad (4.1)$$

kde $F[T, t, L(t)]$ je všeobecný funkcionál a $L(t)$ je Lévyho proces.

Ako bolo spomenuté v prechádzajúcej kapitole, typickí „predstavitelia“ Lévyho procesov sú Wienerov a Poissonov proces. Okrem modelovania dopytu pomocou oboch procesov sa zameriam aj na rozdiely pri jednotlivých typoch úloh, hlavne z hľadiska prípustnosti deficitu zásob na sklade a doby dodávky. Oneskorená dodávka totiž implikuje prípustnosť deficitu a ako už bolo spomenuté v tretej kapitole, v tomto prípade neexistujú pre Wienerov proces potrebné vzťahy v tvare uzavretých formúl. Optimálnu politiku preto nemožno napísať ako funkciu závislú od vstupných parametrov, ale iba ako návod, ktorý ju dokáže nájsť s ľubovoľnou, vopred stanovenou presnosťou.

Postupy, ako sformulovať náklady na skladovanie počas jednej periódy, resp. na jednotku času, sú v prípade dopytu modelovaného Wienerovým procesom a Poissonovým procesom veľmi podobné. Výsledné náklady sú napriek tomu do značnej miery rozdielne, a to z dvoch hlavných dôvodov: 1. Poissonov proces je monotónny, ale Wienerov proces nie je, 2. Poissonov proces je skokový s jednotkovou veľkosťou skoku, kým Wienerov proces je spojitý s náhodnou veľkosťou skoku. Ako sa ukáže, v niektorých prípadoch vedie matematická formulácia zdanlivo jednoduchšej úlohy teórie zásob na taký problém, ktorý je nielen analyticky neriešiteľný, ale pri numerickom riešení dosahuje veľkú výpočtovú zložitosť.

4.1 Dopyt modelovaný Wienerovým procesom s driftom

Vzhľadom k tomu, že vzťahy užitočné pre teóriu zásob sú na hranici riešiteľnosti analytickými metódami už pre obyčajný Wienerov proces, v ďalšom texte uvažujme Wienerov proces (resp. zovšeobecnený Wienerov proces) ako zvyšok po odpočítaní trendovej časti od celkového dopytu, teda $F[T, t, w(t)] = D_d(T, t) + \sigma w(t)$, teda

$$D(T, t) = D_d(T, t) + w_\sigma(t), \quad (4.2)$$

kde $D_d(T, t)$ je daná funkcia (drift) spĺňajúca (2.1), ktorá opisuje deterministickú časť dopytu. $D(T, t)$ vyjadruje celkový očakávaný dopyt po danom výrobku v časovom intervale $[T, T+t]$ a $\sigma \geq 0$ určuje neistotu na trhu (ak $\sigma = 0$, dopyt je deterministický a riadi sa teóriou z predchádzajúcej časti, s rastúcou hodnotou σ rastie vplyv náhodnej zložky).

Je zrejmé, že proces $w_\sigma(t)$ nie je monotónny, keďže prírastky môžu byť kladné aj záporné. Navyše neexistuje taká funkcia $D_d(T, t)$ spojitá v t , pre ktorú by bola $D(T, t)$ monotónna v t , keďže pre $\forall \varepsilon > 0$ a $\forall t \geq \varepsilon$ platí

$$P[|w(t+\varepsilon) - w(t)| > |g(T, t+\varepsilon) - g(T, t)|] > 0$$

pre ľubovoľnú funkciu g spojitú v t . Dochádza teda k istým nepresnostiam, keďže zásoby do skladu pribúdajú spravidla iba v čase dodávky, kým pri procese $D(T, t)$ je v ľubovoľnom netriviálnom intervale nekonečne veľa kladných, aj záporných prírastkov. Ako však bolo spomenuté vyššie, na modelovanie náhodnosti nie je možné využiť spojitý proces s iným pravdepodobnostným rozdelením (napríklad takým, kde by náhodná premenná X_i nadobúdala s nenulovou pravdepodobnosťou iba kladné, resp. záporné hodnoty).

Vzhľadom k tomu, že spotreba je náhodná, náklady C_i na i -tu periódu, ako aj jej dĺžka r_i sú náhodné premenné (okrem prípadu, keď je dodávka oneskorená a žiada sa o ňu v a priori stanovenom čase T_{i+1}^- ; vtedy sú náhodné iba náklady na i -tu periódu a dĺžka periódy r_i je deterministická). Model (2.3) – (2.6) ostáva naďalej v platnosti, pri optimalizácii podľa (1.1) – (1.4) však treba brať do úvahy strednú hodnotu cez všetky trajektórie $D(T, t)$.

Pozrime sa bližšie na vzťahy (1.1) – (1.4). Vo vzťahoch (1.1) a (1.2) nevystupuje dĺžka periódy, dôležitá je iba stredná hodnota nákladov. Odvodzovať strednú hodnotu na základe známosti hustoty však nie je vhodné - ako sa v [3] a [4] ukázalo, hustota nákladov sa už v prípade lineárneho driftu nedá vyjadriť v tvare analytických funkcií. Omnoho efektívnejší spôsob je preto vyjadriť strednú hodnotu pomocou derivácie charakteristickej funkcie. Problém je však v prípade (1.3) a (1.4) o čosi zložitejší. Okrem strednej hodnoty dĺžky periódy, ktorú je opäť vhodné vypočítať pomocou derivácie jej charakteristickej funkcie, sa vyžaduje aj stredná hodnota nákladov na jednotku času. Tento pojem možno chápať ako priemer nákladov na jednotku času pri dostatočnom počte simulácií dopytu, kde každá simulácia beží od času $t = 0$ až po moment, kedy príde ďalšia dodávka (v prípade okamžitej dodávky je to moment, kedy proces $D(T, t)$ prvýkrát dosiahne hodnotu 0 (*first passage time*)). Pokiaľ uvažujeme iba také realizácie procesu $D(T, t)$, pre ktoré platí $r_i = x$ pre nejaké pevne zvolené x (v prípade okamžitej dodávky, pri oneskorenej dodávke je toto x determinované politikou T_{i+1}^-), dostaneme podmienené rozdelenie celkových nákladov na skladovanie počas jednej periódy (a teda aj nákladov na jednotku času, keďže x je pevne dané), ktorého strednú hodnotu označme C_x . Potom možno strednú hodnotu nákladov na jednotku času pri všetkých realizáciách $D(T, t)$ vypočítať ako $E_x[(C_x + C_D(Q_i))/x]$. Keďže x je dĺžka periódy, $x \in [0, \infty)$ a napokon

$$\begin{aligned} E\left[\frac{C_i}{r_i} \mid r_i = x\right] &= E\left[\frac{C_x + C_D(Q_i)}{x}\right] = \int_0^\infty \frac{C_x + C_D(Q_i)}{x} f_r(x) dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{x} E\left[C_D(Q_i) + \int_0^x C_M[\max[Q_i - \tilde{D}(T_i, t), 0]] \right. \\ &\quad \left. + C_S[\min[Q_i - \tilde{D}(T_i, t), 0]] dt\right] f_r(x) dx \end{aligned} \quad (4.3)$$

kde $f_r(x)$ je hustota r_i . Pokiaľ je dodávka oneskorená, x je determinované zvolenou politikou a náklady na jednotku času sa redukujú na integrand z (4.3).

4.1.1 Štandardný model s lineárnym driftom bez deficitu

Podobne ako v kapitole 2, uvažujme nasledovný problém stochastickej teórie zásob na nekonečnom horizonte s okamžitou dodávkou, ale bez prípustnosti deficitu, kde dopyt je riadený Wienerovým procesom s driftom:

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \lambda & \lambda > 0 \\ C_D(Q_i) &= c_d & c_d > 0 \\ C_M[Q(t)] &= Q(t) \\ \sigma &= 1\end{aligned}\tag{4.4}$$

Dopyt je opäť konštantný, preto bude optimálna politika v každej perióde rovnaká a index označujúci číslo periódy možno vynechať. Rovnako ako v prípade deterministického dopytu možno použiť argument, prečo je optimálne doviesť ďalšiu dodávku až pri vyčerpaní zásob. V tomto prípade však treba brať do úvahy očakávaný stav zásob počas príslušných intervalov, a nie jednu konkrétnu realizáciu ich vývoja.

Na základe (4.4) je zrejmé, že vývoj zásob počas jednej periódy možno vyjadriť pomocou $W_1^{-\lambda}(Q, t)$ definovaným v kapitole 3.2.2, kde $-\lambda$ je lineárny drift, teda priemerne ubudne zo skladu λ jednotiek tovaru za jednotku času a Q je počiatočný stav zásob.

Keďže optimálna politika sa riadi (1.3), cieľom je nájsť $R = E[r]$ podľa (2.3) a $E\left[\frac{C}{r} | r = x\right]$ podľa (4.3). Kľúčovú úlohu pri tomto probléme zohráva hustota $f_r(t)$ náhodnej premennej r a C_x , čo je stredná hodnota nákladov na skladovanie počas jednej periódy pri danom čase x , kedy sa vyčerpajú zásoby.

Využitím (3.5) dostávame

$$R = \frac{Q}{\lambda},\tag{4.5}$$

čo je rovnaké ako v prípade deterministického dopytu. Napriek rovnakej očakávanej dĺžke jednej periódy sa však nemusia rovnať očakávané náklady na túto periódu. Pozrime sa teraz na C_x . Na základe (3.6) platí $E[C_x] = \frac{Q}{2\lambda^2} + \frac{Q^2}{2\lambda}$, teda náklady na skladovanie počas jednej periódy sú vyššie ako pri deterministickom dopyte. Rozdiely v nákladoch medzi týmito dvomi modelmi veľmi dobre ilustruje Obr. 3.2.

Napokon možno nájsť celkové náklady na jednotku času definované v (4.3). Pomocou (3.7) a (3.8) dostávame

$$\begin{aligned}E\left[\frac{C}{r} | r = x\right] &= E\left[\frac{c_d + C_x}{r} | r = x\right] = E\left[\frac{c_d}{r} | r = x\right] + E\left[\frac{C_x}{r} | r = x\right] \\ &= c_d E\left[\frac{1}{r} | r = x\right] + \frac{1}{2} \left(Q + \frac{1}{\lambda}\right) \\ &= c_d \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \frac{Q}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{(Q-\lambda x)^2}{2x}} dx + \frac{1}{2} \left(Q + \frac{1}{\lambda}\right) \\ &= c_d \left(\frac{1}{Q^2} + \frac{\lambda}{Q}\right) + \frac{1}{2} \left(Q + \frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned}\tag{4.6}$$

(4.6) ponúka zaujímavý výsledok. Pokiaľ by sa počítala stredná hodnota celkových nákladov na jednotku času ako podiel strednej hodnoty nákladov a strednej hodnoty dĺžky periódy, platilo by $E[c] = \frac{E[C]}{E[r]}$, teda

$$E[c] = \left(c_d + \frac{Q}{2\lambda^2} + \frac{Q^2}{2\lambda} \right) \frac{\lambda}{Q} = c_d \frac{\lambda}{Q} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{Q}{2}. \quad (4.7)$$

V skutočnosti však $\frac{E[C]}{E[r]} \neq E\left[\frac{C}{r}\right]$, preto platí vzťah (4.6) a navyše $E\left[\frac{C}{r}\right] = \frac{E[C]}{E[r]} + \frac{c_d}{Q^2}$.

Porovnaním (2.8), (4.5) a (4.6) vidno, že hoci je v deterministickom a stochastickom modeli očakávaná dĺžka periódy rovnaká, očakávané náklady na skladovanie počas tejto periódy sú pri náhodnom dopyte väčšie. Ekvivalenciu v prípade dĺžky periódy možno vysvetliť tak, že v dlhodobom horizonte sú očakávané odchýlky od trendu nulové (trend tak predsa bol zvolený), preto k vyčerpaniu dôjde priemerne vtedy, kedy by sa zásoby vyčerpali pri dopyte modelovanom iba trendom. Rozdiel v nákladoch na periódu spôsobuje fakt, že pokiaľ je daný nejaký koncový čas x , kedy zásoby prvýkrát klesnú na nulu, očakávaná trajektória $Q(t)$, $t \in [0, x]$ leží „nad“ trajektóriou $\tilde{Q}(t) = Q - \lambda t$, ktorá by vznikla pri deterministickom dopyte, keďže v intervale $[0, x]$ nemôže $Q(t)$ nadobúdať záporné hodnoty a teda je vychýlená smerom „nahor“ (vid' Obr. 3.2). Očakávané náklady spôsobené touto odchýlkou sú práve $Q/2\lambda^2$ počas jednej periódy, resp. $c_d/Q^2 + 1/2\lambda$ na jednotku času.

4.1.2 Zovšeobecný model s lineárnym driftom bez deficitu

Uvažujme teraz zovšeobecnú úlohu (4.4); symbolom „ \sim “ označme premenné pre zovšeobecnú úlohu (4.4), analogicky s pôvodnou úlohou (4.4): nech $C_M[Q(t)] = c_s Q(t)$, $c_s > 0$ a $\sigma \geq 0$ je dané. Takúto úlohu možno plne charakterizovať štvoricou $(\sigma, \lambda, c_d, c_s)$. Na zovšeobecnú úlohu sa možno pozerat' dvomi spôsobmi: buď sa využije teória z časti 4.1.1 s dosadením všeobecnej hodnoty σ namiesto $\sigma = 1$, alebo sa transformuje úloha (4.4) na novú úlohu s $\sigma = 1$, na túto úlohu sa priamo aplikuje teória z časti 4.1.1 a výsledok sa prevedie naspäť pre všeobecnú hodnotu σ . Niektoré potrebné vzťahy však boli odvodené iba pre $\sigma = 1$, preto treba využiť druhý prístup. Navyše, druhý prístup umožní lepšie nazrieť na štruktúru štvorice $(\sigma, \lambda, c_d, c_s)$ a ukáže sa, že jeden parameter možno vyjadriť ako kombináciu zvyšných troch.

Ak $\sigma = 1$ a $c_s = 1$, zrejme platí (4.5) - (4.6). Nemusí však platiť $\sigma = 1$, resp. $c_s = 1$, v takom prípade dostávame proces $Q(t)$ v tvare

$$Q(t) = Q - \lambda t + \sigma w(t). \quad (4.8)$$

Každú trajektóriu $Q(t)$ procesu (4.8) však možno transformovať na trajektóriu

$$\tilde{Q}(t) = \tilde{Q} - \tilde{\lambda} t + w(t), \quad (4.9)$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= Q / \sigma \\ \tilde{\lambda} &= \lambda / \sigma \end{aligned} \quad (4.10)$$

a proces $\tilde{Q}(t)$ už spĺňa (4.5) a (4.6). Preto možno dosadiť (4.9) a (4.10) do (4.5) a platí $\tilde{R} = E[\tilde{r}] = \frac{\tilde{Q}}{\tilde{\sigma}} = \frac{Q}{\sigma} / \frac{\lambda}{\sigma} = \frac{Q}{\lambda} = R$. Pozrime sa teraz na (4.6) v prípade zovšeobecnenej úlohy (4.4). Stredná hodnota nákladov na skladovanie počas jednej periódy je na základe (3.5) rovná

$$E[\tilde{C}_x] = c_s \frac{\tilde{Q}}{2\tilde{\lambda}^2} + c_s \frac{\tilde{Q}^2}{2\tilde{\lambda}} \quad (4.11)$$

a \tilde{C}_x podľa (3.6) spĺňa

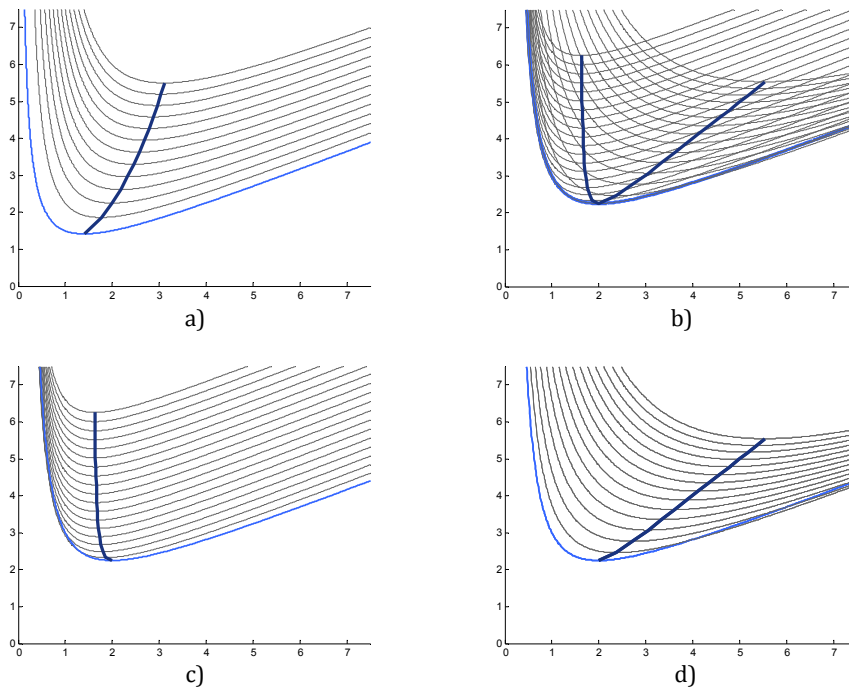
$$\tilde{C}_x = c_s \frac{1}{2} x \left(\tilde{Q} + \frac{1}{\tilde{\lambda}} \right). \quad (4.12)$$

Treba si však uvedomiť, že $\tilde{Q}(t)$ začína z bodu $\tilde{Q}(0) = Q(0)/\sigma$ a v každom čase t nadobúda σ – krát menšie hodnoty ako $Q(t)$. Ak si proces $Q(t)$ predstavíme ako graf funkcie $y = Q(x)$, transformáciu možno chápať ako zmenu mierky na osi y . Preto treba náklady na skladovanie spätne transformovať – vynásobiť σ , náklady na dodávku c_d však stále ostávajú rovnaké. Keďže zmena mierky rovnako ovplyvňuje aj hustotu r , po spätnej transformácii možno (4.6) na základe (4.9) a (4.10) prepísať na

$$\begin{aligned} E\left[\frac{C}{r} \mid r = x\right] &= E\left[\frac{c_d + \sigma \tilde{C}_x}{\tilde{r}} \mid \tilde{r} = x\right] = E\left[\frac{c_d}{\tilde{r}} \mid \tilde{r} = x\right] + \sigma E\left[\frac{\tilde{C}_x}{\tilde{r}} \mid \tilde{r} = x\right] \\ &= c_d E\left[\frac{1}{\tilde{r}} \mid \tilde{r} = x\right] + \frac{1}{2} \left(\tilde{Q} + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right) = c_d \int_0^{\infty} \frac{1}{\tilde{r}} \tilde{f}_r(x) dx + \frac{1}{2} \left(\tilde{Q} + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right) \\ &= c_d \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \frac{\tilde{Q}}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{(\tilde{Q} - \tilde{\lambda}x)^2}{2x}} dx + \frac{1}{2} \left(\tilde{Q} + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right) \\ &= c_d \left(\frac{1}{\tilde{Q}^2} + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{Q}}\right) + \frac{1}{2} \left(\tilde{Q} + \frac{1}{\tilde{\lambda}}\right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

kde $\tilde{f}_r(x)$ označuje hustotu času, kedy dôjde k vyčerpaniu zásob v prípade procesu $\tilde{Q}(t)$. Do (4.13) možno spätne dosadiť (4.9) a dostávame

$$c = E\left[\frac{C}{x} \mid r = x\right] = c_d \left(\frac{\sigma^2}{Q^2} + \frac{\lambda}{Q}\right) + \frac{c_s}{2} \left(Q + \frac{\sigma^2}{\lambda}\right). \quad (4.14)$$



Obr.4.1: Funkcia $c(Q)$ pre zvolené hodnoty parametrov σ a λ , v tomto prípade bolo zvolené $c_s = 1$, $c_d = 1$, $Q \in [0, 7.5]$, tmavomodrou sú zobrazené optimálne hodnoty \hat{Q} pre každú hodnotu parametra σ , resp. λ . a) závislosť od σ^2 , $\sigma^2 = 0, 0.5, 1, \dots, 5.5, 6$, svetlomodrou je zobrazené $\sigma^2 = 0$, c) závislosť od λ , $\lambda = \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \dots, \frac{2}{19}, \frac{2}{20}$, svetlomodrou je zobrazené $\lambda = 1$. d) závislosť od λ , $\lambda = 1, 2, 3, \dots, 14, 15$, svetlomodrou je zobrazené $\lambda = 1$. b) závislosť od λ , kombinácia c) a d).

4.1.3 Optimálne riešenie

Označme $c = c(Q)$. Keďže $c_d \geq 0$, $\sigma \geq 0$, $c_s > 0$ a $\lambda > 0$, zrejme $\lim_{Q \downarrow 0} c(Q) = +\infty$ aj $\lim_{Q \uparrow \infty} c(Q) = +\infty$. Jediný bod nespojitosti funkcie $c(Q)$ je pre $Q = 0$, a preto ak $c_d > 0$, $c(Q)$ nadobúda na intervale $(0, \infty)$ svoje globálne minimum v nejakom bode \hat{Q} , pre ktorý platí $c(\hat{Q}) > 0$. Ak $c_d = 0$, optimálne \hat{Q} v zmysle (1.3) neexistuje. Preto ďalej uvažujme iba $c_d > 0$.

Problém nastáva pri analytickom hľadaní optimálnej hodnoty \hat{Q} . Keďže $\hat{Q} > 0$ musí spĺňať $c'(Q)|_{Q=\hat{Q}} = 0$ a

$$c'(Q) = \frac{c_s}{2} - c_d \left(\frac{2\sigma^2}{Q^3} + \frac{\lambda}{Q^2} \right), \quad (4.15)$$

po úprave dostávame kubickú rovnicu pre Q :

$$c_s Q^3 - 2c_d \lambda Q - 4c_d \sigma^2 = 0. \quad (4.16)$$

Na základe horeuvedeného textu platí, že platí, že (4.16) má najmenej jeden kladný reálny koreň a na základe Cardanovych vzorcov [16], slúžiacich na výpočet rovníc 3. a 4. rádu, preň platí

$$\hat{Q}(\sigma, \lambda, c_d, c_s) = \frac{2^{1/3} \left(6^{1/3} c_d c_s \lambda + \left(9c_d c_s^2 \sigma^2 + c_d c_s^{3/2} \sqrt{81c_s \sigma^4 - 6c_d \lambda^3} \right)^{2/3} \right)}{3^{2/3} c_s \left(9c_d c_s^2 \sigma^2 + c_d c_s^{3/2} \sqrt{81c_s \sigma^4 - 6c_d \lambda^3} \right)^{1/3}}. \quad (4.17)$$

Keďže optimálne riešenie existuje vždy, \hat{Q} podľa (4.17) bude vždy reálne číslo.

Rozdiel medzi zložitou (4.17) a (2.13) spôsobuje člen σ^2 / Q^2 v (4.14). V praxi však výška dodávky Q býva rádovo väčšia ako neistota σ , preto zanedbaním člena σ^2 / Q^2 sa „nové“ náklady na jednotku času, rovnako ako aj optimálne \hat{Q} podľa zjednodušeného modelu nebudú príliš líšiť od skutočnosti. Uvažujme preto v nasledujúcom texte zjednodušený model,

$$c(Q) = c_d \frac{\lambda}{Q} + \frac{c_s}{2} \left(Q + \frac{\sigma^2}{\lambda} \right). \quad (4.18)$$

Zderivovaním (4.18) a dosadením do $c'(Q)|_{Q=\hat{Q}} = 0$ dostávame

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{2\lambda c_d}{c_s}}, \quad (4.19)$$

čo je rovnaké ako v prípade deterministického modelu s neprípustným deficitom, teda čas, ktorý uplynie medzi dvoma dodávkami, je tiež rovnaký ako v (2.17) a náklady na jednotku času sú

$$\hat{c} = \sqrt{2\lambda c_d c_s} + \frac{c_s \sigma^2}{2\lambda} \quad (4.20)$$

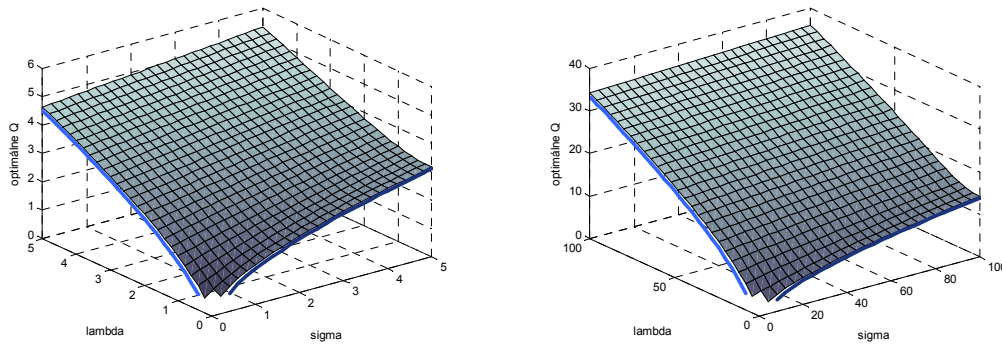
pri dosadení do zjednodušeného modelu (4.18), resp.

$$\hat{c} = \sqrt{2\lambda c_d c_s} + \frac{c_s \sigma^2}{\lambda} \quad (4.21)$$

po dosadení do pôvodného modelu (4.14).

Pokiaľ berieme do úvahy náklady vyplývajúce zo zjednodušeného modelu, optimálna politika je rovnaká ako v deterministickom prípade, a to dokonca bez ohľadu na σ . Jediný

rozdiel spočíva v nákladoch na jednotku času: s rastúcou neistotou na trhu rastú očakávané náklady a s klesajúcou neistotou sa náklady blížia k nákladom v prípade deterministického modelu. Ak $\sigma = 0$, riešenie (4.20) a (4.21) je konzistentné s (2.17), hoci transformácia (4.9) - (4.10) vtedy nemá zmysel.



Obr.4.2: optimálne hodnoty \hat{Q} podľa (4.17) v závislosti od σ a λ v tomto prípade bolo zvolené $c_s = 1$ a $c_d = 1$. Svetlomodrou je zobrazené $\hat{Q}(0, \lambda, c_d, c_s) = \sqrt{2\lambda c_d / c_s}$, tmavomodrou $\hat{Q}(\sigma, 0, c_d, c_s) = 2^{2/3} (c_d / c_s)^{1/3} \sigma^{2/3}$.

Vráťme sa späť k pôvodnému modelu (4.14). Hoci vzťah (4.17) je pomerne zložitý, relatívne jednoducho možno opísať limitné správanie sa \hat{Q} . Náklady na jednotku času v tomto prípade zrejme závisia od σ , λ a pomeru $\frac{c_d}{c_s}$ (samotné hodnoty c_d a c_s nie sú podstatné) a v prípade extrémnych hodnôt týchto parametrov (blízke 0 alebo ∞ , vid' Obr. 4.2) poskytujú asymptoty veľmi dobrú aproximáciu skutočnej hodnoty \hat{Q} .

Závislosť od σ

Označme $\hat{Q} = \hat{Q}(\sigma)$ pri zafixovaných hodnotách c_s , c_d , λ . Z tvaru (4.17) nie je ťažké vidieť, že pre $\sigma \rightarrow \infty$ sa $\hat{Q}(\sigma)$ správa rádovo ako $\sigma^{2/3}$. Preto možno vypočítať asymptotu ku $\hat{Q}(\sigma)$, ktorú označíme $\hat{Q}_\sigma(\sigma)$, ako $\hat{Q}_\sigma(\sigma) = k\sigma^{2/3} + l$, kde pre konštanty k a l platí $k = \lim_{\sigma \uparrow \infty} \hat{Q}(\sigma) / \sigma^{2/3}$ a $l = \lim_{\sigma \uparrow \infty} \hat{Q}(\sigma) - k\sigma^{2/3}$. Skutočne,

$$\lim_{\sigma \uparrow \infty} \frac{\hat{Q}(\sigma)}{\sigma^{2/3}} = 2^{2/3} \left(\frac{c_d}{c_s} \right)^{1/3} \quad (4.22)$$

$$\lim_{\sigma \uparrow \infty} \hat{Q}(\sigma) - 2^{2/3} \left(\frac{c_d}{c_s} \right)^{1/3} \sigma^{2/3} = 0, \quad (4.23)$$

teda

$$\hat{Q}_\sigma(\sigma) = 2^{2/3} \left(\frac{c_d}{c_s} \right)^{1/3} \sigma^{2/3} \quad (4.24)$$

bez ohľadu na λ . To znamená, že s rastúcou náhodnosťou dopytu klesá význam dlhodobého trendu (driftu). Analogicky možno vypočítať $\lim_{\sigma \downarrow 0} \hat{Q}(\sigma)$ a platí $\lim_{\sigma \downarrow 0} \hat{Q}(\sigma) = \sqrt{2\lambda c_d / c_s}$, čo je konzistentné s deterministickou teóriou.

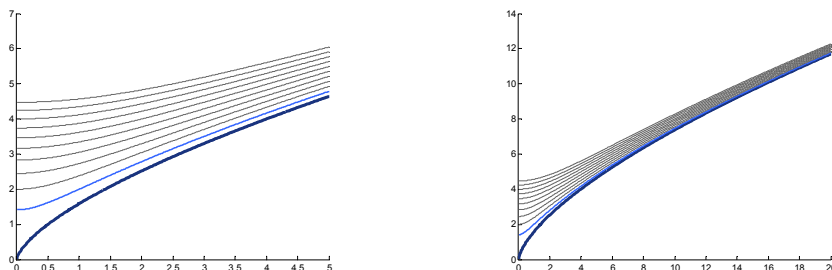
Na základe vedomostí o \hat{Q} a \hat{Q}_σ možno vyjadriť optimálnu dĺžku periódy v (4.5) a optimálne náklady na jednotku času v (4.14). Dosadenie presnej hodnoty \hat{Q} z (4.17) je však pre komplikovanosť formuly pre \hat{c} nepoužiteľné, vhodnejšie je preto použiť aproximáciu \hat{Q}_σ . Dosadením (4.24) do (4.5) a (4.14) tak dostávame

$$\hat{R} = \frac{(2\sigma)^{2/3}}{\lambda} \left(\frac{c_d}{c_s} \right)^{1/3} \quad (4.25)$$

pre dĺžku jednej periódy a

$$\hat{c} = \frac{\lambda(c_d^2 c_s)^{1/3}}{2^{2/3} \sigma^{2/3}} + \frac{(c_d c_s)^{1/3} 3\sigma^{2/3}}{2.2^{1/3}} + \frac{c_s \sigma^2}{2\lambda} \quad (4.26)$$

pre náklady na jednotku času.



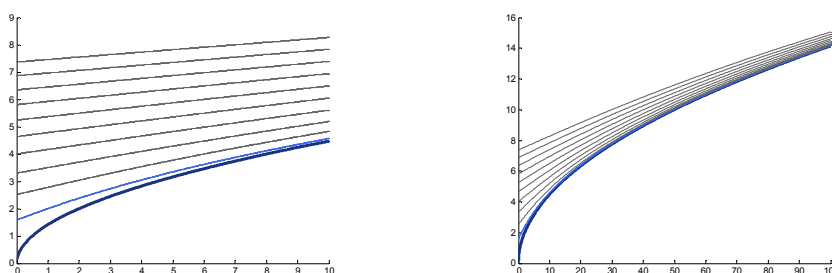
Obr. 4.3: závislosť optimálnej výšky dodávky \hat{Q} od σ pre rôzne hodnoty parametra λ ; $c_s = 1$, $c_d = 1$ a $\lambda = 1, 2, 3, \dots, 9, 10$: čiernou je znázornená výška \hat{Q} podľa (4.17), tmavomodrou je znázornená asymptota (4.24), svetlomodrou je zobrazené $\lambda = 1$.

Závislosť od λ

Rovnakým spôsobom ako v prípade σ možno vypočítať asymptotu ku \hat{Q} pre $\lambda \rightarrow \infty$ a hodnotu pre $\lambda = 0$. Ak $\lambda \rightarrow \infty$, $\hat{Q}(\lambda) \approx \lambda^{1/2}$, a preto $\hat{Q}_\lambda(\lambda) = k\lambda^{1/2} + l$. Nie je ťažké ukázať, že $k = \sqrt{2c_d / c_s}$ a $l = 0$, teda

$$\hat{Q}_\lambda(\lambda) = \sqrt{\frac{2\lambda c_d}{c_s}}. \quad (4.27)$$

Dôvod, prečo $\lim_{\lambda \uparrow \infty} \hat{Q}(\sigma, \lambda, c_d, c_s) = \lim_{\sigma \downarrow 0} \hat{Q}(\sigma, \lambda, c_d, c_s)$ je zrejмый - z úlohy $(\sigma, \lambda, c_d, c_s)$ možno transformáciou (4.9) - (4.10) získať úlohu $(1, \frac{\lambda}{\sigma}, c_d, \sigma c_s)$. Preto platí aj inverzný vzťah: $\lim_{\lambda \downarrow 0} \hat{Q}(\sigma, \lambda, c_d, c_s) = \lim_{\sigma \uparrow \infty} \hat{Q}(\sigma, \lambda, c_d, c_s)$.



Obr. 4.4: závislosť optimálnej výšky dodávky \hat{Q} od λ pre rôzne hodnoty parametra σ ; $c_s = 1$, $c_d = 1$ a $\sigma = 1, 2, 3, \dots, 9, 10$: čiernou je znázornená výška \hat{Q} podľa (4.17), tmavomodrou je znázornená asymptota (4.27), svetlomodrou je zobrazené $\sigma = 1$.

Závislosť od $\frac{c_d}{c_s}$

Z (4.14) vidno, že tvar nákladovej funkcie závisí iba od pomeru $\frac{c_d}{c_s}$ a nie od samotných hodnôt c_d a c_s . Totiž, ak $\tilde{c}_d = a \cdot c_d$ a $\tilde{c}_s = a \cdot c_s$, $\tilde{\gamma}(Q) = a \cdot \gamma(Q)$. Označme preto b ako pomer $\frac{c_d}{c_s}$ a $c_d = b c_s$. $\hat{Q}(\sigma, \lambda, c_d, c_s)$ možno analogicky prepísať na

$$\hat{Q}(\sigma, \lambda, b, c_s) = \frac{2^{1/3} \left(6^{1/3} c_s^2 b \lambda + \left(c_s^3 b (9\sigma^2 + \sqrt{81\sigma^4 - 6b\lambda^3}) \right)^{2/3} \right)}{3^{2/3} c_s^2 \left(b (9\sigma^2 + \sqrt{81\sigma^4 - 6b\lambda^3}) \right)^{1/3}} \quad (4.28)$$

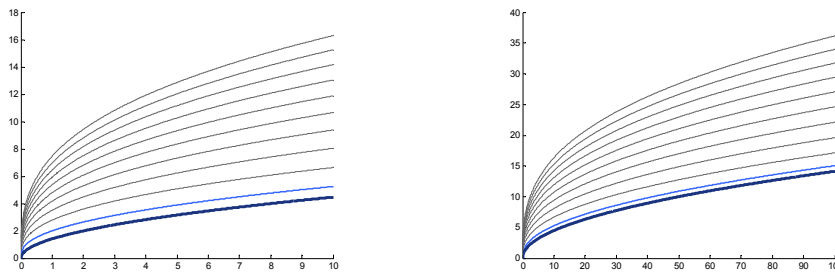
a dostaneme

$$\lim_{b \downarrow 0} \hat{Q}(\sigma, \lambda, b, c_s) = 0. \quad (4.29)$$

Výsledok (4.29) možno ľahko interpretovať. Ak sú náklady na dodávku zanedbateľné v porovnaní s nákladmi na skladovanie, zníženie dovezeného množstva zníži náklady na skladovanie, ale príslušné skrátenie periódy nebude mať negatívny vplyv v podobe príliš častých dodávok. Ak $b \rightarrow \infty$, z tvaru (4.28) vidno, že asymptota ku \hat{Q} , $\hat{Q}_b(b) = kb^{1/2} + l$ a analogicky ako pri σ a λ možno ukázať, že

$$\hat{Q}_b(b) = \sqrt{2\lambda} b^{1/2} = \sqrt{\frac{2\lambda c_d}{c_s}}. \quad (4.30)$$

Opäť ide o výsledok totožný s deterministickým modelom. Totiž úlohu $(\sigma, \lambda, c_d, c_s)$ možno pomocou (4.9) – (4.13) upraviť na úlohu $(\sigma c_s, \lambda c_s, c_d, 1)$ a ak $b \rightarrow \infty$, $\frac{c_d}{c_s} \rightarrow \infty$. Keď zafixujeme c_d , $c_s \rightarrow 0$ a $\tilde{\sigma} = \sigma c_s \rightarrow 0$, čo konverguje k optimálnej výške dodávky pri deterministickom modeli.



Obr. 4.5: závislosť optimálnej výšky dodávky \hat{Q} od pomeru $b = \frac{c_d}{c_s}$ pre rôzne hodnoty parametra σ ; $\lambda = 1$ a $\sigma = 1, 2, 3, \dots, 9, 10$: čiernou je znázornená výška \hat{Q} podľa (4.28), tmavomodrou je znázornená asymptota (4.27), svetlomodrou je zobrazené $\sigma = 1$.

4.1.4 Model s prípustným deficitom

Uvažujme teda zovšeobecnenú úlohu (4.4) s ďalšími podmienkami:

$$\begin{aligned} C_S[Q(t)] &= -c^- Q(t) \\ \delta &\geq 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Problémy oneskorenej dodávky

Nech doba dodávky (teda čas, ktorý uplynie od jej objednania po jej príchod) je δ . V každej perióde je potrebné okrem optimálnej výšky dodávky stanoviť aj moment, kedy treba o ňu požiadať. Kým stanovenie optimálnej výšky je jednoznačné, na optimálny moment o jej požiadanie sa možno pozerať dvomi spôsobmi. 1. ako vopred zvolený čas s_i od poslednej, i -tej dodávky (tzv. úloha teórie zásob s periodickou kontrolou⁶), v tomto prípade je dĺžka jednej periódy deterministická, $R = s + \delta$, avšak náhodné sú zásoby, pri akých sa objednáva. 2. ako moment, keď zásoby klesnú na istú úroveň q (úloha teórie zásob so signalizáciou⁶), v tomto prípade je náhodná dĺžka periódy, ale náklady, za akých sa objednáva, sú známe.

⁶ podľa klasifikácie v [11]

Hoci je v skutočnosti záporné množstvo zásob na sklade neprípustné (pokiaľ je zásob menej ako je dopyt, prevyšujúci dopyt je jednoducho neuspokojený), modelovanie záporného množstva si možno predstaviť ako dlh voči zákazníkovi (neuspokojení zákazníci neodchádzajú), ktorý je splatený v ďalšej dodávke.

Tu nastáva ďalší problém. Predpokladajme, že v jednoperiódovom modeli je optimálna výška dodávky \hat{Q} a čas, kedy treba požiadať o ďalšiu, \hat{s} (resp. úroveň zásob \hat{q}). Keďže výšku dodávky treba určiť už v momente jej objednania, nemožno zaručiť, že v momente jej príchodu bude na sklade práve \hat{Q} výrobkov. Preto sa môže stať, že na začiatku niektorej periódy bude na sklade viac ako \hat{Q} , prípadne menej ako \hat{Q} výrobkov, a teda politika počas danej periódy nebude optimálna. Prírastky sú však nezávislé, teda akýkoľvek vývoj do času t neovplyvňuje vývoj od času t a vždy je optimálne objednať toľko výrobkov, aby očakávaný stav zásob v momente príchodu dodávky bol práve \hat{Q} .

Je zrejmé, že \hat{Q} slúži iba ako akýsi želaný odhad. Pokiaľ by sa dopyt vyvíjal tak, že by skutočne platilo $Q(T_{i+1}) = \hat{Q}$, o ďalšiu dodávku treba zrejme požiadať o čas \hat{s} (keďže pre dané \hat{Q} minimalizuje \hat{s} očakávané náklady na jednotku času), resp. pri stave zásob \hat{q} . Ak by však neplatilo $Q(T_{i+1}) = \hat{Q}$, \hat{s} zrejme nebude optimálne a ani \hat{q} nemusí byť optimálne. Preto je omnoho dôležitejšie, ako samotné \hat{s} a \hat{q} , nájsť funkcie $\hat{s}(Q)$ a $\hat{q}(Q)$, ktoré optimalizujú náklady na jednotku času pri neoptimálnom stave zásob po príchode dodávky. Cieľom prevádzkovateľa skladu teda nie je nájsť $[\hat{Q}, \hat{s}]$ (resp. $[\hat{Q}, \hat{q}]$), ale \hat{Q} a $\hat{s}(Q)$ (resp. \hat{Q} a $\hat{q}(Q)$).

Úloha teórie zásob s periodickou kontrolou

Úlohou prevádzkovateľa skladu je v tomto prípade nájsť optimálne Q a s , dĺžka periódy je deterministická a rovná $T = s + \delta$. Stav zásob na sklade v čase t , $Q(t)$, možno vyjadriť ako $W_\sigma^{-\lambda}(Q, t)$ a na hľadanie nákladov sa opäť možno pozerať dvomi spôsobmi:

1. Celkové náklady počas jednej periódy sú rovné nákladom na dodávku + nákladom na skladovanie + nákladom na deficit. Pomocou značenia z kapitoly 3.2 ich možno vyjadriť ako

$$C = c_d + c_s E \left[\int_0^T (W_\sigma^{-\lambda}(Q, t))^+ dt \right] - c^- E \left[\int_0^T (W_\sigma^{-\lambda}(Q, t))^- dt \right].$$

Problém tohto prístupu spočíva v tom, že hodnoty $E[\int W^+]$, resp. $E[\int W^-]$ sú iba tabelované a aj po transformácii (3.9) vyžadujú znalosť tabelovaných hodnôt v oboch rozmeroch T a Q , lebo aj T aj Q volíme. Navyše simulované hodnoty konvergujú k skutočným hodnotám s rastúcim počtom simulácií iba veľmi pomaly.

2. Pri mnohých realizáciách dopytu v intervale $[0, T]$ deficit vôbec nenastane, preto je rozumné úlohu rozdeliť na dva prípady – keď k deficitu došlo, a keď nedošlo.

Ak k deficitu nedošlo, znamená to, že na intervale $[0, T]$ sa spotrebovalo najviac Q výrobkov. Danú pravdepodobnosť označme $\Pi(T)$ a dosadením do 3.4 dostávame $\Pi(T) = 1 - F(T)$. Predpokladajme, že do času T sa spotrebovalo $a \leq Q$ výrobkov. Na základe Vety 3.11 platí, že očakávané náklady na skladovanie sú pri tejto podmienke rovné $\frac{c_s(2Q-a)}{2}T$. Keďže stav zásob má v každom čase normálne rozdelenie, možno ľahko nájsť rozdelenie celkových nákladov na skladovanie v prípade, že nedošlo k deficitu: $c_s \int_{-\infty}^Q \frac{(2Q-a)}{2} T f_{Q(T)}(a) da$, kde $Q(T) \sim N(Q - \lambda T, \sigma^2 T)$.

Ak k deficitu došlo, čoho pravdepodobnosť je $F(T)$, zásoby sa vyčerpali už niekedy skôr ako v čase T a tento čas označme t . Na základe Tvrdenia 3.9 a transformácie (4.9) – (4.10) platí, že očakávané náklady na skladovanie do času t sú rovné $\frac{1}{2} \left(Q + \frac{\sigma^2}{\lambda} \right) t$. Náklady od tohto momentu až do času T sa delia na náklady na skladovanie a na náklady na deficit, teda na

$c_s E[\int_0^{T-t} (W_\sigma^{-\lambda}(0,u))^+ du]$ a $-c^- E[\int_0^{T-t} (W_\sigma^{-\lambda}(0,u))^- du]$, pričom sme využili nezávislosť prírastkov Wienerovho procesu, teda proces $W_\sigma^{-\lambda}(Q,u)$ spĺňajúci $W_\sigma^{-\lambda}(Q,t)=0$ na intervale $[t,T]$ možno chápať ako $W_\sigma^{-\lambda}(0,u)$ na intervale $[0,T-t]$.

Hoci v nákladoch v intervale $[t,T]$ vystupujú dva parametre: $T-t$ a λ , pomocou (3.9) možno proces „znormlizovať“ na $\lambda=1$ a využitím vzťahu medzi obsahom pod kladou a zápornou časťou procesu dostávame:

$$\begin{aligned} &= E\left[\int_0^{T-t} (W_1^{-\lambda}(0,u))^+ du\right] = \frac{\sigma^4}{\lambda^3} E\left[\int_0^{(T-t)\frac{\lambda^2}{\sigma^2}} (W_1^{-1}(0,u))^+ du\right] \\ &= E\left[\int_0^{T-t} (W_1^{-\lambda}(0,u))^- du\right] = \frac{(T-t)^2 \lambda^5}{2\sigma^4} - \frac{\sigma^4}{\lambda^3} E\left[\int_0^{(T-t)\frac{\lambda^2}{\sigma^2}} (W_1^{-1}(0,u))^+ du\right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

V (4.32) je vyžadovaná je znalosť hodnôt $\int W^+$ a $\int W^-$ už iba v jednom rozmere (keďže „nový“ proces začína z bodu $x_0=0$). Numerický výpočet je preto omnoho jednoduchší a navyše možno v hodnotách $\int_0^{T-t} (W^{-1}(0,u))^+ du$ pre rôzne T badať istú zákonitosť a konvergenciu pre $T-t \rightarrow \infty$ (viď Tab. 3.4).

Aby bolo možné odvodiť celkové náklady na periódu, je potrebné ešte poznať hustotu t . Táto je však známa, keďže ide o podmienenú hustotu passage time r za podmienky, že $r \leq T$. S využitím (4.32) možno sformulovať celkové náklady:

$$\begin{aligned} C = c_d + (1-F(T))c_s \int_{-\infty}^Q \frac{(2Q-a)}{2} T f_{Q(T)}(a) da \\ + F(T) \int_0^T \left[\frac{c_s}{2} \left(Q + \frac{\sigma^2}{\lambda} \right) u - \frac{c^- (T-u)^2 \lambda^5}{2\sigma^4} + \frac{(c_s - c^-)}{\lambda^3} \Psi^+((T-u)\lambda^2) \right] \frac{f_t(u)}{F_t(T)} du \end{aligned} \quad (4.33)$$

a očakávané náklady na jednotku času sú rovné C/T .

Úloha teórie zásob so signalizáciou

Rovnako ako pri úlohe teórie zásob s periodickou kontrolou, cieľom je nájsť optimálnu politiku, ktorú určujú dve premenné: v tomto prípade je to výška dodávky a úroveň zásob, kedy treba požiadať o ďalšiu dodávku. Označme túto úroveň zásob ako q . Keďže náklady na skladovanie a náklady na deficit sú rôzne, je vhodné úlohu rozdeliť na dva prípady: $q \geq 0$ a $q < 0$. Prevádzkovateľ skladu má totiž možnosť voľbou q ovplyvniť, ktoré náklady bude sklad v každom čase znášať. Ak $q \geq 0$, nákladom na deficit bude vystavený iba počas dodávky, teda iba časový interval dĺžky δ . Ale ak $q < 0$, môže sa stať, že zásoby budú záporné ľubovoľne dlhý časový interval, ale stále nedosiahnu hodnotu q . Samozrejme, s rastúcou dĺžkou intervalu klesá pravdepodobnosť, že nastane takáto situácia. Presnejšie povedané, keď stav zásob v čase s označíme $W_\sigma^{-\lambda}(Q,s)$, dá sa ľahko nájsť hustota času t_q , kedy zásoby klesnú na q - ide v podstate o passage time procesu $W_\sigma^{-\lambda}(Q,s)$, ktorý začína z hodnoty $Q-q$.

Úloha teórie zásob so signalizáciou však má oproti periodickej kontrole jednu nevýhodu. Cieľom je nájsť takú politiku, ktorá minimalizuje náklady na jednotku času, ibaže dĺžka periódy je náhodná premenná. Preto treba očakávané náklady vyjadriť ako funkciu závislú od dĺžky periódy $T = t_q + \delta$, $g(t_q + \delta)$, a minimalizuje sa $E_{t_q} \left[\frac{g(t_q + \delta)}{t_q + \delta} \right]$.

1. Nech $q \geq 0$. Keď je t_q dané, očakávané náklady v intervale $[0, t_q]$ sa riadia Vetou 3.11 a očakávané náklady v intervale $[t_q, T]$ sa riadia úlohou teórie zásob s periodickou kontrolou, kde dĺžka periódy je $\delta (= T - t_q)$ a počiatočný stav zásob je q . Ak označíme náklady z (4.33) pre „novú“ úlohu (dĺžka periódy je δ a počiatočný stav zásob je q) a po odpočítaní nákladov

na dodávku ako \bar{C} , $\bar{C} = C - c_d$, dostávame formulu pre celkové očakávané náklady na jednotku času:

$$c = \int_0^\infty \frac{1}{s + \delta} \left(c_d + c_s \frac{Q + d}{2} s + \bar{C}(s) \right) f_{t_q}(s) ds.$$

Ide o omnoho zložitejšiu formulu ako v (4.33). Na jej výpočet je potrebné poznať $\int_0^\infty \frac{f_{t_q}(s)}{s + \delta} ds$, čo je integrál, ktorý sa nedá analyticky vypočítať.

2. Nech $q < 0$. Aj v intervale $[0, t_q]$, aj v intervale $[t_q, T]$ môže mať sklad náklady spojené aj so skladovaním, aj s deficitom. Ide teda o najzložitejší prípad, ktorý má veľmi neefektívne riešenie: treba nájsť rozdelenie času t_q , kedy došlo k poklesu zásob na úroveň q a pre každú hodnotu náhodnej premennej t_q určiť náklady v intervale $[0, t_q]$, teda $c_s \int_0^{t_q} (W_\sigma^\mu(Q, t))^+ dt$ a $-c \int_0^{t_q} (W_\sigma^\mu(Q, t))^- dt$ aj v intervale $[t_d, T]$, teda $c_s \int_0^\delta (W_\sigma^\mu(d, t))^+ dt$ a $-c \int_0^\delta (W_\sigma^\mu(d, t))^- dt$.

Z porovnania oboch úloh teórie zásob vidno, že hoci je prístup pomocou signalizácie intuitívnejší (väčšinou sa objednáva dodávka v momente, keď je na sklade málo zásob a nie vo vopred stanovenom čase), vedie na prakticky neriešiteľné problémy. Jediný spôsob, ako relatívne efektívne a presne modelovať nákladovú funkciu, a teda pomocou numerických metód nájsť optimálne riešenie, je využiť vzťah (4.33) a tabelované hodnoty Ψ^+ .

4.2 Dopyt modelovaný homogénnym Poissonovým procesom

Uvažujme sklad, ktorý skladuje kusový, nedeliteľný tovar a dopyt po tomto tovare je náhodný, ale s pozorovateľným dlhodobým trendom. Predpokladajme, že v konkrétnom čase môže zo skladu ubudnúť najviac jeden kus výrobku (pokial' by ubudlo viac výrobkov, každý ďalší sa musí minúť o nejaký nenulový čas neskôr ako predchádzajúci) a očakávaný dopyt je konštantný, λ jednotiek tovaru za jednotku času. Na základe Vety 3.13 existuje jediný proces spĺňajúce tieto vlastnosti, a to je Poissonov proces.

4.2.1 Štandardný model bez deficitu

Podobne ako v predchádzajúcej časti, uvažujme sklad s okamžitou dodávkou bez možnosti deficitu, s nasledovnými parametrami, ktorý hľadá optimálnu politiku, aby minimalizoval náklady na jednotku času:

$$\begin{aligned} C_D(Q_i) &= c_d & c_d > 0 \\ C_M[Q(t)] &= c_s Q(t) & c_s > 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Keďže dlhodobý očakávaný dopyt je konštantný, optimálna výška dodávky Q_i bude v každej perióde rovnaká a model možno zúžiť na jednu periódu.

Rovnako ako v prípade dopytu modelovaného Wienerovým procesom, kľúčovú úlohu pri hľadaní optimálnej politiky a pri formulácii nákladov na jednotku času hrá rozdelenie dĺžky jednej periódy, teda $f_{T_Q}(t)$ a stredná hodnota celkových nákladov na skladovanie za podmienky, že zásoby sa vyčerpajú v nejakom stanovenom čase x , ktorú v súlade s predchádzajúcou časťou označme C_x . Pre $E[T_Q]$ platí na základe (3.17):

$$E[T_Q] = \frac{Q}{\lambda} \quad (4.35)$$

čo je zhodné s deterministickým modelom.

Jednoducho možno nájsť aj očakávané náklady na skladovanie počas jednej periódy. Keďže deficit zásob je neprípustný, dodávku treba objednať okamžite v momente vyčerpania zásob, teda v momente T_Q a náklady na skladovanie sú potom rovné $\int_0^{T_Q} X(t)dt$. Keďže $X(t)$ je schodovitá funkcia s veľkosťou každého skoku 1, možno ju opísať pomocou okamihov, kedy došlo k skokom. Ak označíme ako T_i čas, ktorý uplynul medzi i -tým skokom a $i-1$. skokom ($T_0 = 0$), $X(t)$ sa dá na intervale $[0, T_Q]$ prepísať ako

$$\begin{aligned} X(t) &= i-1 & t \in [T_{i-1}, T_i) & \quad i = 1, 2, \dots, Q \\ X(T_Q) &= Q \end{aligned} \quad (4.36)$$

a pre strednú hodnotu nákladov preto platí

$$\begin{aligned} E[C] &= E\left[\int_0^{T_Q} c_s(Q - X(t))dt\right] = c_s E\left[\sum_{i=0}^{Q-1} (Q - iT_i)\right] = c_s \sum_{i=0}^{Q-1} (Q - iE[T_i]) \\ &= c_s \left(\sum_{i=0}^{Q-1} Q - E[T_1] \sum_{i=0}^{Q-1} i\right) = c_s \left(Q^2 - \frac{1}{\lambda} \frac{Q(Q-1)}{2}\right) = c_s \frac{Q(Q+1)}{2\lambda} \end{aligned} \quad (4.37)$$

pričom sme využili fakt, že prírastky sú nezávislé, teda T_i majú rovnaké rozdelenie a $E[T_1] = E[T_2] = \dots = E[T_n] = \lambda^{-1}$. Opäť ide o výsledok totožný s deterministickým dopytom. Totiž, ak by výrobky ubúdali pravidelne, jeden kus za $\frac{1}{\lambda}$ času, priemerný stav zásob by bol $\frac{Q+1}{2}$ a dĺžka jednej periódy $\frac{Q}{\lambda}$. Ako sa však ukázalo v predchádzajúcej časti, $\frac{E[C]}{E[r]} \neq E\left[\frac{C}{r}\right]$, a preto je na presný výpočet nákladov na jednotku času potrebná znalosť C_x .

Je zrejmé, že pre C_x platí $C_x = c_s E\left[\int_0^x (Q - X(t))dt | T_Q = x\right]$, kde T_Q vyjadruje čas, kedy nastala Q -ta udalosť, čo možno na základe Dôsledku 3.15 napísať ako

$$C_x = c_s \frac{x(Q+1)}{2} \quad (4.38)$$

a s použitím (3.16) dostávame

$$\begin{aligned} E\left[\frac{C_i}{T_Q} | T_Q = x\right] &= \int_0^\infty \frac{1}{x} (c_d + C_x) f_{T_Q}(x) dx = \int_0^\infty \frac{1}{x} \left(c_d + c_s x \frac{Q+1}{2}\right) f_{T_Q}(x) dx \\ &= c_d \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{\lambda(\lambda x)^{Q-1}}{x(Q-1)!} dx + c_s \frac{Q+1}{2} \int_0^\infty f_{T_Q}(x) dx \\ &= c_d \frac{\lambda^2}{(Q-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda x} (\lambda x)^{Q-2} dx + c_s \frac{Q+1}{2} \\ &= c_d \frac{\lambda^2}{(Q-1)!} \frac{(Q-2)!}{\lambda} + c_s \frac{(Q+1)}{2} = c_d \frac{\lambda}{Q-1} + c_s \frac{(Q+1)}{2} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Treba si však uvedomiť, že Q je celé číslo. Keď označíme $\gamma(Q) = E\left[\frac{C_i}{x} | T_Q = x\right]$, \hat{Q} , ktoré minimalizuje (4.39) je rovné $\lfloor \tilde{Q} \rfloor$ alebo $\lceil \tilde{Q} \rceil$, kde \tilde{Q} je riešenie $\gamma'(Q) = 0$. Platí

$$\gamma'(Q) = \frac{c_s}{2} - \frac{c_d \lambda}{(Q-1)^2}, \quad (4.40)$$

teda

$$\tilde{Q} = 1 + \sqrt{\frac{2\lambda c_d}{c_s}}. \quad (4.41)$$

a \hat{R} , \hat{c} vyplývajú z (3.17) a (4.39).

Medzi politikami pri deterministickom a Poissonovom dopyte je zrejma súvislosť. Ak by sme v oboch prípadoch považovali tovar za neobmedzene deliteľný, pri Poissonovom dopyte je optimálna výška dodávky väčšia práve o 1 výrobok (ktorý je na sklade stále, lebo v momente jeho vyexpedovania sa doplní nová dodávka), ako pri deterministickom dopyte.

4.2.2 Model bez deficitu s čiastočne deliteľným tovarom

Na základe (4.39) a (2.17) je očakávateľné, že čím jemnejšie delenie tovaru pripustíme pri Poissonovom dopyte, tým deterministickejší charakter bude mať tento dopyt.

Nech je jeden kus výrobku deliteľný na d častí a za mernú jednotku budeme považovať jednu časť. Ak sa dopyt po výrobkoch riadi procesom $X(t)$, dopyt po častiach sa riadi procesom $X_d(t)$, kde očakávaný počet udalostí (skokov) za jednotku času je $d\lambda$ a veľkosť jedného skoku je d^{-1} . Štandardný Poissonov proces je však skokový proces s jednotkovou veľkosťou skoku. Aby mal $X_d(t)$ veľkosť skoku d^{-1} , musí platiť $X_d(t) = d^{-1}\tilde{X}(t)$, kde $\tilde{X}(t)$ je Poissonov proces s jednotkovými skokmi a priemerným počtom $d\lambda$ skokov za jednotku času. Dosadením do (4.39) máme

$$\text{var}[X_d(t)] = \text{var}[d^{-1}\tilde{X}(t)] = d^{-2}\text{var}[\tilde{X}(t)] = d^{-2}d\lambda t = d^{-1}\lambda t, \quad (4.42)$$

čo potvrdzuje naše predpoklady. Vzhľadom k úzkym súvisom medzi deterministickým a Poissonovým dopytom nemá pri okamžitej dodávke praktický zmysel zvlášť uvažovať teóriu pre čiastočne deliteľný tovar. Navyše, pre veľké Q je už aj rozdiel medzi (4.41) a (2.17) zanedbateľný.

4.2.3 Model s prípustnosťou deficitu a oneskorenou dodávkou

Narozdiel od predchádzajúcich modelov opisujúcich náhodný dopyt, uvažujme sklad, kde je deficit prípustný a dodávka nemusí byť okamžitá. Tu už nemožno použiť argumenty z časti 2.2 pre ekvivalenciu okamžitej a oneskorenej dodávky a ako sa neskôr ukáže, dĺžka dodávky hrá dôležitú úlohu pri formulovaní optimálnej politiky. Uvažujme nasledovnú úlohu:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lambda & \lambda > 0 \\ C_D(Q_i) &= c_d & c_d > 0 \\ C_M[Q(t)] &= c_s Q(t) & c_s > 0 \\ C_S[Q(t)] &= -c^- Q(t) & c^- > 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Problémy oneskorenej dodávky a skokového dopytu

Označme dobu dodávky (teda čas, ktorý uplynie od jej objednania po jej príchod) ako δ . Rovnako ako v prípade skladu s prípustným deficitom, kde bol dopyt modelovaný pomocou Wienerovho procesu s driftom, vznikajú pri oneskorenej dodávke problémy, a preto ostávajú formulácie cieľov prevádzkovateľa skladu z predchádzajúcej časti v platnosti. Pri Poissonovom procese však vzniká ďalší problém – zásoby ubúdajú skokovo, kým čas plynie spojitě. Pri úlohe teórie zásob so signalizáciou totiž treba stanoviť hodnotu q , kedy sa požiada o ďalšiu dodávku, ale zásoby ostanú na úrovni q nenulový čas. Logické je o dodávku požiadať okamžite, keď zásoby klesnú na úroveň q , v skutočnosti na tejto úrovni ešte nejaký čas ostanú, teda ako jedna z prípustných možností sa javí ešte nejakú chvíľu počkať a o dodávku požiadať až neskôr.

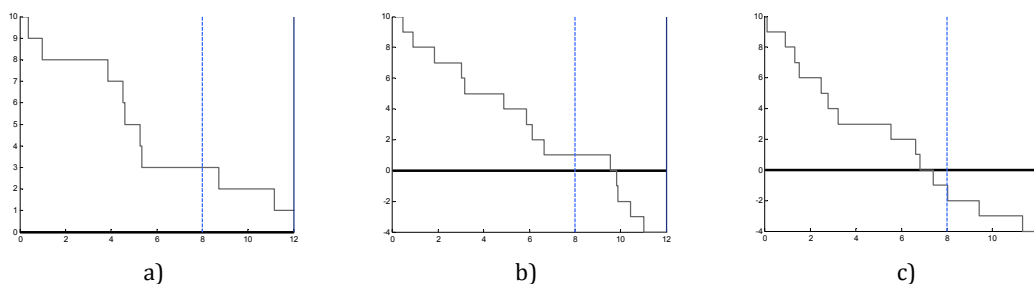
4.2.4 Úloha teórie zásob s periodickou kontrolou

Predpokladajme, že v čase $T_0 = 0$ príde na sklad dodávka a k dispozícii tak máme Q kusov výrobku. O ďalšiu dodávku sa požiada v čase s a táto príde v čase $T = s + \delta$. Prevádzkovateľ skladu chce, aby v čase T bolo na sklade Q výrobkov a vie, že počas trvania dodávky sa ich priemerne spotrebuje $\lambda\delta$. To znamená, že ak v momente objednania je na sklade ešte q kusov, aby prevádzkovateľ minimalizoval očakávané náklady, musí objednať počet, ktorý je rovný buď $\lfloor Q - (q - \lambda\delta) \rfloor$, alebo $\lceil Q - (q - \lambda\delta) \rceil$. Praktické je zvoliť najbližšie celé číslo k $Q - (q - \lambda\delta)$.

Pozrime sa teraz na náklady. To, či sa dodávka objednáva pri zápornom, alebo nezápornom stave zásob, nie je rozhodujúce. Podstatný je iba ich stav v čase T . Totiž, ak $Q(T) \geq 0$, počas tejto periódy nedošlo k deficitu, ak $Q(T) < 0$, k deficitu došlo. Keďže náklady na skladovanie a náklady na deficit sú rôzne, celkové náklady treba rozdeliť práve podľa stavu zásob v čase T . Intuitívne ich možno formulovať nasledovne:

$$C = c_d + P[\text{v čase } T \text{ sú zásoby nezáporné}] \times [\text{očakávané náklady na skladovanie počas } [0, T]] \\ + P[\text{v čase } T \text{ sú zásoby záporné}] \times \left[\begin{array}{l} \text{očakávané náklady na skladovanie počas } [0, T) \\ + \text{očakávané náklady na deficit počas } [0, T) \end{array} \right]$$

Prvú časť označme C_1 , druhú C_2 . Treba si uvedomiť, že pokiaľ sú zásoby v čase T_1 záporné, stále nie je jasné, kedy klesli na nulu a tento „moment prechodu“ je náhodná premenná.



Obr.4.6: tri možné typy vývoja stavu zásob počas jednej periódy, svetlomodrou je zobrazený čas objednania ďalšej dodávky, tmavomodrá predstavuje čas príchodu ďalšej dodávky, vodorovná čiara reprezentuje nulový stav zásob. $Q = 10, \lambda = 1, s = 8, \delta = 4$. a) sa týka časti C_1 , b) a c) sa týkajú časti C_2 a z hľadiska formulácie nákladov majú rovnaký charakter.

- a) aj v momente objednania aj v momente príchodu dodávky je stav zásob nezáporný,
 b) v momente objednania je stav nezáporný, v momente príchodu je záporný,
 c) aj v momente objednania, aj v momente príchodu dodávky je stav zásob záporný

Pozrime sa najprv na C_1 . Aby bol stav zásob v čase T nezáporný, počas periódy sa musí minúť najviac Q výrobkov. Pravdepodobnosť, že sa minie i výrobkov, je daná vzťahom (3.12) a ak vieme, že sa minulo i výrobkov, očakávané náklady na skladovanie sú na základe Vety 3.14 rovné $c_s \frac{T(2Q-i)}{2}$. Ak teda nedošlo k deficitu, náklady na skladovanie sú

$$C_1 = \sum_{i=0}^Q e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!} c_s \frac{T(2Q-i)}{2} \quad (4.44)$$

Ak vieme, že k deficitu došlo, muselo sa minúť aspoň $Q + 1$ výrobkov. Predpokladajme, že sa minulo $i > Q$ výrobkov a zaujíma nás moment, kedy sa zásoby vyčerpajú. Tento

moment označme τ_i . Ide o spojitú náhodnú premennú, ktorej hustotu označme $f_\tau(t)$. Je zrejmé, že $f_\tau(t) = 0$ pre $t \notin [0, T]$.

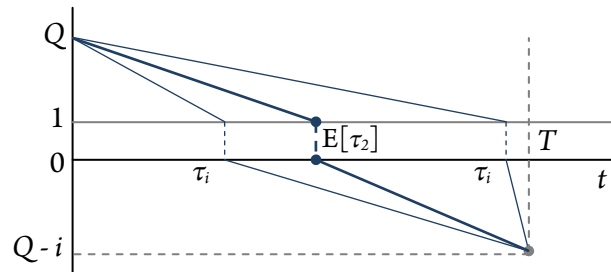
Predpokladajme, že τ_i je dané. Keďže proces $X(t)$ je neklesajúci, stav zásob na sklade počas jednej periódy je nerastúci a platí, že v intervale $[0, \tau_i]$ má sklad iba náklady na skladovanie a v intervale $[\tau_i, T]$ má iba náklady na deficit. Podľa Vety 3.14 platí, že pre ľubovoľné τ_i je stredná hodnota dopytu do tohto momentu, aj od tohto momentu do konca periódy lineárna funkcia, teda pomocou Vety 3.14 a Dôsledku 3.15 dostávame

$$E[Q(t)|Q(\tau_i)=0] = Q - \frac{Q-1}{\tau_i}t \quad t \in [0, \tau_i] \quad (4.45)$$

$$E[Q(t)|Q(\tau_i)=0] = \frac{Q-i}{T-\tau_i}(t-\tau_i) \quad t \in [\tau_i, T] \quad (4.46)$$

Na základe (4.45) a (4.46) možno pre dané τ_i napísať očakávané náklady na skladovanie počas jednej periódy ako

$$c_s \frac{\tau_i(Q+1)}{2} + c^- \frac{(i-Q)(T-\tau_i)}{2}. \quad (4.47)$$



Obr. 4.7: Príklad časov τ_i , jednotlivé grafy zobrazujú očakávaný stav zásob pri danom τ_i . Keďže až do momentu τ_i je stav zásob nenulový, $E[Q(t)]$ sa pre $t \in [0, \tau_i]$ „riadi“ dôsledkom 3.15 a pre $t \in [\tau_i, T]$ sa riadi Vetou 3.14.

Z Vety 3.14 vyplýva, že okamihy, kedy dochádza k udalostiam, majú rovnaké rozdelenie ako usporiadaná i -tica nezávislých náhodných premenných s normálnym rozdelením. Teda platí, že ku k -tej udalosti dôjde priemerne v čase $\frac{k}{i+1}T$, $E[\tau_i] = \frac{QT}{i+1}$ a keďže f_τ je nenulová pre $\tau \in [0, T]$, $\int_0^T f_\tau(t)dt = 1$. Preto ak je i dané, očakávané náklady na periódu sú

$$\begin{aligned} C_2|i &= \int_0^T \left(c_s \frac{t(Q+1)}{2} + c^- \frac{(i-Q)(T-t)}{2} \right) f_\tau(t) dt \\ &= \int_0^T \left(t \left(\frac{c_s(Q+1) - c^-(i-Q)}{2} \right) + c^- \frac{(i-Q)T}{2} \right) f_\tau(t) dt \\ &= \frac{c_s(Q+1) - c^-(i-Q)}{2} \int_0^T t f_\tau(t) dt + c^- \frac{(i-Q)T}{2} \int_0^T f_\tau(t) dt \\ &= \frac{c_s(Q+1) - c^-(i-Q)}{2} E[\tau_i] + c^- \frac{(i-Q)T}{2} \\ &= \frac{T(c^-(i-Q)(i-Q+1) + c_s Q(1+Q))}{2(i+1)} \end{aligned} \quad (4.48)$$

a celkové očakávané náklady počas periódy, ak dôjde k deficitu, sú

$$C_2 = \sum_{i=Q+1}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!} \frac{T(c^-(i-Q)(i-Q+1) + c_s Q(1+Q))}{2(i+1)}. \quad (4.49)$$

Pomocou (4.44) a (4.49) možno napokon vyčísliť C :

$$C = c_d + \underbrace{\sum_{i=0}^Q e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!} c_s \frac{T(2Q-i)}{2}}_A + \underbrace{\sum_{i=Q+1}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!} \frac{T(c^-(i-Q)(i-Q+1) + c_s Q(1+Q))}{2(i+1)}}_B \quad (4.50)$$

Aproximácia nákladov

Vzťah (4.50), vyjadrujúci celkové náklady počas jednej periódy, je však značne nepraktický. Okrem toho, že ide o nekonečný súčet, pre ktorý nie je známa uzavretá formula, a teda ho možno iba numericky aproximovať (hoci s ľubovoľnou presnosťou), s rastúcimi hodnotami Q , λ , T nielen klesá rýchlosť konvergencie, ale aj rastie veľkosť chyby, ktorá vzniká pri zaokrúhľovaní. Ak napríklad $\lambda T = 10^3$, čo môže nastať v prípade skladu, kde sa oplatí mať dlhú periódu (náklady na dodávku sú omnoho vyššie ako náklady na skladovanie), už $e^{-\lambda T}$ má hodnotu mimo rozsahu väčšiny matematických softwareov, a teda „numericky“ by platilo $C = c_d$, čo však nie je pravda. Pozrime sa preto bližšie na (4.50).

Keďže platí $\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!} = 1$ a $\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda T} i \frac{(\lambda T)^i}{i!} = \lambda T$, A sa dá prepísať ako

$$A = c_s \left(TQ - \frac{\lambda T^2}{2} \right) + \sum_{i=Q+1}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!} c_s \frac{T(i-2Q)}{2}.$$

Nekonečný súčet vystupujúci v A možno doplniť do B . B sa potom bude skladať z troch častí:

$$B = \frac{T}{2} \sum_{i=Q+1}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!} \left(\underbrace{\frac{c^-(i-Q)(i-Q+1)}{(i+1)}}_{B_1} + \underbrace{\frac{c_s Q(1+Q)}{(i+1)}}_{B_2} + \underbrace{c_s(i-2Q)}_{B_3} \right).$$

Predpokladajme, že Q , a teda aj i je dostatočne veľké, aby platilo $\frac{x}{i+1} \approx \frac{x+1}{i+1}$. B_1 a B_3 možno aproximovať nasledovne:

$$B_1 = \frac{c^-(i-Q)(i-Q+1)}{(i+1)} \approx c^- \frac{(i+1-Q)^2}{(i+1)} = c^- \left((i+1) - 2Q + \frac{Q^2}{(i+1)} \right)$$

$$B_3 = c_s(i-2Q) \approx c_s(i+1-2Q)$$

sčítajme teraz členy pri $(i+1)^1$, $(i+1)^0$, $(i+1)^{-1}$:

$$B_1 + B_2 + B_3 \approx (i+1)(c^- + c_s) - 2Q(c^- + c_s) + \frac{c^- Q^2 + c_s Q(1+Q)}{i+1},$$

kde čitateľ posledného člena je približne rovný $c^- Q(1+Q) + c_s Q(1+Q)$. Dostávame tak vzťah pre $B_1 + B_2 + B_3$:

$$B_1 + B_2 + B_3 \approx (c^- + c_s) \left((i+1) - 2Q + \frac{Q(1+Q)}{i+1} \right).$$

Po dosadení do B a rozdelení na tri sčítance vidno zaujímavú vlastnosť:

$$B \approx \frac{T}{2} (c_s + c^-) \left(\sum_{i=Q+1}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i (i+1)}{i!} - 2Q \sum_{i=Q+1}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!} + Q(1+Q) \sum_{i=Q+1}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!(i+1)} \right) \quad (4.51)$$

Ak v čitateli prvého sčítanca dosadíme i namiesto $i+1$, dostaneme tri rôzne sumy: prvú od Q , druhú od $Q+1$ a tretiu od $Q+2$:

$$B \approx \frac{T}{2} (c_s + c^-) \left(\lambda T \sum_{i=Q}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!} - 2Q \sum_{i=Q+1}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!} + \frac{Q(1+Q)}{\lambda T} \sum_{i=Q+2}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!} \right) \quad (4.52)$$

Ak je Q dostatočne veľké, jeden sčítanec nehrá úlohu a všetky tri sumy možno nahradiť sumou od $Q+1$:

$$\tilde{B} \approx \frac{T}{2}(c_s + c^-) \left(\lambda T - 2Q + \frac{Q(1+Q)}{\lambda T} \right) \sum_{i=Q+1}^{\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^i}{i!}. \quad (4.53)$$

Stále však vo výraze vystupuje suma, ktorá spôsobuje komplikácie pri numerických výpočtoch – s rastúcou hodnotou λT klesá rýchlosť konvergencie. Veta 3.15 však ponúka riešenie, ako sa s týmto problémom vysporiadať.

Na základe (3.12) platí, že ak $X_1, X_2 \sim \text{poi}[\lambda]$, potom $X_1 + X_2 \sim \text{poi}[2\lambda]$. Keďže $E[X_1] = \text{var}[X_1] = \lambda$, pomocou Vety 3.3 dostávame $\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{d} N(\lambda, \lambda)$. Ak je teda λ dostatočne veľké, distribučnú funkciu Poissonovho rozdelenia možno veľmi dobre aproximovať distribučnou funkciou normálneho rozdelenia:

$$F_X(k) = P[X \leq k] = \sum_{i=0}^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \approx \int_{-\infty}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2\lambda}} dx = \Phi\left(\frac{k-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad (4.54)$$

kde $\Phi(z)$ je distribučná funkcia $N(0,1)$ pre $\forall z \in \mathbb{R}$. Napokon možno napísať výslednú aproximáciu vzťahu (4.50):

$$C \approx \tilde{C} = c_d + c_s \left(TQ - \frac{\lambda T^2}{2} \right) + \frac{T}{2}(c_s + c^-) \left(\lambda T - 2Q + \frac{Q(1+Q)}{\lambda T} \right) \left(1 - \Phi\left(\frac{Q+1-\lambda T}{\sqrt{\lambda T}}\right) \right) \quad (4.55)$$

a celkové náklady na jednotku času

$$\tilde{c}_1 = \frac{c_d}{T} + c_s \left(Q - \frac{\lambda T}{2} \right) + \frac{(c_s + c^-)}{2} \left(\lambda T - 2Q + \frac{Q(1+Q)}{\lambda T} \right) \left(1 - \Phi\left(\frac{Q+1-\lambda T}{\sqrt{\lambda T}}\right) \right) \quad (4.56)$$

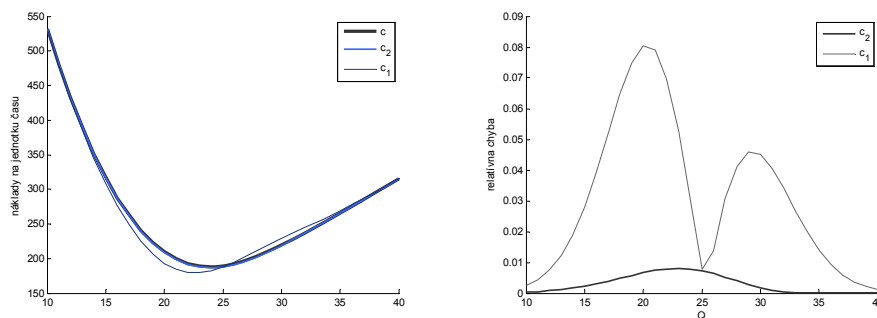
pri využití (4.53). Ak vo vzťahu (4.52) nahradíme každú sumu integrálom prislúchajúcim podľa (4.54), dostávame takmer presný vzťah pre c :

$$\tilde{c}_2 = \frac{c_d}{T} + c_s \left(Q - \frac{\lambda T}{2} \right) + \frac{(c_s + c^-)}{2} \left[\lambda T \Phi_1 - 2Q \Phi_2 + \frac{Q(1+Q)}{\lambda T} \Phi_3 \right], \quad (4.57)$$

kde

$$\Phi_1 = 1 - \Phi\left(\frac{Q-\lambda T}{\sqrt{\lambda T}}\right), \quad \Phi_2 = 1 - \Phi\left(\frac{Q+1-\lambda T}{\sqrt{\lambda T}}\right), \quad \Phi_3 = 1 - \Phi\left(\frac{Q+2-\lambda T}{\sqrt{\lambda T}}\right). \quad (4.58)$$

Hoci (4.57) vyzerá komplikovane, oproti (4.56) si vyžaduje navyše iba výpočet distribučnej funkcie $N(0,1)$ v dvoch bodoch, ale prináša výrazné zlepšenie presnosti (viď Obr. 4.8).



Obr. 4.8: Porovnanie presnosti aproximácií nákladov na jednotku času, $T = 25$, $c_d = 1000$, $c_s = 10$, $c^- = 100$, $\lambda = 1$. K najväčšej chybe dochádza pri takom Q , keď sa očakáva, že zásoby sa minú na konci periódy. Pravdepodobnosť, že dôjde k deficitu, je vtedy približne 0.5 a rozdiel medzi distribučnou funkciou Poissonovho a normálneho rozdelenia je najväčší (chvosty konvergujú rýchlejšie).

Ak $\lambda T \rightarrow \infty$ a $Q \rightarrow \infty$ (väčšinou λT súvisí s Q), $\tilde{c} \rightarrow c$. (4.56) a (4.57) síce stále neponúkajú nákladovú funkciu v analytickej podobe, a teda ani možnosť určiť optimálnu politiku explicitne pomocou derivácie, pre zvolené hodnoty c_d, c_s, c^- a λ sa však ľahko dá nájsť $[\hat{Q}, \hat{s}]$, resp. optimálna reakcia na skutočný stav Q_i pomocou numerických metód, keďže $T = s + \delta$.

4.2.5 Úloha teórie zásob so signalizáciou

Narozdiel od periodickej kontroly, pri signalizácii sa zásoby dopĺňajú v momente, keď klesnú na určitú rezervnú úroveň, q . Ako už bolo spomenuté, hoci je tento prístup prirodzenejší, z hľadiska formulácie nákladovej funkcie je zložitejší. Cieľom prevádzkovateľa skladu je opäť minimalizácia celkových nákladov na jednotku času, ale v tomto prípade je dĺžka periódy náhodná premenná. Preto bude postup pri výpočte nákladov kombinovať aj teóriu z úlohy s periodickou kontrolou (vlastnosti Poissonovho procesu), aj teóriu z modelu, kde je dopyt modelovaný Wienerovým procesom (ako sa vysporiadať s premenlivou dĺžkou periódy).

Vývoj stavu zásob treba rozdeliť do dvoch kategórií, podľa stavu v momente objednania ďalšej dodávky - hodnoty q :

1. Ak $q \geq 0$, do momentu objednania ďalšej dodávky má sklad náklady spojené iba so skladovaním, ale za čas δ , počas príchodu novej dodávky, môže dôjsť k deficitu. Keďže Poissonov proces má nezávislé prírastky, procesy $\{X(t), t \geq 0\}$ a $\{Y(s) = X(s+a), s \geq 0\}$ sú pre ľubovoľné $a \geq 0$ rovnaké (v zmysle distribučnej funkcie). Preto sa na vývoj nákladov počas intervalu $[s, s+\delta]$ možno pozeráť ako na úlohu teórie zásob s periodickou kontrolou, s dĺžkou periódy δ a počiatočným stavom zásob q .

2. Ak $q < 0$, sklad má už do momentu objednania ďalšej dodávky náklady spojené aj so skladovaním, aj s deficitom. Vývoj zásob počas tohto obdobia sa preto riadi princípom zobrazeným na Obr. 4.7, kde $Q - i = q < 0$ je dané a T je náhodná premenná. V intervale $[s, s+\delta]$ je stav zásob záporný, v nákladovej funkcii vystupujú iba náklady na deficit, ktoré možno vypočítať pomocou teórie z kapitoly 4.2.1.

V oboch prípadoch platí pre očakávanú dĺžku periódy rovnaký vzťah. Na základe (3.17) je jasné, že zásoby klesnú na rezervnú úroveň q priemerne za čas $\frac{Q-q}{\lambda}$, čiže očakávaná dĺžka periódy je rovná

$$R = \frac{Q-q}{\lambda} + \delta. \quad (4.59)$$

Ako sa však ukázalo, priemerné náklady na jednotku času nie sú rovné priemerným nákladom na periódu vydeleným priemernou dĺžkou periódy, preto treba náklady spočítať osobitne, pre každú prípustnú dĺžku periódy, a týmto dať príslušné „váhy“.

Prípady $q \geq 0$

Označme čas, kedy dôjde k poklesu zásob na úroveň q , T_q . T_q je zrejme spojitá náhodná premenná s hustotou (3.16) (namiesto Q stačí dosadiť $Q - q$). Keď T_q zafixujeme, očakávané náklady na skladovanie počas obdobia $[0, T_q]$ sú rovné $c_s E[\int_0^{T_q} Q(t) dt]$, čo možno na základe Dôsledku 3.15 vyjadriť ako $c_s \frac{(Q+q+1)T_q}{2}$ (obsah príslušného lichobežníka). Na výpočet nákladov v období $[T_q, T_q + \delta]$ možno použiť postup z (4.44) - (4.55) a dostávame tak vzťah, ktorý vyjadruje celkové náklady na periódu

$$\tilde{C}(T_q) \approx c_d + c_s \frac{(Q+q+1)T_q}{2} + c_s \left(\delta q - \frac{\lambda \delta^2}{2} \right) + \frac{\delta}{2} (c_s + c^-) \left(\lambda \delta - 2q + \frac{q(1+q)}{\lambda \delta} \right) \left(1 - \Phi \left(\frac{q+1-\lambda \delta}{\sqrt{\lambda \delta}} \right) \right) \quad (4.60)$$

pre fixované T_q pri aproximácii (4.53). Analogicky označme ako $C(T_q)$ celkové náklady na periódu pri aproximácii (4.52). Očakávané náklady na jednotku času teda sú

$$c = E \left[\frac{C(T_q)}{T_q + \delta} \right] = \int_0^{\infty} \frac{C(t)}{t + \delta} f_{T_q}(t) dt. \quad (4.61)$$

Dosadením (4.60) do (4.61) vzniká potreba vypočítať integrály $\int_0^{\infty} \frac{f_{T_q}(t)}{t+q} dt$ a $\int_0^{\infty} \frac{f_{T_q}(t) \cdot t}{t+q} dt$,

$$I = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{\lambda (\lambda t)^{Q-q-1}}{(Q-q-1)!(t+\delta)} dt$$

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{Q-q}}{(Q-q-1)!(t+\delta)} dt \quad (4.62)$$

pre celočíselné Q a q . Pre tieto vzťahy však neexistuje uzavretá formula⁷ a ak $\delta > 0$, pre prípad $q \geq 0$ vzniká analyticky neriešiteľný problém. I a J možno vyčíslit' iba numericcky. Pre $\delta = 0$ nie je na základe¹⁶ ťažké ukázať, že $I = \frac{\lambda}{Q-q-1}$ a $J = \lambda$. Dosadením do (4.61) a využitím faktu, že ak $\delta = 0$, náklady v intervale $[T_q, T_q + \delta]$ sú tiež nulové (teda sa nevyužije ani aproximácia B ani \tilde{B} a $\tilde{C}(T_q) = C(T_q)$), dostávame celkové očakávané náklady na jednotku času:

$$c(Q, q) = c_s \frac{\lambda(Q+q+1)}{2} + c_d \frac{\lambda}{Q-q-1}. \quad (4.63)$$

Ak $\delta > 0$, s využitím I a J možno (4.62) upraviť na tvar

$$c(Q, q) = J \left(c_s \frac{Q+q+1}{2} \right) + I \left(c_d + c_s \left(\delta q - \frac{\lambda \delta^2}{2} \right) + \frac{\delta}{2} (c_s + c^-) \left(\lambda \delta \bar{\Phi}_1 - 2q \bar{\Phi}_2 + \frac{q(1+q)}{\lambda \delta} \bar{\Phi}_3 \right) \right), \quad (4.64)$$

kde

$$\bar{\Phi}_1 = 1 - \Phi \left(\frac{q - \lambda \delta}{\sqrt{\lambda \delta}} \right), \quad \bar{\Phi}_2 = 1 - \Phi \left(\frac{q + 1 - \lambda \delta}{\sqrt{\lambda \delta}} \right), \quad \bar{\Phi}_3 = 1 - \Phi \left(\frac{q + 2 - \lambda \delta}{\sqrt{\lambda \delta}} \right).$$

Prípady $q < 0$

Predpokladajme, že k poklesu zásob na stav q došlo v nejakom stanovenom čase T_q (ktorý je opäť spojitá náhodná premenná), náklady v intervale $[0, T_q]$ sa potom riadia schémou z Obr. 4.7 a ich strednú hodnotu možno vyčíslit' miernou modifikáciou vzťahu (4.48). Treba si totiž uvedomiť, že v Obr. 4.7, a teda aj v (4.48) sme využívali predpoklad, že v čase T_q je stav zásob $Q - i$ (teda mohol na túto hodnotu klesnúť kedykoľvek skôr, preto treba aplikovať Vetu 3.14), ale v tomto prípade klesol stav zásob na hodnotu q až v okamihu T_q , teda do tohto momentu bol rovný $q + 1$ a treba použiť Dôsledok 3.15. Modifikácia je nasledovná: najprv treba namiesto $Q - i$ dosadiť $q + 1$, preto sa ale zmení aj čas, kedy priemerne dôjde k vyčerpaniu zásob - na $E[\tau] = \frac{Q T_q}{Q - q}$. Analogicky ako v (4.48) dostávame vzťah pre očakávané náklady do momentu objednania ďalšej dodávky:

$$\int_0^{T_q} \left(c_s \frac{t(Q+1)}{2} + c^- \frac{(q+1)(t-T_q)}{2} \right) f_{\tau}(t) dt$$

$$= \int_0^{T_q} \left(t \left(\frac{c_s(Q+1) + c^-(q+1)}{2} \right) - c^- \frac{(q+1)T_q}{2} \right) f_{\tau}(t) dt \quad (4.65)$$

⁷ vo výslednom tvare dostaneme $I = ((Q-q-1)!)^{-1} [\lambda \sum_{i=0}^{Q-q-2} (-1)^i i! (\lambda \delta)^{Q-q-2-i} + (-1)^{Q-q-1} (\lambda \delta)^{Q-q-1} e^{\lambda \delta} \Gamma(0, \lambda \delta)]$ a $J = ((Q-q-1)!)^{-1} [\sum_{i=0}^{Q-q-1} (-1)^i i! (\lambda \delta)^{Q-q-1-i} + (-1)^{Q-q} (\lambda \delta)^{Q-q} e^{\lambda \delta} \Gamma(0, \lambda \delta)]$, kde $\Gamma(a, z)$ je neúplná gamma funkcia, definovaná ako $\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{c_s(Q+1) + c^-(q+1)}{2} \int_0^T t f_\tau(t) dt - c^- \frac{(q+1)T}{2} \int_0^T f_\tau(t) dt \\
&= \frac{c_s(Q+1) + c^-(q+1)}{2} E[\tau] - c^- \frac{(q+1)T}{2} \\
&= \frac{T(c^-q(1+q) + c_sQ(1+Q))}{2(Q-q)}
\end{aligned}$$

Na náklady počas obdobia $[T_q, T_q + \delta]$ možno použiť dve základné vlastnosti Poissonovho procesu – nezávislosť prírastkov a $E[X(t)] = \lambda t$. Vývoj zásob v intervale $[T_q, T_q + \delta]$ sa preto riadi rovnakým princípom, ako by sa riadil vývoj zásob v intervale $[0, \delta]$ s počiatočným stavom q , teda

$$\begin{aligned}
-c^- E \left[\int_{T_q}^{T_q + \delta} Q(t) dt \right] &= -c^- E \left[\int_0^\delta (q - X(t)) dt \right] = -c^- q\delta + c^- E \left[\int_0^\delta X(t) dt \right] \\
&= -c^- q\delta + c^- \int_0^\delta E[X(t)] dt = -c^- q\delta + c^- \int_0^\delta \lambda t dt \\
&= c^- \delta \left(\frac{\lambda \delta}{2} - q \right)
\end{aligned} \tag{4.66}$$

(4.65) + (4.66) + c_d vyjadruje pre dané T_q očakávané náklady počas jednej periódy. Keďže T_q má hustotu podľa (3.16), $E[T_q] = \frac{Q-q}{\lambda}$, celkové očakávané náklady na periódu sú

$$\begin{aligned}
C(Q, q) &= \int_0^\infty \left[c_d + c^- \delta \left(\frac{\lambda \delta}{2} - q \right) + \frac{t(c^-q(1+q) + c_sQ(1+Q))}{2(Q-q)} \right] f_{T_q}(t) dt \\
&= c_d + c^- \delta \left(\frac{\lambda \delta}{2} - q \right) + \frac{c^-q(1+q) + c_sQ(1+Q)}{2\lambda}
\end{aligned} \tag{4.67}$$

a celkové očakávané náklady na jednotku času možno nájsť pomocou (4.61), (4.62) a (4.67):

$$c(Q, q) = \int_0^\infty \frac{1}{t + \delta} \left[c_d + c^- \delta \left(\frac{\lambda \delta}{2} - q \right) + \frac{t(c^-q(1+q) + c_sQ(1+Q))}{2(Q-q)} \right] f_{T_q}(t) dt. \tag{4.68}$$

Výpočet nákladov podľa (4.68) opäť vyžaduje znalosť I a J . Po úprave dostávame

$$c(Q, q) = I \left(c_d + c^- \delta \left(\frac{\lambda \delta}{2} - q \right) \right) + J \left(\frac{c^-q(1+q) + c_sQ(1+Q)}{2(Q-q)} \right). \tag{4.69}$$

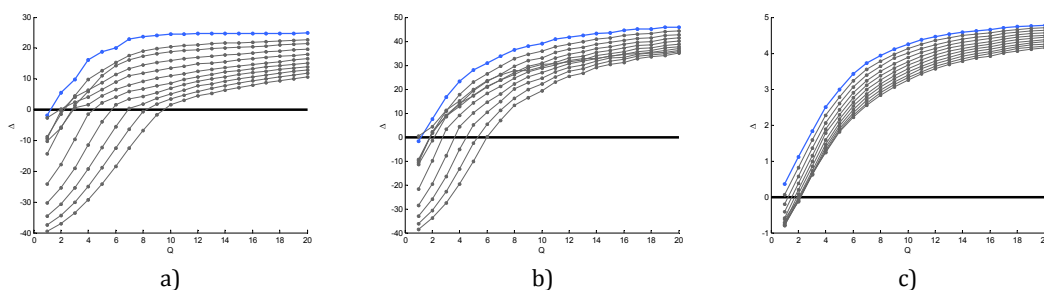
4.2.6 Porovnanie prístupov

Z tvaru výsledných vzťahov pre náklady na jednotku času je zrejmé, že nemožno všeobecne určiť, ktorý prístup dáva v optime nižšie náklady. Každá z úloh má svoje výhody aj nevýhody.

Periodická kontrola ponúka jednu, univerzálnu formulu, ktorú možno pre $\frac{|Q+1-\lambda T|}{\lambda T} \gg 0$ ešte zjednodušiť – ak $a \gg 0$, $\Phi(a) \approx 1$ a ak $a \ll 0$, $\Phi(a) \approx 0$. Vtedy je vzťah (4.56) kvadratický v Q a lineárne lomený v T , čo umožňuje nájsť optimum explicitne, pomocou derivácie. Ak pre optimum platí $\frac{|Q+1-\lambda T|}{\lambda T} \gg 0$, úloha je vyriešená. V opačnom prípade treba úlohu na „problematickom regióne“ vyriešiť pomocou numerických metód. Nevýhodou však je, že formula (4.56) a (4.57) dáva pre malé hodnoty λT a Q , prípadne ak $Q+1 \approx \lambda T$, signifikantnú chybu (viď Obr. 4.8).

Prístup pomocou signalizácie rozdeľuje úlohu na dve vetvy, pričom obe vedú na komplikovaný problém, pre ktorý neexistuje uzavretá formula v tvare analytických funkcií. V Prílohe je uvedený program pre MATLAB, ktorý pre zadané hodnoty λ , ktorou sa riadi dopyt a δ, c_d, c_s, c^- , ktorými sa riadi sklad, nájde optimálnu politiku, resp. optimálnu odozvu na neočakávaný vývoj zásob na sklade.

Existuje súvis, ktorý umožňuje transformovať úlohu z jedného typu na druhý. Ako sa ukáže, nejde o identické (v zmysle nákladov), iba o príbuzné, principiálne rovnaké úlohy. Keď o Poissonovom procese neuvažujeme ako o jednotlivých realizáciách, ale z dlhodobého hľadiska, dostávame namiesto konkrétnej skokovej trajektórie, definovanej pomocou časov $\{t_i\}$, kedy došlo k i -tej udalosti, lineárnu funkciu, definovanú parametrom λ . Táto funkcia je prostá, preto existuje bijektívne zobrazenie $t \mapsto E[X(t)]$. Ináč povedané, ak je daný kritický stav zásob q , kedy dochádza k objednaní ďalšej dodávky, tento stav jednoznačne určuje čas s , kedy sa očakáva, že k objednávke dôjde, a naopak. Platí $\bar{s} = E[t_{Q-q}] = \frac{Q-q}{\lambda}$ a $\bar{q} = E[Q(s)] = Q - \lambda s$.



Obr. 4.9: Porovnanie jednotlivých prístupov pre rôzne hodnoty parametrov c_d, c_s, c^- v závislosti od Q . $\lambda=1$, $\delta=0, \dots, 10$, svetlomodrou je znázornené $\delta=0$. Na zvislej osi (Δ) je pre každú hodnotu $Q=1, 2, \dots, 20$ zobrazený rozdiel medzi nákladmi na jednotku času pri periodickej kontrole a pri signalizácii za podmienky, že q , resp. s je vzhľadom na Q volené optimálne. Kladné hodnoty predstavujú nižšie náklady v prípade signalizácie, záporné v prípade periodickej kontroly. a) $c_d=1000, c_s=10, c^-=100$, b) $c_d=1000, c_s=10, c^-=100$, c) $c_d=1000, c_s=100, c^-=10$.

Z Obr. 4.9 je zrejmé, že oba prístupy majú svoje uplatnenie, ktoré závisí od jednotlivých parametrov skladu a dopytu. Okrem toho možno pozorovať dve závislosti: pri okamžitej dodávke rastie s úrovňou Q výhodnosť prístupu pomocou signalizácie a pri zafixovanej úrovni Q s rastúcou dobou dodávky výhodnosť tohto prístupu klesá. Úlohy teórie zásob so signalizáciou a periodickou kontrolou preto nie sú v zmysle nákladov ekvivalentné.

Záver

Ukázali sme, ako možno skĺbiť matematickú teóriu stochastických procesov s praxou. Lévyho procesy, ktorých definícia sa zdá byť príliš formálna, majú v skutočnosti mnoho aplikácií v reálnom živote – jednou z nich je aj modelovanie náhodného dopytu. Takýto prístup vnáša do teórie zásob nový rozmer. Kým pri deterministickom dopyte možno sformulovať optimálnu politiku jednoduchou uzavretou formulou, náhodný dopyt takéto riešenie neponúka. Navyše, už zdanlivo jednoduché úlohy vedú na matematicky komplikované problémy, ktoré niekedy ani neponúkajú exaktné riešenie. V práci sme sa zaoberali dvomi najdôležitejšími procesmi – ako z matematického, tak aj z aplikačného hľadiska: Poissonovým a Wienerovým procesom a dvomi najzaužívanejšími prístupmi: periodickou kontrolou a signalizáciou.

Dopyt modelovaný homogénnym Poissonovým procesom má k deterministickému prípadu azda najbližšie. Ide o monotónny a skokový proces nadobúdajúci iba celočíselné hodnoty, pre ktorý sme vybudovali potrebnú teóriu. Obtiažnosť prístupu pomocou periodickej kontroly spočíva práve v schodovitosti procesu, ktorá neumožňuje na vzniknuté formuly aplikovať analytické metódy. Po aproximovaní spojitou funkciou však dostávame elegantné riešenie, ktoré je numericky stabilné a ľahko algoritmizovateľné. Prístup pomocou signalizácie nevýhody skokového procesu síce obchádza, ale naráža na netriviálne integrály, ktorých riešenie existuje iba s pomocou numerických metód. V oboch prípadoch sme dospeli k výsledným vzťahom, ktoré poskytujú presný návod, ako nájsť optimálnu politiku.

Wienerov proces narozdiel od Poissonovho síce neobsahuje skoky, ale nie je monotónny. Práve podmienka monotónnosti zaručovala akúsi jednoduchosť pri rozdeľovaní nákladov na skladovacie a deficitné. Pri Wienerovom procese preto vzniká problém určiť strednú hodnotu integrálu z kladnej časti a zápornej časti zvlášť. Hoci sme nenašli explicitnú formulu, ukázali sme, ako možno tento vzťah pre ľubovoľný Wienerov proces s driftom upraviť na takú podobu, pre ktorú sme už nasimulovali podrobné tabelované hodnoty. S využitím týchto numerických výsledkov sme napokon odvodili postup, pomocou ktorého možno vždy nájsť optimálnu politiku pre prevádzku skladu.

Literatúra

- [1] Kac, M. (1946): On the average of a certain Wiener functional and related limit theorem in calculus of probability. *Trans. Amer. Math. Soc.* 59 401-414
- [2] Takács, L. (1993): On the Distribution of the integral of the absolute value of the brownian motion. *The Annals of Applied Probability* 3 186-197
- [3] Kearney, M. J., Majumdar, S. N. (2005): On the area under a continuous time Brownian motion till its first-passage time
- [4] Kearney, M. J., Majumdar, S. N., Martin, R. J. (2007): The first-passage area for drifted Brownian motion and the moments of the Airy distribution. *J. Phys. A: Math. and Theor.* 40 F863-F869
- [5] Applebaum, D. (2004): Lévy Processes — From Probability to Finance and Quantum Groups. *Notices of Amer. Math. Soc.* 51 1336 – 1347
- [6] Presman, E., Sethi, S. P. (2006): Inventory models with continuous and Poisson demands and discounted and average costs. *Production & Operations Management*, Vol. 15, No. 2, pp. 279-293
- [7] Yakovlev, G., Rundle, J. B., Shcherbakov R., Turcotte D. L. (2005): Inter-arrival time distribution for the non-homogeneous Poisson process. Eprint arXiv:cond-mat /0507657
- [8] Sennott, L. I., (1998): *Stochastic Dynamic Programming and the Control of Queueing Systems.* John Wiley & Sons
- [9] Borodin, A. N., Salminen P., (2002): *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae.* Birkhauser
- [10] Moler, C. B. (2004): *Numerical computing with MATLAB,* Cambridge University Press
- [11] Brunovský, P.: *Stochastické metódy operačnej analýzy.* Skriptá FMFI UK
- [12] Halická, M. (1999): *Optimálne riadenie 1.* Skriptá FMFI UK
- [13] Pázman, A.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika. Poznámky k prednáškam FMFI UK*
- [14] Filová, H. (2008): *Oceňovanie opcií pomocou Lévyho procesov.* Diplomová práca FMFI UK
- [15] Karatzas, I., Shreve, S. (1988): *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* Springer

-
- [16] Abramowitz, M., Stegun, I. A. (1972): Handbook of Mathematical functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Courier Dover Publications
- [17] Schervish, M. J. (1995): Theory of Statistics. Springer
- [18] Feller, W. (1972): An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons
- [19] Koralov, L. B., Sinai, Y. G. (2007): Theory of probability and Random Processes. Springer
- [20] Applebaum, D. (2004): Levy processes and stochastic calculus. Cambridge University Press
- [21] Barndorff-Nielsen, O. E., Mikosch, T., Resnick, S. T. (2001): Levy Processes Theory and Application. Birkhauser

Príloha

Program na výpočet optimálnej politiky pri dopyte modelovanom Poissonovým procesom s konštantnou intenzitou λ

```
function [Q,out]=Opt(lambda,delta,CP,method,varargin)
% optimalna politika
% method urcuje typ ulohy - 'S' znamena signalizacia, 'PK' periodicka kontrola.
% CP vyjadruje vector nakladov - [c_d, c_s, c^-]
% Predpoklada sa, ze nakladova funkcia je konvexna v Q pre kazde q, resp. s a
% hlada sa take Qmin, Qmax, aby optimalne Q urcite lezalo v intervale [Qmin,Qmax].
Qmin=0;
Qmax=2;
switch lower(method)
case 's'
    while CostsS(Qmax,Optq(Qmax,lambda,delta,CP),lambda,delta,CP)>...
        CostsS(Qmax+1,Optq(Qmax+1,lambda,delta,CP),lambda,delta,CP)
        Qmax=2*Qmax;
    end
    tol=2;
case 'pk'
    if strcmp(varargin{1},'tol')
        tol=varargin{2};
    end
    while CostsPK(Qmax,Opts(Qmax,lambda,delta,CP,tol),lambda,delta,CP)>...
        CostsPK(Qmax+1,Opts(Qmax+1,lambda,delta,CP,tol),lambda,delta,CP)
        Qmax=2*Qmax;
    end
end
Qmax=Qmax+1;
% hlada sa Q, ktore minimalizuje costs
while Qmax-Qmin>tol
    d=Qmax-Qmin;
    switch lower(method)
    case 's'
        a=floor(Qmin+d/3);
        b=ceil(Qmin+2*d/3);
        if CostsS(a,Optq(a,lambda,delta,CP),lambda,delta,CP)>...
            CostsS(b,Optq(b,lambda,delta,CP),lambda,delta,CP)
            Qmin=a;
        else
            Qmax=b;
        end
    case 'pk'
        a=Qmin+d/3;
        b=Qmin+2*d/3;
        if CostsPK(a,Opts(a,lambda,delta,CP,tol),lambda,delta,CP)>...
            CostsPK(b,Opts(b,lambda,delta,CP,tol),lambda,delta,CP)
            Qmin=a;
        else
            Qmax=b;
        end
    end
end
end
% optimalne Q
Q=(Qmin+Qmax)/2;
switch lower(method)
case 's'
    out=Optq(Q,lambda,delta,CP);
case 'pk'
    out=Opts(Q,lambda,delta,CP,tol);
end
end
```

```

function s=Opts(Q,lambda,delta,CP,tol)
% optimalna hodnota s pre zadane Q (periodicka kontrola)
% Predpoklada sa, ze nakladova funkcia je konvexna v s pre kazde Q.
% Hlada sa take smin, smax, aby optimalne s urcite lezalo v intervale [smin,smax].
smin=0;
smax=1;
while CostsPK(Q,smax,lambda,delta,CP)>CostsPK(Q,smax+1,lambda,delta,CP)
    smax=2*smax;
end
% hlada sa s, ktore minimalizuje CostsPK
while smax-smin>tol
    d=smax-smin;
    a=smin+d/3;
    b=smin+2*d/3;
    if CostsPK(Q,a,lambda,delta,CP)>CostsPK(Q,b,lambda,delta,CP)
        smin=a;
    else
        smax=b;
    end
end
% optimalne s
s=(smin+smax)/2;

function q=Optq(Q,lambda,delta,CP)
% optimalna hodnota q pre zadane Q (signalizacia)
% Predpoklada sa, ze nakladova funkcia je konvexna v q pre kazde Q.
% Hlada sa take qmin, qmax, aby optimalne q urcite lezalo v intervale [qmin,qmax].
qmin=-1;
qmax=Q;
while CostsS(Q,qmin,lambda,delta,CP)>CostsS(Q,qmin-1,lambda,delta,CP)
    qmin=2*qmin;
end
qmin=qmin-1;
% hlada sa q, ktore minimalizuje CostsS
while qmax-qmin>2
    d=qmax-qmin;
    a=floor(qmin+d/3);
    b=ceil(qmin+2*d/3);
    if CostsS(Q,a,lambda,delta,CP)>CostsS(Q,b,lambda,delta,CP)
        qmin=a;
    else
        qmax=b;
    end
end
% optimalne q
q=(qmin+qmax)/2;

function c=CostsPK(Q,s,lambda,delta,CP)
% ocakavane naklady na jednotku casu pri periodickej kontrole
cd=CP(1);
cs=CP(2);
cm=CP(3);
T=s+delta;
I1=1/2*erfc((Q-lambda*T)/sqrt(2*lambda*T));
I2=1/2*erfc((Q+1-lambda*T)/sqrt(2*lambda*T));
I3=1/2*erfc((Q+2-lambda*T)/sqrt(2*lambda*T));
c=cd/T+cs*(Q-lambda*T/2)+(cs+cm)/2*(lambda*T*I1-2*Q*I2+Q*(1+Q)/(lambda*T)*I3);

```

```

function c=CostsS(Q,q,lambda,delta,CP)
% ocakavane naklady na jednotku casu pri signalizacii
cd=CP(1);
cs=CP(2);
cm=CP(3);
if q>=0
    if delta==0, delta=1e-6; end
    I1=1/2*erfc((q-lambda*delta)/sqrt(2*lambda*delta));
    I2=1/2*erfc((q+1-lambda*delta)/sqrt(2*lambda*delta));
    I3=1/2*erfc((q+2-lambda*delta)/sqrt(2*lambda*delta));
    c=IntJ(Q,q,lambda,delta)*(cs*(Q+q+1)/2)+IntI(Q,q,lambda,delta)*...
        (cd+cs*(delta*q-lambda*delta^2/2)+delta/2*(cs+cm)*...
        (lambda*delta*I1-2*q*I2+q*(1+q)/(lambda*delta)*I3));
else
    c=IntI(Q,q,lambda,delta)*(cd+cm*delta*(lambda*delta/2-q))+...
        IntJ(Q,q,lambda,delta)*((cm*q*(1+q)+cs*Q*(1+Q))/(2*(Q-q)));
end

function J=IntJ(Q,q,lambda,delta)
% integral J z (4.62)
if Q-q>1
    J=quadgk(@(t)f2(t,Q,q,lambda,delta),0,inf,'RelTol',1e-10,'AbsTol',1e-20);
else
    J=1-lambda*delta*exp(delta*lambda)*quadgk(@(t)exp(-t)./t,delta*lambda,inf,...
        'RelTol',1e-10,'AbsTol',1e-20);
end

function I=IntI(Q,q,lambda,delta)
% integral I z (4.62)
if Q-q>1
    I=quadgk(@(t)f1(t,Q,q,lambda,delta),0,inf,'RelTol',1e-10,'AbsTol',1e-20);
else
    I=lambda*exp(delta*lambda)*quadgk(@(t)exp(-t)./t,delta*lambda,inf,...
        'RelTol',1e-10,'AbsTol',1e-20);
end

function f=f2(t,Q,q,lambda,delta)
% hustota t*f_{T_q}/(t+delta)
f=fTq(t,Q,q,lambda).*t./(t+delta);

function f=f1(t,Q,q,lambda,delta)
% hustota f_{T_q}/(t+delta)
f=fTq(t,Q,q,lambda)./(t+delta);

function f=fTq(t,Q,q,lambda)
% hustota nahodnej premennej f_{T_q}
u=Q-q-1;
f=lambda;
for i=1:u
    f=f.*exp(-lambda.*t./u).*(lambda.*t)./i;
end

```