



KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITA KOMENSKÉHO, BRATISLAVA

---

OPTIMALIZÁCIA PORTFÓLIA -  
- KONCEPT EKONOMICKÉHO KAPITÁLU

(Diplomová práca)

IVETA KOTMANOVÁ

---

**Vedúci:** Mgr. Milan Barančok

Bratislava, 2009

**Optimalizácia portfólia -  
- koncept ekonomického kapitálu**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Iveta Kotmanová

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY**

Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika  
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Vedúci práce: Mgr. Milan Barančok

BRATISLAVA 2009

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím citovaných zdrojov.

.....

Moje poďakovanie patrí vedúcemu diplomovej práce Mgr. Milanovi Barančokovi za čas a ochotu, ktoré mi pri písaní venoval a taktiež všetkým, ktorí počas tejto doby stáli pri mne.

## Abstrakt

Cieľom každého investora je dosiahnutie čo možno najvyššieho zisku. Vysoký výnos je na finančnom trhu sprevádzaný adekvátnou mierou rizika, čím vyšší výnos, tým vyššie riziko. Toto riziko môže byť pri vhodnej diverzifikácii portfólia značne eliminované. Dynamika vývoja na finančnom trhu v posledných desaťročiach spôsobila, že banky sa snažia odmerať riziko čo najpresnejšie. S tým súvisí aj rozvoj risk manažmentu. My sme sa zamerali na dve miery rizika: volatilita v Capital Asset Pricing Model a ekonomický kapitál, ktorý vychádza zo simulácie pravdepodobnostného rozdelenia strát. Na základe týchto mier rizika optimalizujeme výber portfólia, ktoré je tvorené z indexov, aby čo najlepšie modelovalo komplexný vývoj na trhu.

Kľúčové slová: portfólio, výnos, riziko, ekonomický kapitál

## Abstract

The goal of each investor is to achieve high profit. High return on the financial market is accompanied by adequate degree of risk, the higher the return, the higher the risk. This risk can be eliminated by appropriate diversification of the portfolio. Dynamics in the financial markets in recent decades naturally led to effort of measuring the risk exactly. This involves the development of risk management. We focused on two measures of risk: volatility in Capital Asset Pricing Model and economic capital, which is based on the simulation of probability loss distribution. On the basis we select optimal portfolio formed from the indices.

Keywords: portfolio, return, risk, economic capital

# Obsah

Úvod	1
<b>1 CAPM</b>	<b>2</b>
1.1 Výnos a riziko . . . . .	2
1.2 Portfólio . . . . .	4
1.3 Efektívne portfólio . . . . .	10
1.4 Optimálne portfólio . . . . .	12
1.5 Nevýhody CAPM . . . . .	14
<b>2 Basel II</b>	<b>15</b>
2.1 Úvod a história . . . . .	15
2.2 Regulačný kapitál . . . . .	16
2.3 Motivácia a štruktúra Basel II . . . . .	17
2.4 Ďalší vývoj Basel II . . . . .	20
<b>3 Ekonomický kapitál</b>	<b>21</b>
3.1 Úvod . . . . .	21
3.2 Definícia . . . . .	22
3.3 Charakteristika . . . . .	23
3.4 Interpretácia ekonomického kapitálu . . . . .	24
3.5 Výpočet ekonomického kapitálu . . . . .	26
3.6 Diverzifikačný efekt . . . . .	28

<i>OBSAH</i>	vii
3.7 Value-at-Risk . . . . .	30
<b>4 Praktická část</b>	<b>32</b>
4.1 CAPM analýza . . . . .	34
4.2 Koncept ekonomického kapitálu a jeho analýza . . . . .	40
<b>Záver</b>	<b>45</b>
<b>Literatúra</b>	<b>46</b>

# Úvod

Zhodnocovanie peňazí a majetku je od počiatku cieľom každého investora. V posledných desaťročiach sa s rastúcou životnou úrovňou stáva táto otázka ešte aktuálnejšia a frekventovanejšia. Z toho vychádza aj prudký rozvoj finančného a bankového sektora, v rámci ktorého si aj banky dávajú za cieľ čo najlepšie a najefektívnejšie zhodnotiť peniaze svojich veriteľov.

Aj z bežného života vieme, že výnos alebo úžitok z niečoho nie je zadarmo a je spojený s určitou mierou rizika. Toto platí vo svete financií dvojnásobne. Kto chce veľa získať, musí byť ochotný aj niečo stratiť, teda podstúpiť riziko. Banka je spravidla konzervatívnejší investor, teda jej averzia voči riziku je vysoká, a preto sa snaží riziko, ktoré podstupuje čo najviac eliminovať. Riešením je investovanie do dobre diverzifikovaného portfólia, v ktorom sa prejavia vzťahy medzi jednotlivými aktívami, čím sa miera rizika zníži. S týmito skutočnosťami úzko súvisí otázka merania rizika.

V prvej časti sa zoznámime so základnými pojmami ako sú výnos a riziko. Ukážeme ako súvisia charakteristiky portfólia s jednotlivými aktívami a v čom je jeho výhoda. Zameriame sa na Capital Asset Pricing Model, ktorý vychádza z teórie portfólia ako ju sformuloval Markowitz v r.1952.

Ako už bolo spomenuté výnos súvisí s rizikom, a tak sa v ďalších dvoch častiach zameriame práve na túto veličinu. V krátkosti sa budeme venovať dohode Basel II, ktorá hovorí o kapitálovej primeranosti bánk vzhľadom na riziko, ktoré podstupuje a následne sa zoznámime s konceptom ekonomického kapitálu, ktorý je jednou z moderných a účinných možností ako môže banka efektívne merať svoje riziko.

Na záver zhrnieme obe teórie na základe použitia trhových dát a v krátkosti sa zameriame na výber optimálneho portfólia pri zohľadnení oboch prístupov merania rizika.



# Kapitola 1

## CAPM

### 1.1 Výnos a riziko

Vo svete financií a investovania sa ľudia od počiatku zaoberajú otázkami „koľko“ a „kam“ investovať a „podľa čoho sa rozhodnúť“. Na trhu sa obchoduje s mnohými aktívami a najviac zavážia dve vlastnosti: výnos a riziko. Samozrejme každý chce zarobiť čím viac a súčasne podstúpiť pri tom čo najmenšie riziko. Avšak treba si uvedomiť, že čím vyšší je výnos aktíva, tým je viac rizikové. Teda záleží od konkrétneho investora aké veľké riziko je ochotný podstúpiť a za akú cenu.

Očakávaný výnos rizikového aktíva môžeme určiť nasledovne

$$\hat{r} = \sum_{i=1}^n P_i r_i.$$

$P_i$  - pravdepodobnosť nastania  $i$ -teho stavu

$r_i$  - výnos pri nastaní  $i$ -teho stavu

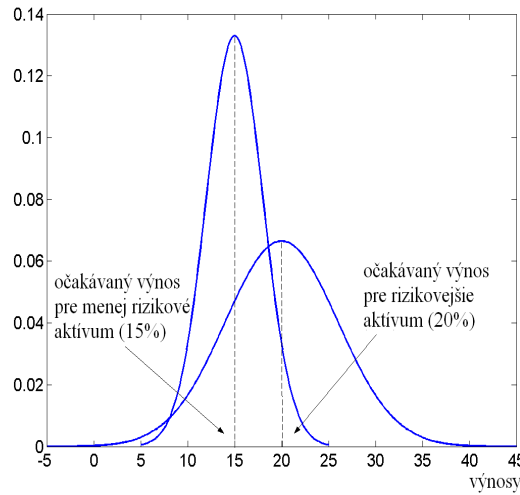
$n$  - počet možných stavov

Samozrejme toto je možné vyčíslieť len v prípade, že vieme presne popísať situácie, do ktorých sa môže trh dostať. V praxi sa preto používa spojité

rozdelenie pravdepodobnosti výnosov. Ak je graf hustoty úzky, znamená to, že skutočný výnos bude blízko očakávaného, teda môžeme povedať, že čím užší je graf hustoty, tým je aktívum menej rizikové.

Na meranie rizika sa používa štandardná odchýlka výnosov. Vyjadruje ako sa skutočný výnos môže vzdialiť od výnosu očakávaného.

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_i - \hat{r})^2 P_i}$$



Obrázok 1.1: Štandardné odchýlky a výnosy aktív.

Štandardná odchýlka je v podstate vážený priemer odchýlok skutočného výnosu od očakávaného. Túto formulu je možné použiť len v prípade, že poznáme pravdepodobnostné rozdelenie, teda  $P_i$ . V praxi však môžeme vychádzať len z reálnych dát, ktoré máme k dispozícii. V tomto prípade štandardnú odchýlku aproximujeme výrazom

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{r}_t - \bar{r}_{Avg})^2}{n - 1}}$$

$\bar{r}_t$  - výnos v čase  $t$

$\bar{r}_{Avg}$  - priemerný ročný výnos za posledných  $n$  rokov

Je zrejmé, že uvedené vzťahy platia pre jednotlivé aktíva samostatne. Avšak väčšina investorov svoj kapitál rozloží medzi viaceré aktíva, čím zníži riziko, ktoré podstupuje. Z tohto dôvodu nás zaujíma ako sa správa výnos a riziko aktíva, keď je súčasťou portfólia.

## 1.2 Portfólio

Rovnako ako pre každé aktívum samostatne, aj pre portfólio budeme uvažovať dve základné charakteristiky - výnos a riziko.

Výnos portfólia určíme jednoducho ako vážený priemer výnosov jednotlivých aktív.

$$\hat{r}_p = \sum_{i=1}^n w_i \hat{r}_i$$

$\hat{r}_i$  - očakávaný výnos  $i$ -teho aktíva

$w_i$  - jednotlivé váhy aktív v portfóliu (v súčte musia dať 1)

$n$  - počet aktív v portfóliu

Mierou rizika portfólia je analogicky štandardná odchýlka.

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_{pi} - \hat{r}_p)^2 P_i}$$

$r_{pi}$  - výnos portfólia v  $i$ -tom stave ekonomiky

$\hat{r}_p$  - očakávaný výnos portfólia

$P_i$  - pravdepodobnosť výskytu  $i$ -teho stavu ekonomiky

Riziko portfólia je takmer vždy menšie ako vážený priemer jednotlivých

rizík. Je to spôsobené kovarianciou medzi jednotlivými aktívami.

$$Cov(AB) = \sum_{i=1}^n (r_{Ai} - \hat{r}_A)(r_{Bi} - \hat{r}_B)P_i$$

Korelačný koeficient,  $\rho$ , vlastne „normuje“ kovarianciu, čo uľahčuje porovnávanie. Korelačný koeficient medzi dvomi aktívami vyjadruje do akej miery výnosy jedného aktíva súvisia s výnosmi druhého.

$$\rho_{AB} = \frac{Cov(AB)}{\sigma_A \sigma_B}$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij})}$$

Ak  $\rho = 1$  hovoríme o dokonalej pozitívnej korelácii, teda výnosy aktív sa hýbu rovnako nahor aj nadol. V tomto prípade riziko portfólia zloženého z takýchto aktív je rovnako rizikové ako samostatné aktíva. Naopak, ak  $\rho = -1$  môžeme hovoriť o dokonalej negatívnej korelácii, čo znamená, že výnosy aktív sa pohybujú presne opačne. Ak sú výnosy nekorelované,  $\rho = 0$ , ich zmeny sú nezávislé. Korelačný koeficient medzi dvomi aktívami môžeme odhadnúť z historických dát

$$R = \frac{\sum_{t=1}^n (\bar{r}_{i,t} - \bar{r}_{i,Avg})(\bar{r}_{j,t} - \bar{r}_{j,Avg})}{\sqrt{\sum_{t=1}^n (\bar{r}_{i,t} - \bar{r}_{i,Avg})^2 \sum_{t=1}^n (\bar{r}_{j,t} - \bar{r}_{j,Avg})^2}}$$

$\bar{r}_{i,t}$  - výnos  $i$ -teho aktíva v čase  $t$

$\bar{r}_{i,Avg}$  - priemerný výnos  $i$ -teho aktíva

Z uvedeného vyplýva, že ak by sme mali portfólio zložené z dvoch dokonale negatívne korelovaných aktív, úplne by sme eliminovali riziko. Je to však len teoretický výsledok, pretože na trhu je nemožné nájsť dokonale korelované (či už pozitívne alebo negatívne) aktíva. Väčšina aktív je pozitívne korelovaných, pričom koeficient sa pohybuje v rozmedzí približne 0.2 – 0.8.

Z histórie môžeme konštatovať, že toto tvrdenie sa najviac vychýľuje pri triede komodít. Tie sú vo všeobecnosti menej korelované so zvyškom trhu, niekedy dokonca môžeme pozorovať negatívnu koreláciu. Ako príklad nám môže slúžiť korelačný koeficient medzi komoditným indexom Dow Jones-AIG Commodity Index (obsahuje 19 komodít ako energia, agrárne produkty, priemyselné a drahé kovy) a indexom NASDAQ Telecommunications (zahŕňa akcie 168 telekomunikačných spoločností), ktorý na základe historických dát za posledných desať rokov vyšiel  $-0.45948$ <sup>1</sup>. Z dôvodu nízkej korelácie voči akciám a dlhopisom, čo sú dve najobchodovanejšie triedy aktív, sú komodity často používané na zaistovanie portfólia. Takisto správanie ostatných tried aktív (napr. nehnuteľnosti) sa sleduje práve vo vzťahu k akciám a dlhopisom.

Ďalšou dôležitou vlastnosťou korelačného koeficientu je premenlivosť. Teda korelačný koeficient medzi aktívami sa môže meniť pod vplyvom rôznych situácií, ktoré na trhu nastanú. Teraz, v čase finančnej krízy, je korelačný koeficient medzi akciami spoločností Coca-Cola Co. a Cisco Systems, Inc. na úrovni 0.937 (z historických dát september-november 2008)<sup>2</sup>, zatiaľčo pred tromi rokmi v rovnakom období (september-november 2005) bol tento korelačný koeficient 0.726<sup>3</sup>. Podobné javy by sme mohli pozorovať na mnohých ďalších akciách, či dlhopisoch, s ktorými sa obchoduje.

Vo všeobecnosti môžeme povedať, že čím viac aktív v portfóliu máme, tým menšie riziko pri investovaní podstupujeme, čo je následkom práve korelačného koeficientu medzi jednotlivými aktívami. Treba podotknúť, že aj keby sme mali v portfóliu všetky aktíva, ktoré sú na trhu dostupné, nezbavili by sme sa rizika úplne. Táto časť rizika, ktorú nevieme odstrániť diverzifikáciou sa nazýva tiež trhové alebo nediverzifikovateľné riziko. Toto riziko

---

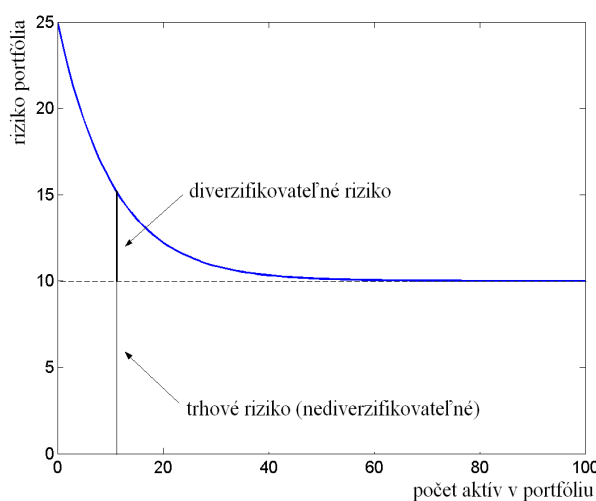
<sup>1</sup><http://finance.yahoo.com>

<sup>2</sup><http://finance.yahoo.com>

<sup>3</sup><http://finance.yahoo.com>

nie je možné eliminovať zo žiadneho portfólia, pretože vychádza z globálnych faktorov, ako sú vojny, inflácia, recesia a pod.

Riziko, ktoré je možné z veľkej časti z portfólia odstrániť je diverzifikovateľné riziko. Veľkosť práve tohto rizika klesá s počtom aktív v portfóliu. Otázkou stále ostáva, ako veľmi vplýva riziko konkrétneho aktíva na celkové riziko portfólia a tiež akú časť trhového rizika tvorí.



Obrázok 1.2: Vplyv veľkosti portfólia na jeho riziko.

Odpoveď nám môže poskytnúť teória Capital Asset Pricing Model (CAPM). CAPM je najznámejší a najpoužívanejší z modelov popisujúcich vzťah medzi rizikom a požadovaným výnosom portfólia. Opiera sa o niekoľko predpokladov:

- Investori sa zameriavajú na jednu periódu držania aktív a snažia sa maximalizovať očakávaný úžitok ich konečného bohatstva vybraním spomedzi alternatívnych portfólií na základe očakávaného výnosu a štandardnej odchýlky každého portfólia.
- Investori si môžu požičať a môžu požičať neobmedzené množstvo aktív

s bezrizikovým výnosom  $r_{RF}$ .

- Investori majú rovnaké odhady pre očakávaný výnos, varianciu a kovarianciu medzi aktívami, t.j. majú homogénne očakávania.
- Všetky aktíva sú dokonale deliteľné a likvidné.
- Žiadne transakčné náklady.
- Žiadne dane.
- Investori predpokladajú, že ich kúpy a predaje neovplyvnia ceny akcií.
- Množstvá všetkých akcií sú dané a fixné.

Jedným z dôležitých záverov CAPM je práve miera rizika akou jednotlivé aktíva prispievajú k trhovému riziku. Príslušné riziko sa nazýva tiež beta koeficient a môžeme ho vyjadriť

$$b_i = \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \right) \rho_{iM}.$$

$\sigma_i$  - štandardná odchýlka výnosu  $i$ -teho aktíva

$\sigma_M$  - štandardná odchýlka výnosu trhového portfólia

$\rho_{iM}$  - korelácia medzi výnosmi  $i$ -teho aktíva a trhového portfólia

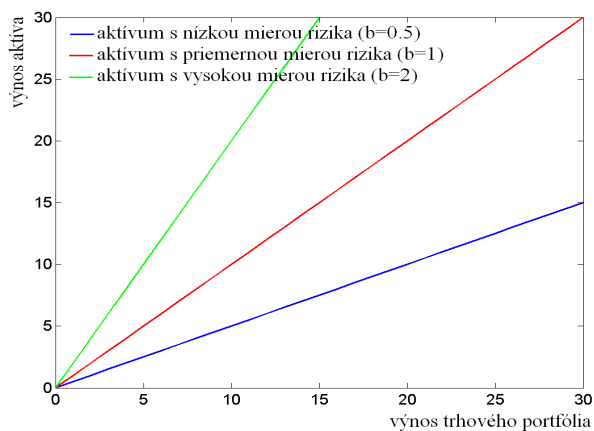
Betu spravidla určujeme graficky, ako sklon regresnej priamky závislosti výnosu aktíva od výnosu trhového portfólia.

Betu portfólia môžeme určiť analogicky ako výnos, teda ako vážený priemer jednotlivých beta koeficientov aktív, ktoré sú v portfóliu zastúpené.

$$b_p = \sum_{i=1}^n w_i b_i$$

Vzťah medzi uvedenými charakteristikami aktív je známy ako Security Market Line (SML).

$$r_i = r_{RF} + (r_M - r_{RF})b_i$$

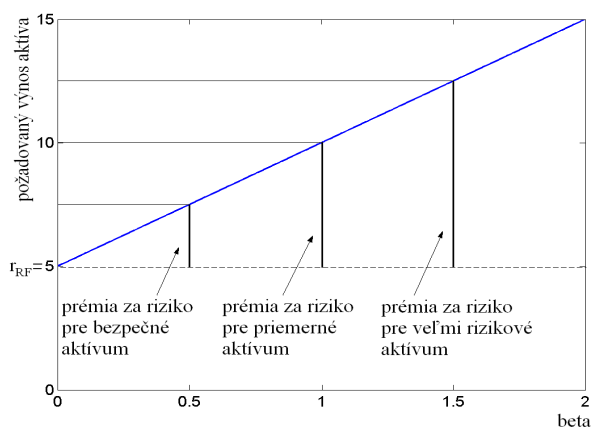


Obrázok 1.3: Beta ako sklon regresnej priamky.

$r_i$  - požadovaný výnos  $i$ -teho aktíva

$r_{RF}$  - bezrizikový výnos (risk-free rate)

$r_M$  - výnos trhového portfólia



Obrázok 1.4: Security Market Line (SML).

SML hovorí o tom, že štandardná odchýlka aktíva sa nemusí použiť ako miera rizika, pretože časť rizika zahrnutá v  $\sigma$  môže byť eliminovaná diverzifikáciou.



### 1.3 Efektívne portfólio

Efektívne portfólio môžeme zdefinovať dvomi spôsobmi.

- Pri danej miere rizika má najvyšší očakávaný výnos.
- Pri danej výške očakávaného výnosu má najnižšie riziko.

Množinu efektívnych portfólií nazývame tiež efektívna hranica. Obsahuje všetky dosiahnuteľné portfóliá s uvedenými vlastnosťami, t.j. nie je možné znížiť ich rizikovosť alebo zvýšiť výnos. Výber konkrétneho portfólia závisí od toho aký výnos investor požaduje a ako veľmi je rizikovo averzný. Výpočet množiny efektívnych portfólií vypracoval Harry M. Markowitz a po prvýkrát ho uverejnil v článku Portfolio Selection v marci 1952. Neskôr (v r.1990) bol spolu s Mertonom H. Millerom a Williamom F. Sharpom za svoju prácu ocenený Cenou švédskej ríšskej banky za ekonómiu.

Otázka váh pri investovaní je známa ako „Markowitzov problém“. Tu uvádzame jeho matematickú formuláciu.

$$\min \sum_{i,j} w_i w_j \sigma_{ij} = \sigma_p^2$$

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i$$

$$\sum_i w_i = 1$$

Riešenie tejto úlohy môžeme zapísať v nasledovnom tvare.

$$w_p = g + h\bar{r}_p$$

$$g = \frac{1}{D} [B(V^{-1}\mathbf{1}) - A(V^{-1}\bar{r})]$$

$$h = \frac{1}{D} [C(V^{-1}\bar{r}) - A(V^{-1}\mathbf{1})]$$

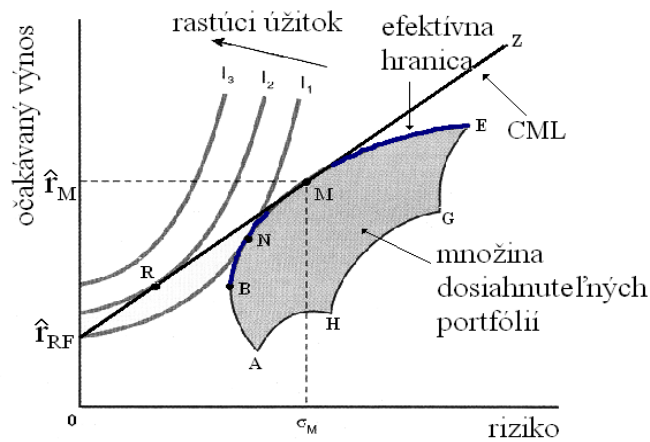
$$A = \mathbf{1}^T V^{-1} \bar{r} \quad B = \bar{r}^T V^{-1} \bar{r}$$

$$C = \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1} \quad D = BC - A^2$$

$\mathbf{1}$  - jednotkový vektor,  $\bar{r}$  - vektor očakávaných výnosov

Vlastnosti investora odzrkadľuje jeho indierenčná krivka. Spája body, voči ktorým je investor indierentný, teda z nich má rovnaký úžitok. Čím je táto krivka strmšia, tým viac je investor rizikovo averzný. Optimálne portfólio nájdeme ako dotykový bod efektívnej hranice a jednej z indierenčných kriviek. Tento bod označuje najvyšší stupeň spokojnosti, aký môže investor dosiahnuť.

Ak uvažujeme aj bezrizikový výnos, množina dosiahnuteľných portfólií, rovnako ako množina efektívnych portfólií, sa zmení. Vďaka tomu je možné dosiahnuť indierenčnú krivku, ktorá zodpovedá vyššej spokojnosti investora.



Obrázok 1.5: Efektívna hranica a optimálne portfóliá.

$N$  - optimálne portfólio, ak neuvažujeme bezrizikový výnos

$M$  - trhové portfólio

$R$  - optimálne portfólio, ak uvažujeme bezrizikový výnos

Priamku vychádzajúcu z bodu  $r_{RF}$  nazývame Capital Market Line (CML). Určuje vzťah medzi rizikom, charakterizovaným štandardnou odchýlkou, a výnosom efektívnych portfólií.

$$\hat{r}_p = r_{RF} + \left( \frac{\hat{r}_M - r_{RF}}{\sigma_M} \right) \sigma_p$$

$\hat{r}_M - r_{RF}$  - trhová prémia za riziko (Market Risk Premium)

$\frac{\hat{r}_M - r_{RF}}{\sigma_M}$  - sklon CML, odráža agregovaný vzťah investorov voči riziku

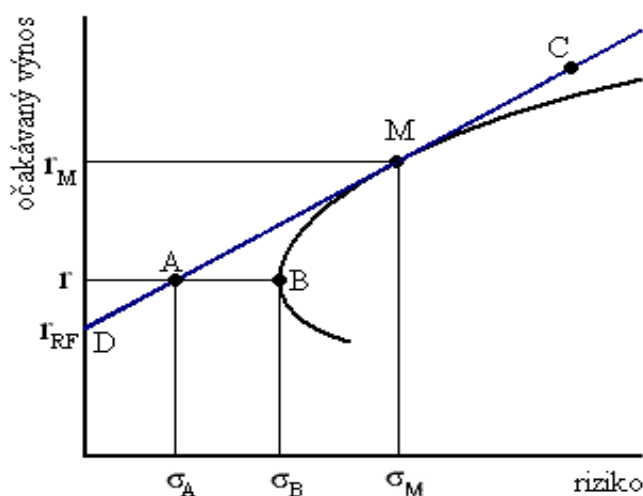
Portfóliá ležiace na CML sú kombináciou bezrizikového aktíva a dotykového portfólia. To znamená, že vzájomný pomer rizikových aktív je rovnaký ako v dotykovom bode, ale mení sa percentuálny podiel bezrizikového aktíva v portfóliu. Napríklad uvažujme dve rizikové aktíva - dlhopisy a akcie. Na základe CAPM vypočítame, e dotykové portfólio  $M$  je tvorené z 35% dlhopismi a zo 65% akciami, teda rizikové aktíva sú v pomere 35/65. Všetky portfóliá na CML teda budú ma tú vlastnosť, e váhy dlhopisov a akcií budú v pomere 35/65.

## 1.4 Optimálne portfólio

V tejto podkapitole sa budeme konkrétnejšie venova výberu optimálneho portfólia, teda najlepšieho z množiny dosiahnuteľných portfoli.

Z hľadiska investovania spomenme niektoré kluove body:

- $M$  - portfólio zložené z rizikových aktív v konkrétnom pomere, dotykový bod CML a efektívnej hranice,
- $B$  - portfólio zložené z rizikových aktív, ktoré mať spomedzi všetkých takýchto najniie riziko,
- $D$  - bezrizikový výnos.



Obrázok 1.6: Výber optimálneho portfólia.

Všetky body na úsečke  $DM$  charakterizujú portfóliá zložené z bezrizikového aktíva a portfólia  $M$ . Vhodnou kombináciou týchto dvoch môžeme dosiahnuť portfólio  $A$ , ktoré ako vidíme je výhodnejšie než portfólio  $B$ . Tieto dve portfóliá majú rovnaký očakávaný výnos  $r$ , ale je s nimi spojené rozdielne riziko. Pri investovaní do portfólia  $A$  podstupujeme menšie riziko ako keby sme investovali do  $B$ . Veľkosť tohto „ušetreného“ rizika môžeme určiť ako  $\sigma_B - \sigma_A$ .

Ako bolo spomenuté, portfólio  $M$  dosiahneme investovaním celého kapitálu do rizikových aktív. Smerom doľava sa po priamke CML môžeme pohybovať investovaním určitej časti kapitálu do bezrizikového aktíva. Naopak, teda smerom doprava sa môžeme pohybovať požíčianím si bezrizikového aktíva, teda musí byť na trhu povolený tzv. short-rate alebo krátka pozícia. Takýmto spôsobom sa môžeme dostať do bodu  $C$ , čo je výhodnejšie ako pohyb po efektívnej hranici, kde pri rovnakom riziku dosahujeme nižší výnos.

## 1.5 Nevýhody CAPM

CAPM, ako to má už v názve definované, je „len“ model. To znamená, že niektoré faktory, ktoré sa na skutočnom trhu vyskytujú zanedbáva úplne, niektoré čiastočne.

Už pri definovaní predpokladov sú niektoré tieto nevýhody zrejmé, napr. model neuvažuje transakčné náklady alebo dane. Tieto sa do modelu samozrejme dajú zaviesť, čo ale spôsobí značnú komplikáciu pri výpočtoch.

Ďalším dôležitým nedostatkom je definícia trhového portfólia. Teda existencia portfólia, ktoré obsahuje všetky rizikové aktíva na trhu. Takéto portfólio je nezrealizovateľné vzhľadom na množstvo rizikových aktív, s ktorými sa obchoduje po celom svete. Ako aproximáciu trhového portfólia môžeme uvažovať niektorý z indexov (S&P 500, Dow Jones, Nasdaq, ...), ktoré však zahŕňajú len niekoľko desiatok alebo stoviek aktív na určitom trhu (obvykle vymedzenom z geografického hľadiska).

Jedným z najväčších problémov tohto modelu je, že uvažuje normálne rozdelenie výnosov aktív, ktoré sú v portfóliu zastúpené. Z toho vyplýva aj normálne rozdelenie výnosov portfólia. Tento predpoklad je veľmi silný a obmedzujúci pre túto teóriu. Aj to je dôvod prečo si kladieme otázku: „Je štandardná odchýlka dobrou mierou pre riziko?“. Zodpovedne môžeme povedať, že je najjednoduchšou mierou, ale nie najlepšou. Preto sa pokúsime modelovať výnos portfólia v závislosti od inej miery rizika, ktorá je založená na neočakávanej strate portfólia.

# Kapitola 2

## Basel II

### 2.1 Úvod a história

V tejto kapitole sa zoznámime so základnými myšlienkami a postupmi Bazilejskej dohody. Tá hovorí o kapitálovej primeranosti bánk, s čím úzko súvisí meranie rizika, ktoré banka podstupuje. Je v záujme banky, čo najlepšie odmerať všetky typy rizík, ktoré sú zahrnuté v kapitálovej primeranosti. My sa v práci budeme ďalej venovať len trhovému riziku, avšak oboznámenie sa s problematikou týkajúcou sa Basel II je nutnou podmienkou pochopenia prečo hľadáme čo najlepšiu mieru rizika.

V roku 1974 bol založený Bazilejský výbor pre bankový dohľad. Vznikol ako jeden z výborov Banky pre medzinárodné zúčtovanie. Jeho úlohou je vypracovávať odporúčenia regulačných opatrení v bankovom sektore, ktoré však majú bezprostredný právny účinok len pre desať krajín vo Výbore a záväznými sa pre bankový sektor stávajú až po transformácii do národnej právnej úpravy (v krajinách EÚ prostredníctvom smerníc).

V roku 1988 bola prijatá prvá dohoda o kapitáli známa ako Basel I. Motiváciou pre jej vznik bolo zjednotenie pravidiel, podľa ktorých sa banky riadia, upevnenie stability bankového systému a stanovenie rovnakých požiadaviek

na kapitálovú primeranosť bánk. Podľa tejto dohody museli banky držať v rezerve aspoň 8% celkovej výšky poskytnutých úverov. Presnejšie povedané kapitálová primeranosť, určená tzv. Cooke ratiom, musela byť vo výške minimálne 8%. Tento pomer je definovaný ako podiel kapitálu a rizikovo vážených aktív.

$$CR = \frac{Capital}{CreditRiskExposure} \geq 8\%$$

*Capital* - majetok, rezervy, časť pohľadávok

*CreditRisks* - všetky úvery poskytnuté bankou prepočítané váhami:

- 50% - hypotéky
- 20% - medzinárodné organizácie, medzibankové úvery, úvery pre štáty, ktoré nie sú členom OECD
- 0% - úvery členom OECD.

Rastúca zložitosť bankového systému ukázala, že táto dohoda nie je postačujúca a je potrebná jej reforma. Tak postupne od roku 1998 vznikala dohoda o kapitáli Basel II, ktorá je záväzná pre všetky banky a investičné spoločnosti v Európe. Do legislatívy EÚ bola táto tzv. „Nová dohoda“ zavedená prostredníctvom dvoch smerníc:

- smernica 2006/48/ES o začatí a vykonávaní činností úverových inštitúcií,
- smernica 2006/49/ES o kapitálovej primeranosti investičných spoločností a úverových inštitúcií.

## 2.2 Regulačný kapitál

Kapitálová primeranosť a pojem regulačný kapitál v ponímaní Basel II splývajú, a teda vyjadrujú množstvo peňazí, ktoré banka musí držať v rezerve na pokrytie rizikovo-vážených aktív.

Z *internej perspektívy*, teda vnútorného pohľadu banky je kapitál navrhnutý ako „buffer“ - zásobník, ktorý v podstate pohlcuje neočakávané straty, a tým ochraňuje depozitorov. Taktiež zabezpečuje dostatočnú istotu pre externých investorov a ratingové agentúry v súvislosti so solventnosťou a životaschopnosťou banky.

Druhý pohľad poskytuje pozícia regulátora. Z tejto *externej perspektívy* kapitálová primeranosť spĺňa dva ciele.

- Zníženie systémového rizika - zaručuje bezpečnosť bankového systému.
- Vytvorenie konkurenčného prostredia - zabezpečenie rovnakých pravidiel pre všetky banky, čím je umožnený vstup na trh aj pre medzinárodné aktívne banky, čo je v dnešnej dobe veľkých finančných inštitúcií veľmi dôležité, keďže aj takmer všetky slovenské banky sú dcérskymi spoločnosťami medzinárodných finančných skupín.

V prvej dohode nedostatočná diferenciácia spolu s vývojom na finančných trhoch viedla k vytvoreniu arbitráže regulátorného kapitálu. V podstate šlo o umelé znižovanie regulátorného kapitálu prostredníctvom novovzniknutých finančných nástrojov ako kreditné deriváty. Tým banka niektoré expozície postavila mimo regulovaného bankového systému.

## 2.3 Motivácia a štruktúra Basel II

Dôvodom vzniku novej dohody bola práve zložitosť bankového sektora. Cieľom dohody je lepšie a exaktnejšie ohodnotenie rizika, čoho dôsledkom je presnejšie určenie kapitálovej požiadavky na banky.

Basel II vedie k zmene výpočtu kapitálových požiadaviek smerom k rizikovo citlivejším prístupom, a tiež k zvýšeniu požiadaviek na riadenie rizík v bankách resp. na mechanizmy riadenia rizika a na procesy, ktoré sa v bankách uskutočňujú. Nové pravidlá sú neporovnateľne komplexnejšie a detail-



nejšie a rozširujú riziká, ktoré musí banka pri určení kapitálovej primeranosti zohľadňovať. Tieto na rozdiel od prvej dohody využívajú pri počítaní kapitálovej primeranosti ratingy uznaných ratingových agentúr, napr. Standard & Poor's, Moody's.

Ďalším dôležitým bodom, ktorý sa v pôvodnej dohode Basel I nevyskytoval, je bankový dohľad a disciplína na trhu. V praxi to znamená transparentné metódy merania rizika, ktoré banky podstupujú a právomoci národného regulátora (na Slovensku je to Národná banka Slovenska).

Koncepcia Basel II je založená na troch pilieroch. Pilier I stanovuje minimálne kapitálové požiadavky pre banku vzhľadom na riziká, ktoré podstupuje. Jeho obsah je možné rozdeliť na tri komponenty:

- definícia kapitálu (v tejto oblasti nastali minimálne zmeny oproti prvej dohode),
- definícia rizikovo-vážených aktív,
- stanovenie minimálneho pomeru kapitálu k rizikovo-váženým aktívam.

Zmena v definícii rizikovo-vážených aktív nastala v dvoch smeroch. Jednou je, že Basel II dopĺňa kreditné a trhové riziko o operačné riziko, s ktorým prvá dohoda nepočítala, a toto je zahrnuté do menovateľa podielu určujúceho kapitálovú primeranosť. Druhá a podstatná zmena je spôsob zohľadňovania kreditného rizika. Pri meraní rizika poskytuje dva prístupy:

- štandardný - v konečnom dôsledku sa len málo líši od výsledkov získaných pomocou Basel I,
- IRB („internal rating based“) - založený na internom ratingu, prvá dohoda ho nedovoľovala a umožňuje bankám merať riziko konkrétneho financovania na základe vlastných metód.

Podľa Basel II stále platí, že kapitálová primeranosť musí byť vo výške aspoň 8%, tentokrát je určená tzv. McDonough ratiom alebo BIS ratiom. Zmena nastáva v menovateli zlomku, kde ku kreditnému a trhovému riziku pribudlo operačné riziko.

$$MDR = \frac{Capital}{Credit + Market + OperationalRisk} \geq 8\%$$

Kapitál banky môžeme rozdeliť do troch zložiek:

- *Tier I* - základné vlastné zdroje
- *Tier II* - dodatkový zdroje (dlhodobé pohľadávky)
- *Tier III* - doplnkové zdroje (krátkodobé pohľadávky).

Ako bolo spomenuté, výpočet kreditného rizika je presnejší vzhľadom na použitie citlivejšieho rozdelenia zmluvných strán. Rizikové váhy sa priradujú na základe ratingov medzinárodných agentúr v prípade štandardného prístupu a na základe vlastných ratingov, ak má banka schválený IRB prístup.

V rámci Piliera II sa dohliadací orgán zameriava na hodnotenie aktivít a rizikového profilu banky s cieľom posúdiť dostatočnosť kapitálu banky, a tiež spoľahlivosť a kvalitu riadiacich a kontrolných mechanizmov banky. Banka by mala mať zavedené zodpovedajúce vnútorné procesy, umožňujúce meranie a riadenie rizika a vyhodnotenie adekvátnosti jej interného kapitálu s ohľadom na podstupované riziká (tzv. Internal Capital Adequacy Assessment Process - ICAAP). Národný regulátor má právo upraviť výšku kapitálovej rezervy, ak ju považuje za nedostatočnú vzhľadom k podstupovaným rizikám. Zavedenie dohľadu do Novej dohody taktiež prinieslo veľký dôraz na schopnosť oceniť riziko, a to rovnako na strane bánk, ako aj na strane národného regulátora.

Pilier III stanovuje požiadavky na zverejňovanie informácií bankami. Zverejňovaním informácií bankami účastníci trhu získajú prehľad o rizikovom profile banky, jej aktivitách a dostatočnosti jej kapitálu.

## 2.4 Ďalší vývoj Basel II

V porovnaní s prvou dohodou je Basel II oveľa komplexnejšia a lepšia. Avšak stále obsahuje niektoré sporné otázky a je tu priestor na jej vylepšenie. Ako príklad môžeme uviesť právomoci národného regulátora. Basel II umožňuje regulátorom upravovať výšku kapitálovej požiadavky, čoho následkom by mohlo byť zvýhodnenie niektorej banky neúmerným znížením tejto požiadavky.

Taktiež kapitálová primeranosť, ako ju určuje Basel II môže byť príliš nadhodnotená. Teda bankám môže určovať držať priveľa vlastného kapitálu s ohľadom na riziko, ktoré podstupujú. Pokúsime sa za rovnakej ochrany kapitálu dosiahnuť, čo najnižšie náklady na kapitál prostredníctvom iných postupov ako sú použité v Basel II.

Je zrejmé, že čím menej vlastného kapitálu bude banka držať, tým väčšie množstvo prostriedkov môže investovať do aktív, ktoré jej prinesú vyšší výnos. Práve to je dôvod, prečo sa snažíme nájsť čo najefektívnejšiu mieru rizika. Zmena miery trhového rizika môže znížiť kapitálovú primeranosť, a tým zvýši celkový výnos portfólia banky.

# Kapitola 3

## Ekonomický kapitál

### 3.1 Úvod

Myšlienka ekonomického kapitálu vzišla z potreby odmerať riziko presnejšie ako to určuje štandardná odchýlka v CAPM. Je zrejmé, že výnosy aktív nemajú vždy normálne rozdelenie a pri ich agregácii teda vzniká problém s pravdepodobnostným rozdelením výnosov portfólia, ktoré spravidla nie je normálne. Z tohto dôvodu sa vyvíjajú nové a lepšie miery rizika. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že dobrá alebo vyhovujúca miera rizika má nasledovné vlastnosti:

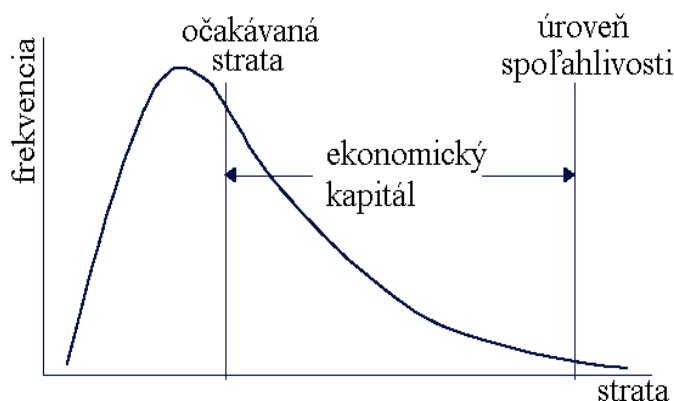
- monotónnosť  $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$ ,
- invariantnosť voči posunu  $\rho(X + a) = \rho(X) + a$ ,
- homogénnosť  $\lambda \geq 0 \Rightarrow \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ ,
- subaditivita  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ .

## 3.2 Definícia

Ekonomický kapitál je nástrojom pri určovaní a riadení rizika banky. Vznik teórie ekonomického kapitálu sa úzko viaže k nasledovným otázkam:

- vhodnosť štruktúry kapitálu banky
- dostatok kapitálu banky vzhľadom k prijatému riziku.

Ekonomický kapitál predstavuje finančné zdroje, ktoré musí banka vlastniť, aby na danej úrovni spoľahlivosti a pri danom riziku mohla plniť svoje záväzky voči vlastníkom, akcionárom a veriteľom. Ekonomický kapitál tak predstavuje kapitál, ktorý musia vlastníci vložiť do banky (vlastného imania), aby banka mohla uskutočniť plánované investície a udržať svoju ratingovú pozíciu <sup>1</sup>.



Obrázok 3.1: Definícia ekonomického kapitálu.

Pri uplatnení modelov ekonomického kapitálu je potrebné dôkladne zvážiť nasledovné:

1. časový horizont

---

<sup>1</sup>Jozef Klučka, Ekonomický kapitál

2. definícia kapitálu
3. riziková miera
4. typy rizika
5. metodika výpočtu
6. agregácia.

### 3.3 Charakteristika

Meranie ekonomického kapitálu vnímame v tejto práci ako doplnkovú mieru rizika. To znamená, že pre množinu portfólií zostavíme nielen graf výnos vs. štandardná odchýlka, ale aj graf výnos vs. ekonomický kapitál resp. volatilita vs. ekonomický kapitál. Teda na základe známych hodnôt určíme pre každé portfólio tri charakteristiky: výnos, volatilitu a ekonomický kapitál.

Investor, v našom prípade banka, sa potom v súlade so svojím rizikovým profilom rozhodne, ktorú charakteristiku použije ako rozhodujúcu mieru rizika. Je zrejmé, že portfóliám s vysokou volatilitou (teda vysokorizikové z hľadiska CAPM) nebude prislúchať nízka hodnota ekonomického kapitálu, avšak ako budeme vidieť na grafoch, vývoj tejto veličiny sa odlišuje od vývoja volatility. Takéto určenie optimálneho portfólia nie je také exaktné, ako keby sme brali do úvahy len volatilitu. Je to spôsobené práve individuálnym prístupom investora, ktorý si z viacerých možností (ich rovnocennosť nevieme presne posúdiť) vyberie práve jednu.

Pre naše potreby sme sa rozhodli sledovať ekonomický kapitál v časovom horizonte 1 rok, najmä z dôvodu konzistentnosti s účtovníctvom a finančnými výkazmi. To znamená, že riadenie rizika prebieha v súlade s ostatnými procesmi v banke. Pri voľbe dlhšieho horizontu by sme mohli naraziť na

určité problémy spojené s ťažkou kontrolovateľnosťou obchodu s aktívami. Ďalšou dôležitou skutočnosťou je sledovanie ekonomického kapitálu len pre trhové riziko.

Ekonomický kapitál sa stanovuje na úrovni spoľahlivosti blízko 100%, ktorá sa určuje ako kompromis medzi vysokými výnosmi pre akcionárov a dostatočným krytím dlhov. Pretože výška ekonomického kapitálu určuje aj ratingovú pozíciu banky, úroveň spoľahlivosti býva nastavená veľmi vysoko. Napríklad, ak si chce banka udržať S&P rating BB, kvantil by mal byť najmenej 97%. Podobne, ak chce banka zvýšiť svoj rating na BBB, tak pravdepodobnosť defaultu by mala byť na úrovni 0,5%, čo zospovedá úrovni spoľahlivosti 99,5%.

### 3.4 Interpretácia ekonomického kapitálu

V tejto podkapitole použijeme nasledovné označenie:

$A_t$  - trhovú hodnotu aktív

$D_t$  - trhovú hodnotu pasív

$C_t$  - aktuálny voľný kapitál.

Teda môžeme napísať, že platí:

$$C_0 = A_0 - D_0$$

$$C_1 = A_1 - D_1$$

Ďalej nech  $r_A$  je nominálny výnos aktív a  $r_D$  je nominálny výnos pasív. Potom by strata  $l$  v najhoršom prípade mala zodpovedať výške aktív v čase  $t = 1$ .

$$C_1 = 0 = A_0(1 + r_A)(1 - l) - D_0(1 + r_D)$$

Teda maximálna prípustná hodnota dlhu, pri ktorom je ešte zabezpečená solventnosť, nesmie presiahnuť hodnotu

$$D_0 = A_0(1 + r_A)(1 - l)/(1 + r_D).$$

Keďže ekonomický kapitál  $EC_0$  je minimálne množstvo kapitálu potrebné na pokrytie tejto straty, je daný nasledovne:

$$EC_0 = A_0[1 - (1 + r_A)(1 - l)/(1 + r_D)]$$

Z toho vyplýva, že minimálna výška ekonomického kapitálu musí byť v súlade s tým, aby si banka udržala platobnú schopnosť. Tento vzťah môžeme prepísať do tvaru

$$EC_0 = A_0 - VaR/(1 + r_D),$$

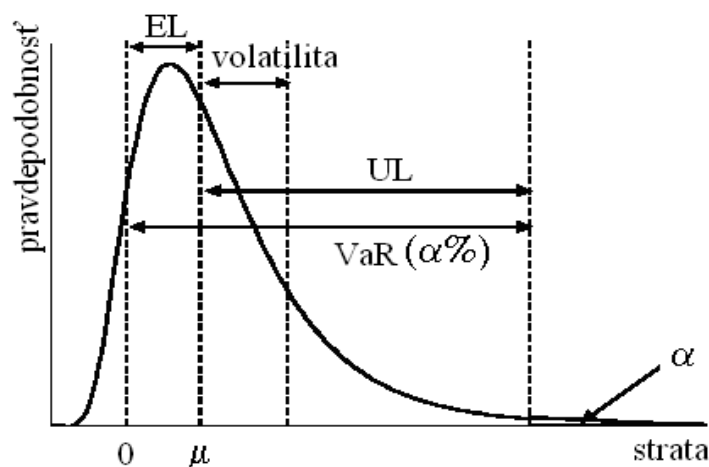
kde  $VaR$  (Value-at-Risk) reprezentuje výšku aktív spojenú so stratou pri danej úrovni spoľahlivosti. Pri zjednodušení, že rozdiel medzi výnosmi aktív a pasív je približne rovný očakávanej strate pri zlyhaní,  $u$ , dostaneme

$$EC_0 = A_0[1 - (1 + r_D)(1 + u)(1 - l)/(1 + r_D)] = A_0[1 - (1 + u)(1 - l)].$$

Ak ďalej zanedbáme súčin  $ul$ , čo môžeme spraviť vzhľadom na jeho rád, dostaneme bežne uvádzaný vzťah pre  $EC$ :

$$EC_0 \approx A_0(l - u)$$





Obrázok 3.2: Pravdepodobnostné rozdelenie strát.

EL - očakávaná strata (expected loss) má hodnotu  $\mu$ , čo je stredná hodnota rozdelenia strát

UL - neočakávaná strata (unexpected loss)

VaR - Value-at-Risk

### 3.5 Výpočet ekonomického kapitálu

Existuje niekoľko spôsobov v praxi používaných na výpočet ekonomického kapitálu. Vo všeobecnosti ich môžeme rozdeliť do dvoch skupín.

1. *Top-down* - v tomto prípade je ekonomický kapitál určený na základe agregovaných informácií o postavení banky na trhu. Podkladom pre takýto výpočet sú buď príjmy banky alebo ceny akcií. Pri tomto prístupe môžeme naraziť na viacero obmedzení a problémov. Najčastejšie z nich sú:

- dostupnosť historických dát,

- kapitál nevieme priradiť k jednotlivým typom rizika.

Najmä druhé spomínané obmedzenie je kľúčové a obvykle je hlavnou príčinou prečo firmy tento spôsob výpočtu nevyužívajú. Pre riadenie rizika banky (rovnako ako aj iných inštitúcií a firiem) je dôležité poznať, koľko kapitálu (peňazí) na ktorú transakciu treba vynaložiť, resp. aké množstvo peňazí je potrebné držať pri uskutočnení konkrétneho obchodu.

2. *Bottom-up* - ekonomický kapitál sa modeluje v dvoch krokoch. Najprv sa určí veľkosť trhového, kreditného a operačného rizika a následne sa riziká agregujú použitím štatistických modelov a stress-testingu. Tento prístup je používanejší, pretože na rozdiel od top-down prístupu poskytuje transparentnosť vzhľadom k rozlíšeniu kapitálu pokrývajúceho rôzne typy rizika. Vedieť separovať kapitál medzi jednotlivé typy rizika je dôležité pre riadenie procesov v banke, lebo kapitál hovorí o finančnej náročnosti jednotlivých obchodov a procesov.

S výpočtom ekonomického kapitálu úzko súvisí už spomínaný stress-testing alebo stresové testovanie. Spočíva vo vývoji niekoľkých scenárov ako sa môže trh správať a následne skúma dopad týchto trhových zmien na portfólio a kapitál banky. Tieto scenáre spravidla modelujú extrémne situácie na trhu, a to rovnako v pozitívnom ako aj negatívnom smere. Vychádzajú buď z histórie, teda modelujú skutočnosť, ktorá už niekedy nastala, alebo sú hypotetické a predpokladajú na trhu neočakávané zmeny, ktoré sa v minulosti nestali, ale môžu nastať s nenulovou pravdepodobnosťou.

Ďalej je možné stresové testovanie rozdeliť na dva typy podľa komplexnosti.

- *Jednoduché testy citlivosti* - skúmajú a zameriavajú sa len na zmeny jedného rizikového faktora.

- *Stresové scenáre* - uvažujú paralelné zmeny viacerých faktorov, sú teda na vývoj aj interpretáciu výsledkov náročnejšie, avšak oproti jednoduchým testom sú oveľa komplexnejšie a majú vyššiu výpovednú hodnotu.

V priebehu simulovania či už jednoduchých testov alebo scenárov sa pozorujú straty banky a zmeny hodnoty ekonomického kapitálu. Zapracovanie týchto výsledkov do metodiky je samozrejme individuálne a je na zväžení manažmentu, do akej miery výsledky stresového testovania zohľadní pri stanovení konečného ekonomického kapitálu.

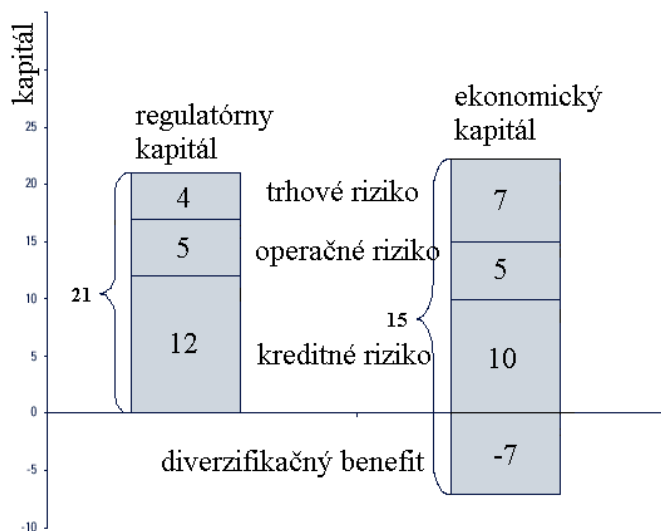
### 3.6 Diverzifikačný efekt

Ako už bolo niekoľkokrát spomenuté agregácia a z toho vyplývajúci diverzifikačný efekt sú kľúčové pri výpočte a modeloch ekonomického kapitálu. Keďže spolu úzko súvisia, rozhodli sme sa im venovať spoločnú podkapitolu.

Diverzifikačný efekt môžeme definovať ako zápornú hodnotu kapitálu, ktorá vyplýva z korelácie a vzájomných vzťahov medzi jednotlivými typmi rizika.

Pod agregáciou chápeme spájanie rôznych typov rizík do jedného portfólia, alebo tiež spájanie jednotlivých tried v rámci jedného typu rizika. Najjednoduchší spôsob ako spojiť riziká je ich sčítanie. Je však otázne či je to najlepšia cesta. Za normálnych okolností na trhu sa napríklad kreditné a trhové riziko ovplyvňujú málo, vo všeobecnosti je ich korelácia nízka. Avšak v čase krízy a recesie sa ich vzájomná korelácia prudko zvyšuje. To znamená, že na základe vývoja jedného rizika vieme dobre predpovedať vývoj druhého, teda je dôležité zvoliť správny prístup k agregácii.

Sofistikovanejší spôsob ako spojiť riziká je agregáčna funkcia, tzv. kopula. Tá na základe jednotlivých pravdepodobnostných rozdelení odhaduje ich koreláciu a prepojenie a výsledkom je hustota agregovaného rizika. Keďže



Obrázok 3.3: Diverzifikačný efekt.

spája celé rozdelenia, lepšie dokáže odhadnúť správanie sa agregovanej funkcie aj v extrémnejších situáciách, zvlášť ak jednotlivé pravdepodobnostné rozdelenia vznikli aj na základe stresového testovania. Práve takáto agregácia zabezpečuje, že sa prejaví diverzifikačný efekt.

Kopula funkcia je viacrozmerná distribučná funkcia, t.j.

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)),$$

kde  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sú marginálne distribučné funkcie,  $G$  je  $n$ -rozmerná distribučná funkcia a  $C$  je kopula funkcia. V našom prípade za marginálne distribučné funkcie považujeme pravdepodobnostné rozdelenia strát jednotlivých aktív na základe ich ratingov a použitím kopuly sa vypočíta  $G$ , teda distribučná funkcia strát portfólia.

### 3.7 Value-at-Risk

Považujeme za dôležité v krátkosti spomenúť Value-at-Risk (VaR) ako jednu z modernejších a komplexnejších mier rizika v porovnaní so štandardnou odchýlkou. VaR sa tiež často používa pri výpočte ekonomického kapitálu ako bolo uvedené vyššie.

VaR môžeme definovať ako maximálnu stratu hodnoty portfólia s danou pravdepodobnosťou v priebehu určitého časového horizontu. Táto definícia je ekvivalentná s odpoveďou na otázku: *Kolko môžem stratiť s  $x\%$ -nou pravdepodobnosťou v danom časovom horizonte?* V literatúre sa môžeme stretnúť s rôznymi definíciami VaR, v princípe však všetky odpovedajú práve na túto otázku.

$$VaR_\alpha = \inf\{l \in \mathbb{R}; P(L > l) \leq 1 - \alpha\}$$

Výraz na pravej strane považujeme za definíciu VaR, ktorú môžeme upraviť do nasledovného tvaru:

$$VaR_\alpha = \inf\{l \in \mathbb{R}; F_L(l) \geq \alpha\},$$

avšak len v prípade, že poznáme pravdepodobnostné rozdelenie strát. Keďže distribučná funkcia je vo väčšine prípadov len odhadnutá, tak aj VaR považujeme len za odhad a nie jednoznačne definovanú hodnotu.

VaR je funkciou dvoch premenných, a to  $N$  - časový horizont v dňoch a  $\alpha$  - úroveň spoľahlivosti (alebo kvantil pravdepodobnostného rozdelenia strát). Obvykle používaný časový horizont je jeden deň alebo mesiac, ale investori (banky) môžu samozrejme aplikovať aj inú dobu držania, napr. štvrtrok, polrok a pod. Táto voľba závisí od viacerých faktorov, dokonca môže byť aj určená regulátorom. Napríklad, Basel II určuje, že interné modely používané na určenie regulátórneho kapitálu pre trhové riziko musia zohľadňovať dva týždne (t.j. 10 obchodovacích dní). Ďalšie skutočnosti, od ktorých časový horizont môže závisieť:

- predpoklad, že hodnota portfólia sa počas doby držania nezmení je jednoduchšie obhájiť pre kratší čas,
- kratší časový horizont je preferovanejší z hľadiska validácie a backtestingu.

Voľba úrovne spoľahlivosti závisí od toho, ako veľmi má investor záujem kryť svoje portfólio a aký rating chce dosiahnuť.

Môžeme teda zhrnúť, že keď sa povie Value-at-Risk, určite sa hovorí o meraní a riadení rizika. Konkrétne čísla sa určujú na základe rôznych modelov v závislosti od cieľa, kvôli ktorému sa VaR počíta. Od toho závisí voľba časového horizontu a úrovne spoľahlivosti a rovnako aj metóda kalkulácie, ktorá môže byť založená na historických dátach alebo Monte Carlo simuláciách.

# Kapitola 4

## Praktická časť

V tejto časti diplomovej práce aplikujeme uvedenú teóriu na trhové dáta a pokúsime sa výsledky interpretovať. V prvej polovici sa budeme venovať Markowitzovej teórii a CAPM modelu. Na základe vzťahov uvedených v prvej kapitole vypočítame z dát množinu dosiahnuteľných portfólií, efektívnu hranicu a niektoré charakteristické portfóliá s príznačnými vlastnosťami.

Druhú časť venujeme vzťahom a súvislostiam medzi ekonomickým kapitálom a výnosom portfólia.

Portfólio je rozdelenie investícií medzi viaceré aktíva s cieľom znížiť riziko. Každý investor sa individuálne rozhoduje, do ktorých aktív investuje a do ktorých nie. My sme sa rozhodli pri pozorovaní portfólia nesústrediť na konkrétne akcie, dlhopisy či komodity, ale vytvoriť „všeobecnejšie“ portfólio. To znamená, že v ňom budú zahrnuté jednotlivé triedy aktív, ktorých výnos je charakterizovaný indexom.

Indexy sú ukazovatele výnosnosti zahŕňajúce skupinu akcií, dlhopisov, komodít a pod., ktoré majú spoločnú charakteristiku, napr. z geografického alebo technologického hľadiska.

Ako sme už spomenuli, snažili sme sa vytvoriť všeobecnejšie portfólio, ktoré bude lepšie modelovať celý trh, preto sme sa rozhodli doňho zahrnúť

nasledovné indexy.

- Dlhopisové indexy - zahŕňajú štátne dlhopisy krajín z určitej geografickej oblasti. Môžeme ich rozdeliť do dvoch podskupín
  - klasické - obsahujú vyspelé krajiny danej oblasti - *Global EMU Index, Global United States Index, Global Japan Index,*
  - tzv. „emerging markets“ - indexy rozvíjajúcich sa krajín - *EM Global Europe Index.*
- Komoditný index - odráža vývoj cien na trhu s komoditami - *JPMCCI Aggregate Index.*
- Akciové indexy - nakoľko skupina akciových indexov je veľmi veľká a rôznorodá, čo do počtu i zloženia akcií, ktoré obsahuje, žiadny výber nie je ideálny. My sme sa rozhodli vybrať jeden európsky a jeden americký index - *DAX Index, S&P 500 Index.*

Z dôvodu simulovania správania sa banky sme sa rozhodli zahrnúť do portfólia viac dlhopisových indexov, čo nám zabezpečí konzervatívnejšie portfólio. Teda prinesie nižší výnos, ale za pomerne malého rizika. Na výpočet sme použili údaje o cenách jednotlivých indexov od januára 2002 do marca 2009 s frekvenciou jeden mesiac. Ku každému indexu sme teda mali k dispozícii 87 údajov.



## 4.1 CAPM analýza

*Základné charakteristiky výnosov aktív zastúpených v portfóliu*

- stredná hodnota
- kovariančná matica
- korelačná matica

*Stredná hodnota*

	$r_{month}$	$r_{year}$
EMU	0.063	0.759
US	0.246	2.957
Japan	0.267	3.199
EM Europa	0.409	4.909
JPM Commodity	1.101	13.209
DAX Index	-0.031	-0.374
S&P Index	-0.317	-3.806

V tabuľke vidíme mesačné aj ročné výnosy, resp. straty, jednotlivých indexov. Najvyšší výnos na základe použitých dát majú komodity. To je dôsledkom najmä prudkého zvýšenia cien komodít v priebehu druhej polovice r.2007 a prvej polovice 2008. Naopak straty zaznamenali oba akciové indexy, pričom pokles amerického indexu je oveľa výraznejší, a síce až 3.806% za rok.

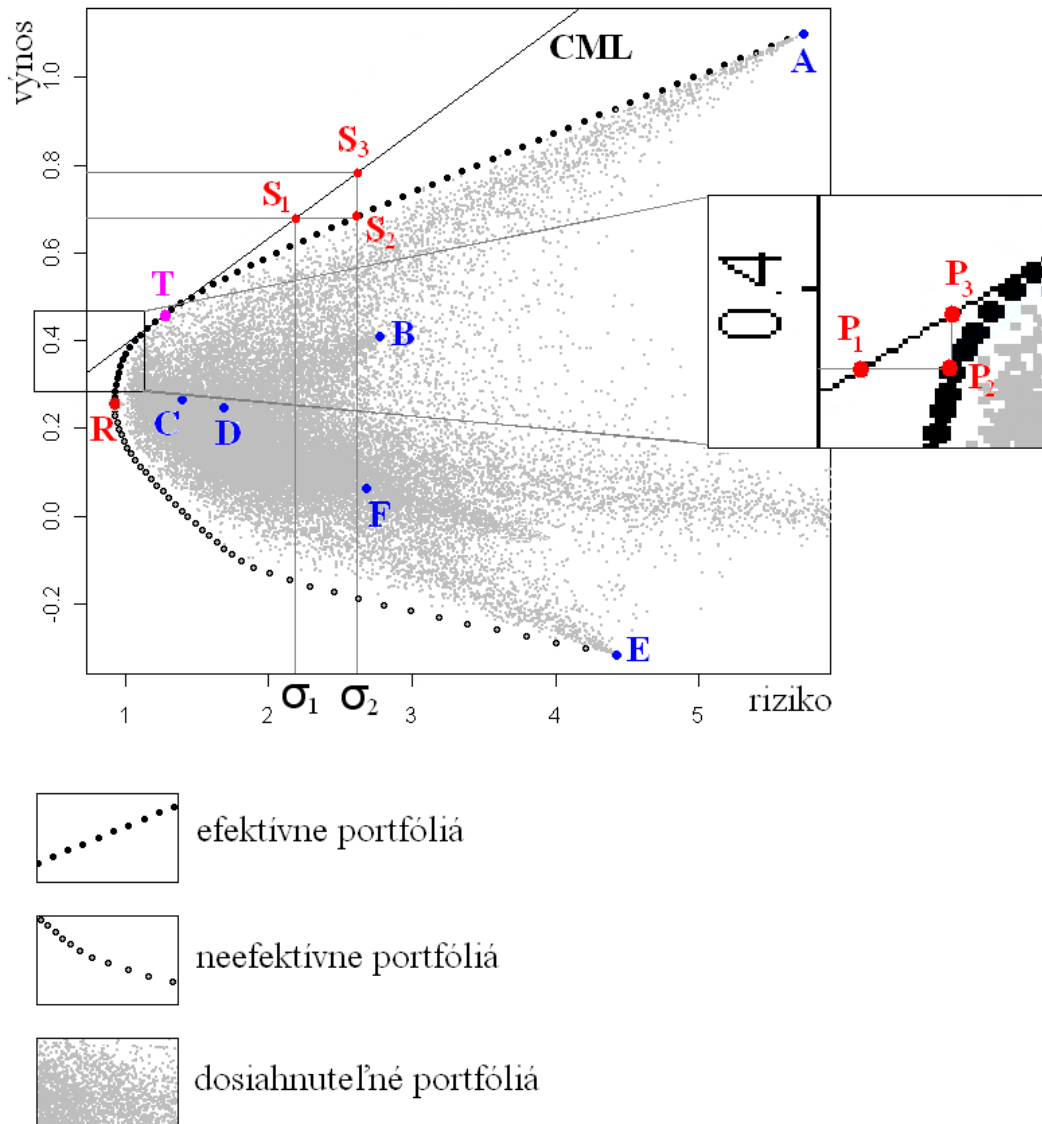
*Kovariančná matica*

	EMU	US	Japan	EM Eur	JPMC	DAX	S&P
EMU	<b>7.196</b>	4.235	3.044	-1.601	-8.242	-5.727	-5.582
US	4.235	<b>2.841</b>	1.845	-0.806	-4.799	-4.434	-3.601
Japan	3.044	1.845	<b>1.956</b>	-0.066	-3.222	-3.826	-2.760
EM Eur	-1.601	-0.806	-0.066	<b>7.673</b>	5.281	6.290	5.161
JPMC	-8.242	-4.799	-3.222	5.281	<b>32.770</b>	6.884	7.842
DAX	-5.727	-4.434	-3.826	6.290	6.884	<b>46.126</b>	26.179
S&P	-5.582	-3.601	-2.760	5.161	7.842	26.179	<b>19.577</b>

*Korelačná matica*

	EMU	US	Japan	EM Eur	JPMC	DAX	S&P
EMU	<b>1</b>	0.9367	0.8114	-0.2154	-0.5367	-0.3143	-0.4703
US	0.9367	<b>1</b>	0.7826	-0.1727	-0.4974	-0.3874	-0.4829
Japan	0.8114	0.7826	<b>1</b>	-0.0170	-0.4025	-0.4028	-0.4461
EM Eur	-0.2154	-0.1727	-0.0170	<b>1</b>	0.3330	0.3343	0.4211
JPMC	-0.5367	-0.4974	-0.4025	0.3330	<b>1</b>	0.1771	0.3096
DAX	-0.3143	-0.3874	-0.4028	0.3343	0.1771	<b>1</b>	0.8712
S&P	-0.4703	-0.4829	-0.4461	0.4211	0.3096	0.8712	<b>1</b>

Z kovariančnej aj korelačnej matice môžeme vidieť závislosti medzi jednotlivými aktívami. Je vidieť zápornú koreláciu medzi komoditným indexom a takmer všetkými dlhopisovými indexmi. V praxi z toho vyplýva už spomínané zaistovanie portfólia práve komoditami. Tiež výrazná negatívna korelácia je pozorovateľná aj medzi dlhopisovými a akciovými indexmi, čo je spôsobené odlišným charakterom týchto aktív. Vysoká pozitívna korelácia je pozorovateľná medzi európskymi a americkými dlhopismi a taktiež medzi európskym a americkým akciovým indexom. Táto závislosť nie je prekvapujúca, keďže vývoj týchto aktív na trhu je úzko prepojený.



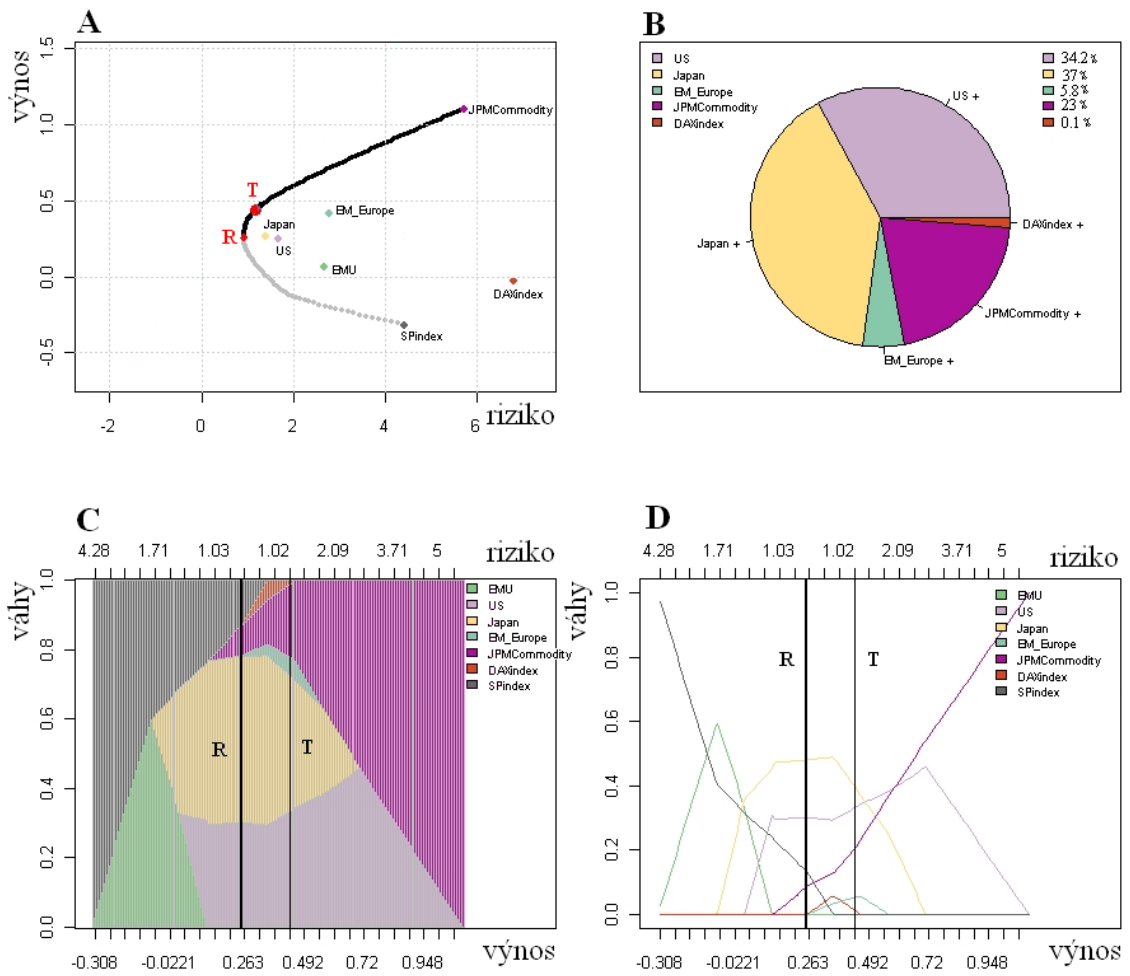
Obrázok 4.1: Podrobné zobrazenie dosiahnuteľných, efektívnych a neefektívnych portfólií, závislosť výnosu od volatility, CML krivka.

*Charakteristika jednotlivých bodov*

- $A-F$  - zobrazujú jednotlivé aktíva (indexy), teda ich výnos a volatilitu, ak by sme 100% kapitálu investovali do niektorého aktíva. ( $A$  - JPM Commodity,  $B$  - EM Europa,  $C$  - Japan,  $D$  - US,  $E$  - S&P,  $F$  - EMU)
- $R$  - portfólio s minimálnym rizikom (ak neuvažujeme bezrizikový výnos). Pre toto portfólio by sa rozhodol investor absolútne averzný voči riziku.
- $T$  - dotykové portfólio, spoločný bod pre CML a efektívnu hranicu. Je akousi aproximáciou trhu vzhľadom na aktíva, ktoré sme sa rozhodli do portfólia zahrnúť.
- $P_2$  - ľubovoľné efektívne portfólio v prípade, že zafixujeme výnos alebo riziko a neuvažujeme na trhu bezrizikový výnos. Z tohto portfólia môžeme prirodzene odvodiť dve nasledujúce.
- $P_1$  - optimálne portfólio v prípade, že zafixujeme výnos na úrovni výnosu portfólia  $P_2$  a uvažujeme na trhu bezrizikový výnos.
- $P_3$  - optimálne portfólio v prípade, že zafixujeme riziko na úrovni rizika portfólia  $P_2$  a uvažujeme na trhu bezrizikový výnos.

Práve na tejto trojici portfólií môžeme vidieť rozdiely pri fixovaní či už výnosu alebo rizika v situáciách, ak uvažujeme bezrizikový výnos. Bez neho by sme sa mohli pohybovať len po efektívnej hranici a teda dosiahnuť portfólio  $P_2$  s ročným výnosom 3.84% a volatilitou 3.287. Akonáhle na trh vstúpi bezrizikový výnos  $r_{RF}$  a my sa rozhodneme fixovať výnos na úrovni 3.84%, naše riziko klesne na úroveň 2.42, čo zodpovedá portfóliu  $P_1$ . Podobná situácia nastane v prípade udržania volatility 3.287, kedy s rovnakým rizikom môžeme dosiahnuť vyšší výnos a to investovaním do portfólia  $P_3$ , ktoré je kombináciou bezrizikového výnosu a dotykového portfólia.





Obrázok 4.2: Zobrazenie váh v jednotlivých portfóliách.

**A** - efektívna hranica, portfólio s minimálnym rizikom, dotykové portfólio a jednotlivé samostatné aktíva.

**B** - koláčový graf váh pre dotykové portfólio.

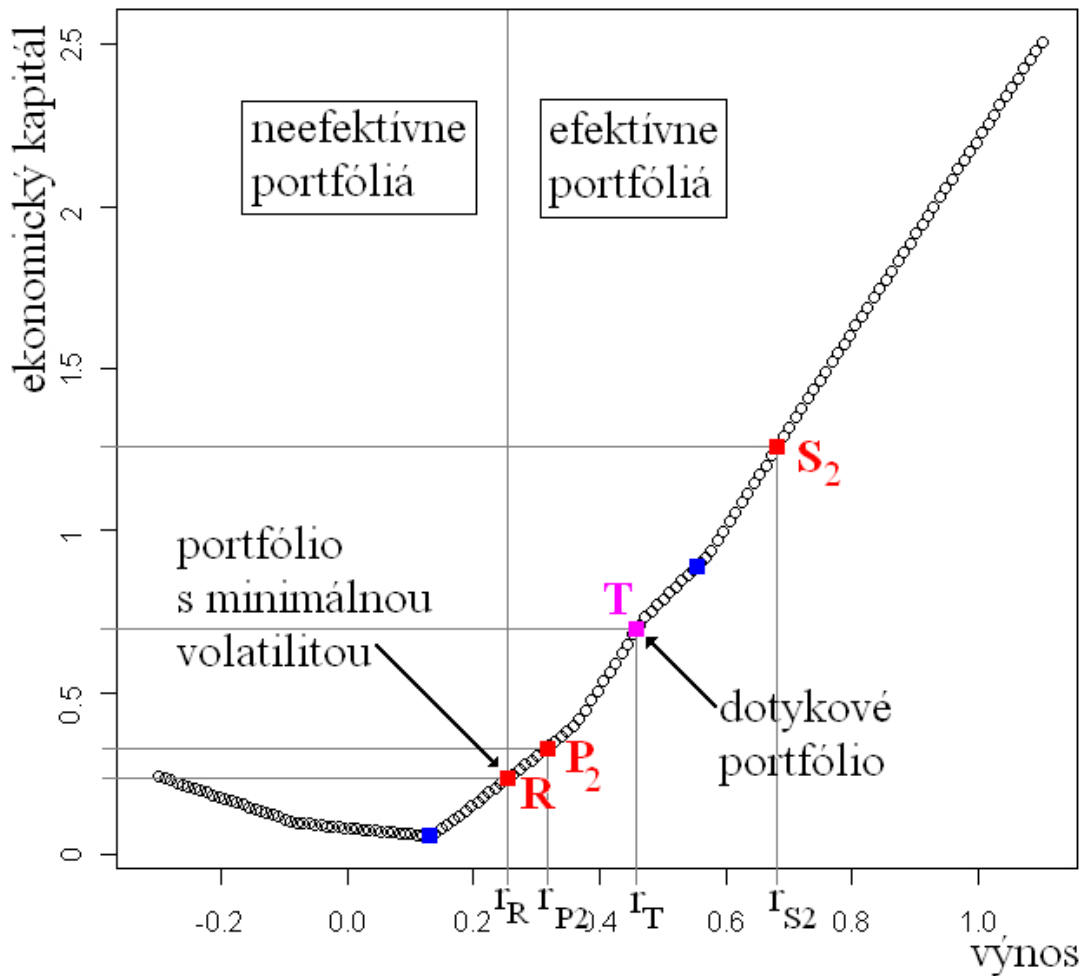
**C** - kumulované zobrazenie váh jednotlivých portfólií, ich výnosu a rizika. Na hlavnej  $x$ -ovej osi je znázornený výnos, na vedľajšej riziko a na  $y$ -ovej váhy, ktoré dávajú v súčte 1. Ak zafixujeme výnos a spravíme kolmicu na hlavnej

$x$ -ovej osi, na vedľajšej hneď vidíme aké riziko podstupujeme a na  $y$  môžeme odčítať váhy pre jednotlivé aktíva. Aj na tomto grafe môžeme vidieť zloženie dotykového portfólia a portfólia s minimálnym rizikom, ktoré sú zvýraznené zvislými čiarami.

**D** - iné zobrazenie váh, kde nie je také zrejmé, že v súčte dajú pre každé portfólio 1. Opäť platí pre osi rovnaký popis, teda na hlavnej  $x$ -ovej je výnos, na vedľajšej riziko a na  $y$ -ovej váhy. Pre každé aktívum zahrnuté vo výpočte môžeme vidieť krivku vývoja závislosti jeho váhy od výnosu (resp. rizika) celého portfólia.

## 4.2 Koncept ekonomického kapitálu a jeho analýza

Výpočet ekonomického kapitálu nie je taký jednoduchý a zrejmý ako v prípade volatility v CAPM. Vyplýva to z faktu, že na jeho určenie je potrebné pravdepodobnostné rozdelenie strát, ktorého získanie nie je triviálne. Do výpočtu vstupujú váhy jednotlivých portfólií získané z predchádzajúcej CAPM analýzy a ratingy aktív. Na základe týchto veličín, použitím kopula funkcie sa pre každý bod efektívnej hranice vypočíta hodnota ekonomického kapitálu.



Obrázok 4.3: Závislosť ekonomického kapitálu od výnosu.

Na  $x$ -ovej osi môžeme sledovať mesačný výnos portfólia v percentách a na  $y$ -osi hodnotu ekonomického kapitálu ako percentuálny podiel z celkového objemu investícií. Na grafe si môžeme všimnúť podobnosť s grafom závislosti výnosu portfólia od jeho volatility. Teda že pri určitých hodnotách ekonomického kapitálu môžeme dosiahnuť rôzne výnosy. Je dôležité poznamenať že táto časť grafu sa z väčšej časti nachádza v zápornej časti  $x$ -ovej osi, te-



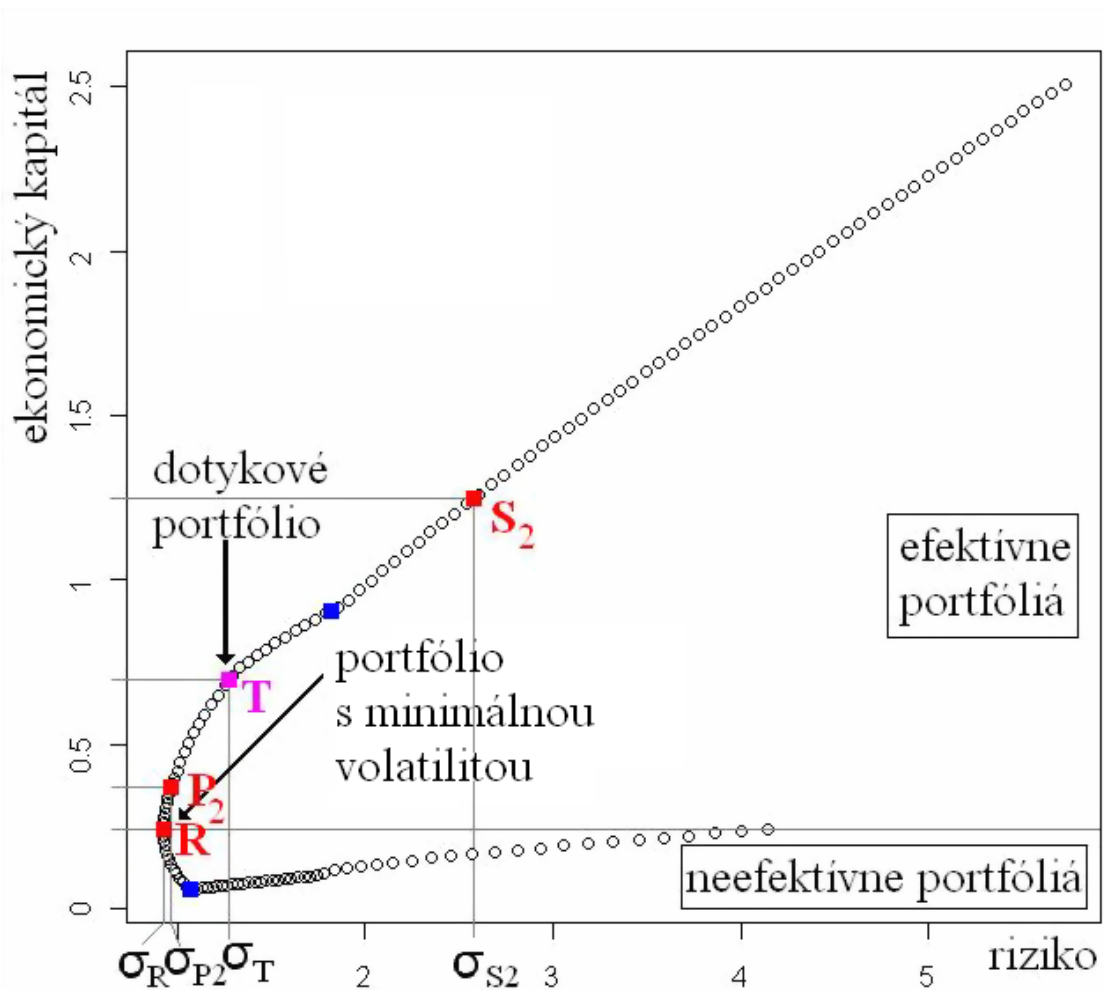
da zodpovedá zápornému výnosu z a hľadiska investovania nie je zaujímavá. Bod, v ktorom nastáva zlom a mení sa charakter závislosti z klesajúcej na rastúcu má nasledovné charakteristiky:

$$r_m = 0.13\%, r_y = 1.56\%$$

$$\sigma_m = 1.06, \sigma_y = 3.69$$

$$EC = 1.16.$$

Toto portfólio má síce najnižšiu hodnotu ekonomického kapitálu, teda je z tohto pohľadu najmenej rizikové, ale je to neefektívne portfólio z hľadiska CAPM, pretože pri takejto miere rizika môžeme dosiahnuť vyšší výnos. Hodnota ekonomického kapitálu od tohto bodu postupne rastie s výnosom portfólia. Ako si môžeme všimnúť ekonomický kapitál nerastie rovnakou rýchlosťou pre všetky portfóliá. Z tohto pohľadu je zaujímavé ďalšie portfólio vyznačené modrým štvorčekom, v ktorom si môžeme všimnúť intenzitu rastu ekonomického kapitálu vzhľadom na výnos. Teda od tohto bodu rastie riziko s výnosom rýchlejšie v porovnaní s portfóliami v okolí bodu  $P_2$ . Môžeme teda posúdiť, že investovanie do portfólií za týmto bodom je menej efektívne, resp. takéto investície by zvolil investor ochotný podstúpiť vysoké riziko. Banka ako konzervatívny investor by túto skupinu portfólií vylúčila.



Obrázok 4.4: Závislosť ekonomického kapitálu od rizika.

Graf zobrazuje závislosť ekonomického kapitálu (opäť reprezentovaný percentuálnym podielom z celkového objemu investícií) od rizikovosti portfólia, ktorá je charakterizovaná mesačnou volatilitou. Kvôli prehľadnosti sme znovu oddelili efektívne a neefektívne portfóliá z hľadiska CAPM. Zobrazenie a interpretácia vzťahu volatility a ekonomického kapitálu nie je taká intuitívna ako v prípade výnosu. Aj na tomto grafe sme zvýraznili portfóliá dôležité pri

optimalizácii podľa Markowitzovej teórie a rovnako aj portfóliá, v ktorých sa rast ekonomického kapitálu výrazne mení.

Aj keď je snahou udržať ekonomický kapitál na čo najnižšej úrovni, je dôležité sledovať aj intenzitu rastu, ktorá je od určitého bodu vyššia.

Výber optimálneho portfólia má niekoľko základných bodov. Jedným z nich je pomerne presné analytické určenie výnosnosti portfólia vzhľadom na jeho štandardnú odchýlku (CAPM). Z tohto hľadiska je zaujímavé portfólio s minimálnou volatilitou, teda podľa Markowitza je to najmenej rizikové portfólio. Ďalším krokom je pohľad na portfólio z hľadiska jeho kapitálovej požiadavky, a síce prostredníctvom ratingov, ktoré sú vyjadrením pravdepodobnosti defaultu jednotlivých aktív. Práve na to slúži ekonomický kapitál, ktorý rastie s výnosom a je mierou rizikovosti aktív odvodennej od pravdepodobnostného rozdelenia strát. Aj pri tejto analýze nás zaujíma portfólio, pri ktorom podstupujeme najnižšie riziko a ako sme mohli na grafoch vidieť, toto portfólio nie je identické s portfóliom s minimálnou volatilitou. Najmenej rizikové portfólio z hľadiska ekonomického kapitálu je podľa CAPM neefektívne.

V konečnom dôsledku je však najdôležitejší samotný investor, ktorý zväží do akej miery je preňho dôležitá analýza CAPM a do akej miery model ekonomického kapitálu určujúci intenzitu rastu rizika s výnosom. Podľa týchto faktorov, a tiež na základe averzie voči riziku, prípadne v súlade s ďalšími okolnosťami, sa rozhodne pre určité portfólio, ktoré je z jeho pohľadu najoptimálnejšie.

## Záver

V diplomovej práci sme sa zamerali na priblíženie problematiky výberu optimálneho portfólia. Nutnou podmienkou k porozumeniu bolo oboznámenie sa so základnými pojmami vo svete financií. K nim v prvom rade patria výnos a riziko, ktoré sú na finančnom trhu opakované dennodenne.

Výber optimálneho portfólia je komplikovaný proces, ktorý spočíva v niekoľkých na seba nadväzujúcich krokoch. My sme sa venovali tomuto procesu v prvom rade z hľadiska Markowitzovej teórie portfólia, kde sme sa oboznámili s volatilitou ako mierou rizika. Následne sme zaviedli pojem ekonomického kapitálu, ktorý je mierou rizika založenou na distribučnej funkcii strát portfólia, podobne ako v poslednej dobe veľmi frekventovaná miera rizika Value-at-Risk.

Zamerali sme sa na všeobecné portfólio zložené z indexov, čím sme sa snažili čo najlepšie sledovať celkový vývoj na trhu. Na základe CAPM teórie sme popísali efektívnu hranicu a význačné body na nej. Ďalej sme pre každý bod tohto grafu vyrátali zodpovedajúcu hodnotu ekonomického kapitálu a sledovali závislosti od výnosu a rizika.

Ako už bolo spomenuté výber konkrétneho portfólia nie je jednoduchý a taktiež nie je jednoznačný. Použité teórie sú samozrejme veľmi dôležitou časťou tohto procesu, pretože charakterizovať výnos ako funkciu rizika je nevyhnutné. Ukázali sme ako možno spojiť Markowitzovu teóriu, vyvinutú v polovici 20.storočia, s modernou teóriou ekonomického kapitálu. Stále však ostáva stredobodom investor a jeho vzťah k riziku. Práca ukazuje ako je možné prepojiť tieto dve teórie, ale stále ostáva len akýmsi úvodom do tejto problematiky. Dôvodom je stále sa vyvíjajúci finančný trh, na ktorom sa podmienky neustále menia. Toho dôkazom je aj vývoj finančných trhov za posledný rok, kedy sa celosvetovo zmenil vývoj aktív a tiež preferencie investorov.

# Literatúra

- [1] *Smernica Európskeho parlamentu a Rady 2006/48/ES.*
- [2] *Smernica Európskeho parlamentu a Rady 2006/49/ES.*
- [3] Carol Alexander, Elizabeth Sheedy, and col. *The Professional Risk Managers' Handbook.* PRMIA, 2004.
- [4] Eugene F. Brigham and Michael C. Ehrhardt. *Financial Management: Theory and Practice.* CRC Press, 2005.
- [5] Robert L. Burns. Economic capital and the assessment of capital adequacy. *Supervisory Insights*, 2004. Federal Deposit Insurance Corporation.
- [6] Ian Farr, Joe Lebens, Hubert Mueller, and Mark J. Scanlon. Calculating economic capital. *Emphasis*, 2007.
- [7] Gary Finkelstein, Takanori Hoshino, Rikiya Ino, and Ed Morgan. Economic capital modeling: Practical considerations. 2006. Milliman Inc.
- [8] Jozef Klučka. Ekonomický kapitál. *Biatec*, 2008. Národná banka Slovenska.
- [9] Marco Morone, Anna Cornaglia, and Giulio Mignola. Economic capital assessment via copulas: Aggregation and allocation of different risk types. 2007. [http://www.defaultrisk.com/pp\\_model160.htm](http://www.defaultrisk.com/pp_model160.htm).

- [10] Ján Pataky. *CDO modelovacie techniky*, 2005. FEI STU, Bratislava.
- [11] Ján Pataky. Kreditné deriváty a štruktúrované produkty. *Trend*, 2006.
- [12] Iman van Lelyveld and col. *Economic Capital Modelling*. Risk Books, 2006.