Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky,
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Riziko portfólia v závislosti od časového horizontu

Diplomová práca

Csilla Krommerová

Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce: Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

BRATISLAVA 2009

Čestné prehlásenie

Čestne vyhlasujem, že túto diplomovú prácu som vypracovala samostatne s použitím uvedenej citovanej literatúry pod vedením vedúceho diplomovej práce.

. . . .

V Bratislave, 2009 apríl

Poďakovanie

Chcela by som sa touto cestou poďakovať môjmu vedúcemu diplomovej práce, Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za jeho odbornú spoluprácu na tejto diplomovej práci, za poskytnutie literatúry, z ktorej som čerpala informácie a takisto za jeho trpezlivosť, s ktorou sa mi počas vzniku tejto práce venoval.

Abstrakt

Cieľom tejto diplomovej práce je hľadanie odpovede na otázku, aké je riziko portfólia v závislosti od dĺžky investície.

Čitateľ sa zoznámi s rôznymi prístupmi k problematike, ako s teóriou pravdepodobnosti prepadu, s teóriou poistenia proti strate, či už s teóriou zostavenia portfólia pomocou stochastického dynamického programovania s rôznymi funkciami užitočnosti, konkrétne s Bernoulliho, izoelastickou, exponenciálnou a kvadratickou funkciou.

Jedine v prípade teórie pravdepodobnosti prepadu sa potvrdila myšlienka, že čím dlhšie jedinec plánuje investovať, tým viac sa mu oplatí investovať do akcií. Ostatné prístupy túto myšlienku nepodporili, respektíve v prípade izoelastickej funkcie užitočnosti pri zostavení portfólia pomocou stochastického dynamického programovania na dĺžke investovania nezáležalo.

Kľúčové slová:

riziko portfólia, pravdepodobnosť prepadu, poistenie proti strate, stochastické dynamické programovanie

Abstract

The aim of this thesis is to seek the answer to the question, how the risk of the portfolio depends on the length of the investment.

The reader will be introduced to different approaches of the problem, such as the theory of the probability of shortfall, theory of insuring the portfolio against shortfall and the theory of portfolio selection by dynamic stochastic programming with different kinds of utility functions, specifically Bernoulli's, isoelastic, exponential and quadratic functions.

Only in case of the theory of the probability of shortfall is true, that the longer one plans to invest the more it's worth to invest in stocks. The other approaches didn't prove this theory, actually in case of the portfolio selection by dynamic stochastic programming with isoelastic utility function the portfolio selection was not influenced by the length of the investment.

Key words:

portfolio risk, probability of shortfall, insuring against shortfall, dynamic stochastic programming

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Čím modernejšia doba, tým viac možností. O tom niet pochýb ani vo finančnej oblasti. V dnešnej dobe viac a viac ľudí rozmýšľa nad investovaním svojho majetku rôznymi spôsobmi, a tým si našetriť väčší majetok na blížiaci sa dôchodok.

Investori zostavujú svoje portfólio z dlhopisov s bezrizikovým výnosom a z akcií s vyšším, ako bezrizikovým výnosom. Niektorí sú opatrní, to znamená, že im stačí aj menší výnos, pokiaľ majú istotu, že ich investícia bude vynášať vopred zaručenú sumu. Iní investori sú však odvážnejší a za určitý, vyšší výnos sú ochotní akceptovať určité riziko.

Investori, ktorí majú menej znalostí o fungovaní finančného trhu sa často pýtajú: „Ako si teda zostaviť portfólio? Čo sa oplatí viac? Investovať do akcií? Do dlhopisov? Aká kombinácia týchto aktív je najvýhodnejšia pre mňa? “

Odpoveď nie je jednoznačná. Mnohokrát záleží nielen na preferenciách a opatrnosti investora, ale aj na jeho veku, pretože ten ovplyvňuje predpokladanú dĺžku investovania.

Takisto nezanedbateľným faktorom je, že samotné preferencie, či finančná situácia jedinca, sa môžu počas života meniť, a v tom prípade by sa investor samozrejme nechcel zaviazať až do konca života. Môže preferovať investovanie viackrát na kratšie obdobia, napriek tomu, že nevie, či dlhodobá investícia vynáša viac alebo menej.

Konvenčná „múdrosť“profesionálnej investičnej komunity hovorí , že mladší investori by mali investovať vo väčšej miere do akcií, kým starší investori by mali byť viac opatrní a investovať skôr do dlhopisov. Celková idea spočíva v tom, že rizikovosť akcií klesá s dĺžkou časového horizontu investovania, t.j. čím dlhšie jedinec plánuje investovať, tým je nižšia rizikovosť. Existuje viac teórií. Niektoré tento názor podporujú, iné ho však vyvracajú.

V teórii pravdepodobnosti prepadu bude riziko predstavovať samotná pravdepodobnosť, že investícia do akcií bude mať menší výnos ako investícia do dlhopisov.

Iné prístupy k tejto problematike však túto teóriu nepodporujú. Napríklad v teórii poistenia proti strate sa nám riziko akcií v portfóliu bude odzrkadlovať vo výške zaistenia. V Samuelsonovom modeli stochastického dynamického programovania, váha ktorá sa bude investovať do akcií, bude závisieť od typu funkcie užitočnosti.

V nasledujúcom predstavíme tieto teórie a budeme sa snažiť nájsť odpoveď na otázku, ako správne zostaviť portfólio v závislosti od časového horizontu.

Kapitola 2

Teória pravdepodobnosti prepadu

Predovšetkým je potrebné ujasniť si pojem prepadu. Prepad nastane, ak po uplynutí obdobia investovania má akcia nižší výnos ako je vopred určený cieľový výnos. Cieľový výnos sa obvykle určí ako výnos bezkupónového dlhopisu pri bezrizikovej úrokovej miere na tom istom časovom horizonte, ako investícia do akcie. Matematicky sformulované, prepad nastane, ak

$$W_B > W_S,$$

kde W_B je výnos investovania do dlhopisov pri bezrizikovej úrokovej miere r_f a W_S je výnos investovania do akcií.

Nech prepad predstavuje rizikovosť akcie, potom našou úlohou bude skúmať pravdepodobnosť prepadu $P(W_B > W_S)$ pri rôznych časových horizontoch. V úvode sme tvrdili, že rizikovosť investovania do akcií by mala časom klesať, čo je ekvivalentné klesaniu pravdepodobnosti prepadu rastom časového horizontu.

Pozrime sa najprv na výnosy jednotlivých investícií. Označme si náš začiatočný kapitál ako W_0. Potom výnos investície do dlhopisov bude v čase t mať hodnotu

$$W_B = W_0 e^{r_f t},$$

a výnos investície do akcií bude mať hodnotu

$$W_S = W_0 e^{(r_f + r_p)t + \sigma Z \sqrt{t}},$$

kde r_p je prémiová úroková miera, Z je náhodná premenná s normálnym rozdelením $Z \sim N(0,1)$ a σ je smerodajná odchýlka výnosu akcie.

Budeme skúmať ako sa bude vyvíjať pravdepodobnosť

$$P[W_0 e^{r_f t} > W_0 e^{(r_f + r_p)t + \sigma Z \sqrt{t}}].$$

Pozrime sa však najprv na argument tohto výrazu:

$$W_0 e^{r_f t} > W_0 e^{(r_f + r_p)t + \sigma Z \sqrt{t}}$$

Vieme to upraviť nasledovne:

$$0 > r_p t + \sigma Z \sqrt{t}.$$

Teda v skutočnosti skúmame správanie

$$P(0 > r_p t + \sigma Z \sqrt{t}),$$

inak vyjadrené:

$$P\left(Z < -\frac{r_p t}{\sigma \sqrt{t}}\right) = P\left(Z < -\frac{r_p \sqrt{t}}{\sigma}\right)$$

Vieme, že $Z \sim N(0, 1)$, preto budeme skúmať priebeh funkcie

$$\Phi\left(-\frac{r_p \sqrt{t}}{\sigma}\right).$$

K tomu potrebujeme predovšetkým zistiť hodnoty r_p a σ.

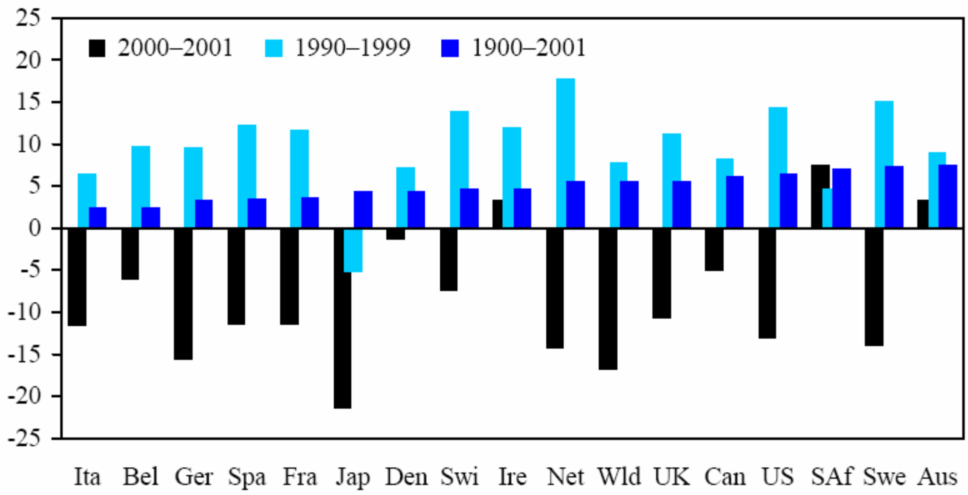
Zistenie r_p, teda prémiovej úrokovej miery, vyžaduje hlbšie štúdium, a preto ju v tejto práci ani nebudeme skúmať. Použijeme informácie z článku [3].

Prémiová úroková miera je výnos, ktorý držitelia akcií dostávajú za to, že sa rozhodli investovať do rizikových aktív namiesto bezrizikových dlhopisov. Jej hodnota je určená ako rozdiel výnosu akcie r_A a bezrizikovej úrokovej miery r_f:

$$r_p = r_A - r_f.$$

Aby autori dosiahli objektívne výsledky, skúmali nielen americký, ale aj medzinárodný finančný trh na dlhodobej perióde. Použili dáta 15 krajín počas 102 ročnej periódy, od 1900 po 2001.

Nasledujúci graf zobrazuje ročné výnosy akcií 15 krajín, v percentách, a svetového indexu, ktorý je kombinácia týchto krajín.



Obr. 2.1: Ročné výnosy akcií v percentách

Ako vidíme, keby sa autori sústredili iba na krátke obdobia, ľahko by sa mohlo stať, že by dostali príliš vysokú, alebo naopak, príliš nízku, dokonca až zápornú úrokovú mieru akcií. Napríklad kým v poslednej dekáde 20. storočia boli výnosy akcií dvojciferné čísla, v rokoch 2000 - 2001 boli skoro v každej skúmanej krajine záporné, čo by samozrejme viedlo k zápornej prémiovej úrokovej miere. Bolo by teda mylné analyzovať iba z krátkodobých dát, pretože finančný trh je volatívny. Dlhodobé dáta však pomôžu spracovať jeho výkyvy.

Je takisto nekorektné použiť dáta iba Spojených štátov amerických, keď súčasne existuje finančný trh aj v iných štátoch. Aby autori určili objektívnu hodnotu prémiového rizika, použili dáta 15 krajín a svetového indexu, ktorý vzniká kombináciou dát týchto krajín. Sú zahrnuté dva najväčšie severoamerické trhy: USA a Kanada, Veľká Británia (UK), sedem trhov z eurozóny (z roku 2001), tri ďalšie európske trhy, dva ázijsko - pacifické trhy a jeden africký trh. Trhy týchto krajín tvorili 95 % finančného trhu na začiatku výskumu v roku 2002 a podľa predpokladov tvorili viac ako 90 % finančného trhu na začiatku skúmanej periódy, teda v roku 1900.

Nasledujúca tabuľka predstavuje historické prémiové úrokové miery. Ľavá strana tabuľky predstavuje prémiové úrokové miery vzhľadom ku krátkodobým pokladničným poukážkam, kým pravá strana predstavuje prémiové úrokové miery vzhľadom k dlhodobým vládnym dlhopisom. Obe polky tabuľky nám predstavujú tri čísla: geometrický priemer, aritmetický priemer a štandardnú odchýlku.

Treba ešte spomenúť, že svetový index bolo treba určiť v jednotnej mene, ktorým sa stal americký dolár a váha jednotlivých krajín bola určená podľa hrubého domáceho produktu GDP jednotlivých krajín.

	Relative to bills			Relative to bonds		
Country	Geo metric mean	Arith metic mean	SD	Geo metric mean	Arith metic mean	SD
Australia	7.0	8.5	17.2	6.3	7.9	18.8
Belgium	2.7	5.0	23.5	2.8	4.7	20.7
Canada	4.4	5.7	16.7	4.2	5.7	17.9
Denmark	1.6	3.2	19.4	1.8	3.1	16.9
France	7.1	9.5	23.9	4.6	6.7	21.7
Germany	4.6	10.0	35.3	6.3	9.6	28.5
Ireland	3.4	5.3	20.5	3.1	4.5	17.3
Italy	6.6	10.6	32.5	4.6	8.0	30.1
Japan	6.4	9.6	27.9	5.9	10.0	33.2
The Netherlands	4.8	6.8	22.3	4.4	6.4	21.5
South Africa	6.1	8.2	22.4	5.4	7.1	19.6
Spain	3.1	5.2	21.4	2.2	4.1	20.2
Sweden	5.3	7.4	21.9	4.9	7.1	22.1
Switzerland	4.0	5.8	19.6	2.4	3.9	18.0
United Kingdom	4.5	6.2	19.9	4.2	5.5	16.7
United States	5.6	7.5	19.7	4.8	6.7	20.0
World	4.6	5.9	16.5	4.3	5.4	14.6

Tabuľka 2.1: Ročné prémiové výnosy v percentách

Počas 102 ročnej periódy ročná prémiová úroková miera vzľadom k pokladničným poukážkam bola 4.5 % pre Spojené štáty americké, 5.6 % pre Spojené kráľovstvo. Priemer týchto 16 ročných prémiových úrokových mier je 4.8 %, kým hodnota pre svetový index je 4.6 %. Podobne pre prémiové úrokové miery vzhľadom k štátnym dlhopisom: 4.8 % v Spojených štátoch amerických, 4.2 % v Spojenom kráľovstve a priemer 16 hodnôt aj svetový index sa v tomto prípade zhodujú, konkrétne to je 4.3 %.

Vrátme sa teraz naspäť k našej pôvodnej úlohe, skúmaniu priebehu funkcie

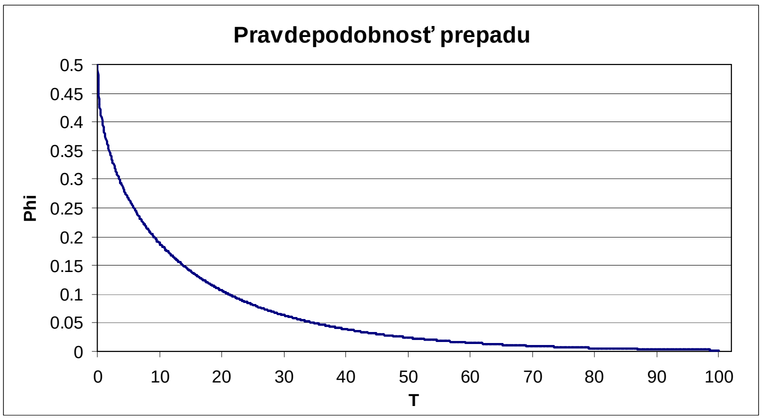
$$\Phi\left(-\frac{r_p\sqrt{t}}{\sigma}\right),$$

tentokrát ale už poznajúc potrebné hodnoty. Ako obrázkovú ilustráciu si zvoľme svetový index pre pokladničné poukážky, teda za hodnotu prémiovej úrokovej miery 4.6 % a štandardná odchýlka bude 16.5 %.

Tabuľka 2.2 a obrázok 2.2 pekne znázorňujú, že pravdepodobnosť prepadu časom klesá.

Čas	Pravdepodobnosť pri geom. priemere
0	0.5
1	0.39020387
2	0.346692527
5	0.266514517
10	0.188995271
20	0.106239649
50	0.024343115
75	0.007881136
100	0.002652779

Tabuľka 2.2: Rast pravdepodobnosti prepadu v závislosti od času pri geometrickom priemere prémiového rizika

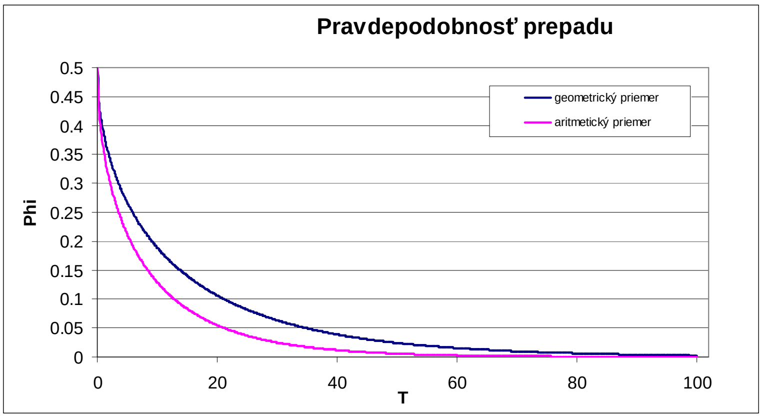


Obr. 2.2: Rast pravdepodobnosti prepadu v závislosti od času pri geometrickom priemere prémiového rizika

Podľa A-G nerovnosti vieme, že aritmetický priemer je vždy väčší, ako geometrický. Ako sa chová pravdepodobnosť prepadu, ak použijeme aritmetický priemer? Alebo položme otázku inak: ako sa chová pravdepodobnosť prepadu, ak je prémiová úroková miera vačšia? Odpoveď nájdeme v tabuľke 2.3 a na obrázku 2.3:

Čas	Pravdepodobnosť pri geom. priemere	Pravdepodobnosť pri arit. priemere
0	0.5	0.5
1	0.39020387	0.360330471
2	0.346692527	0.306537667
5	0.266514517	0.211981748
10	0.188995271	0.129079408
20	0.106239649	0.054896147
50	0.024343115	0.005728514
75	0.007881136	0.000978517
100	0.002652779	0.000174646

Tabuľka 2.3: Porovnanie rast pravdepodobnosti prepadu v závislosti od času pri geometrickom a pri aritmetickom priemere prémiového rizika



Obr. 2.3: Porovnanie rastu pravdepodobnosti prepadu v závislosti od času pri geometrickom a pri aritmetickom priemere prémiového rizika

Vidíme, že čím väčšia je prémiová úroková miera, tým rýchlejšie pravdepodobnosť prepadu klesá, čo je celkom logický výsledok, pretože čím väčšia je prémiová úroková miera, tým väčšiu sumu jedinec získa za svoje akcie, teda tým menšia je pravdepodobnosť prepadu.

Kapitola 3

Poistenie proti strate

V predchádzajúcej časti sme ukázali, že pravdepodobnosť toho, že investor zarobí viac investovaním do dlhopisov ako do akcií, časom klesá. Inak formulované, čím dlhšie plánuje jedinec investovať, tým viac sa mu oplatí investovať do akcií. Nie je to však jediný faktor, ktorý by ho mal ovplyvňovať pri konštrukcii portfólia. V predchádzajúcej časti sme totiž skúmali iba výnosy, nemali sme však zahrnuté vzniknutie možnej straty.

Ak by bola pravda, že akcie sú menej riskantné v dlhodobom horizonte, potom cena poistenia proti prepadu (menšiemu zisku, ako pri bezrizikovej úrokovej miere), by mala tiež klesať s rastom dĺžky času investovania. Opak je však pravdou.

Zadefinujme si cenu tohoto zaistenia P, ako sumu, ktorú priplatíme na začiatku k cene akcie, aby sme na konci investovania mali aspoň taký výnos, ako pri bezrizikovej úrokovej miere. Ak je cena akcie S, potom cena, ktorú zaplatíme za každú akciu zabezpečnenú proti prepadu bude (S + P).

Ako však nájsť správnu hodnotu P? Použijeme metódu oceňovania derivátov. Najefektívnejšia forma zabezpečenia je Put opcia európskeho typu, ktorá vyprší za T rokov a jeho realizačná cena sa zhoduje s budúcou hodnotou portfólia pri zložitom úročení T-ročnou bezrizikovou úrokovou mierou r, t.j. $E = Se^{rT}$. Ak v čase expirácie (t.j. T rokov od kupovania) hodnota nášho portfólia prevýši hodnotu realizačnej ceny, Put opcia sa neuplatní. Ak však nastane prepad, Put opcia sa uplatní a jej hodnota bude práve rozdiel medzi realizačnou a skutočnou cenou.

Ak sa pozrieme na Put-Call paritu pre európske opcie, ľahko vidno, že cena Put opcie sa bude zhodovať s cenou Call opcie:

$$P + S = C + Ee^{-rT},$$

kde P je cena Put opcie, S je cena akcie, C je cena Call opcie a E je realizačná cena. Potom

$$
\begin{aligned}
P + S &= C + Se^{rT}e^{-rT} \\
P + S &= C + S \\
P &= C
\end{aligned}
$$

Na odvodenie hodnoty Call (a teda aj Put) opcie použijeme najčastejšie používanú Black - Scholesovu formulu.

$$P = C = S\phi(d_1) - Ee^{-rT}\phi(d_2),$$

kde

$$d_1 = \frac{ln\frac{S}{E} + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \quad a \quad d_2 = \frac{ln\frac{S}{E} + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}},$$

σ je volatilita ceny akcie a ϕ je distribučná funkcia normálneho rozdelenia.

Pretože v našom prípade $E = Se^{rT}$, sa to táto formula dá ľahko upraviť na formu:

$$P = S[\phi(d_1) - \phi(d_2)],$$

kde

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln\frac{S}{Se^{rT}} + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln e^{-rT} + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} = \\
&= \frac{-rT + rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\sigma\sqrt{T}}{2},
\end{aligned}
$$

a ekvivalentným odvodením

$$d_2 = -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}.$$

Pomocou vlastnosti distribučnej funkcie normálneho rozdelenia:

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x)$$

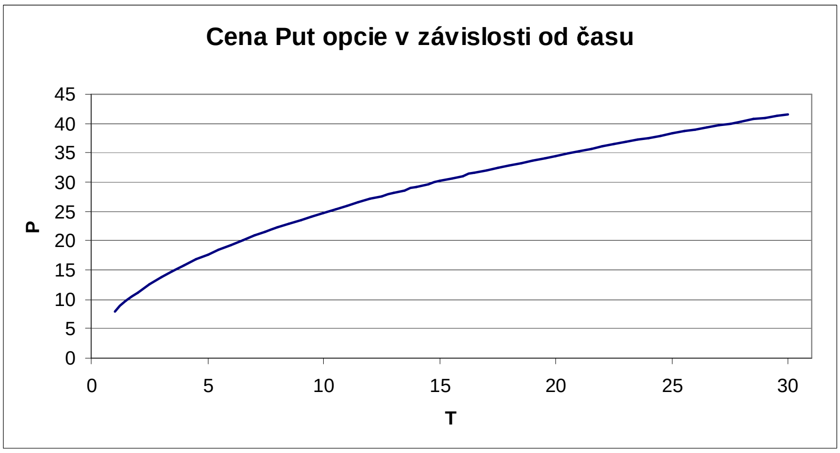
môžeme cenu Put opcie vyjadriť ako

$$
\begin{aligned}
P = S\left[\phi(d_1) - \phi(d_2)\right] &= S\left[\phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - \phi\left(-\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right)\right] = \\
&= S\left[\phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - 1 + \phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right)\right] = S\left[2\phi\left(\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}\right) - 1\right].
\end{aligned}
$$

Zostáva nám už iba pozrieť sa na to, ako sa chová cena Put opcie s rastúcim expiračným časom T. Použime akciu, ktorej hodnota je S = 100 \$, smerodajná odchýlka vypočítaná z historických dát je $\sigma = 0.2$. Nasledujúci graf zobrazuje cenu Put opcie v závislosti od času expiračnej doby.

Čas	Cena Put Opcie
1	7.965579107
2	11.24629692
5	17.69366498
10	24.81702355
15	30.14645415
20	34.52791092
30	41.61176406

Tabuľka 3.1: Rast ceny Put Opcie v závislosti od času



Obr. 3.1: Rast ceny Put Opcie v závislosti od času

Distribučná funkcia normálneho rozdelenia je rastúca funkcia, to znamená, že pri cene S a pri volatilite σ bude rastúcim expiračným časom aj cena Put opcie rásť. To znamená, že cena poistenia proti prepadu rastom časového horizontu tiež rastie, čo podľa nášho predpokladu hovorí o tom, že rizikovosť akcií rastie rastom investičnej doby.

Kapitola 4

Zostavenie portfólia pomocou stochastického dynamického programovania

4.1 Základné predpoklady

Väčšina úloh skonštruovania portfólia sa rieši ako jednoperiódová úloha. To znamená, že raz sa nájde optimálne portfólio, ktoré sa už potom nemení. V skutočnosti sa však dá zostavené portfólio prispôsobiť, či už aktuálnej situácii na finančnom trhu alebo aj aktuálnym preferenciám investora, a tým sa úloha stáva viacperiódovou. Nositeľ Nobelovej ceny za ekonómiu, P. A. Samuelson, riešil takúto úlohu ako úlohu stochastického dynamického programovania.

Jeho základom je Ramseyov model rastu. Predpokladajme, že jedinec, ktorý sporí na dôchodok vlastní kapitál, ktorého veľkosť v čase $t \in [0;T]$ je $W(t)$ a začiatočný kapitál je $W(0) = W_0$. Tento kapitál prináša vlastníkovi výnos o veľkosti $rW(t)$, kde r je trhová úroková miera. Vlastník sa môže v každom okamžiku $t \in [0;T]$ rozhodnúť, aké množstvo kapitálu spotrebuje. Spotreba $C(t)$ v čase t, prináša úžitok veľkosti $U[C(t)]$, kde U je daná úžitková funkcia. Pretože vlastník je netrpezlivý a preferuje skoršiu spotrebu pred neskoršou, úžitok je v každom časovom okamžiku t diskontovaný na veličinu $e^{-\rho t}U[C(t)]$, kde ρ je mierou jeho netrpezlivosti. Úlohou je maximalizovať diskontovaný úžitok zo spotreby za celé uvažované obdobie:

$$\int_0^T e^{-\rho t}U[C(t)]dt.$$

Správanie sa procesu možno popísať diferenciálnou rovnicou

$$\dot{W}(t) = rW(t) - C(t),$$

preto funkcia spotreby je vyjadrená, ako

$$C(t) = rW(t) - \dot{W}(t).$$

V našom prípade ide o úlohu sporenia na dôchodok a následne jeho vyplácanie, preto ak nie je žiaden nárok na dedičstvo, potom je koncový kapitál $W(T+1) = 0$.

Naša úloha v spojitom čase je teda nasledovná

$$J = \max_{W(t)} \int_0^T e^{-\rho t} U[rW(t) - \dot{W}(t)] dt.$$

Keďže jedinec svoje portfólio neprispôsobuje stále, iba v určitých časoch, preto diskrétny model viac popisuje realitu. Budeme preto riešiť úlohu

$$J = \max_{W_t} \sum_{t=0}^{T} (1+\rho)^{-t} U[C_t],$$

kde $W_t = W(t)$ a $C_t = W_t - \frac{W_{t+1}}{1+r}$. Úloha sa dá sformulovať aj nasledovne:

$$\begin{aligned} J &= \max_{W_t} \sum_{t=0}^{T} (1+\rho)^{-t} U \left[W_t - \frac{W_{t+1}}{1+r} \right] \\ W(0) &= W_0 \\ W_{T+1} &= 0; \end{aligned}$$

Keďže hľadáme extrém, pozrime sa na prvé parciálne derivácie podľa W_i, $i = 0, 1, ..., T$. Funkcia J, ktorú derivujeme, obsahuje W_i v dvoch sčítancoch a to:

$$J = \quad .... \quad + (1+\rho)^{-i+1} U[W_{i-1} - \frac{W_i}{1+r}] + (1+\rho)^{-i} U[W_i - \frac{W_{i+1}}{1+r}] + \quad ...$$

Potom

$$\frac{\partial J}{\partial W_i} = -\frac{(1+\rho)^{-i+1}}{1+r} U'[W_{i-1} - \frac{W_i}{1+r}] + (1+\rho)^{-i} U'[W_i - \frac{W_{i+1}}{1+r}] = 0.$$

Teda dostávame rekurzívny vzťah

$$\frac{(1+\rho)}{1+r} U'[W_{i-1} - \frac{W_i}{1+r}] = U'[W_i - \frac{W_{i+1}}{1+r}].$$

Ak U je konkávna, potom riešením tejto sústavy rovníc s okrajovými podmienkami $(W_0; W_{T+1})$ nám úloha zabezpečí optimálny celoživotný program spotreby a investícií.

Doteraz sme uvažovali investovanie iba do bezrizikového aktíva, keď jedinec investuje iba do dlhopisov. Avšak úlohu teraz rozšírime tak, že jedinec má možnosť sa rozhodnúť, aké množstvo investovaného kapitálu vloží do dlhopisov a aké do rizikovejších aktív, ako naprílad do akcií. Jeden investovaný dolár do dlhopisov na jednu periódu prináša na konci periódy zisk $1 \times (1+r)$. Výnos akcií sa však vyvíja stochasticky a prináša zisk $1 \times Z_t$, kde Z_t je náhodná premenná. Predpokladáme, že výnosy v rôznych časoch sú nezávislé, teda platí, že $P(z_0, z_1, ..., z_T) = P(z_0)P(z_1).....P(z_T)$, kde z_i sú realizácie jednotlivých náhodných premenných Z_i, pre $\forall i = 0, 1, ...T$.

Odteraz v každom okamihu, keď sa bude rozhodovať o budúcom vývoji portfólia, sa bude rozhodovať nielen o spotrebe, ale aj o tom, aká časť w_t sa investuje do akcií a aká časť $1 - w_t$ sa investuje do dlhopisov. Preto spotreba sa bude vyvýjať nasledovne:

$$C_t = W_t - \frac{W_{t+1}}{(1-w_t)(1+r) + w_t Z_t}.$$

V našej novej stochastickej úlohe budeme maximalizovať očakávanú hodnotu celkového úžitku:

$$\max_{C_t, w_t} E \sum_{t=0}^{T} (1+\rho)^{-t} U[C_t],$$

kde E je stredná hodnota výrazu, teda očakávaná hodnota, popísaná Lebesgueovým intrálom:

$$E[Z_t] = \int_0^\infty z_t dP(z_t).$$

Ako sa už spomenulo, vo väčšine prípadoch budeme predpokladať, že sa nesporí na prípadné dedičstvo, teda $W_{T+1} = 0$, preto $C_T = W_T$, čo znamená, že pri poslednom rozhodovaní minieme všetko, čo ešte máme, pretože už nepotrebujeme do budúcnosti žiaden kapitál.

Naša stochastická úloha teda súčasne zahŕňa dve úlohy, a to úlohu optimálnej spotreby a úlohu optimálnej voľby portfólia.

4.2 Riešenie úlohy

Najprv uvedieme riešenie úlohy vo všeobecnosti a potom sa budeme sústrediť na určité typy funkcií užitočnosti. Naša základná úloha teda je

$$J_T(W_0) = \max_{\{C_t, w_t\}} E \sum_{t=0}^{T} (1+\rho)^{-t} U[C_t],$$

kde

$$C_t = W_t - W_{t+1}[(1-w_t)(1+r) + w_t Z_t]^{-1}.$$

Úloha sa bude riešiť pomocou dynamického programovania. Riešiť ju začneme od konca, pretože tak v prvom kroku dostaneme jednoperiódovú úlohu, ktorú sa dá ľahšie vyriešiť. Pretože v čase $t = T$ minieme zvyšný kapitál, niet čo rozhodovať o veľkosti kapitálu, či váhe investovanej do akcií, preto prvý funkciu budeme optimalizovať pre $t = T - 1$. Odvoďme si ju:

$$\begin{aligned}
&\max_{\{C_{T-1}, w_{T-1}\}} E \sum_{t=T-1}^{T} (1+\rho)^{-t} U[C_t] = \\
=&\max_{\{C_{T-1}, w_{T-1}\}} E\{(1+\rho)^{-T+1} U[C_{T-1}] + (1+\rho)^{-T} U[C_T]\} = \\
=&(1+\rho)^{-T+1} \max_{\{C_{T-1}, w_{T-1}\}} E\{U[C_{T-1}] + (1+\rho)^{-1} U[C_T]\} = \\
=&(1+\rho)^{-T+1} \max_{\{C_{T-1}, w_{T-1}\}} E\{U[C_{T-1}] + (1+\rho)^{-1} U[W_T]\} = \\
=&(1+\rho)^{-T+1} \max_{\{C_{T-1}, w_{T-1}\}} U[C_{T-1}] + E\{(1+\rho)^{-1} U[W_T]\} = \\
=&(1+\rho)^{-T+1} \max_{\{C_{T-1}, w_{T-1}\}} U[C_{T-1}] + (1+\rho)^{-1} E\{U[W_T]\} = \\
=&(1+\rho)^{-T+1} \max_{\{C_{T-1}, w_{T-1}\}} (U[C_{T-1}] + \\
&+ (1+\rho)^{-1} E\{U[(W_{T-1} - C_{T-1})[(1-w_{T-1})(1+r) + w_{T-1} Z_{T-1}]]\}).
\end{aligned}$$

Pričom sme využili fakty, že $C_T = W_T$, pretože $W_{T+1} = 0$ a

$$C_{T-1} = W_{T-1} - W_T[(1-w_{T-1})(1+r) + w_{T-1} Z_{T-1}]^{-1}.$$

Z toho sme vyjadrili W_T ako

$$W_T = (W_{T-1} - C_{T-1})[(1+r)(1-w_{T-1}) + w_{T-1} Z_{T-1}].$$

Keďže $(1+\rho)^{-T+1}$ je konštanta vzhľadom na premenné, podľa ktorých maximalizujeme, preto argumenty maxím sa nemenia, ak budeme v prvom kroku maximalizovať funkciu

$$J_1(W_{T-1}) = \max_{\{C_{T-1}, w_{T-1}\}} (U[C_{T-1}] +$$

$$+(1+\rho)^{-1}E\{U[(W_{T-1}-C_{T-1})[(1-w_{T-1})(1+r)+w_{T-1}Z_{T-1}]]\}).$$

Aby sme našli optimálne (C_{T-1}, w_{T-1}), zderivujeme funkciu J_1 podľa oboch premenných C_{T-1} i w_{T-1}. Potom podľa poradia dostávame:

- $U'[C_{T-1}]-(1+\rho)^{-1}E\{U'[C_T]\{(1-w_{T-1})(1+r)+w_{T-1}Z_{T-1}\}\}=0$
- $E\{U'[(W_{T-1}-C_{T-1})[(1+r)(1-w_{T-1})+w_{T-1}Z_{T-1}]]\times$

  $\times(W_{T-1}-C_{T-1})(Z_{T-1}-1-r)\}=$

  $=\int_0^\infty U'[(W_{T-1}-C_{T-1})[(1+r)(1-w_{T-1})+w_{T-1}Z_{T-1}]]\times$

  $\times(W_{T-1}-C_{T-1})(Z_{T-1}-1-r)dP(Z_{T-1})=0$

Riešením tejto sústavy dostávame optimálne voľby parametrov (C^*_{T-1}, w^*_{T-1}) a následne sa určí optimálna hodnota funkcie $J_1(W_{T-1})$.

Keď už poznáme $J_1(W_{T-1})$, je ľahké určiť optimálnu voľbu v predošlej perióde pre $t=(T-2)$. Odvoďme si funkciu, ktorú budeme optimalizovať tentokrát:

$$\max_{\{C_{T-2},w_{T-2}\}} E\sum_{t=T-2}^{T}(1+\rho)^{-t}U[C_t]=$$
$$=\max_{\{C_{T-2},w_{T-2}\}} E\{(1+\rho)^{-T+2}U[C_{T-2}]+(1+\rho)^{-T+1}U[C_{T-1}]+(1+\rho)^{-T}U[C_T]\}=$$
$$=\max_{\{C_{T-2},w_{T-2}\}}(1+\rho)^{-T+2}U[C_{T-2}]+E\{(1+\rho)^{-T+1}U[C_{T-1}]+(1+\rho)^{-T}U[C_T]\}=$$
$$=(1+\rho)^{-T+2}\max_{\{C_{T-2},w_{T-2}\}}U[C_{T-2}]+E\{(1+\rho)^{-1}U[C_{T-1}]+(1+\rho)^{-2}U[C_T]\}=$$
$$=(1+\rho)^{-T+2}\max_{\{C_{T-2},w_{T-2}\}}U[C_{T-2}]+(1+\rho)^{-1}E\{U[C_{T-1}]+(1+\rho)^{-1}U[C_T]\}=$$
$$=(1+\rho)^{-T+2}\max_{\{C_{T-2},w_{T-2}\}}U[C_{T-2}]+(1+\rho)^{-1}E\{J_1[W_{T-1}]\}$$

Pretože konštanta $(1+\rho)^{-T+2}$ znova nemení argumenty maxima, môžeme ju vynechať. Potom

$$J_2(W_{T-2})=\max_{\{C_{T-2},w_{T-2}\}}U[C_{T-2}]+$$
$$+(1+\rho)^{-1}E\{J_1[(W_{T-2}-C_{T-2})\{(1-w_{T-2})(1+r)+w_{T-2}Z_{T-2}\}]\}.$$

Derivácie podľa C_{T-2} a w_{T-2} vyzerajú nasledovne:

- $U'[C_{T-2}] - (1+\rho)^{-1}E\{J'[W_{T-1}][(1-w_{T-2})(1+r) + w_{T-2}Z_{T-2}]\} = 0$
- $\int_0^\infty J_1'[(W_{T-2} - C_{T-2})[(1+r)(1-w_{T-2}) + w_{T-2}Z_{T-2}]]\times$

  $\times(W_{T-2} - C_{T-2})(Z_{T-2} - 1 - r)dP(Z_{T-2}) = 0$

Riešením tejto sústavy dostávame optimálne voľby parametrov (C^*_{T-2}, w^*_{T-2}) a následne sa určíme optimálna hodnota funkcie $J_2(W_{T-2})$. Ak pokračujeme touto rekurzívnou metódou pre $T-3, T-4, ..., 2, 1, 0$, postupne dostaneme celé riešenie našej úlohy.

Poznamenajme, že derivácie podľa C_{T-i} a w_{T-i} pre $i = 1, 2, ..., T$ vo všeobecnosti budú dané, ako

- $U'[C_{T-i}] - (1+\rho)^{-1}E\{J'[W_{T-i}][(1-w_{T-i})(1+r) + w_{T-i}Z_{T-i}\}] = 0$
- $\int_0^\infty J_i'[(W_{T-i} - C_{T-i})[(1+r)(1-w_{T-i}) + w_{T-i}Z_{T-i}]]\times$

  $\times(W_{T-i} - C_{T-i})(Z_{T-i} - 1 - r)dP(Z_{T-i}) = 0$

Riešením tejto sústavy rovníc pre ľubovoľné t bude optimálny výber pre úlohu optimálnej spotreby vo forme:

$$\begin{aligned} C^*_t &= f[W_t; Z_{t-1}, Z_{t-2}, ...Z_0], \quad \text{alebo} \\ C^*_t &= f[W_t], \ \text{ak náhodné premenné } Z_i \text{ sú nezávislé pre všetky } i, \end{aligned}$$

a pre úlohu optimálneho portfólia:

$$\begin{aligned} w^*_t &= g[W_t; Z_{t-1}, Z_{t-2}, ...Z_0] \\ w^*_t &= g[W_t], \ \text{ak náhodné premenné } Z_i \text{ sú nezávislé pre všetky } i. \end{aligned}$$

4.3 Bernoulliho funkcia užitočnosti

Pozrime sa teraz, ako sa rieši naša úloha pri konkrétnej funkcii užitočnosti. Ako prvú funkciu, určíme Bernoulliho funkciu užitočnosti $U[C_t] = \log C_t$. Funkcia je konkávna na kladnej osi. Naša úloha v prvej perióde bude optimalizovať:

$$
\begin{aligned}
J_1(W_{T-1}) = & \max_{\{C_{T-1}, w_{T-1}\}} \{U[C_{T-1}]+ \\
& + (1+\rho)^{-1} E\{U[(W_{T-1} - C_{T-1})\{(1-w_{T-1})(1+r) + w_{T-1}Z_{T-1}\}]\}\} = \\
= & \max_{\{C_{T-1}, w_{T-1}\}} \{\log C_{T-1} + \\
& + (1+\rho)^{-1} E\{\log[(W_{T-1} - C_{T-1})\{(1-w_{T-1})(1+r) + w_{T-1}Z_{T-1}\}]\}\} = \\
= & \max_{\{C_{T-1}, w_{T-1}\}} \{\log C_{T-1} + \\
& + (1+\rho)^{-1} E\{\log[W_{T-1} - C_{T-1}] + \log[(1-w_{T-1})(1+r) + w_{T-1}Z_{T-1}]\}\}
\end{aligned}
$$

Výraz, ktorý maximalizujeme vieme rozdeliť na dve samostatné časti. Jedna bude obsahovať premennú C_{T-1} a druhá premennú w_{T-1}, preto $J_1(W_{T-1})$ môžeme rozdeliť na dve samostatné úlohy maximalizovania.

$$
\begin{aligned}
J_1(W_{T-1}) = & \max_{C_{T-1}} \log C_{T-1} + (1+\rho)^{-1}\{\log[W_{T-1} - C_{T-1}] + \\
& + \max_{w_{T-1}} E \log[(1-w_{T-1})(1+r) + w_{T-1}Z_{T-1}]\} = \\
& = \max_{C_{T-1}} \log C_{T-1} + (1+\rho)^{-1}\{\log[W_{T-1} - C_{T-1}] + \\
& + \max_{w_{T-1}} \int_0^\infty \log[(1-w_{T-1})(1+r) + w_{T-1}Z_{T-1}] dP(Z_{T-1})\}.
\end{aligned}
$$

Z derivácií máme:

- $\dfrac{1}{C_{T-1}} - (1+\rho)^{-1} \dfrac{1}{W_{T-1} - C_{T-1}} = 0$

  $(W_{T-1} - C_{T-1})(1+\rho) - C_{T-1} = 0$

  $(1+\rho)W_{T-1} - (2+\rho)C_{T-1} = 0$

  $C_{T-1} = (1+\rho)(2+\rho)^{-1}W_{T-1}$

- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1-w_{T-1})(1+r) + w_{T-1}Z_{T-1}} dP(Z_{T-1}) = 0$

  $w_t = w^*.$

Vidíme, že spotreba C_{T-1} a váha w_{T-1} nezávisia od seba. Čo je však zaujímavejšie, je to, že váha w_{T-1} nezávisí od W_{T-1}. To v preklade znamená, že portfólio sa bude voliť bez ohľadu na výšku kapitálu.

4.4 Izoelastická funkcia užitočnosti

V tomto prípade naša funkcia užitočnosti bude vyzerať nasledovne:

$$U[C_t] = \frac{C_t^\gamma}{\gamma}, \qquad \gamma < 1.$$

Ak si dobre všimneme, funkcia $U[C_t] = \log C_t$ je podľa L' Hospitalovho pravidla, pri $\gamma = 0$ tiež izoelastická funkcia.

Našou úlohou bude optimalizovať funkciu

$$\begin{aligned} J_1(W_{T-1}) &= \max_{\{C_{T-1}, w_{T-1}\}} \frac{C_{T-1}^\gamma}{\gamma} + \\ &+ (1+\rho)^{-1} E\left\{ \frac{(W_{T-1} - C_{T-1})^\gamma}{\gamma} [(1 - w_{T-1})(1+r) + w_{T-1} Z_{T-1}]^\gamma \right\} = \\ &= \max_{\{C_{T-1}, w_{T-1}\}} \frac{C_{T-1}^\gamma}{\gamma} + (1+\rho)^{-1} \frac{(W_{T-1} - C_{T-1})^\gamma}{\gamma} \times \\ &\times \int_0^\infty [(1 - w_{T-1})(1+r) + w_{T-1} Z_{T-1}]^\gamma dP(Z_{T-1}) \end{aligned}$$

Opäť vidíme, že výraz, ktorý maximalizujeme vieme rozdeliť na dve samostatné časti. Jedna bude obsahovať premennú C_{T-1} a druhá premennú w_{T-1}, preto $J_1(W_{T-1})$ môžeme rozdeliť na dve samostatné úlohy maximalizovania:

$$\begin{aligned} J_1(W_{T-1}) = \max_{C_{T-1}} \frac{C_{T-1}^\gamma}{\gamma} + (1+\rho)^{-1} \frac{(W_{T-1} - C_{T-1})^\gamma}{\gamma} \times \\ \times \max_{w_{T-1}} \int_0^\infty [(1 - w_{T-1})(1+r) + w_{T-1} Z_{T-1}]^\gamma dP(Z_{T-1}) \end{aligned}$$

Pomocou derivácie nájdime najprv maximum podľa w_{T-1}. Dostávame, že

$$\int_0^\infty \gamma [(1 - w_{T-1})(1+r) + w_{T-1} Z_{T-1}]^{\gamma - 1} (Z_{T-1} - 1 - r) dP(Z_{T-1}) = 0 \quad / : \gamma$$

$$\int_0^\infty [(1-w_{T-1})(1+r)+w_{T-1}Z_{T-1}]^{\gamma-1}(Z_{T-1}-1-r)dP(Z_{T-1})=0.$$

Posledná rovnica nám definuje argument maxima w^*, pri ktorom

$$\max_{w_{T-1}}\int_0^\infty [(1-w_{T-1})(1+r)+w_{T-1}Z_{T-1}]^{\gamma}dP(Z_{T-1})=$$

$$=\int_0^\infty [(1-w^*)(1+r)+w^*Z_{T-1}]^{\gamma}dP(Z_{T-1})=[1+r^*]^\gamma$$

Potom

$$J_1(W_{T-1})=\max_{C_{T-1}}\frac{C_{T-1}^\gamma}{\gamma}+(1+\rho)^{-1}\frac{(W_{T-1}-C_{T-1})^\gamma}{\gamma}[1+r^*]^\gamma.$$

Vyjadrime teda správnu spotrebu:

$$\frac{\partial J_1}{\partial C_{T-1}}=C_{T-1}^{\gamma-1}-(1+\rho)^{-1}(W_{T-1}-C_{T-1})^{\gamma-1}[1+r^*]^\gamma=0$$

$$\left(\frac{C_{T-1}}{W_{T-1}-C_{T-1}}\right)^{\gamma-1}=(1+\rho)^{-1}[1+r^*]^\gamma$$

$$\frac{C_{T-1}}{W_{T-1}-C_{T-1}}=[(1+\rho)^{-1}(1+r^*)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Pre jednoduchosť, označme si

$$[(1+\rho)^{-1}(1+r^*)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma-1}}=a_1.$$

Potom v prvej perióde optimálna spotreba bude mať hodnotu

$$C_{T-1}=\frac{a_1}{1+a_1}W_{T-1}$$

A nakoniec, hodnotová funkcia bude:

$$J_1(W_{T-1})=\frac{(C_{T-1}^*)^\gamma}{\gamma}+(1+\rho)^{-1}\frac{\left(W_{T-1}-C_{T-1}^*\right)^\gamma}{\gamma}(1+r^*)^\gamma=$$

$$=\frac{\left(\frac{a_1}{1+a_1}W_{T-1}\right)^\gamma}{\gamma}+(1+\rho)^{-1}\frac{\left(W_{T-1}-\frac{a_1}{1+a_1}W_{T-1}\right)^\gamma}{\gamma}(1+r^*)^\gamma=$$

$$=\frac{W_{T-1}^\gamma}{\gamma}\left[\left(\frac{a_1}{1+a_1}\right)^\gamma+(1+\rho)^{-1}\left(\frac{1}{1+a_1}\right)^\gamma(1+r^*)^\gamma\right].$$

Ak si označíme $b_1 = [(\frac{a_1}{1+a_1})^\gamma + (1+\rho)^{-1}(\frac{1}{1+a_1})^\gamma(1+r^*)^\gamma]$, potom

$$J_1(W_{T-1}) = \frac{W_{T-1}^\gamma}{\gamma} b_1$$

Pre rovnaké γ sa znova zachovala izoelastická vlastnosť, teda že výber portfólia w nezávisí na množstve kapitálu. Ak by sme pokračovali ďalej matematickou indukciou, zistili by sme, že táto vlastnosť platí aj pre $J_2(W_{T-2})$, $J_3(W_{T-3})$..., $J_T(W_0)$, pretože akonáhle to platí pre $J_n(W_{T-n})$, potom bude platiť aj pre $J_{n+1}(W_{T-n-1})$. Zhrnie to nasledujúca veta.

Veta 1 *Pre izoelastické funkcie užitočnosti* $U(C) = \dfrac{C^\gamma}{\gamma}$, $\gamma < 1$, *optimálna voľba portfólia* w *v žiadnom období nezávisí na výške vlastneného kapitálu, ani od volieb úlohy optimálnej spotreby a vedie ku konštante* w^*, *ktorá je riešením rovnice*

$$\int_0^\infty [(1-w)(1+r) + wZ]^{\gamma-1}(Z-1-r)dP(Z) = 0.$$

Optimálna voľba úlohy optimálnej spotreby (pri úlohách bez nároku na dedičstvo) bude v každom období vyzerať nasledovne:

$$C_{T-i}^* = c_i W_{T-1},$$

kde parameter c_i *sa dá získať pomocou nasledujúcich rekurzií:*

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{a_1}{1+a_1} \\
a_1 &= [(1+\rho)^{-1}(1+r^*)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma-1}} \\
(1+r^*)^\gamma &= \int_0^\infty [(1-w^*)(1+r) + w^*Z]^\gamma dP(Z) \\
c_i &= \frac{a_1 c_{i-1}}{1+a_1 c_{i-1}} = \frac{a_1^i}{1+a_1+a_1^2+...+a_1^i} \\
&= \frac{a_1^i(a_1-1)}{a_1^{i+1}-1}, \; \textit{ak } a_1 \neq 1 \textit{ a} \\
&= \frac{1}{1+i}, \qquad \textit{ak } a_1 = 1.
\end{aligned}$$

V limitnom prípade, keď $\gamma \to 0$ máme vyššie spomínanú Bernoulliho logaritmickú funkciu, kde

$a_1 = (1+\rho)$, pretože $\lim_{\gamma\to 0}(1+r^*)^\gamma = 1$, a

$$c_i = \frac{a_1^i(a_1-1)}{a_1^{i+1}-1} = \frac{(1+\rho)^i(1+\rho-1)}{(1+\rho)^{i+1}-1} = \frac{(1+\rho)^i\rho}{(1+\rho)^{i+1}-1},$$

čo znamená, že rozhodnutia o optimálnej spotrebe ovplyvňuje iba miera netrpezlivosti a aktuálny majetok (žiadna úroková miera).

Dôkaz 1 *Ako sme už spomínali, výsledky vety sme dostali matematickou indukciou, ktorá vraví, že ak pre $J_n(W_{T-n})$ platí izoelastická vlastnosť, potom bude platiť aj pre $J_{n+1}(W_{T-n-1})$. Z úvodného odvodenia vieme, že izoelastická vlastnosť platí pre $J_1(W_T)$. Nech teda izoelastická vlastnosť platí aj pre*

$$\begin{aligned}
&J_n(W_{T-n}) = \max_{C_{T-n}, w_{T-n}} \frac{C_{T-n}^\gamma}{\gamma} + \\
&+ (1+\rho)^{-1} E\{J_{n-1}[(W_{T-n} - C_{T-n})\{(1-w_{T-n})(1+r) + w_{T-n}Z_{T-n}\}]\} = \\
&= \frac{W_{T-n}^\gamma}{\gamma} b_n.
\end{aligned}$$

Potom, pozrime sa na

$$\begin{aligned}
J_{n+1}(W_{T-n-1}) &= \max_{\{C_{T-n-1}, w_{T-n-1}\}} \frac{C_{T-n-1}^\gamma}{\gamma} + (1+\rho)^{-1} E\{J_n[W_{T-n}]\} = \\
= &\max_{\{C_{T-n-1}, w_{T-n-1}\}} \frac{C_{T-n-1}^\gamma}{\gamma} + (1+\rho)^{-1} E\Big\{\frac{W_{T-n}^\gamma}{\gamma} b_n\Big\} = \\
= &\max_{\{C_{T-n-1}, w_{T-n-1}\}} \frac{C_{T-n-1}^\gamma}{\gamma} + (1+\rho)^{-1} E\Big\{\frac{(W_{T-n-1} - C_{T-n-1})^\gamma}{\gamma} b_n \times \\
&\times \{(1-w_{T-n-1})(1+r) + w_{T-n-1}Z_{T-n-1}\}^\gamma\Big\} = \\
= &\max_{\{C_{T-n-1}, w_{T-n-1}\}} \frac{C_{T-n-1}^\gamma}{\gamma} + (1+\rho)^{-1} \frac{(W_{T-n-1} - C_{T-n-1})^\gamma}{\gamma} b_n \times \\
&\times \int_0^\infty \{(1-w_{T-n-1})(1+r) + w_{T-n-1}Z_{T-n-1}\}^\gamma dP(Z_{T-n-1}) = \\
= &\max_{C_{T-n-1}} \frac{C_{T-n-1}^\gamma}{\gamma} + (1+\rho)^{-1} \frac{(W_{T-n-1} - C_{T-n-1})^\gamma}{\gamma} b_n \times \\
&\times \max_{w_{T-n-1}} \int_0^\infty \{(1-w_{T-n-1})(1+r) + w_{T-n-1}Z_{T-n-1}\}^\gamma dP(Z_{T-n-1}) = \\
= &\max_{C_{T-n-1}} \frac{C_{T-n-1}^\gamma}{\gamma} + (1+\rho)^{-1} \frac{(W_{T-n-1} - C_{T-n-1})^\gamma}{\gamma} b_n (1+r^*)^\gamma.
\end{aligned}$$

Optimálnu voľbu spotreby získame deriváciou:

$$C_{T-n-1}^{\gamma-1} - (1+\rho)^{-1} b_n (1+r^*)^\gamma (W_{T-n-1} - C_{T-n-1})^{\gamma-1} = 0$$
$$\left(\frac{C_{T-n-1}}{W_{T-n-1} - C_{T-n-1}}\right)^{\gamma-1} = (1+\rho)^{-1} b_n (1+r^*)^\gamma \qquad /()^{\frac{1}{\gamma-1}}$$
$$\frac{C_{T-n-1}}{W_{T-n-1} - C_{T-n-1}} = [(1+\rho)^{-1} b_n (1+r^*)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Označme pravú stranu rovnice ako $[(1+\rho)^{-1} b_n (1+r^*)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma-1}} = a_{n+1}$. *Potom*

$$\frac{C_{T-n-1}}{W_{T-n-1} - C_{T-n-1}} = a_{n+1}$$
$$C_{T-n-1} = \frac{a_{n+1}}{1+a_{n+1}} W_{T-n-1}$$
$$C_{T-n-1}^* = c_{n+1} W_{T-n-1}$$

Hodnotová funkcia:

$$J_{n+1}(W_{T-n-1}) = \frac{(C_{T-n-1}^*)^\gamma}{\gamma} + b_n (1+\rho)^{-1} (1+r^*)^\gamma \frac{(W_{T-n-1} - C_{T-n-1}^*)^\gamma}{\gamma} =$$
$$= \frac{(c_{n+1} W_{T-n-1})^\gamma}{\gamma} + b_n (1+\rho)^{-1} (1+r^*)^\gamma \frac{(W_{T-n-1} - c_{n+1} W_{T-n-1})^\gamma}{\gamma} =$$
$$= \frac{W_{T-n-1}^\gamma}{\gamma} [c_{n+1}^\gamma + b_n (1+\rho)^{-1} (1+r^*)^\gamma (1-c_{n+1})^\gamma] = \frac{W_{T-n-1}^\gamma}{\gamma} b_{n+1},$$

kde sme označili $b_{n+1} = c_{n+1}^\gamma + b_n (1+\rho)^{-1} (1+r^*)^\gamma (1-c_{n+1})^\gamma$.

Ako sa ľahko dá vidieť, izoelastická vlastnosť platí aj tu, pretože voľba portfólia znova nezávisela na množstve kapitálu a je tiež nezávislá od optimálnej spotreby. Pozrime sa ešte na odvodenie parametrov. Vieme, že

$$a_1 = [(1+\rho)^{-1} (1+r^*)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$c_1 = \frac{a_1}{1+a_1}$$

Vyjadrime c_{i+1}:

$$c_{i+1} = \frac{a_{i+1}}{1+a_{i+1}} = \frac{[(1+\rho)^{-1} b_i (1+r^*)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma-1}}}{1+[(1+\rho)^{-1} b_i (1+r^*)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma-1}}} = \frac{a_1 b_i^{\frac{1}{\gamma-1}}}{1+a_1 b_i^{\frac{1}{\gamma-1}}}.$$

Matematickou indukciu ukážeme, že

$$c_i = b_i^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Zrejme to platí pre $i = 1$, pretože

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \left(\frac{a_1}{1+a_1}\right)^\gamma + (1+\rho)^{-1}\left(\frac{1}{1+a_1}\right)^\gamma [1+r^*]^\gamma = \\
&= \frac{a_1^\gamma + (1+\rho)^{-1}[1+r^*]^\gamma}{(1+a_1)^\gamma} = \frac{a_1^\gamma + a_1^{\gamma-1}}{(1+a_1)^\gamma} = \\
&= \frac{a_1^{\gamma-1}(a_1+1)}{(1+a_1)^{\gamma-1}(1+a_1)} = \left(\frac{a_1}{1+a_1}\right)^{\gamma-1} = c_1^{\gamma-1}.
\end{aligned}
$$

Všeobecne, pre $\forall i = 2, 3, ...T$ pomocou vzťahov

$$c_i = \frac{a_i}{1+a_i}$$

a

$$a_i = [(1+\rho)^{-1} b_{i-1}(1+r^*)^\gamma]^{\frac{1}{\gamma-1}} = [a_1^{\gamma-1} b_{i-1}]^{\frac{1}{\gamma-1}} = a_1 b_{i-1}^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

vyjadríme

$$
\begin{aligned}
b_i &= c_i^\gamma + b_{i-1}(1+\rho)^{-1}(1+r^*)^\gamma(1-c_i)^\gamma = \\
&= \left(\frac{a_i}{1+a_i}\right)^\gamma + b_{i-1}a_1^{\gamma-1}\left(1-\frac{a_i}{1+a_i}\right)^\gamma = \\
&= \left(\frac{a_i}{1+a_i}\right)^\gamma + a_i^{\gamma-1}\left(\frac{1}{1+a_i}\right)^\gamma = \frac{a_i^\gamma + a_i^{\gamma-1}}{(1+a_i)^\gamma} = \\
&= \frac{a_i^{\gamma-1}(a_i+1)}{(1+a_i)^{\gamma-1}(1+a_i)} = \left(\frac{a_i}{1+a_i}\right)^{\gamma-1} = c_i^{\gamma-1}
\end{aligned}
$$

Potom teda platí, že

$$c_i = \frac{a_1 b_{i-1}^{\frac{1}{\gamma-1}}}{1 + a_1 b_{i-1}^{\frac{1}{\gamma-1}}} = \frac{a_1 c_i}{1 + a_1 c_i}.$$

$\square$

Samuelsonov model nám teda tvrdí, že pri izoelastickej funkcii užitočnosti bude mať jedinec stále takú istú averziu k riziku, bez ohľadu na množstvo kapitálu.

Iný spôsob, ako sa k tomuto výsledku dostať je, ak sa pozrieme iba na úlohu výberu portfólia. Nech jedinec vlastní kapitál výšky M_0. Rozhodne sa investovať časť w do akcií s výnosom Z_t a časť $(1-w)$ do dlhopisov s výnosom $(1+r)$. Kapitál v nasledujúcom období bude mať výšku

$$M = M_0[(1-w)(1+r) + wZ_t].$$

Úžitok nahromadeného kapitálu bude $U[M]$. Našou úlohou je maximalizovať tento úžitok.

Ak teda máme izoelastickú funkciu úžitočnosti $U[M] = \dfrac{M^\gamma}{\gamma}$, potom našou úlohou bude

$$\max_w E(U[M]) = \max_w E\left(\frac{M^\gamma}{\gamma}\right) = \max_w E\left(\frac{M_0^\gamma[(1-w)(1+r)+wZ_t]^\gamma}{\gamma}\right) = \\ = \frac{M_0^\gamma}{\gamma}\max_w E([(1-w)(1+r)+wZ_t]^\gamma).$$

Opäť vidíme, že argument w nezávisí na množstve kapitálu.

Fakt, že výber portfólia nezávisí na množstve kapitálu hovorí aj o tom, že nezáleží na tom, aký je jedinec starý (za predpokladu, že majetok je rastúca funkcia veku).

Kapitola 5

Iné typy funkcií užitočnosti

5.1 Exponenciálna funkcia užitočnosti

Nastáva teraz otázka, čo sa stane, ak zmeníme typ funkcie. Či aj pri iných funkciách užitočnosti bude platiť, že nezáleží na množstve majetku pri výbere portfólia. Predpokladajme, že výnos akcií je vyšší ako výnos dlhopisov, a nech funkcia užitočnosti je exponenciálna funkcia

$$U(M) = -e^{-aM},$$

kde $a > 0$ je konštanta a M je kapitál. Vieme, že nahromadený kapitál je

$$M = M_0[(1-w)(1+r) + wZ_t].$$

Úlohou je opäť maximalizovať úžitok investovania:

$$\max_w E(U[M]) = \max_w E(-e^{-aM}) = \max_w E(-e^{-aM_0[(1-w)(1+r)+wZ_t]}) = \\ = -\min_w e^{-aM_0(1-w)(1+r)} E(e^{-aM_0 w Z_t})$$

Na výpočet strednej hodnoty použijeme Lemu 4.4 z [4]:

Lema 1 *Náhodná premenná X má rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$ (pri pravdepodobnostnej miere P) práve vtedy, keď*

$$E_P(e^{\theta X}) = e^{\theta\mu + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}, \qquad \forall \mu, \theta \in R.$$

Pretože náhodná premenná Z_t predstavuje totálny výnos, jej rozdelenie budeme uvažovať ako $N(\mu+1, \sigma^2)$

Potom podľa Lemy 1

$$E(e^{-aM_0 w Z_t}) = e^{-aM_0 w(\mu+1) + \frac{1}{2}a^2 M_0^2 w^2 \sigma^2}$$

Našou úlohou je teda nájsť extrém funkcie:

$$-\min_w e^{-aM_0(1-w)(1+r)} e^{-aM_0 w(\mu+1)+\frac{1}{2}a^2M_0^2w^2\sigma^2} =$$
$$= -\min_w e^{-aM_0(1-w)(1+r)-aM_0w(\mu+1)+\frac{1}{2}a^2M_0^2w^2\sigma^2}$$

Argument získame deriváciou:

$$e^{-aM_0(1-w)(1+r)-aM_0w(\mu+1)+\frac{1}{2}a^2M_0^2w^2\sigma^2}(aM_0(1+r)-aM_0w(\mu+1)+a^2M_0^2\sigma^2w) = 0$$

Vieme, že exponenciálna funkcia nemôže byť nula, preto výraz v zátvorke sa musí rovnať nule:

$$aM_0(1+r) - aM_0(\mu+1) + a^2M_0^2\sigma^2 w = 0$$

Z toho vieme vyjadriť váhu w, ako

$$w = \frac{(\mu+1)-(1+r)}{aM_0\sigma^2} = \frac{\mu - r}{aM_0\sigma^2}.$$

Zaujíma nás, ako sa bude meniť váha podľa veľkosti kapitálu.

Podľa predpokladu výnos akcií je vyšší, ako výnos dlhopisov, preto čím väčší kapitál plánuje jedinec investovať, tým bude opatrnejší, pretože rastom kapitálu váha w investovaná do akcií klesá.

Pozrime sa teraz na to, ako závisí voľba portfólia od času investovania. Nech ročný výnos dlhopisu je bezriziková úroková miera r_f a ročný výnos akcií je náhodná premenná r_A s normálnym rozdelením $N \sim (\mu, \sigma^2)$. Majetok M v čase T bude vyzerať

$$M_T = M_0[(1-w)(1+r_fT) + w(1+r_AT)].$$

Potom

$$\max_w E(U[M]) = \max_w E(-e^{-aM}) = \max_w E(-e^{-aM_0[(1-w)(1+r_fT)+w(1+r_AT)]}) =$$
$$= -\min_w e^{-aM_0[(1-w)(1+r_fT)+w]} E(e^{-aM_0wr_AT}) =$$
$$= -\min_w e^{-aM_0[(1-w)(1+r_fT)+w]} e^{-aM_0wT\mu+\frac{1}{2}a^2M_0^2w^2T^2\sigma^2} =$$
$$= -\min_w e^{-aM_0[(1-w)(1+r_fT)+w+wT\mu-\frac{1}{2}aM_0w^2T^2\sigma^2]}$$

Optimálnu voľbu portfólia získame deriváciou:

$$e^{-aM_0[(1-w)(1+r_fT)+w+wT\mu-\frac{1}{2}aM_0w^2T^2\sigma^2]}(-aM_0)\times$$

$$\times[-(1+r_fT)+(1-\mu T)+\frac{1}{2}aM_0T^2\sigma^2 2w]=0$$

Potom zrejme musí platiť, že

$$[-(1+r_fT)+(1+\mu T)-aM_0T^2\sigma^2 w]=0$$

$$aM_0T\sigma^2 w=\mu-r_f$$

$$w=\frac{\mu-r_f}{aM_0T\sigma^2}$$

Pretože $\mu - r_f > 0$, rastom času investovania bude váha w klesať, čo znamená, že čím dlhšie jedinec plánuje investovať, tým menší podiel bude investovať do rizikovejších fondov.

5.2 Kvadratická funkcia užitočnosti

Nech funkcia úžitočnosti je tentokrát kvadratická funkcia:

$$U[M]=-\frac{1}{2}\alpha M^2+M,$$

kde $\alpha > 0$. Záporné znamienko pred parametrom α znamená, že budeme mať konkávnu kvadratickú funkciu. Potrebujeme tiež, aby funkcia bola aj rastúca, preto budeme brať iba tie hodnoty M, kde táto funkcia rastie, a to konkrétne na intervale $M \in (0, \frac{1}{\alpha}\rangle$.

Predpokladajme ďalej, že M je dostatočne ďaleko od maxima funkcie, aby to mohlo rásť, nech teda $M \ll \frac{1}{\alpha}$. Kapitál je

$$M=M_0[(1-w)(1+r)+wZ_t],$$

kde Z_t je náhodná premenná s normálnym rozdelením $Z_t \sim N(\mu+1,\sigma^2)$, a samozrejme pre M_0 tiež platí, že $M_0 \ll \frac{1}{\alpha}$.

Našou úlohou je maximalizovať úžitok investovania:

$$\max_w E(U[M])=\max_w E\left(-\frac{1}{2}\alpha M^2+M\right)=$$
$$=\max_w E\left(-\frac{1}{2}\alpha M_0^2[(1-w)(1+r)+wZ_t]^2+M_0[(1-w)(1+r)+wZ_t]\right)$$

po odvodení dostaneme za úlohu maximalizovať

$$=\max_w -\frac{1}{2}M_0^2(1-w)^2(1+r)^2+M_0(1-w)(1+r)+$$

$+[1-\alpha M_0(1-w)(1+r)]M_0 w E(Z_t) - \frac{1}{2}\alpha M_0^2 w^2 E(Z_t^2)$
Vieme, že disperzia náhodnej premennej sa ráta, ako

$$D(Z_t) = E(Z_t^2) - (E(Z_t))^2,$$

preto môžeme jednoducho vyjadriť

$$E(Z_t^2) = D(Z_t) + (E(Z_t))^2 = \sigma^2 + (\mu+1)^2.$$

Potom

$$\begin{aligned}
&\max_w E(U[M]) = \\
&\max_w -\frac{1}{2}\alpha M_0^2(1-w)^2(1+r)^2 + M_0(1-w)(1+r)+ \\
&+[1-\alpha M_0(1-w)(1+r)]M_0 w(\mu+1) - \frac{1}{2}\alpha M_0^2 w^2(\sigma^2+(\mu+1)^2)
\end{aligned}$$

Optimálny parameter w získame deriváciou:

$$\frac{1}{2}\alpha M_0^2(1+r)^2 2(1-w) - M_0(1+r) + M_0(\mu+1)-$$
$$-\alpha M_0^2(\mu+1)(1+r) + 2\alpha M_0^2(\mu+1)(1+r)w - \frac{1}{2}\alpha M_0^2 2w(\sigma^2+(\mu+1)^2) = 0$$

Vydelíme konštantou M_0 a upravíme:

$$\alpha M_0(1+r)^2 - \alpha M_0(1+r)^2 w - (1+r) + (\mu+1)-$$
$$-\alpha M_0(\mu+1)(1+r) + 2\alpha M_0(\mu+1)(1+r)w - \alpha M_0 w(\sigma^2+(\mu+1)^2) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\alpha M_0 w[2(\mu+1)(1+r) - (1+r)^2 - (\sigma^2+(\mu+1)^2)] = \\
&= \alpha M_0(\mu+1)(1+r) - \alpha M_0(1+r)^2 + (1+r) - (\mu+1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha M_0 w[2(\mu+1)(1+r) - (1+r)^2 - \sigma^2 - (\mu+1)^2] = \\
&= \alpha M_0(1+r)[\mu+1-1-r] + [1+r-\mu-1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha M_0 w[-(r+1-\mu-1)^2 - \sigma^2] = \\
&= (\mu-r)[\alpha M_0(1+r)-1]
\end{aligned}$$

$$w = \frac{(\mu-r)[\alpha M_0(1+r)-1]}{\alpha M_0[-(r-\mu)^2-\sigma^2]} = \frac{(\mu-r)[1-\alpha M_0(1+r)]}{\alpha M_0[(r-\mu)^2+\sigma^2]}.$$

Vieme, že
$$M_0 \ll \frac{1}{\alpha}$$
preto platí, že
$$1 - \alpha M_0(1+r) > 0.$$

Zaujíma nás, ako sa mení voľba portfólia podľa množstva kapitálu, preto upravme tento výsledok na prehľadnejší vzorec:
$$w = (\mu - r)[\frac{1}{\alpha M_0[(r-\mu)^2 + \sigma^2]} - \frac{(1+r)}{(r-\mu)^2+\sigma^2}].$$

Vidíme, že rastom základného kapitálu M_0 bude váha w tiež klesať. To znamená, že čím viac kapitálu jedinec má, tým menej bude investovať do rizikovejších fondov.

Teraz sa pozrime na to, ako bude závisieť váha w od dĺžky investovania. Nech ročný výnos dlhopisu je bezriziková úroková miera r_f a ročný výnos akcií je náhodná premenná r_A s normálnym rozdelením $N \sim (\mu, \sigma^2)$. Majetok M v čase T bude vyzerať
$$M_T = M_0[(1-w)(1+r_fT) + w(1+r_AT)].$$

Potom našou úlohou je
$$\max_w E(U[M]) = \max_w E\left(-\frac{1}{2}\alpha M^2 + M\right) =$$
$$= \max_w E\Big(-\frac{1}{2}\alpha M_0^2[(1-w)(1+r_fT) + w(1+r_AT)]^2 +$$
$$+ M_0[(1-w)(1+r_fT) + w(1+r_AT)]\Big)$$

Po odvodení
$$\max_w -\tfrac{1}{2}\alpha M_0^2(1-w)^2(1+r_fT)^2 - \alpha M_0^2(1-w)(1+r_fT)w - \tfrac{1}{2}\alpha M_0^2 w^2 +$$
$$+M_0(1-w)(1+r_fT) + M_0 w +$$
$$+M_0Tw[-\alpha M_0(1-w)(1+r_fT) - \alpha M_0 w + 1]\mu - \tfrac{1}{2}\alpha M_0^2 w^2 T^2(\sigma^2 + \mu^2)$$

Optimálnu váhu w získame derivovaním podľa w:

$$\frac{1}{2}\alpha M_0^2 2(1-w)(1+r_fT)^2 - \alpha M_0^2(1+r_fT)[1-2w] - \frac{1}{2}\alpha M_0^2 2w -$$
$$- M_0(1+r_fT) + M_0 - \alpha M_0^2 T(1+r_fT)[1-2w]\mu - \alpha M_0^2 T 2w\mu +$$
$$+ M_0 T\mu - \frac{1}{2}\alpha M_0^2 2wT^2(\sigma^2+\mu^2) = 0$$

Vyjadríme váhu w:

$$w = \frac{(r_f-\mu)T[\alpha M_0(1+r_fT)-1]}{\alpha M_0 T^2[(r_f-\mu)^2+\sigma^2]} = \frac{(\mu-r_f)[1-\alpha M_0(1+r_fT)]}{\alpha M_0 T[(r_f-\mu)^2+\sigma^2]} =$$
$$= (\mu-r_f)[\frac{1-\alpha M_0}{\alpha M_0 T[(r_f-\mu)^2+\sigma^2]} - \frac{\alpha M_0 r_f T}{\alpha M_0 T[(r_f-\mu)^2+\sigma^2]}]$$
$$= (\mu-r_f)[\frac{1-\alpha M_0}{\alpha M_0 T[(r_f-\mu)^2+\sigma^2]} - \frac{r_f}{[(r_f-\mu)^2+\sigma^2]}]$$

Z predošlých odvodení vyplýva, že $1-\alpha M_0 > 0$, preto pri predpoklade, že akcie majú vyšší výnos ako dlhopisy, bude váha w investovaná do akcií klesať rastom dĺžky investovania.

Kapitola 6

Záver

V tejto práci sme sa snažili nájsť odpoveď na otázku, ako správne zostaviť portfólio v závislosti od rôznych časových horizontov podľa toho, aké má investor preferencie. Zoznámili sme sa s teóriou pravdepodobnosti prepadu, s teóriou poistenia proti strate a s teóriou zostavenia portfólia pomocou stochastického dynamického programovania. Všetky tri metódy mali iný prístup k problematike.

Jedine teória pravdepodobnosti prepadu podporila konvenčnú „múdrosť", ktorá tvrdí, že čím dlhšiu dobu plánuje jedinec investovať, tým viac by mal investovať do rizikovejších portfólií. Ostatné prístupy túto teóriu nepotvrdili.

V teórii pravdepodobnosti prepadu sme predstavili riziko ako pravdepodobnosť prepadu. Zistili sme, že čím dlhšie investor plánuje investovať, tým väčšiu váhu akcií v portfóliu by mal voliť. Pravdepodobnosť prepadu sa totiž znižuje, čím dlhšie plánujeme investovať do takéhoto portfólia.

V teórii poistenia proti strate sme zvažovali nielen výnosy, ale sme zahrnuli aj veľkosť možnej straty. Riziko sa odzrkadlovalo vo výške zaistenia akcií v portfóliu proti prepadu. Cena zaistenia rástla rastom dĺžky investovania. To znamená, že riziko portfólia tiež rástla rastom časového horizontu.

Pri zostavení portfólia pomocou stochastického dynamického programovania sme sa sústredili na váhu akcií v portfóliu. Pre rôzne typy funkcií užitočností sme dostali rôzne výsledky.

V prípade Bernoulliho funkcie a izoelastickej funkcie sa váha volí v každej perióde konštantne bez ohľadu na to, aký veľký majetok jedinec má. Teda nezávisí ani na výške majetku, ani na tom, na aké dlhé obdobie jedinec plánuje investovať (to je ekvivalentné s tým, že je váha konštantná v každej perióde).

V prípadoch exponenciálnej i kvadratickej funkcie užitočnosti sa ukázalo, že rastom času investovania váha investovaná do akcií klesá.

V konečnom dôsledku, pokiaľ investor plánuje investovať na dlhšiu dobu, podľa väčšine teórií sa mu oplatí byť opatrný.

Literatúra

[1] Zvi Bodie: On the risk of stocks in the long run
Financial Analysts Journal, May - June 1995

[2] Paul A. Samuelson: Lifetime Portfolio Selection By Dynamic Stochastic Programming
The Review of Economics and Statistics, Vol. 51, No. 3. (Aug., 1969)

[3] Elroy Dimson, Paul Marsch and Mike Staunton: Global Evidence on the Equity risk premium
Journal of Applied Corporate Finance, Vol. 15, No. 4, (Summer 2003)

[4] Igor Melicherčík, Ladislava Olšarová, Vladimír Úradníček: Kapitoly z finančnej matematiky
Epos, Bratislava, 2005