

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2009

MARTIN LAUKO

Numerické a analytické aproximácie hranice
predčasného uplatnenia americkej put opcie

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Martin Lauko

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY**

9.1.9. Aplikovaná matematika
Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce:
Doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

BRATISLAVA 2009

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



Numerické a analytické aproximácie hranice
predčasného uplatnenia americkej put opcie

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Vedúci diplomovej práce:
Doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

BRATISLAVA 2009

MARTIN LAUKO

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem na svoju česť, že som túto prácu na vypracoval samostatne s použitím zdrojov uvedených v zozname.

.....

Martin Lauko

Podakovanie

Chcem využiť tento priestor a vysloviť úprimné podakovanie svojmu diplomovému vedúcemu doc. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za odborné rady a mnohé podnetné pripomienky k práci.

autor

Abstrakt

LAUKO, Martin: *Numerické a analytické aproximácie hranice predčasného uplatnenia americkej put opcie.* Diplomová práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislave (2007), 52 s.
Školiteľ: doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Americké typy derivátov dávajú držiteľovi možnosť rozhodnúť sa, kedy dôjde k uplatneniu kontraktu. Kedy je optimálny čas uplatnenia?

Diplomová práca sa zaoberá *hranicou predčasného uplatnenia* americkej put opcie. Rozoberá rôzne analytické aj numerické prístupy k riešeniu problému. Obsahuje konkrétne porovnania polohy hranice predčasnej expirácie vypočítanej pomocou dostupných numerických metód a analytických aproximačných formúl.

Súčasťou práce je odvodenie *novej numerickej schémy* na výpočet hranice skorého uplatnenia vychádzajúce z integrálnej sústavy rovníc. V každom časovom kroku treba riešiť úlohu hľadania nulového bodu funkcie. Nová metóda dosahuje v porovnaní s doteraz používanými aproximáciami veľmi dobré výsledky v krátkodobom aj v dlhodobom časovom horizonte, navyše konverguje lineárnou rýchlosťou.

Kľúčové slová

hranica predčasnej expirácie, kritická cena akcie, Black-Scholesova rovnica, americká put opcia, analytické aproximácie, numerický výpočet voľnej hranice, algoritmus PSOR

Abstract

LAUKO, Martin: *Numerical and analytical approximations of early exercise boundary of American put option.* Master Thesis. Faculty of mathematics, physics and informatics. Comenius University, Bratislava (2007), 52 p. Supervisor: doc. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

American types of derivatives allow the holder to decide, when to exercise the contract. What is the optimal stopping time?

Thesis is concentrated on *early exercise boundary* of American put option. It analyzes different analytical and numerical approaches to the problem solution. It includes comparison of position of early exercise boundary calculated via available numerical methods and analytical approximation formulas.

Derivation of *new numerical schema* for valuation of early exercise boundary based on integral system of equations is also presented. In each time point it is necessary to find a root of given function. New method gives us (in comparison with approximations used up to now) very good solutions in short-term and long-term time horizon, furthermore, it has linear convergence.

Keywords

early exercise boundary, critical stock price, Black-Scholes equation, American put option, analytical approximation, numerical valuation of the free boundary, PSOR algorithm

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 5 |
| 1 Teoretické východiská | 7 |
| 1.1 Európske a americké opcie | 7 |
| 1.2 Black-Scholesova rovnica | 9 |
| 1.3 Formulácia úlohy pre americké opcie | 11 |
| 1.3.1 Oblasť riešenia | 11 |
| 1.3.2 Podmienky hladkého napojenia | 11 |
| 1.3.3 Výsledná formulácia pre americký put | 14 |
| 2 Analytické aproximácie | 15 |
| 2.1 Aproximácia podľa Stamicara a kol. | 15 |
| 2.2 Analytická aproximácia podľa Zhua | 17 |
| 2.3 Ďalšie analytické aproximácie | 19 |
| 2.4 Porovnanie asymptotického správania | 20 |
| 3 Odvodenie numerickej schémy SSCh | 22 |
| 3.1 Diskretizácia problému | 22 |
| 3.2 Iteračné riešenie | 23 |
| 3.3 Bodové iterácie | 25 |
| 4 Numerické porovnanie | 28 |
| 4.1 Analytické aproximácie | 28 |
| 4.2 Výsledky v dlhodobom horizonte | 30 |
| 4.3 Porovnanie blízko času expirácie | 31 |
| 4.4 Asymptotické riešenie | 33 |
| 4.5 Delenie časového intervalu | 34 |
| 4.6 Experimentálny rád konverencie | 35 |

| | |
|---|-----------|
| <i>OBSAH</i> | 2 |
| 5 Konvergencia PSOR metódy | 39 |
| 5.1 Rád konvergence podľa rozmeru | 41 |
| 5.2 Voľba hranice L | 43 |
| 5.3 Voľba váhy vektora zmeny ω | 45 |
| 5.4 Presnosť PSOR voľnej hranice | 48 |
| Záver | 50 |
| Literatúra | 51 |
| Prílohy | i |
| A. Zdrojové kódy metódy SSCh (Matlab) | i |
| B. Zdrojové kódy metódy PSOR (Matlab) | v |

Zoznam obrázkov

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Expiračná hodnota put a call opcie v závislosti od ceny akcie S | 8 |
| 1.2 | Stochastický vývoj ceny akcie <i>Google Inc.</i> , apríl 2008 - apríl 2009 | 10 |
| 1.3 | Cena put opcie s $X = 400\$$ a $T = 1$ rok na akciu <i>Google Inc.</i> | 10 |
| 1.4 | Oblasť držby a hranica predčasnej expirácie amerických opcií | 12 |
| 1.5 | Napojenie ceny americkej put opcie na svoj payoff | 13 |
| 3.1 | Priebeh aproximovaných funkcií | 24 |
| 3.2 | Numericky získané riešenie sústavy rovníc a dopočítaná voľná hranica | 27 |
| 4.1 | Grafické porovnanie analytických formúl - rôzne časové obdobia | 29 |
| 4.2 | Porovnanie polohy voľnej hranice v dlhodobom horizonte | 30 |
| 4.3 | Porovnanie polohy hranice predčasnej expirácie | 32 |
| 4.4 | Porovnanie rôznych delení časového intervalu | 35 |
| 4.5 | Ukážka konvergencie SSCh k presnému riešeniu | 38 |
| 5.1 | Vyhľadanie PSOR riešenia voľnej hranice | 40 |
| 5.2 | Závislosť vlastností PSOR riešenia voľnej hranice podľa rozmeru a voľby ω | 41 |
| 5.3 | Závislosť počtu iterácií od veľkosti priestorového kroku L/n | 43 |
| 5.4 | Závislosť tvaru PSOR riešenia voľnej hranice podľa voľby L | 45 |
| 5.5 | Vlastnosti riešení pri voľbe váh ω | 46 |
| 5.6 | Ukážka tvaru riešenia pre rôzne hodnoty parametra ω | 47 |

Zoznam tabuliek

| | | |
|-----|---|----|
| 4.1 | Porovnanie polohy hranice vypočítanej analytickými formulami | 29 |
| 4.2 | Porovnanie polôh hranice skorého uplatnenia put opcie | 31 |
| 4.3 | Numerické porovnanie polohy hranice predčasnej expirácie | 32 |
| 4.4 | Konštanty C vypočítaná z polohy hranice predčasnej expirácie | 33 |
| 4.5 | Porovnanie dvoch delení intervalu | 34 |
| 4.6 | Výpočet rádu konvergenzie voči PSOR benchmarku | 37 |
| 4.7 | Výpočet rádu konvergenzie voči SSCh-5120 benchmarku | 38 |
| 5.1 | Rád konvergenzie PSOR metódy v porovnaní so SSCh-1280 benchmarkom | 40 |
| 5.2 | Zmena pomeru časových a priestorových krokov | 42 |
| 5.3 | Porovnanie najmenšieho bodu $S_f(t)$ a najmenšej ceny akcie podľa L . . . | 43 |
| 5.4 | Konštantný priestorový krok L/n | 44 |
| 5.5 | Rôzna voľba hranice L | 44 |
| 5.6 | Voľba parametra ω | 47 |
| 5.7 | Rovnaký počet vnútorných iterácií / čas trvania výpočtu | 48 |
| 5.8 | Výpočty s veľkou presnosťou (benchmark SSCh-5120) | 49 |

Úvod

Finančnými derivátmi nazývame produkty, ktorých cena je odvodená od podkladového aktíva. Či už podkladovým aktívom rozumieme cenu pšenice alebo hodnotu akcie na burze, princíp zostáva rovnaký: derivát môžeme použiť na zaistenie proti náhodným zmenám na trhoch alebo - práve naopak - na zväčšenie rizika pri špekulatívnych transakciách. To sú dôvody, pre ktoré sa s derivátmi obchoduje.

Prvé deriváty sa objavili už pred 2500 rokmi v starovekom Grécku. Thalesovi sa vysmievali, že jeho chudoba svedčí o tom, že filozofia nemá žiaden praktický zmysel. Preto uprostred zimy lacno nakúpil od majiteľov lisov exkluzívne právo prvého lisovania olív po skončení zberu. Keďže úroda bola bohatá a každý chcel čo najskôr lisovať, Thales svoje práva s veľkým ziskom predal. Stal sa tak jedným z prvých obchodníkov s derivátmi.

Moderné opcie sa objavili v roku 1973 otvorením prvej opčnej burzy v Chicagu - *Chicago Board Options Exchange*. Začali sa obchodovať kontrakty so štandardnými zmluvnými podmienkami a termínmi expirácie. Prvý deň obchodovania sa predalo 911 opcií. V súčasnosti tento počet dosahuje priemerne 10 miliónov každý deň.

Potreba správneho oceňovania amerických opcií úzko súvisí s problematikou hranice predčasnej expirácie, ktorá je témou tejto diplomovej práce. Medzi hlavné ciele práce môžeme zaradiť porovnanie rôznych analytických prístupov - či už asymptotickú aproximáciu Stamicara a kol., novú Zhuovu analytickú aproximáciu alebo ďalšie.

Zároveň chceme porovnať jednotlivé prístupy aj numericky - priamo vypočítať polohu voľnej hranice v konkrétnych časoch a porovnať veľkosť odchýlky. Ako benchmark môžeme zvoliť voľnú hranicu vypočítanú z ceny opcie podľa PSOR metódy.

V numerickej časti preskúmame aj parametre, ktoré majú vplyv na presnosť algoritmu PSOR. Pokúsime sa tiež vytvoriť novú numerickú schému na výpočet hranice predčasnej expirácie a túto porovnať s dostupnými metódami.

Nasleduje niekoľko slov o štruktúre práce. Práca je rozdelená na päť kapitol. V prvej sa venujeme základom oceňovania európskych a amerických opcií. Vychádzame z Black-

Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice a odvodíme okrajové podmienky pre americký put. Súčasťou riešenia úlohy je nájdenie hranice predčasnej expirácie opcie.

Druhá kapitola uvedie čitateľa podrobnejšie do problematiky analytických aproximácií hranice skorého uplatnenia. Zaoberáme sa hlavnými myšlienkami článkov [13], [17] a [3]. Na základe implicitnej sústavy rovníc pre voľnú hranicu z článku [13] odvodíme v tretej kapitole novú numerickú schému.

Štvrtá a piata kapitola sú prakticky zamerané na numerické porovnanie polôh voľnej hranice vypočítaných jednotlivými analytickými a numerickými metódami. Porovnáваме výpočet pre rôzne časy do expirácie, počítame relatívne odchýlky od benchmarku a experimentálny rád konvergenzie metód. Súčasťou sú tabuľky a grafy.

V závere sa snažíme zhrnúť, ako sa nám podarilo splniť ciele práce. Prílohy obsahujú zdrojové kódy numerických algorimov pre Matlab.

1 Teoretické východiská

V tejto kapitole sa zameriame na základné predpoklady a problémy, ktoré súvisia s oceňovaním opcií. Ide najmä o Black-Scholesovu rovnicu, ktorú používame pri oceňovaní rôznych typov derivátov. Zároveň sformulujeme ďalšie podmienky riešenia pre americké opcie.

1.1 Európske a americké opcie

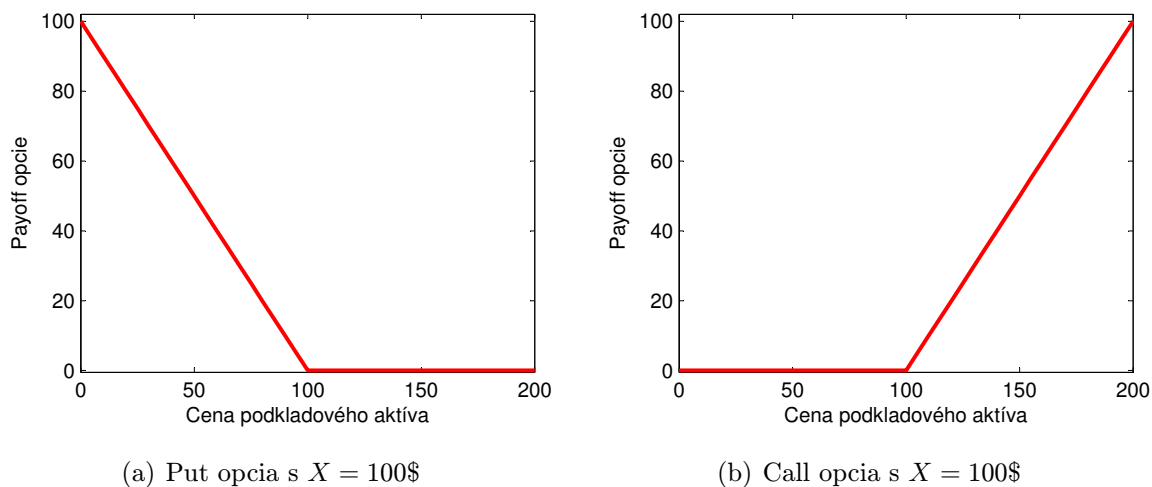
V posledných rokoch sa obchoduje s veľkým množstvom finančných derivátov, ktorých cena závisí od ceny podkladového aktíva. Základnými typmi sú call a put opcie (tzv. *vanilla options*). Okrem nich sa obchoduje s rôznymi exotickými typmi derivátov (napr. lookback alebo ázijské opcie). Podľa času uplatnenia rozlišujeme európske a americké typy opcií. Začnime základnými definíciami.

Definícia 1.1 (Európska put opcia) *Finančný kontrakt medzi držiteľom a vypisovateľom. Držiteľ má právo (nie však povinnosť) prediť podkladové aktívum (akciu, komoditu) vypisovateľovi v expiračnom čase T za vopred dohodnutú expiračnú cenu X .*

Definícia 1.2 (Americká put opcia) *Finančný kontrakt medzi držiteľom a vypisovateľom. Držiteľ má právo (nie však povinnosť) prediť podkladové aktívum (akciu, komoditu) vypisovateľovi kedykoľvek pred expiračným časom v $t \in [0, T]$ za vopred dohodnutú expiračnú cenu X .*

Označme $P(S, t)$ cenu put opcie v čase t a pri cene akcie S , podobne $C(S, t)$ cenu call opcie. Indexom *AM*, resp. *EU* doplníme, ak máme na mysli konkrétne americký, resp. európsky typ derivátu. Zhrňme si základné podmienky pre ceny opcií (podľa [7, strany 11–13]).

Hodnota v čase expirácie. V prípade, že v čase expirácie je cena akcie na trhu S väčšia ako dohodnutá expiračná cena X , viac sa oplatí akciu prediť na trhu a preto

Obr. 1.1: Expiračná hodnota put a call opcie v závislosti od ceny akcie S

put nevyužije - jeho hodnota je nulová. V opačnom prípade, teda keď je cena akcie $S < X$, držiteľ putu získa výnos $X - S$. Preto podmienku v čase expirácie môžeme zapísať nasledovne:

$$P(S, T) = \left\{ \begin{array}{ll} X - S, & \text{ak } S \leq X, \\ 0, & \text{inak.} \end{array} \right\} = \max(X - S, 0). \quad (1.1a)$$

Analogicky môžeme zapísať payoff pre call opciu (viď obrázok (1.1)):

$$C(S, T) = \max(S - X, 0). \quad (1.1b)$$

Nezáporná cena. Keďže pri expirácii získa držiteľ kladný alebo nulový payoff, cena opcie nemôže byť záporná

$$P(S, t) \geq 0, \quad C(S, t) \geq 0, \quad \forall S, t. \quad (1.2)$$

Prémia za právo predčasného uplatnenia. Americké opcie dávajú držiteľovi rovnaké možnosti ako európske akcie a právo predčasného uplatnenia navyše. Toto nemôže mať zápornú hodnotu, preto hodnota americkej opcie musí byť najmenej taká ako hodnota jej európskej verzie s rovnakým podkladovým aktívom, rovnakou expiračnou cenou a rovnakým časom do expirácie hodnota európskej opcie:

$$P^{AM}(S, t) \geq P^{EU}(S, t), \quad \forall S, t, \quad (1.3a)$$

$$C^{AM}(S, t) \geq C^{EU}(S, t), \quad \forall S, t. \quad (1.3b)$$

Americké opcie možno kedykoľvek uplatniť. Aby nenastala arbitrážna príležitosť, ich hodnota musí byť najmenej na úrovni okamžitého payoffu

$$P^{AM}(S, t) \geq \max(X - S, 0), \quad \forall S, t, \quad (1.4a)$$

$$C^{AM}(S, t) \geq \max(S - X, 0), \quad \forall S, t. \quad (1.4b)$$

1.2 Black-Scholesova rovnica

Opcia na akciu je finančný produkt, ktorého hodnota je odvodená od ceny akcie (podkladového aktíva) v čase expirácie. Preto pri jej oceňovaní potrebujeme poznať vývoj ceny akcie v čase.

Obvykle predpokladáme, že cena akcie S je stochastický proces, ktorý sa riadi geometrickým Brownovým pohybom. Príklad takéhoto pohybu znázorňujeme na obrázku (1.2).

Priemerný výnos akcie označíme μ , akcia vypláca spojitú dividendu $q \geq 0$, volatilita akcie nech je σ^2 . Potom platí:

$$dS = (\mu - q)Sdt + \sigma SdW, \quad (1.5)$$

kde W je Wienerov proces. (Podrobnejšie v [15, strany 22–26].)

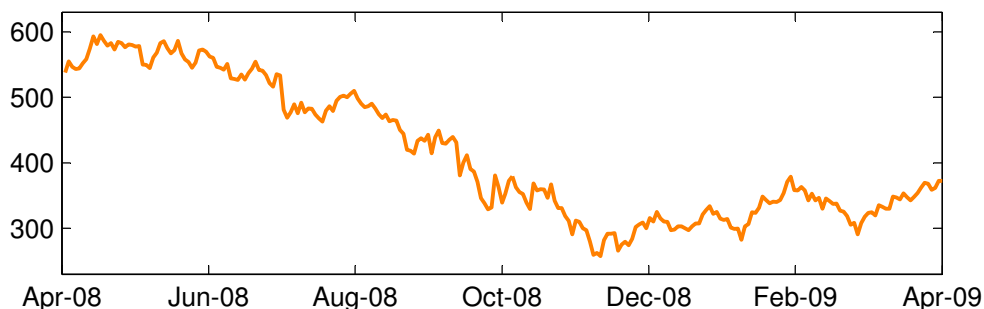
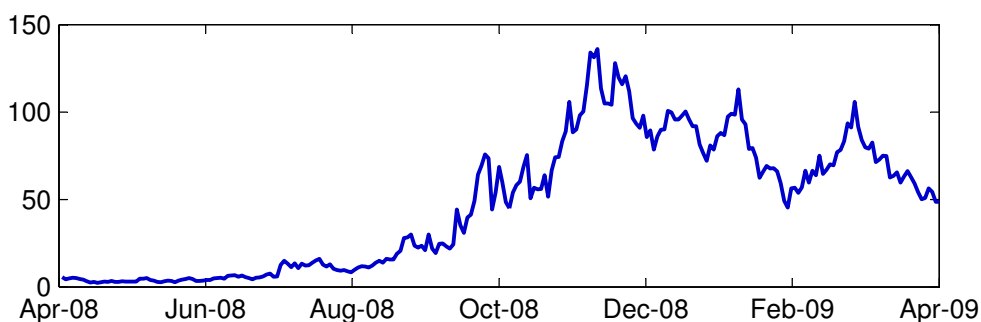
Okrem toho požadujeme splnenie niekoľkých predpokladov (viď [7, strana 33]) - najdôležitejšie z nich sú neexistencia arbitráže, nulové transakčné náklady a to, že bezriziková úroková miera $r > 0$ je známa a konštantná v čase. Ďašie predpoklady sú technické: spojitú obchodovanie, neobmedzená deliteľnosť aktíva a možnosť vlastniť zápornú pozíciu v aktíve.

Pokiaľ sú tieto predpoklady splnené, môžeme pre každý derivát akcie $V = V(S, t)$, ktorého cena v čase expirácie závisí iba od aktuálnej hodnoty akcie, odvodiť Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (1.6)$$

pritom $V(S, t)$ je cena derivátu v čase t a $r > 0$ bezrizikový úrok. Všimnime si, že cena akcie S definovaná v (1.5) aj bezrizikový dlhopis $B = B_0 e^{rt}$ spĺňajú BS rovnicu (1.6). Rovnako ju musí spĺňať aj akýkoľvek derivát, ktorého cena vychádza z ceny akcie.

Vráťme sa ešte k odvodeniu BS rovnice. Dôležitú úlohu tu zohráva Itóova lema ([15, str. 27]), ktorá hovorí o diferencovaní stochastických funkcií. Základnou myšlienkou je

Obr. 1.2: Stochastický vývoj ceny akcie *Google Inc.*, apríl 2008 - apríl 2009Obr. 1.3: Cena put opcie s $X = 400\$$ a $T = 1$ rok na akciu *Google Inc.*

syntetizovať derivát prostredníctvom samofinancovanej stratégie. Následne môžeme vytvoriť portfólio, ktorého cena je deterministická. Výnos takéhoto portfólia musí byť na úrovni bezrizikovej úrokovej miery. Podrobné odvodenie sa dá nájsť v [7] a [15].

Pomocou Black-Scholesovej rovnice (1.6) a koncovej podmienky (1.1a) možno za uvedených predpokladov odvodiť cenu európske put opcie v tvare:

$$P^{EU}(S, t) = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - Se^{-q(T-t)}N(-d_1),$$

$$d_{1,2} = \frac{(r - q \pm \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \ln(\frac{S}{X})}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad (1.7)$$

pričom $N(\cdot)$ je distribučná funkcia normálneho rozdelenia. Analogické riešenie možno odvodiť aj pre európsku call opciu. Vývoj ceny put opcie s expiračnou cenou 400\$ a časom do expirácie $T = 1$ rok vzhľadom na vývoj ceny akcie z obr. (1.2) znázorňujeme na obr. (1.3).

1.3 Formulácia úlohy pre americké opcie

Sformulujme teraz podmienky, ktoré musí spĺňať cena americkej put opcie. Prvá z nich je cena derivátu v čase expirácie (okrajová podmienka), ktorá má tvar (1.1a), rovnako ako v prípade európskeho typu derivátu.

Keďže k expirácii môže dôjsť aj predčasne, pribudne nám ešte ďalšia okrajová podmienka - cena putu v ľubovoľnom čase t . Túto poznáme iba v limite pre cenu akcie $S \rightarrow \infty$ - vtedy je put bezcenný, pretože pravdepodobnosť kladného payoffu (uplatnenia) je nulová:

$$\lim_{S \rightarrow \infty} P(S, t) = 0, \quad \forall t. \quad (1.8)$$

Ďalšie podmienky hovoria o tvare oblasti riešenia a napojení ceny opcie na svoj payoff.

1.3.1 Oblasť riešenia

Základný rozdiel medzi európskymi a americkými typmi opcií je v čase uplatnenia. Kým európske opcie môžu byť uplatnené iba v presne stanovenom čase T , americké opcie môžu byť uplatnené aj skôr - **v ktoromkoľvek čase** $t \in [0, T]$.

Optimálny čas uplatnenia nepoznáme vopred a preto musí byť súčasťou riešenia, čo je z matematického hľadiska komplikácia. Tento čas hľadáme v tvare kritickej ceny akcie $S_f(t)$, pri ktorej dochádza k uplatneniu opcie.

Cena opcie sa riadi Black-Scholesovou rovnicou len času, kedy je optimálne uplatnená. Preto BS rovnicu riešime iba na časovo premennej oblasti - viď obr. (1.4)

- v prípade amerického **putu**:

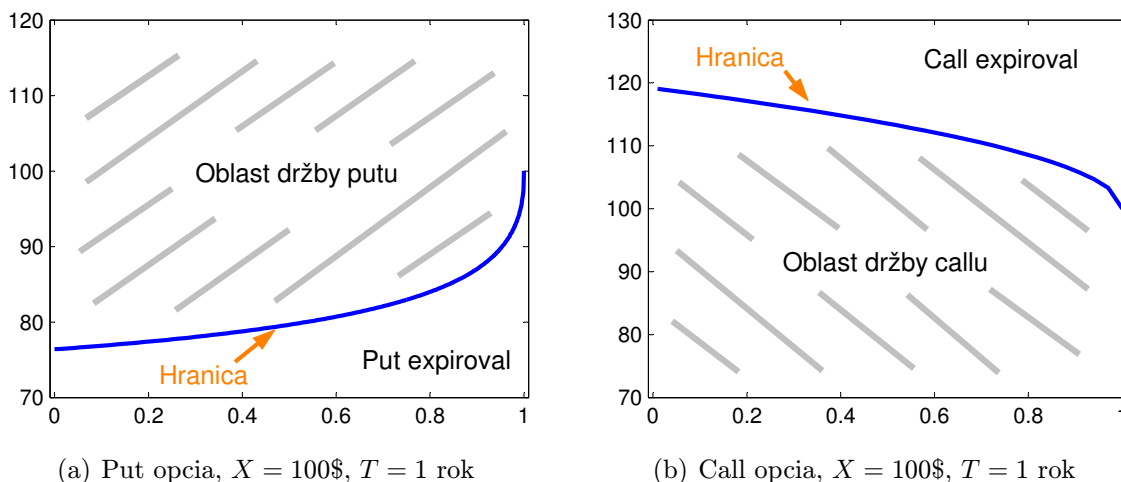
$$\{(S, t) : S_f(t) < S < \infty, 0 \leq t < T\}, \quad (1.9a)$$

- v prípade amerického **callu**:

$$\{(S, t) : 0 < S < S_f(t), 0 \leq t < T\}. \quad (1.9b)$$

1.3.2 Podmienky hladkého napojenia

Zamerajme sa teraz na cenu opcie pozdĺž hranice predčasného uplatnenia $S_f(t)$. (Odvozenie viď [7, str. 138–140].) Ak je cena akcie S v danom čase t rovná $S_f(t)$, put treba okamžite uplatniť.



Obr. 1.4: Oblasť držby a hranica predčasnej expirácie amerických opcií

Pre $S = S_f(t)$ má americký put expiračnú cenu $X - S_f(t)$, čo vedie k nasledujúcej okrajovej podmienke

$$P(S_f(t), t) = X - S_f(t). \quad (1.10)$$

Za predpokladu spojitosti dosiahnutých cien akcie očakávame aj spojitosť hranice optimálneho uplatnenia pre $t > 0$. V opačnom prípade by sa mohlo stať, že cena akcie bude ostro pod hranicou predčasného uplatnenia (americký put je expirovaný) bez toho, aby ňou prešiel (bez uplatnenia opcie).

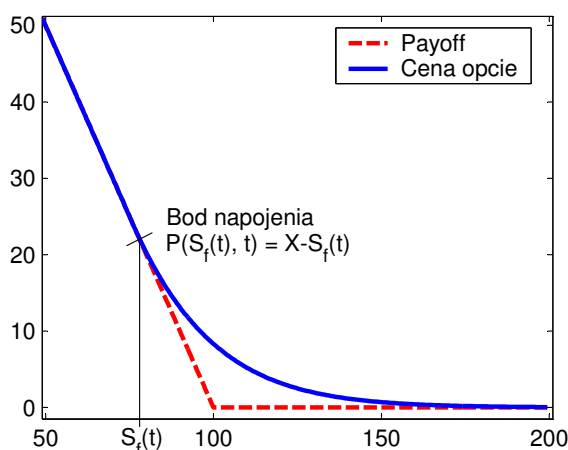
Pokiaľ by $S_f(t)$ bola vopred známa hranica, problém ocenenia opcie by sa redukoval na riešenie Black-Scholesovej rovnice na časovo premennej oblasti.

Označme $f(S, t, b(t))$ riešenie BS rovnice na oblasti $\{(S, t) : S \in (b(t), \infty), t \in (0, T]\}$, pričom $b(t)$ je známa hranica. V tomto prípade držiteľ putu zvolí taký čas uplatnenia, ktorý maximalizuje jeho hodnotu. Potom

$$P(S, t) = \max_{b(t)} f(S, t, b(t)),$$

kde $b(t)$ sú všetky spojité funkcie - možné hranice oblasti. V danom pevnom čase t označme $F(S, b) = f(S, t, b(t))$. K uplatneniu putu dochádza pre $S = b$, teda $F(b, b) = X - b$ je payoff opcie. Totálny diferenciál F podľa b na hranici $S = b$ je rovný

$$\frac{dF}{db} = \left. \frac{\partial F}{\partial S}(S, b) \right|_{S=b} + \left. \frac{\partial F}{\partial b}(S, b) \right|_{S=b}.$$



Obr. 1.5: Napojenie ceny americkej put opcie na svoj payoff

Označme b^* hodnotu b ktorá maximalizuje F . Pre $b = b^*$ máme podmienku prvého rádu pre maximum $\frac{\partial F}{\partial b}(S, b^*) = 0$. Z toho pre put dostávame podmienku

$$\left. \frac{dF}{db}(b, b) \right|_{b=b^*} = \left. \frac{d}{db}(X - b) \right|_{b=b^*} = -1,$$

takže

$$\frac{\partial F}{\partial S}(b^*, b^*) = -1. \quad (1.11)$$

Poznamenajme, že optimálne zvolené $b^*(t)$ je práve hľadaná kritická cena akcie $S_f(t)$. Predchádzajúcu rovnicu možno prepísať do tvaru

$$\frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1. \quad (1.12)$$

Rovnice (1.10) a (1.12) často nazývame aj **podmienka C^1 hladkého napojenia na payoff**, pretože vyjadrujú, že cena opcie $P(S, t)$ aj jej derivácia $\frac{\partial P}{\partial S}(S, t)$ sú pozdĺž hranice predčasného uplatnenia spojité. Ukážku tohto napojenia znázorňuje obrázok (1.5).

1.3.3 Výsledná formulácia pre americký put

Na základe predošlého textu môžeme sformulovať systém podmienok pre americkú put opciu - Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu spolu s okrajovými podmienkami v tvare:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad \forall S \in (S_f(t), \infty), \forall t \in [0, T], \\ V(S, T) = \max(X - S, 0), \quad \forall S, \\ \lim_{S \rightarrow \infty} V(S, t) = 0, \quad \forall t \in [0, T], \\ V(S_f(t), t) = X - S_f(t), \quad \forall t \in [0, T], \\ \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t), t) = -1, \quad \forall t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Otvorenou otázkou zostáva, ako takto definovaný problém riešiť. Zatiaľ nie je známe presné analytické riešenie. Existujú však rôzne analytické aproximácie - spomeňme napríklad články autorov Stamicar-Ševčovič-Chadam [13], Evans-Kuske-Keller [3] alebo novú analytickú aproximáciu od Zhu [17] z roku 2006 v tvare nekonečného integrálu.

Existujú samozrejme aj numerické možnosti výpočtu hranice predčasnej expirácie, napríklad založené na algoritme PSOR. Týmto sa venujem v ďalších kapitolách práce.

2 Analytické aproximácie

Snaha nájsť čo najpresnejšie analytické riešenie hranice predčasnej expirácie americkej put opcie priviedla mnohých autorov k rozličným približným riešeniam. Zo systému rovníc (1.13) odvodili ekvivalentnú sústavu, ktorú sa pokúsili vyriešiť, resp. nájsť aspoň aproximáciu riešenia. Niektoré z týchto prístupov si predstavíme v tejto kapitole.

V tejto kapitole používame nasledujúce označenia:

| | |
|--|--|
| T | čas expirácie derivátu, |
| t | čas, v ktorom uvažujeme hodnotu derivátu, |
| $\tau' = T - t$ | čas zostávajúci do expirácie, |
| $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$ | bezrozmerný čas do expirácie, |
| $S_f(t)$ | hranica predčasného uplatnenia v čase t , |
| $S_f(T - \tau') = S_f(t)$... | hranica predčasného uplatnenia v čase do expirácie τ' , |
| $\varrho(\tau)$ | hranica v bezrozmernom čase do expirácie τ . |

Všimnime si, že vyjadrenia $S_f(t)$ a $\varrho(\tau)$ sú ekvivalentné vyjadrenia tej istej hranice predčasného uplatnenia, pretože platí

$$\varrho(\tau) = S_f\left(T - \frac{2}{\sigma^2}\tau\right) = S_f(t).$$

2.1 Aproximácia podľa Stamicara a kol.

V článku [13] trojica autorov Robert Stamicar, Daniel Ševčovič a John Chadam odvodila asymptotické správanie sa hranice predčasnej expirácie amerického putu tesne pred expiráciou. Táto na jednej strane umožňuje odvodiť asymptotickú formulu pre voľnú hranicu, na druhej strane dáva možnosť numericky realizovať výpočet voľnej hranice.

Označme si $P = P(S, t)$ cenu amerického putu, E expiračnú cenu, T expiračný čas $S_f(t)$ voľnú hranicu. Použijeme bezrozmerný čas do expirácie $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$ a urobíme substitúciu

$$x = \ln\left(\frac{S}{\varrho(\tau)}\right),$$

kde $\varrho(\tau) = S_f(t)$ predstavuje voľnú hranicu v preškálovanom čase. Platí, že v čase expirácie je hranica rovná E , teda $\varrho(0) = S_f(T) = E$.

Po transformácii

$$\Pi(x, \tau) = P - S \frac{\partial P}{\partial S} = P - P_x \quad (2.1)$$

môžeme systém zapísať v tvare (viď [13, 14])

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + a(\tau) \frac{\partial \Pi}{\partial x} - k\Pi, \quad x > 0, \\ \Pi(0, \tau) = E, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x}(0, \tau) = -kE, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \Pi(x, \tau) = 0, \\ \Pi(0, \tau) = 0, \quad \text{pre } x > 0, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

kde

$$\begin{aligned} a(\tau) &= \frac{\dot{\varrho}(\tau)}{\varrho(\tau)} + k - 1, \\ k &= \frac{2r}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Pritom premennú Π môžeme chápať aj ako zaistené portfólio - je zložená z 1 držanej put opcie a $-\partial P/\partial S$ jednotiek podkladovej akcie. Na podmienky (2.2) aplikujeme Furierovu sínusovú a kosínusovú transformáciu, čím dostávame systém diferenciálnych rovníc (pozri [13]). Jeho riešením dostaneme integrálne rovnice pre novú premennú $\eta(\tau)$ definovanú ako

$$\varrho(\tau) = E e^{-(k-1)\tau} e^{2\sqrt{\tau}\eta(\tau)}. \quad (2.3)$$

Platí:

$$\eta(\tau) = -\sqrt{-\log \left[\sqrt{\pi} k \tau^{1/2} e^{k\tau} \left(1 - \frac{F_\eta(\tau)}{\sqrt{\pi}} \right) \right]}, \quad (2.4)$$

$$g_\eta(\tau, \theta) = \frac{1}{\cos \theta} \left[\eta(\tau) - \eta(\tau \sin^2 \theta) \sin \theta \right], \quad (2.5)$$

$$F_\eta(\tau) = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-k\tau \cos^2 \theta - g_\eta^2(\tau, \theta)} \left(\sqrt{\tau} \sin \theta + g_\eta(\tau, \theta) \tan \theta \right) d\theta. \quad (2.6)$$

Hranicu prečasnej expirácie $\varrho(\tau)$ získame prostredníctvom riešenia implicitnej sústavy rovníc (2.4)-(2.6) pre funkciu $\eta(\tau)$. Keďže každá rovnica závisí od ďalšej, nedajú sa riešiť priamo. Jedna možnosť je riešiť tento problém rekurzívne (začínajúc napr. počiatočným

odhadom $S_f(t) = E$). Druhá možnosť je riešiť sústavu numericky, tomu sa venujeme v ďalšej časti práce.

Autorom článku sa ešte podarilo odvodiť asymptotické správanie sa η v čase tesne pred expiráciou (podrobnejšie v [13]):

$$\eta(\tau) \sim -\sqrt{-\ln [2\sqrt{\pi\tau}ke^{k\tau}]}, \quad \text{pre } \tau \rightarrow 0^+. \quad (2.7)$$

Všimnime si, že predpis (2.7) môže dobre popisovať $\eta(\tau)$ pre malé $\tau \rightarrow 0$, avšak pre veľké τ nefunguje spoľahlivo. Keďže argument odmocniny musí byť nezáporný (inak by sme dostali nezmyselné komplexné riešenie), argument logaritmu musí byť menší ako 1 - a to zrejme pre veľké τ nemôže platiť (argument logaritmu je rastúca funkcia τ).

Navyše takto definovaná $\eta(\tau)$ nedefinuje monotónne $\varrho(\tau)$ - ani vo všeobecnosti totiž monotónnosť $\eta(\tau)$ nie je nutnou ani postačujúcou podmienkou na to, aby $\varrho(\tau)$ bola klesajúca (čo intuitívne očakávame). Deriváciou $\varrho(\tau)$ v (2.3) dostávame

$$\varrho'(\tau) = \underbrace{\varrho(\tau)}_{>0} \left[-(k-1) + \frac{\eta(\tau)}{\sqrt{\tau}} + 2\sqrt{\tau}\eta'(\tau) \right], \quad (2.8)$$

teda znamienko derivácie závisí od znamienka hranatej zátvorky. Zrejme $\varrho'(\tau) < 0$ práve vtedy, keď

$$\eta'(\tau) < \frac{k-1}{2\sqrt{\tau}} + \frac{-2\eta(\tau)}{\tau}. \quad (2.9)$$

Pritom $k = 2r/\sigma^2$ a teda môže byť $k < 1$ aj $k > 1$, nevieme znamienko prvého člena. Druhý člen je kladný. Dostali sme horné ohraničenie pre deriváciu η' , teda $\eta(\tau)$ nemôže rásť príliš rýchlo.

Porovnajme asymptotickú aproximáciu (2.7) s rovnicou (2.4): táto pri vhodnom tvare funkcie $F(\tau)$ aj môže byť definovaná pre všetky $\tau \in [0; \infty)$ a dokonca aj zabezpečiť monotónnosť $\varrho(\tau)$.

2.2 Analytická aproximácia podľa Zhua

Matematik Song-Ping Zhu prišiel v článku [17] v roku 2006 s novou analytickou aproximáciou voľnej hranice pre americký put. Predstavme si najdôležitejšie myšlienky jeho prístupu. Na úvod séria substitúcií, ktorými zavedieme bezrozmerné premenné:

$$V' = \frac{V}{X}, \quad S' = \frac{S}{X}, \quad \tau = (T-t)\frac{\sigma^2}{2} \quad (2.10)$$

a relatívny úrok $\gamma \equiv \frac{2r}{\sigma^2}$.

Tým pádom môžeme systém podmienok pre americký put zapísať v tvare

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial V}{\partial \tau} + S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \gamma S \frac{\partial V}{\partial S} - \gamma V = 0, \\ V(\varrho(\tau), \tau) = 1 - \varrho(\tau), \\ \frac{\partial V}{\partial S}(\varrho(\tau), \tau) = -1, \\ \lim_{S \rightarrow \infty} V(S, \tau) = 0, \\ V(S, 0) = \max(1 - S, 0). \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Zhu navrhol uvažovať novú funkciu $U(S, \tau)$ definovanú predpisom:

$$U = \begin{cases} V + S - 1, & \text{pre } \varrho(\tau) \leq S < 1, \\ V, & \text{pre } S \geq 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

To umožňuje rozpísať systém (2.11) na dva systémy nasledovne:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial U}{\partial \tau} + S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \gamma S \frac{\partial U}{\partial S} - \gamma U = \gamma, \\ U(\varrho(\tau), \tau) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial S}(\varrho(\tau), \tau) = 0, \\ U(S, 0) = 0, \end{array} \right. \quad \text{pre } \varrho(\tau) \leq S < 1, \quad (2.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial U}{\partial \tau} + S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \gamma S \frac{\partial U}{\partial S} - \gamma U = 0, \\ \lim_{S \rightarrow \infty} U(S, \tau) = 0, \\ U(S, 0) = 0, \end{array} \right. \quad \text{pre } S \geq 1. \quad (2.14)$$

Kedže vyžadujeme, aby funkcia V bola spojitá a C^1 hladká, pre hraničné $S = 1$ musí platiť:

$$\lim_{S \rightarrow 1^-} U = \lim_{S \rightarrow 1^+} U, \quad (2.15a)$$

$$\lim_{S \rightarrow 1^-} \frac{\partial U}{\partial S} = \lim_{S \rightarrow 1^+} \frac{\partial U}{\partial S} + 1. \quad (2.15b)$$

Podmienky zapísané v tomto tvare sú jednoduchšie ako pôvodná formulácia (2.11). Pomocou Laplaceovej transformácie v čase

$$(\mathcal{L}U(S, \cdot))(p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} U(S, \tau) d\tau \quad (2.16)$$

ich prevedieme na systém ODR, ktorý vieme riešiť. Dostávame však riešenie v Laplaceovom priestore. Aby sme previedli $\varrho(\tau)$ späť do priestoru funkcií, urobíme inverznú Laplaceovu transformáciu (podrobnosti o inverznej Laplaceovej transformácii možno nájsť v [11]), čo znamená riešiť komplexný integrál

$$\varrho(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \frac{e^{p\tau}}{p} \exp \left\{ \frac{-\log \left[1 - \frac{(p+\gamma)}{\gamma(b-\sqrt{p+a^2})} \right]}{b + \sqrt{p+a^2}} \right\} dp. \quad (2.17)$$

Tento Zhu (viď [17]) vyriešil použitím Cauchyho vety. Výsledný tvar hranice predčasnej expirácie pre americký put:

$$\varrho(\tau) = \frac{\gamma}{1+\gamma} + \frac{2e^{-a^2\tau}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\zeta e^{-\tau\zeta^2}}{a^2 + \zeta^2} e^{-f_1^*(\zeta)} \sin[f_2^*(\zeta)] d\zeta, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \text{kde } f_1^*(\zeta) &= \frac{1}{b^2+\zeta^2} \left[b \log \left(\frac{\sqrt{a^2+\zeta^2}}{\gamma} \right) + \zeta \tan^{-1} \left(\frac{\zeta}{a} \right) \right], \\ f_2^*(\zeta) &= \frac{1}{b^2+\zeta^2} \left[\zeta \log \left(\frac{\sqrt{a^2+\zeta^2}}{\gamma} \right) - b \tan^{-1} \left(\frac{\zeta}{a} \right) \right], \\ a &= \frac{1+\gamma}{2}, b = \frac{1-\gamma}{2}, \gamma = \frac{2r}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

2.3 Ďalšie analytické aproximácie

Na tomto mieste chceme spomenúť dve ďalšie aproximácie pre malé $\tau \ll 1$ podľa článkov [5] a [3], ktorých autormi sú Kuske, Keller a v [3] aj Evans. Prvá aproximácia pochádza z roku 1998

$$S_f(t) \sim K \left\{ 1 - \left[2\sigma^2(T-t) \ln \frac{\sigma^2}{6\pi^{1/2}r[\sigma^2(T-t)/2]^{1/2}} \right]^{1/2} \right\}, \quad (2.19)$$

druhá s dividendami D pre prípad $0 \leq D < r$ a pre $\tau' = T - t$ z roku 2002

$$\frac{S_f^E(T - \tau')}{K} \sim 1 - \sigma \sqrt{\tau' \ln \left[\frac{\sigma^2}{8\pi(r-D)^2\tau'} \right]}. \quad (2.20)$$

Všimnime si podobnosť formúl (2.19) a (2.20). Ak v prvej z nich substituujeme $\tau' = T - t$ a upravíme

$$\frac{S_f(T - \tau')}{K} \sim 1 - \sigma \sqrt{2\tau' \ln \frac{\sigma^2}{6\sqrt{\pi r} \sqrt{\sigma^2 \tau' / 2}}} = 1 - \sigma \sqrt{\tau' \ln \left[\frac{\sigma^2}{18\pi r^2 \tau'} \right]} \quad (2.21)$$

a v druhej uvažujeme nulové dividendy, majú podobný tvar - líšia sa len koeficientom v logaritme.

Samozrejme, rôznych analytických aproximácií hranice predčasného uplatnenia existuje oveľa viac. Spomeňme napríklad prácu Mallieriho a Alobaidi, viď články [8, 9].

2.4 Porovnanie asymptotického správania

Zaujíma nás asymptotické správanie sa jednotlivých formúl pre $\tau' \rightarrow 0^+$. Pozrime sa naň analyticky. Voľná hranica podľa článku Evans-Kuske-Keller [3] má pre $\tau' = T - t$ tvar

$$\frac{S_f^E(T - \tau')}{K} \sim 1 - \sigma \sqrt{\tau' \ln \left[\frac{\sigma^2}{8\pi r^2 \tau'} \right]}. \quad (2.22)$$

Asymptotické správanie pre formulu SSCh odvodili autori článku [13] v tvare

$$\eta(\tau) \sim -\sqrt{-\ln \left[2\sqrt{\pi \tau} k e^{k\tau} \right]}, \quad (2.23)$$

kde $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t) = \frac{\sigma^2}{2}\tau'$ a $k = \frac{2r}{\sigma^2}$. Dosadením

$$\eta(\tau') \sim -\sqrt{-\ln \left[2\sqrt{\pi \tau' \frac{\sigma^2}{2}} \frac{2r}{\sigma^2} e^{\frac{2r}{\sigma^2} \tau' \frac{\sigma^2}{2}} \right]} = -\sqrt{\ln \left[\frac{\sqrt{2}\sigma^2}{2\sqrt{\pi \tau'} \sigma 2r e^{r\tau'}} \right]} = \quad (2.24)$$

$$= -\sqrt{\ln \left[\frac{\sqrt{2}\sigma}{4r\sqrt{\pi \tau'}} e^{-r\tau'} \right]} = -\sqrt{\ln \left[\frac{\sqrt{2}\sigma}{4r\sqrt{\pi \tau'}} \right]} - r\tau'. \quad (2.25)$$

Hranica predčasnej expirácie podľa článku Stamicara a kol. [13] má tvar

$$\frac{\varrho(\tau)}{K} = e^{-(k-1)\tau} e^{2\sqrt{\tau}\eta(\tau)}, \quad (2.26)$$

z neho urobíme Taylorov rozvoj do prvého rádu (zaujíma nás asymptotické správanie)

$$\frac{\varrho(\tau)}{K} \sim 1 + (-(k-1)\tau + 2\sqrt{\tau}\eta(\tau)), \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varrho(\tau')}{K} &\sim 1 - \tau' \frac{\sigma^2}{2} (k-1) - 2\sqrt{\tau' \frac{\sigma^2}{2}} \sqrt{\ln \left[\frac{\sqrt{2}\sigma}{4r\sqrt{\pi\tau'}} \right] - r\tau'} \\ &\sim 1 - \tau' \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1 \right) - \sigma \sqrt{2\tau' \left(\ln \left[\frac{\sqrt{2}\sigma}{4r\sqrt{\pi\tau'}} \right] - r\tau' \right)} \\ &\sim 1 - \tau' \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \sigma \sqrt{\tau' \ln \left[\frac{\sqrt{2}\sigma}{4r\sqrt{\pi\tau'}} \right]^2 - 2r\tau'^2}, \\ \frac{\varrho(\tau')}{K} &\sim 1 - \tau' \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) - \sigma \sqrt{\tau' \ln \left[\frac{\sigma^2}{8\pi r^2 \tau'} \right] - 2r\tau'^2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Na riešenie pre malé τ' majú vplyv len členy najnižšieho rádu $O(\sqrt{\tau'})$, t.j.

$$\frac{\varrho(\tau')}{K} \sim 1 - \sigma \sqrt{\tau' \ln \left[\frac{\sigma^2}{8\pi r^2 \tau'} \right]}. \quad (2.29)$$

Porovnaním vzťahu (2.29) s formoulou EKK (2.22) zistíme, že obe formuly majú rovnakú asymptotiku pre malé $\tau' \rightarrow 0^+$.

3 Odvodenie numerickej schémy SSCh vychádzajúcej z implicitnej rovnice

V tejto kapitole odvodíme schému na numerický výpočet hranice predčasnej expirácie americkej put opcie, vychádzajúc z integrálnej sústavy rovníc odvodenej autormi článku [13].

3.1 Diskretizácia problému

Našou úlohou je vyriešiť systém rovníc (2.4)-(2.6), teda nájsť také funkcie $\eta(\tau)$ a $F(\tau)$, pre ktoré pre každé $\tau \in [0, \tau^{exp}]$ platí:

$$\eta(\tau) = -\sqrt{-\log \left[\sqrt{\pi} k \tau^{1/2} e^{k\tau} \left(1 - \frac{F(\tau)}{\sqrt{\pi}} \right) \right]}, \quad (2.4)$$

$$g(\tau, \theta) = \frac{1}{\cos \theta} \left[\eta(\tau) - \eta(\tau \sin^2 \theta) \sin \theta \right], \quad (2.5)$$

$$F(\tau) = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-k\tau \cos^2 \theta - g^2(\tau, \theta)} \left(\sqrt{\tau} \sin \theta + g(\tau, \theta) \tan \theta \right) d\theta. \quad (2.6)$$

Následne za pomoci rovnice (2.3) prevedieme $\eta(\tau)$ na samotné riešenie - voľnú hranicu $\varrho(\tau)$.

Našou prvou úlohou je problém diskretizovať. Zvolíme si delenie časového intervalu, teda vyberieme n bodov τ_i z intervalu $[0, \tau^{exp}]$:

$$0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n \leq \tau^{exp} = T \frac{\sigma^2}{2}. \quad (3.1)$$

V týchto bodoch budeme aproximovať hodnoty funkcií $\eta(\cdot)$ a $F(\cdot)$. Označíme si

$$\eta(\tau_i) \equiv \eta_i, \quad F(\tau_i) \equiv F_i.$$

Pri výpočte η_i potom stačí priamo dosadiť τ_i a F_i do vzťahu (2.4). Komplikácie nastávajú až pri použití rovnice (2.5) pre $g(\tau, \theta)$. Majme $\eta(\tau_i) = \eta_i$ pre $\forall i$. Potrebujeme aproximovať výraz $\eta(\tau_i \sin \theta)$ pre dané i a $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Najskôr nájdeme také j , aby $\tau_i \sin \theta$ padlo do stredu intervalu $[\tau_j, \tau_{j+1})$, teda aby platilo

$$\tau_j \leq \tau_i \sin \theta < \tau_{j+1}.$$

Potom môžeme hodnotu lineárne interpolovať

$$\eta(\tau_i \sin \theta) \approx (1 - \lambda)\eta_j + \lambda\eta_{j+1}, \quad (3.2)$$

kde

$$\lambda = \frac{\tau_i \sin \theta - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j}.$$

V špeciálnom prípade keď $\tau_i \sin \theta < \tau_1$ (napr. pre $\theta = 0$) môžeme zvoliť

$$\eta(\tau_i \sin \theta) \approx \eta_1.$$

Totíž pre $\tau \rightarrow 0$ je $\eta(\tau) \rightarrow -\infty$.

Zrejme čím jemnejšie delenie τ_i použijeme (čím väčší počet deliacich bodov n zvolíme), tým presnejšie určíme hodnotu $\eta(\tau_i \sin \theta)$ a tým menšia diskretizačná chyba vzniká.

Osobitnou kapitolou numerického riešenia rovnice (2.5) je numerická kvadratura. Z tvaru funkcie (goniometrické funkcie v integrály) môžeme odhadovať, že pôjde o oscilatorickú funkciu. Preto pri integrovaní použijeme zložené Newton-Cotesove pravidlo 4. rádu:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90} (7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4), \quad (3.3)$$

pričom interval $[0, \frac{\pi}{2}]$ rozdelíme na $m = 1000$ podintervalov.

3.2 Iteračné riešenie

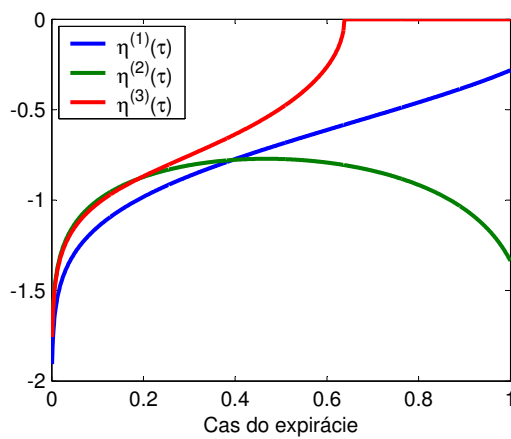
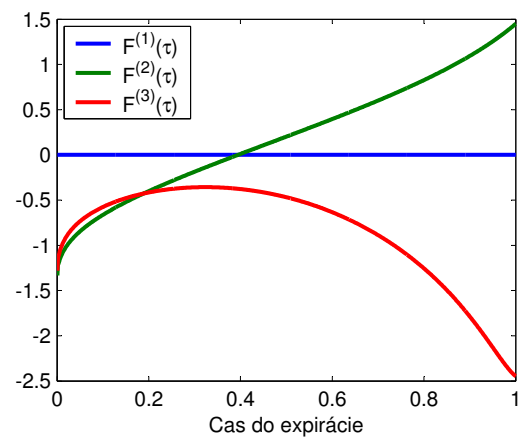
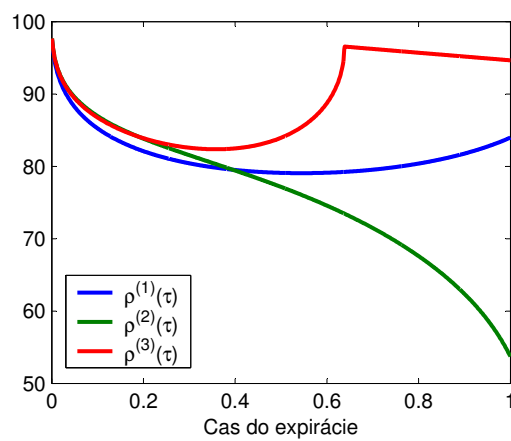
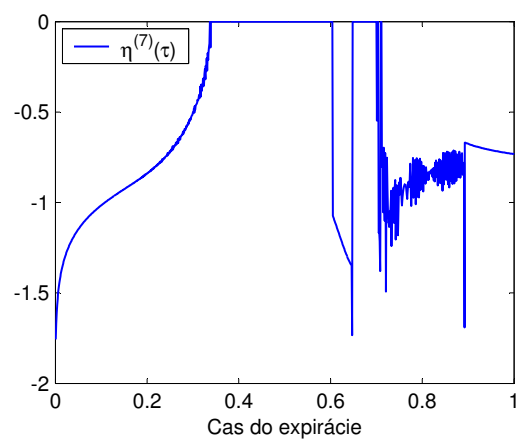
Zvoľme si počiatočnú aproximáciu $F_i^{(1)} \equiv 0$, pre každé $i = 1, \dots, n$. Potom môžeme $\eta_i^{(1)}$ vypočítať dosadením τ_i a $F_i^{(1)}$ do rovnice (2.4)

$$\eta_i^{(1)} = -\sqrt{-\log \left[\sqrt{\pi k \tau_i^{1/2}} e^{k\tau_i} \right]}. \quad (3.4)$$

Následne môžeme pomocou $\eta_i^{(1)}$ počítať hodnoty funkcie g v rovnici (2.6) pre $F_i^{(2)}$. Opakovaním dostávame ďalšie iterácie riešenia. Teda náš algoritmus môžeme schematicky zapísať ako

$$\eta_i^{(k)} \rightarrow F_i^{(k+1)} \rightarrow \eta_i^{(k+1)}, \quad \text{pre } \forall i \text{ a pre } k = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Obr. 3.1: Priebeh aproximovaných funkcií

(a) Aproximácie $\eta(\tau)$ (b) Aproximácie $F(\tau)$ (c) Dovočítaná $\rho(\tau)$ (d) „Pokazená“ siedma iterácia $\eta(\tau)$

Uvedený algoritmus je akousi obdobou hľadania pevného bodu sústavy rovníc. Za istých predpokladov kontraktívnosti zobrazenia dostávame pre $k \rightarrow \infty$ riešenie

$$\hat{\eta}_i \rightarrow \hat{F}_i \rightarrow \hat{\eta}_i, \quad \text{pre } \forall i. \quad (3.6)$$

Nezabúdajme však, že systém (2.4) - (2.6) riešia až limitné funkcie $\hat{\eta}$ a \hat{F} . Tieto predstavujú limitný bod systému rovníc, teda všetky tri rovnice sú splnené súčasne.

Konvergenciu algoritmu sme sa pokúsili overiť experimentálne, nanešťastie bez úspechu. Na obrázku (3.1) zobrazujeme prvé tri aproximácie funkcií. Ako však vidno na obrázku (3.1d), riešenie v neskorších iteráciách osciluje a nekonverguje.

Toto vzniká vzhľadom na oscilácie v podintegrálnej funkcii na výpočet F . Napríklad vypočítaná η nie je dostatočne hladká, čo vedie k nabaľovaniu chýb, keďže v ďalších krokoch hodnotu η interpolujeme. Ďalšie problémy vznikajú, ak je vypočítaná hodnota η_i imaginárna (vzniká pre veľké F_i - zmení sa znamienko).

Prístup možno istým spôsobom vylepšiť. Všimnime si, že v každom kroku si „tipneme“ n hodnôt funkcie F_i , pomocou ktorých vypočítame η_i a z nich opäť F_i . Tieto použijeme ako nový „tip“ v ďalšej iterácii. Čo môžeme spraviť je „tipovať“ trochu zmysluplnejšie. Môžeme napríklad voliť akúsi „priemernú“ hodnotu F_i

$$F_i^{(k)} = \frac{F_i^{(k-1)} + F_i^{(k-2)}}{2},$$

resp. všeobecnejšie

$$F_i^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} w_j F_i^{(j)}.$$

Alebo „vyhladiť“ funkciu F (keďže očakávame, že riešenie bude dostatočne hladké)

$$\tilde{F}_i^{(k)} = \sum_{j=-m}^m w_j F_{i+j}^{(k)}.$$

Prípadne požadovať monotónnosť F . Takéto úpravy môžu viesť k aproximácii riešenia sústavy. Takýmto spôsobom však len ťažko získame presné riešenie.

3.3 Bodové iterácie

Pokúsme sa teda problém riešiť iným spôsobom. „Uhádnuť“ riešenie napríklad v $n = 1000$ bodoch naraz je pomerne náročné. Podobná úloha v jednorozmernom prípade je však kvalitatívne jednoduchšia.

Uvedomme si, že na výpočet F_i vystačíme s hodnotami funkcie η v predošlých bodoch, stačí nám teda $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{i-1}$ a η_i môžeme dopočítať ako $\eta_i \equiv \eta(F_i)$.

Postupujme teda nasledovne - v jednotlivých časoch τ_i vypočítame hodnotu F_i tak, aby platilo

$$F_i = F(\eta(F_i), \eta_{i-1}, \eta_{i-2}, \dots, \eta_1), \quad (3.7)$$

hľadáme teda koreň rovnice

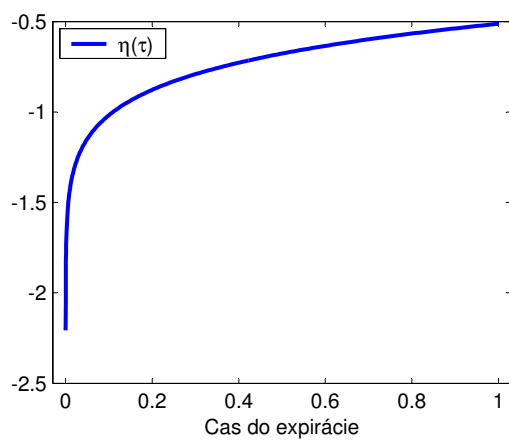
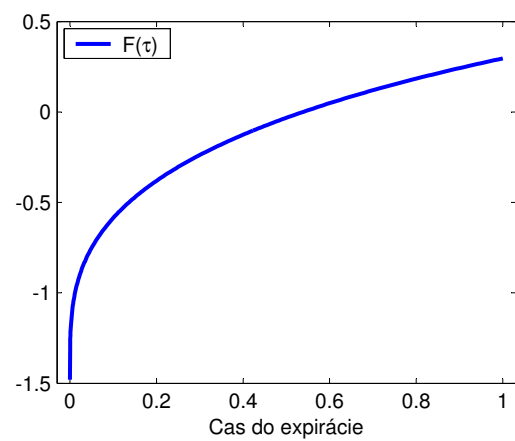
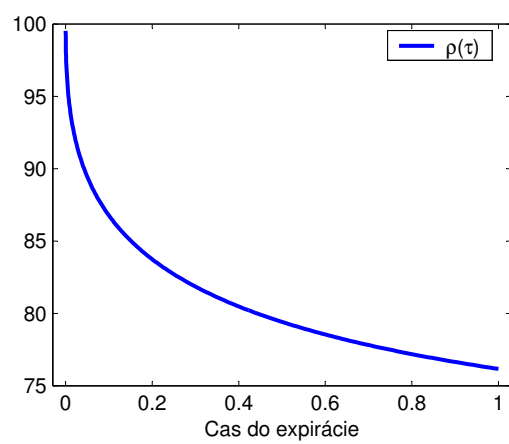
$$x - F(\eta(x), \eta_{i-1}, \eta_{i-2}, \dots, \eta_1) = 0. \quad (3.8)$$

Dostávame problém riešiteľný pomocou bisekcie, príp. Newtonovou metódou. Ako počiatočný odhad riešenia si môžeme v každom kroku výhodne zvoliť $x^0 = F_{i-1}$, resp. $x^0 = 0$ pre $i = 1$. Keďže (3.8) je splnená v každom čase τ_i , zrejme nájdené riešenie F_i, η_i spĺňa zadanú sústavu rovníc.

Z riešenia η_i ľahko dopočítame ϱ_i . Interpoláciou dostávame profil hranice predčasnej expirácie $\varrho(\tau)$ pre $\forall \tau \in [0, T\frac{\sigma^2}{2}]$.

Tento algoritmus sa ukázal aj prakticky použiteľný, keďže dáva výbornú aproximáciu hranice predčasnej expirácie. Ukážku priebehu funkcií zobrazujeme obr. (3.2). V prílohe práce sa nachádzajú kompletne zdrojové kódy pre program Matlab.

Obr. 3.2: Numericky získané riešenie sústavy rovníc a dopočítaná voľná hranica

(a) Riešenie $\eta(\tau)$ (b) Riešenie $F(\tau)$ (c) Dopočítaná $\rho(\tau)$

4 Numerické porovnanie

Oblasť výpočtu hranice predčasnej expirácie amerických opcí je zaujímavá aj z numerického hľadiska. Komplikácie spôsobuje fakt, že tesne pred expiračným časom T sa hranica mení nekonečne rýchlo (viď [13]). Preto často ide o pomerne komplikovaný výpočet.

V súčasnosti nielenže nepoznáme presnú analytickú formulu na výpočet hranice predčasnej expirácie, dokonca nie je známa ani spoľahlivá numerická schéma. V tejto kapitole porovnáваме niektoré analytické aproximácie a numerické metódy výpočtu.

4.1 Analytické aproximácie

V tejto časti vypočítame a porovnáme jednotlivé analytické aproximácie - Stamicar-Ševčovič-Chadam (2.7), Kuske-Keller (2.19), Evans-Kuske-Keller (2.22) a Zhu (2.18). Pritom prvé tri aproximácie autori odvodili pre malé $\tau \rightarrow 0$.

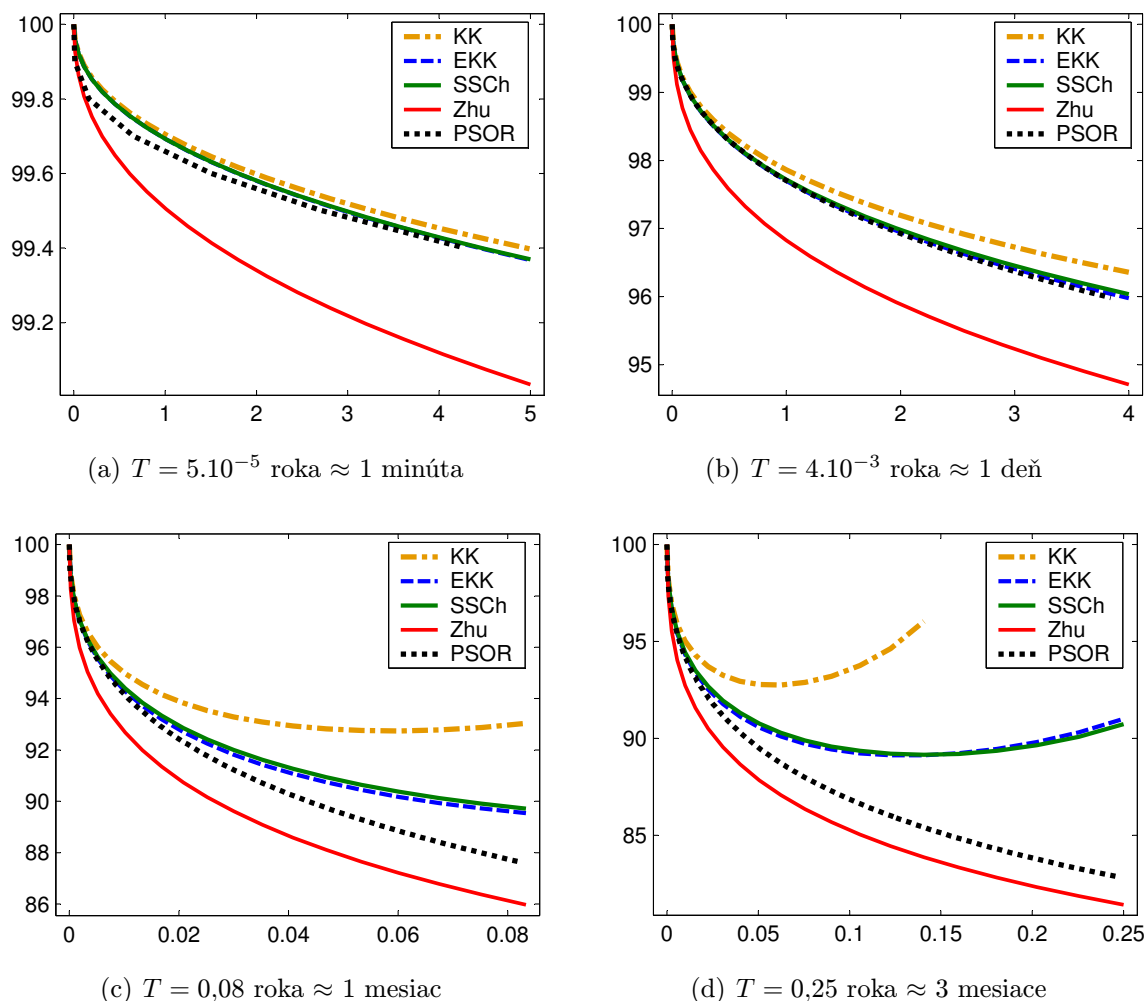
Zvolili sme si volatilitu $\sigma = 30\%$, úrok $r = 10\%$ a tieto sme dosadili do jednotlivých vzorcov. Priebeh hranice sme znázornili na obrázku (4.1). Do grafov zaradili aj hranicu vypočítanú podľa PSOR s presnosťou $n = 1000$. Pre porovnanie jednotlivých aproximácií zavádzame aj relatívnu chybu voči PSOR. Konkrétne číselné hodnoty potom uvádzame v tabuľke (4.1).

Definícia 4.1 (Relatívna odchýlka.) *Nech $\tau = T - t$ je čas do expirácie, $S_f^{BENCH}(\tau)$ presná hodnota (benchmark) hranice predčasnej expirácie a $S_f^{APROX}(\tau)$ jej približná hodnota. Relatívnu odchýlku Δ v čase τ vypočítame ako:*

$$\Delta(\tau) = \frac{|S_f^{APROX}(\tau) - S_f^{BENCH}(\tau)|}{S_f^{BENCH}(\tau)}.$$

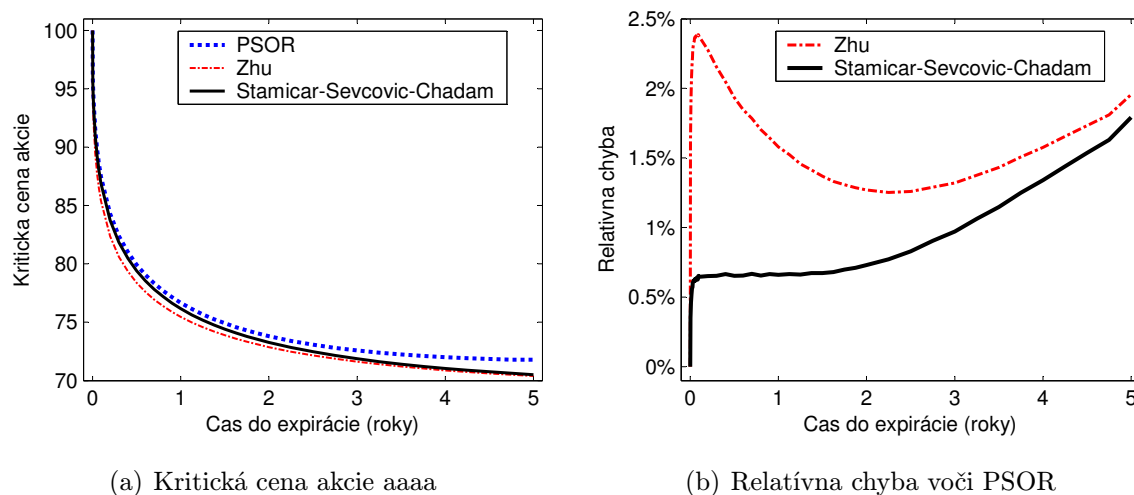
Pokúsme sa zhrnúť získané výsledky. Ako prvé si môžeme všimnúť, že Zhu má podstatne nižšiu hodnotu hranice ako ostatné analytické aproximácie a PSOR. V čase $\tau = 1$ minúta sa KK, EKK, SSCh a PSOR takmer zhodujú na 99,4\$, kým Zhu má hranicu až 99,03\$.

Obr. 4.1: Grafické porovnanie analytických formúl - rôzne časové obdobia



Tabuľka 4.1: Porovnanie polohy hranice vypočítanej analytickými formulami

| τ | Kritická cena akcie v \$ | | | | | Relatívna odchýlka voči PSOR | | | |
|----------|--------------------------|--------|--------|--------|--------|------------------------------|-------|-------|-------|
| | KK | EKK | SSCh | Zhu | PSOR | KK | EKK | SSCh | Zhu |
| 0,000 01 | 99,705 | 99,693 | 99,693 | 99,507 | 99,700 | 0,00% | 0,01% | 0,01% | 0,19% |
| 0,000 05 | 99,398 | 99,368 | 99,370 | 99,034 | 99,402 | 0,00% | 0,03% | 0,03% | 0,37% |
| 0,000 1 | 99,185 | 99,142 | 99,145 | 98,718 | 99,203 | 0,02% | 0,06% | 0,06% | 0,49% |
| 0,000 5 | 98,390 | 98,280 | 98,292 | 97,569 | 98,314 | 0,08% | 0,03% | 0,02% | 0,76% |
| 0,001 | 97,864 | 97,699 | 97,720 | 96,827 | 97,726 | 0,14% | 0,03% | 0,01% | 0,92% |
| 0,005 | 96,054 | 95,616 | 95,685 | 94,274 | 95,600 | 0,48% | 0,02% | 0,09% | 1,39% |
| 0,01 | 95,009 | 94,325 | 94,433 | 92,725 | 94,176 | 0,88% | 0,16% | 0,27% | 1,54% |
| 0,04 | 92,949 | 91,117 | 91,314 | 88,656 | 90,303 | 2,93% | 0,90% | 1,12% | 1,82% |
| 0,1 | 93,533 | 89,285 | 89,422 | 85,254 | 86,936 | 7,59% | 2,70% | 2,86% | 1,93% |
| 0,25 | - | 91,008 | 90,739 | 81,413 | 82,861 | - | 9,83% | 9,51% | 1,75% |



Obr. 4.2: Porovnanie polohy voľnej hranice v dlhodobom horizonte

Na druhej strane, kým ostatné aproximácie postupne prestávajú kopírovať tvar PSOR hranice (KK pre $\tau = 0,01$ roka, EKK a SSCh asi pre $\tau = 0,02$), Zhuova formula si stabilne drží asi 2% odchýlku.

Preto pri odhade asymptotického správania môžeme použiť SSCh alebo EKK formulu, zatiaľ čo pri aproximácii voľnej hranice pre dlhšie obdobie použijeme Zhuovu verziu.

4.2 Výsledky v dlhodobom horizonte

V tejto časti sa zameriame na konkrétne numerické porovnanie riešení v dlhodobom horizonte. Spomedzi analytických môžeme použiť len Zhuovu aproximáciu (2.18) z článku [17] (ostatné sa dajú používať iba pre malé $\tau \ll 1$).

Porovnáme ju s dvoma numerickými metódami - PSOR (táto nám bude slúžiť aj ako benchmark pre porovnanie ostatných) a novoodvedenú schému Stamicar-Ševčovič-Chadam (SSCh) na výpočet voľnej hranice priamo zo systému rovníc (2.4)-(2.6) podľa [13].

Ako dlhodobý horizont sme si zvolili čas do expirácie $T = 5$ rokov. Zvolili sme si expiračnú cenu $X = 100$ \$, volatilitu akcie $\sigma = 30\%$, ročnú úrokovú mieru $r = 10\%$ a nulovú mieru dividend. Výsledky znázorňuje graf na obrázku (4.2). Profil riešenia je vo všetkých troch prípadoch približne rovnaký.

Pre lepšiu názornosť sme v druhom grafe zobrazili relatívnu odchýlku od riešenia PSOR, ktoré používame na meranie kvality ostatných aproximácií. Zhuova integrálna formula vykazuje odchýlku medzi 1 a 2,5%, najnižšia je približne pre $\tau = 2$ roky. Riešenie

| τ | Kritická cena akcie v \$ | | | Relatívna chyba | |
|--------|--------------------------|----------|----------|-----------------|-------|
| | PSOR | Zhu | SSCh | Zhu | SSCh |
| 0 | 100,0000 | 100,0000 | 100,0000 | 0% | 0% |
| 0,02 | 92,8672 | 90,8575 | 92,3461 | 2,16% | 0,56% |
| 0,04 | 90,7707 | 88,6563 | 90,2088 | 2,33% | 0,62% |
| 0,06 | 89,3300 | 87,2160 | 88,7771 | 2,37% | 0,62% |
| 0,08 | 88,2350 | 86,1300 | 87,6695 | 2,39% | 0,64% |
| 0,1 | 87,3279 | 85,2538 | 86,7636 | 2,38% | 0,65% |
| 0,2 | 84,2962 | 82,3766 | 83,7476 | 2,28% | 0,65% |
| 0,4 | 81,0179 | 79,3593 | 80,4793 | 2,05% | 0,66% |
| 0,6 | 79,0571 | 77,5961 | 78,5391 | 1,85% | 0,66% |
| 0,8 | 77,6986 | 76,3752 | 77,1895 | 1,7% | 0,66% |
| 1 | 76,6695 | 75,4580 | 76,1632 | 1,58% | 0,66% |
| 1,5 | 74,9137 | 73,8879 | 74,4094 | 1,37% | 0,67% |
| 2 | 73,8107 | 72,8731 | 73,2722 | 1,27% | 0,73% |
| 3 | 72,5786 | 71,6205 | 71,8735 | 1,32% | 0,97% |
| 4 | 72,0121 | 70,8778 | 71,0464 | 1,58% | 1,34% |
| 5 | 71,7966 | 70,3925 | 70,5100 | 1,96% | 1,79% |

Tabuľka 4.2: Porovnanie polôh hranice skorého uplatnenia put opcie

podľa SSCh schémy v prvej polovici zvoleného časového intervalu vykazuje takmer konštantnú odchýlku, v druhej polovici sa táto postupne zväčšuje - riešenie sa približuje k Zhuovmu. Toto však môže znamenať aj to, že nami vypočítaná hranica PSOR sa v čase $\tau \approx 5$ rokov už odchyľuje od skutočnej polohy voľnej hranice.

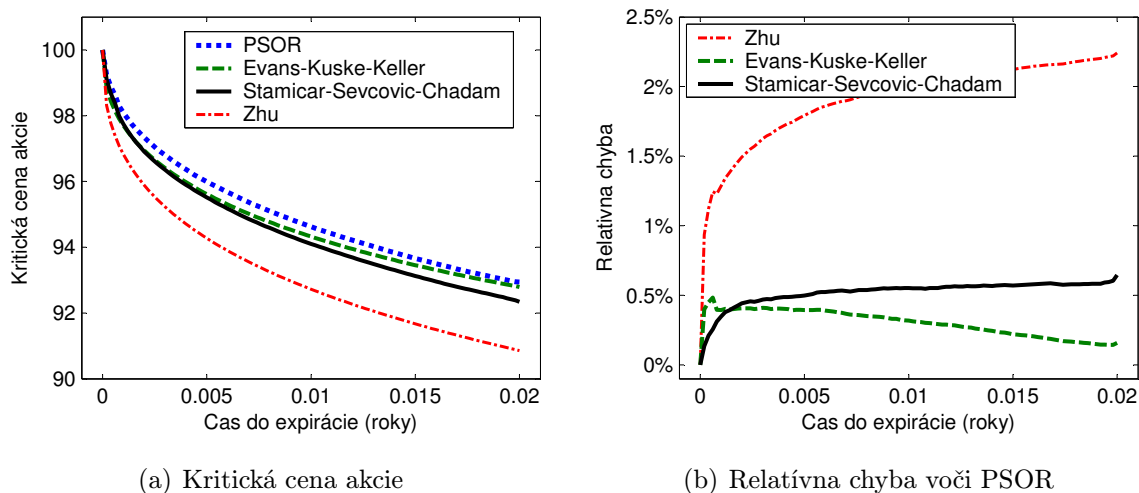
Záverom možno konštatovať, že v dlhodobom horizonte schéma SSCh veľmi dobre popisuje hranicu skorého uplatnenia americkej put opcie.

4.3 Porovnanie blízko času expirácie

Blízko času expirácie pre $\tau \in [0; 0,02]$ roka (približne 7.3 dňa) sme do porovnávania zahrnuli aj analytickú formulu (2.22) podľa článku [3] trojice autorov Evans, Kuske a Keller. Táto na zvolenom časovom horizonte veľmi dobre aproximovala hranicu predčasného uplatnenia vypočítanú z PSOR.

Použili sme parametre $T = 0,02$ roka (približne 7,3 dňa), úrok $r = 10\%$ a volatilitu $\sigma = 30\%$. V tomto prípade mala najväčšiu odchýlku od PSOR - približne 2% Zhuova analytická aproximácia. Ostatné dve sa držia na úrovni 0.5%, EKK v závere časového intervalu dokonca menej ako 0.2%. Podrobnejšie môžeme vidieť na obrázku (4.3) a v tabuľke (4.3).

Obr. 4.3: Porovnanie polohy hranice predčasnej expirácie



Tabuľka 4.3: Numerické porovnanie polohy hranice predčasnej expirácie

| τ | Kritická cena akcie v \$ | | | | Relatívna chyba | | |
|---------|--------------------------|--------|--------|--------|-----------------|-------|-------|
| | PSOR | Zhu | SSCh | EKK | Zhu | SSCh | EKK |
| 0 | 100,00 | 100,00 | 100,00 | 100,00 | 0,00% | 0,00% | 0,00% |
| 0,000 2 | 99,23 | 98,31 | 99,10 | 98,84 | 0,94% | 0,13% | 0,40% |
| 0,000 4 | 98,88 | 97,77 | 98,67 | 98,44 | 1,12% | 0,21% | 0,45% |
| 0,000 6 | 98,62 | 97,39 | 98,37 | 98,14 | 1,25% | 0,26% | 0,48% |
| 0,000 8 | 98,29 | 97,09 | 97,99 | 97,90 | 1,23% | 0,31% | 0,40% |
| 0,001 | 98,09 | 96,83 | 97,75 | 97,70 | 1,28% | 0,35% | 0,39% |
| 0,002 | 97,34 | 95,89 | 96,91 | 96,94 | 1,49% | 0,44% | 0,41% |
| 0,003 | 96,80 | 95,23 | 96,35 | 96,41 | 1,63% | 0,47% | 0,41% |
| 0,004 | 96,37 | 94,71 | 95,90 | 95,98 | 1,72% | 0,49% | 0,40% |
| 0,005 | 95,99 | 94,27 | 95,52 | 95,62 | 1,79% | 0,50% | 0,39% |
| 0,006 | 95,67 | 93,90 | 95,17 | 95,30 | 1,86% | 0,52% | 0,39% |
| 0,007 | 95,37 | 93,56 | 94,86 | 95,02 | 1,90% | 0,53% | 0,37% |
| 0,008 | 95,10 | 93,26 | 94,59 | 94,77 | 1,94% | 0,54% | 0,35% |
| 0,009 | 94,86 | 92,98 | 94,34 | 94,54 | 1,98% | 0,55% | 0,34% |
| 0,01 | 94,63 | 92,72 | 94,10 | 94,33 | 2,01% | 0,55% | 0,32% |
| 0,012 | 94,21 | 92,27 | 93,68 | 93,94 | 2,07% | 0,56% | 0,29% |
| 0,014 | 93,84 | 91,86 | 93,31 | 93,61 | 2,11% | 0,57% | 0,24% |
| 0,016 | 93,50 | 91,49 | 92,96 | 93,31 | 2,15% | 0,58% | 0,20% |
| 0,018 | 93,19 | 91,16 | 92,65 | 93,04 | 2,18% | 0,58% | 0,16% |
| 0,02 | 92,94 | 90,86 | 92,34 | 92,79 | 2,24% | 0,65% | 0,16% |

| τ | Hodnota konštanty C | | | | | |
|----------|------------------------|--------|--------|----------|------------------|--------|
| | Analytické aproximácie | | | | Numerické metódy | |
| | KK | EKK | SSCh | Zhu | PSOR | SSCh |
| 0,000 01 | 0,1592 | 0,3581 | 0,3481 | 5,52E+06 | 0,2138 | 0,4212 |
| 0,000 05 | 0,1592 | 0,3581 | 0,3412 | 5,01E+04 | 0,1421 | 0,4254 |
| 0,000 1 | 0,1592 | 0,3581 | 0,3374 | 8,53E+03 | 0,1158 | 0,4275 |
| 0,000 5 | 0,1592 | 0,3581 | 0,3268 | 2,53E+02 | 0,2762 | 0,4345 |
| 0,001 | 0,1592 | 0,3581 | 0,3219 | 7,22E+01 | 0,3124 | 0,4395 |
| 0,005 | 0,1592 | 0,3581 | 0,3134 | 7,307 | 0,3695 | 0,4357 |
| 0,01 | 0,1592 | 0,3581 | 0,3131 | 3,583 | 0,4330 | 0,4770 |
| 0,02 | 0,1592 | 0,3581 | 0,3165 | 2,079 | 0,4565 | 0,5200 |

Tabuľka 4.4: Konštanty C vypočítaná z polohy hranice predčasnej expirácie

4.4 Asymptotické riešenie

V nadväznosti na časť (2.4) predpokladajme teraz, že všeobecná analytická aproximácia voľnej hranice má pre malé $\tau = T - t$ tvar

$$\frac{S_f^a(T - \tau)}{K} = 1 - \sigma \sqrt{\tau \ln \left(\frac{C}{\tau} \right)}, \quad (4.1)$$

kde pre EKK a SSCh formulu je

$$C = \frac{\sigma^2}{8\pi r^2}. \quad (4.2)$$

Hodnotu konštanty C však vieme vypočítať aj numericky priamo z vypočítanej voľnej hranice S_i danom diskretnom čase $\tau_i \rightarrow 0$:

$$C_i = \tau_i \text{Exp} \frac{\left(1 - \frac{S_i}{K}\right)^2}{\tau_i \sigma^2}. \quad (4.3)$$

Konštantu C počítame pre každú z používaných metód - analytické aproximácie KK, EKK, SSCh a Zhu, ako aj numerické metódy PSOR a SSCh schému. Výsledky uvádzame v tabuľke (4.4).

Aproximácie KK a EKK sú priamo definované v tvare (4.1), teda vypočítané hodnoty C_i sú rovnaké vo všetkých časoch τ_i . Aproximácia SSCh (2.7) má síce rovnaký asymptotický tvar, pre väčšie τ sa však viac prejavujú členy vyššieho rádu a tak hodnota C s rastúcim τ pomaly klesá.

Úplne iné asymptotické správanie má Zhuova aproximácia hranice predčasnej expirácie, čo možno pozorovať aj na rádovo vyšších hodnotách konštanty C (Zhu $C \gg 1$ pre

| Počet deliacich bodov | Počet vnútorných iterácií | | | Odchýlka voči PSOR benchmarku | | | | | |
|-----------------------|---------------------------|-------|---------|-------------------------------|-------|---------|--------------------------|-------|---------|
| | A | B | Rozdiel | maximová $\ \cdot\ _\infty$ | | | integrálna $\ \cdot\ _1$ | | |
| | | | | A | B | Rozdiel | A | B | Rozdiel |
| 5 | 153 | 151 | -1,31% | 6,723 | 3,505 | -47,9% | 1,223 | 0,463 | -62,2% |
| 10 | 270 | 271 | 0,37% | 5,137 | 1,969 | -61,7% | 0,450 | 0,199 | -55,8% |
| 20 | 463 | 450 | -2,81% | 3,873 | 1,160 | -70,0% | 0,187 | 0,086 | -53,9% |
| 40 | 753 | 734 | -2,52% | 2,902 | 0,800 | -72,4% | 0,091 | 0,046 | -49,2% |
| 80 | 1230 | 1137 | -7,56% | 2,170 | 0,432 | -80,1% | 0,051 | 0,032 | -37,5% |
| 160 | 1811 | 1748 | -3,48% | 1,635 | 0,282 | -82,8% | 0,035 | 0,027 | -22,7% |
| 320 | 3037 | 3001 | -1,19% | 1,255 | 0,244 | -80,6% | 0,028 | 0,025 | -11,1% |
| 640 | 5516 | 5495 | -0,38% | 1,004 | 0,241 | -76,0% | 0,026 | 0,024 | -4,7% |
| 1280 | 10569 | 10561 | -0,08% | 0,838 | 0,239 | -71,5% | 0,025 | 0,024 | -1,8% |

Tabuľka 4.5: Porovnanie dvoch delení intervalu

A - rovnomerné (4.4), B - nerovnomerné (4.5)

$\tau \rightarrow 0$, ostatné metódy $C \in [0; 0,6]$). Aj takto sa prejavuje odchýlka hranice vypočítanej metódou Zhu cca o 2% oproti ostatným riešeniam.

Hodnota konštanty C pre hranicu predčasného uplatnenia vypočítanú numericky - v prípade SSCh začína na $C = 0,42$ a pomaly rastie. V prípade PSOR hodnota C jemne osciluje v intervale 0,1 až 0,45 - aj PSOR má približne rovnakú asymptotiku, väčší rozptyl môže spôsobovať nepresnosť samotného výpočtu PSOR.

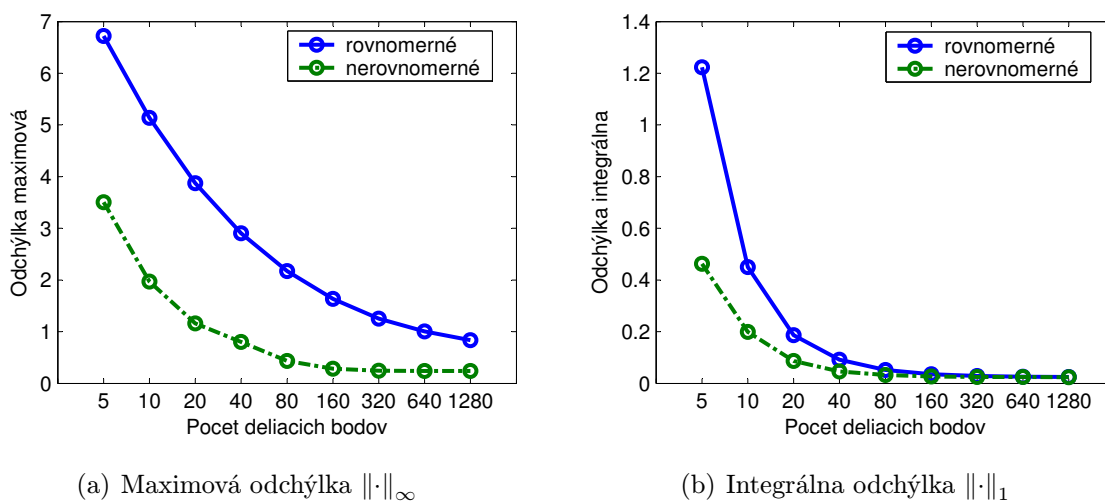
Zistili sme, že hodnota C je približne rovnaká u všetkých aproximácii okrem Zhuovej. Zhuova metóda má pre malé τ úplne iné správanie. Ostatné metódy majú podobnú asymptotiku, v koeficiente C sú len malé rozdiely. Tým pádom zrejme aj presná poloha hranice bude mať asymptotiku (4.1).

4.5 Delenie časového intervalu

Metóda výpočtu voľnej hranice odvodená na základe SSCh integrálnej sústavy rovníc nám dáva voľnosť pri výbere delenia časového intervalu. Keďže čas do expirácie $\tau = (T-t)\frac{\sigma^2}{2}$ patrí do intervalu $\tau \in [0, T\frac{\sigma^2}{2}] = [0, \tau^{exp}]$, zvolíme v prvom priblížení rovnomerné delenie:

$$\tau_i = \left(\frac{i}{n}\right) \cdot \tau^{exp}, \quad \text{pre } i = 1, \dots, n, \quad (4.4)$$

kde n je zvolený počet deliacich bodov. Takého delenie sa zdá byť „najspravodlivejšie“. Pri podrobnejšom preštudovaní problému si však uvedomíme dve veci:



Obr. 4.4: Porovnanie rôznych delení časového intervalu

- v čase tesne pred expiráciou (pre $\tau \rightarrow 0$) sa voľná hranica mení veľmi rýchlo, kým pre $\tau \approx 1$ už k veľkej zmene nedochádza,
- vo výpočte aproximujeme výraz $\eta(\tau \sin^2 \theta)$ pre $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$, teda často potrebujeme hodnotu funkcie $\eta(\cdot)$ pre malé argumenty.

Na základe toho môžeme zvoliť delenie, ktoré je hustejšie pre malé τ :

$$\tau_i = \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \tau^{exp}, \quad \text{pre } i = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Obe delenia môžeme numericky porovnať - rovnomerné (4.4) a nerovnomerné (4.5). Výsledky sú v súlade s očakávaním - nerovnomerné delenie konverguje rýchlejšie. Počet iterácií je v oboch prípadoch takmer rovnaký, avšak odchýlka druhého spôsobu sa približne rovná odchýlke prvého spôsobu s dva až štyrikrát väčším počtom deliacich bodov. Podrobnejšie v tabuľke (4.5) a na obrázku (4.4).

4.6 Experimentálny rád konvergenzie

Pokúsme sa experimentálne určiť rád konvergenzie našej metódy výpočtu voľnej hranice. Vydeme z predpokladu, že g je presné riešenie (benchmark) a g_n jeho aproximácia v n bodoch. Zároveň predpokladáme, že pre rád chyby platí:

$$\|g - g_n\| = O(n^{-\delta}) \quad (4.6)$$

Potom aj pre dvojicu rozmerov n_i, n_{i+1} (napr. $n_{i+1} = 2n_i$) platí

$$\|g - g_{n_i}\| = c n_i^{-\delta} \quad (4.7)$$

$$\|g - g_{n_{i+1}}\| = c n_{i+1}^{-\delta} \quad (4.8)$$

a predpokladáme, že c aj δ sú konštanty - závisia od metódy, nie od rozmeru riešenia.

Vydelením (4.7) a (4.8) dostávame

$$\frac{\|g - g_{n_i}\|}{\|g - g_{n_{i+1}}\|} \doteq \left(\frac{n_i}{n_{i+1}}\right)^{-\delta} \quad (4.9)$$

$$\delta_i \equiv \frac{\ln\left(\frac{\|g - g_{n_i}\|}{\|g - g_{n_{i+1}}\|}\right)}{\ln\left(\frac{n_{i+1}}{n_i}\right)} \quad (4.10)$$

Týmto spôsobom vieme vypočítať hodnotu δ_i pre rôzne počty deliacich bodov n_i . Zrejme platí, že skutočná δ sa približne rovná jednotlivým vypočítaným δ_i . Pritom má zmysel uvažovať hodnotu δ samostatne pre maximovú a integrálnu normu, keďže môžu konvergovať rôznymi rýchlosťami. Podobne takto môžeme porovnať aj rýchlosť konvergenzie u rovnomerného a nerovnomerného delenia intervalu.

Otázkou zostáva, čo použiť ako benchmark. Použijeme PSOR riešenie s dostatočne vysokou presnosťou. Nie je však jednoduché zistiť, ktorá PSOR voľná hranica má najmenšiu odchýlku od presnej polohy (podrobnejšie v časti 5.4). Zvoľme teda PSOR riešenie, ktoré má najmenšiu odchýlku od riešenia SSCh-5120.

Výsledky uvádzame v tabuľke (4.6). Pri rovnomernom delení v maximovej norme je $\delta \approx 0,5$, teda rýchlosťou $O(\sqrt{n})$, v integrálnej norme $\delta \approx 1$ konverguje lineárne. Výpočet SSCh s nerovnomerným delením konverguje približne lineárne s $\delta \approx 1$ v oboch normách.

Všimnime si však, že sme uvažovali maximálne $n = 80$. Pre väčšie n sa totiž odchýlka už nezmenšuje rovnakým tempom, zostáva blízko minimálnej hodnoty $\|\cdot\|_{\infty} = 0,238$, $\|\cdot\|_1 = 0,024$ pre SSCh-5120. Myslíme si, že to súvisí s presnosťou samotného PSOR a jeho odchýlkou od skutočnej polohy hranice predčasného uplatnenia. Pre veľké n vo výpočte SSCh už chyba samotného PSOR preváži odchýlku SSCh aproximácie.

Pokúsme sa teda určiť rýchlosť konvergenzie SSCh metódy k svojej limite. Ako benchmark sme si zvolili polohu voľnej hranice vypočítanú SSCh metódou s veľkým počtom deliacich bodov ($n = 5120$). V tom prípade - všimnime si vypočítanú δ v tabuľke (4.7) - je aj konvergenzia oveľa lepšia.

| Deliace body | | Vnútorne iterácie | | | Čas s | Odchýlka | | EOC δ | |
|--------------|--------------|-------------------|-----|----------|----------|--------------------|---------------|--------------------|---------------|
| Počet | Delenie | Priem | Max | Σ | | $\ \cdot\ _\infty$ | $\ \cdot\ _1$ | $\ \cdot\ _\infty$ | $\ \cdot\ _1$ |
| 5 | rovnomé | 30,60 | 39 | 153 | 2,9 | 6,723 | 1,223 | - | - |
| 10 | rovnomé | 27,00 | 34 | 270 | 7,6 | 5,137 | 0,450 | 0,388 | 1,442 |
| 20 | rovnomé | 23,15 | 36 | 463 | 8,6 | 3,873 | 0,187 | 0,408 | 1,268 |
| 40 | rovnomé | 18,83 | 34 | 753 | 15,7 | 2,902 | 0,091 | 0,416 | 1,037 |
| 80 | rovnomé | 15,38 | 73 | 1 230 | 30,2 | 2,170 | 0,051 | 0,419 | 0,826 |
| 5 | nerovnomerné | 30,20 | 35 | 151 | 5,8 | 3,505 | 0,463 | - | - |
| 10 | nerovnomerné | 27,10 | 40 | 271 | 10,1 | 1,969 | 0,199 | 0,832 | 1,217 |
| 20 | nerovnomerné | 22,50 | 35 | 450 | 8,4 | 1,160 | 0,086 | 0,764 | 1,206 |
| 40 | nerovnomerné | 18,35 | 38 | 734 | 14,0 | 0,800 | 0,046 | 0,536 | 0,898 |
| 80 | nerovnomerné | 14,21 | 36 | 1 137 | 25,3 | 0,432 | 0,032 | 0,888 | 0,527 |

Tabuľka 4.6: Výpočet rádu konvergenzie voči PSOR benchmarku

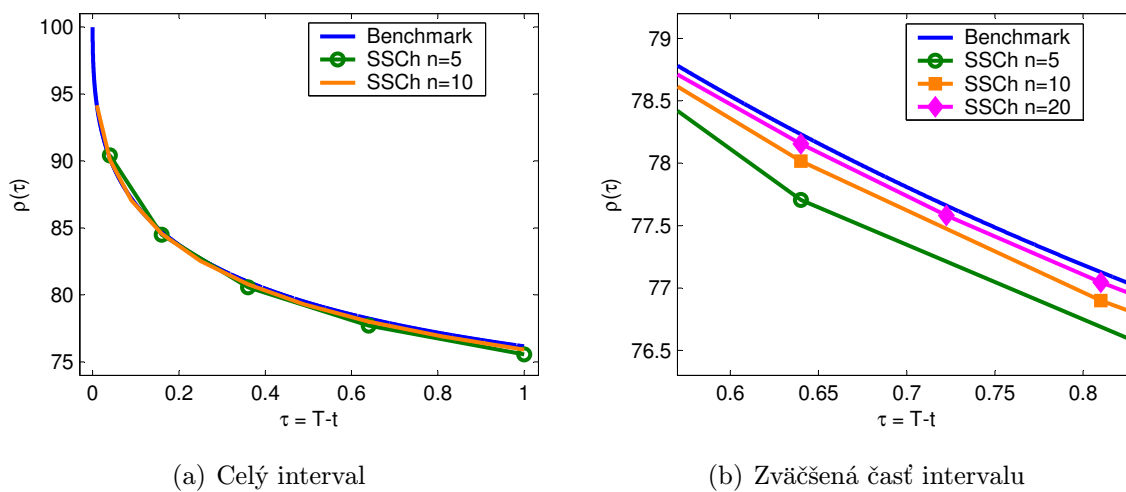
V maximovej norme pri rovnomernom delení $\delta \approx 0,5$, pri nerovnomernom $\delta \approx 1$ - teda metóda konverguje takmer lineárne. Integrálna norma dáva $\delta \approx 1$ pri rovnomernom a dokonca $\delta \approx 1,5$ pri nerovnomernom delení - čo je viac než lineárna rýchlosť konvergenzie.

Zhrnutie. Metóda SSCh s nerovnomerným rozdelením n bodov konverguje k hranici predčasnej expirácie s chybou $O(1/n)$ v maximovej a $O(n^{-3/2})$ v integrálnej norme.

Tabuľka 4.7: Výpočet rádu konvergenzie voči SSCh-5120 benchmarku

| Deliace body | | Vnútorne iterácie | | | Čas | Odchýlka | | EOC δ | |
|--------------|-----------|-------------------|-----|----------|---------|--------------------|---------------|--------------------|---------------|
| Počet | Delenie | Priem | Max | Σ | min:s | $\ \cdot\ _\infty$ | $\ \cdot\ _1$ | $\ \cdot\ _\infty$ | $\ \cdot\ _1$ |
| 5 | rovnomé | 30,6 | 39 | 153 | 0:02,9 | 6,745 | 2,366 1 | - | - |
| 10 | rovnomé | 27,0 | 34 | 270 | 0:07,6 | 5,159 | 1,257 6 | 0,387 | 0,912 |
| 20 | rovnomé | 23,2 | 36 | 463 | 0:08,6 | 3,892 | 0,657 1 | 0,407 | 0,937 |
| 40 | rovnomé | 18,8 | 34 | 753 | 0:15,7 | 2,913 | 0,346 5 | 0,418 | 0,923 |
| 80 | rovnomé | 15,4 | 73 | 1 230 | 0:30,2 | 2,168 | 0,181 6 | 0,426 | 0,932 |
| 160 | rovnomé | 11,3 | 44 | 1 811 | 1:03,6 | 1,607 | 0,094 4 | 0,433 | 0,944 |
| 320 | rovnomé | 9,5 | 37 | 3 037 | 2:48,4 | 1,186 | 0,048 8 | 0,438 | 0,953 |
| 640 | rovnomé | 8,6 | 34 | 5 516 | 5:55,0 | 0,873 | 0,025 1 | 0,443 | 0,958 |
| 1280 | rovnomé | 8,3 | 37 | 10 569 | 11:28,4 | 0,640 | 0,012 9 | 0,447 | 0,961 |
| 5 | nerovnomé | 30,2 | 35 | 151 | 0:05,8 | 3,522 | 0,773 3 | - | - |
| 10 | nerovnomé | 27,1 | 40 | 271 | 0:07,1 | 1,961 | 0,278 0 | 0,845 | 1,476 |
| 20 | nerovnomé | 22,5 | 35 | 450 | 0:08,4 | 1,072 | 0,093 2 | 0,872 | 1,577 |
| 40 | nerovnomé | 18,4 | 38 | 734 | 0:14,0 | 0,578 | 0,031 1 | 0,891 | 1,585 |
| 80 | nerovnomé | 14,2 | 36 | 1 137 | 0:25,3 | 0,309 | 0,010 5 | 0,905 | 1,568 |
| 160 | nerovnomé | 10,9 | 34 | 1 748 | 0:52,0 | 0,164 | 0,003 6 | 0,916 | 1,557 |
| 320 | nerovnomé | 9,4 | 38 | 3 001 | 2:20,4 | 0,086 | 0,001 2 | 0,924 | 1,556 |
| 640 | nerovnomé | 8,6 | 34 | 5 495 | 5:04,2 | 0,045 | 0,000 4 | 0,930 | 1,572 |
| 1280 | nerovnomé | 8,3 | 37 | 10 561 | 9:43,9 | 0,024 | 0,000 1 | 0,936 | 1,642 |
| 5120 | nerovnomé | 8,0 | 48 | 40 939 | 38:28,6 | (benchmark) | | - | - |

Obr. 4.5: Ukážka konvergenzie SSCh k presnému riešeniu



5 Konvergenia PSOR metódy pri výpočte voľnej hranice

Algoritmus PSOR je jedným z tých, ktoré sa aj v súčasnosti používajú na výpočet hranice predčasnej expirácie. Metóda PSOR (*Projected Successive Over Relaxation*) sa používa na výpočet hodnoty opcie pomocou konečných diferencií. Hranicou predčasnej expirácie je potom minimálna cena akcie S , pre ktorú je cena opcie ostro väčšia ako jej payoff.

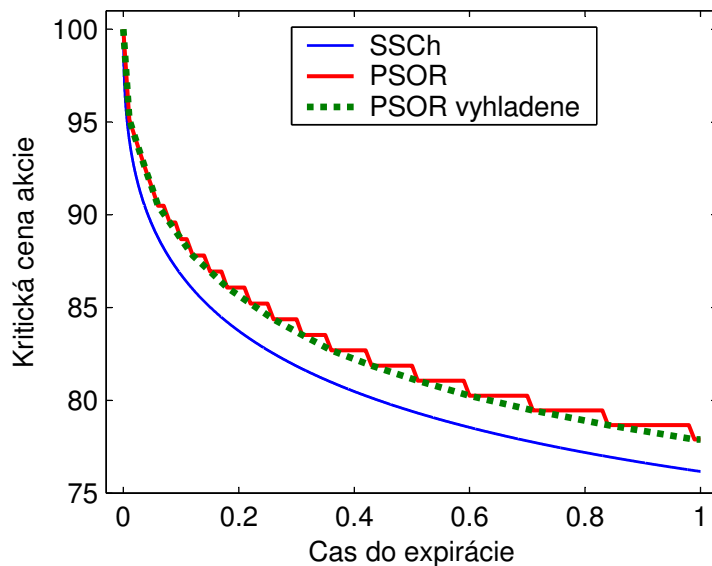
Metóda používa niekoľko parametrov. Veľkosť diskretizačnej siete určuje počet časových krokov m a počet priestorových krokov n . Ďalšími parametrami sú ω (váha vektora zmeny pri iteráciách) a L (určujúce hraničnú cenu akcie).

Každý z parametrov možno voliť samostatne. Nie je však úplne jasné, pri akej kombinácii parametrov dostaneme najpresnejšiu aproximáciu voľnej hranice. Preskúmajme závislosť tejto presnosti od voľby jednotlivých parametrov podrobnejšie. Ako porovnávaciu hodnotu (benchmark) sme zvolili voľnú hranicu vypočítanú SSCh metódou s dostatočnou presnosťou ($n = 1280$ deliacimi bodmi).

Poznámka 5.1 *Hranica predčasnej expirácie americkej put opcie získaná použitím metódy PSOR je postupnosť minimálnych cien akcie, pri ktorej cena opcie presahuje svoj payoff. Keďže cenu opcie počítame iba v konečnom počte cien akcie, môže sa stať, že v niekoľkých po sebe idúcich časoch je táto najmenšia cena akcie rovnaká. Nie je to však preto, že by bola v daných časoch rovnaká aj voľná hranica, ale preto, že nemáme dostatok bodov, v ktorých by sme cenu opcie vypočítali.*

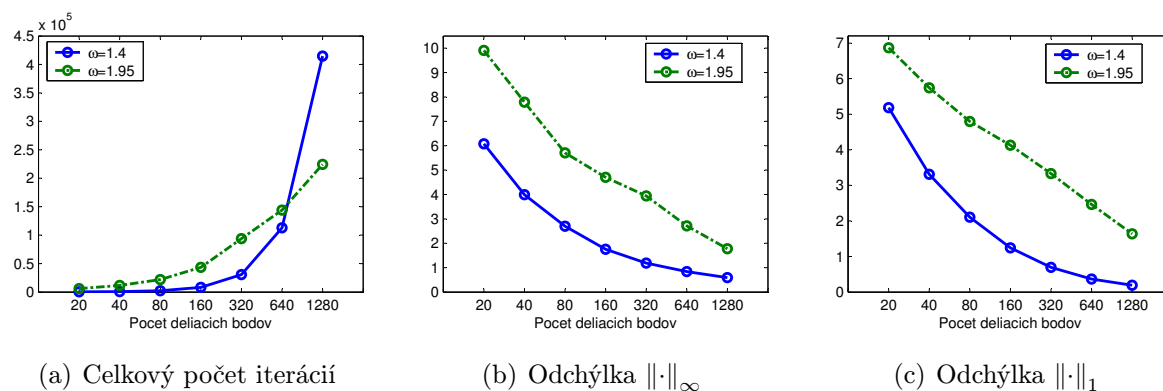
Keďže však chceme, aby bola voľná hranica monotónne klesajúca (nie po častiach konštantná), v bodoch, v ktorých sa funkčná hodnota opakuje, túto lineárne interpolujeme. Ďalej pracujeme s touto „vyhladenou“ voľnou hranicou PSOR. Ukážku znázorňuje obrázok (5.1).

Obr. 5.1: Vyhladenie PSOR riešenia voľnej hranice



Tabuľka 5.1: Rád konvergence PSOR metódy v porovnaní so SSCh-1280 benchmarkom

| Parametre PSOR | | | | Počet iterácií | | Čas | Odchýlka | | EOC δ | |
|----------------|-------|----------|-----|----------------|---------|----------|----------------------|---------------|----------------------|---------------|
| n | m | ω | L | Priem. | Celkom | min:s | $\ \cdot\ _{\infty}$ | $\ \cdot\ _1$ | $\ \cdot\ _{\infty}$ | $\ \cdot\ _1$ |
| 20 | 20 | 1,4 | 1 | 20,6 | 411 | 0:00,55 | 6,077 | 5,183 | - | - |
| 40 | 40 | 1,4 | 1 | 18,8 | 751 | 0:00,83 | 3,995 | 3,310 | 0,61 | 0,65 |
| 80 | 80 | 1,4 | 1 | 27,4 | 2 192 | 0:02,98 | 2,697 | 2,107 | 0,57 | 0,65 |
| 160 | 160 | 1,4 | 1 | 52,1 | 8 330 | 0:12,36 | 1,755 | 1,242 | 0,62 | 0,76 |
| 320 | 320 | 1,4 | 1 | 96,0 | 30 711 | 0:53,16 | 1,190 | 0,696 | 0,56 | 0,83 |
| 640 | 640 | 1,4 | 1 | 176,3 | 112 837 | 4:12,92 | 0,842 | 0,367 | 0,50 | 0,92 |
| 1 280 | 1 280 | 1,4 | 1 | 324,0 | 414 719 | 17:53,39 | 0,592 | 0,192 | 0,51 | 0,94 |
| 20 | 20 | 1,95 | 1 | 307,1 | 6 142 | 0:00,33 | 9,908 | 6,868 | - | - |
| 40 | 40 | 1,95 | 1 | 291,7 | 11 667 | 0:00,70 | 7,783 | 5,743 | 0,35 | 0,26 |
| 80 | 80 | 1,95 | 1 | 276,2 | 22 096 | 0:02,14 | 5,710 | 4,796 | 0,45 | 0,26 |
| 160 | 160 | 1,95 | 1 | 271,2 | 43 393 | 0:07,17 | 4,708 | 4,130 | 0,28 | 0,22 |
| 320 | 320 | 1,95 | 1 | 293,2 | 93 831 | 0:27,53 | 3,939 | 3,333 | 0,26 | 0,31 |
| 640 | 640 | 1,95 | 1 | 225,1 | 144 067 | 2:48,77 | 2,717 | 2,466 | 0,54 | 0,43 |
| 1 280 | 1 280 | 1,95 | 1 | 175,4 | 224 495 | 14:33,19 | 1,780 | 1,636 | 0,61 | 0,59 |

Obr. 5.2: Závislosť vlastností PSOR riešenia voľnej hranice podľa rozmeru a voľby ω

5.1 Rád konvergenzie podľa rozmeru

Pokúsime sa experimentálne určiť rád konvergenzie PSOR metódy na výpočet hranice skorého uplatnenia. Predpokladáme, že chyba má tvar $O(n^{-\delta})$. Konvergenziu overíme pre dve rôzne hodnoty parametra $\omega_1 = 1,4$ a $\omega_2 = 1,95$.

Výsledky uvádzame v tabuľke (5.1) a prehľadne znázorňujeme na obrázku (5.2).

Ako vidíme, v oboch prípadoch PSOR konverguje k hranici predčasnej expirácie. Intuitívne platí, že čím väčší rozmer, tým lepšie riešenie - avšak záleží aj od ostatných parametrov. Konkrétne v prípade $\omega_2 = 1,95$ je konvergenzia s $\delta \approx 0,5$, pre $\omega_1 = 1,4$ dokonca takmer lineárna $\delta \approx 1$. Zaujímavý je však potrebný počet iterácií na dosiahnutie vyššej presnosti (a tým aj času trvania výpočtu) - pri ω_1 je počet iterácií pri malom rozmere nižší, ale rastie výrazne rýchlejšie a pri $n = 1280$ už počet iterácií takmer dvojnásobne presahuje počet iterácií s ω_2 . To je daň za rýchlejšiu konvergenziu pri nižšom rozmere.

V predchádzajúcej tabuľke (5.1) sme volili $m = n$. Pozrime sa teraz na to, či je to najvhodnejšia voľba. Najskôr si uvedomme, že musí platiť $m \approx n$. Ak by sme totiž mali $m \ll n$ (oveľa viac priestorových krokov), tak budeme síce poznať hodnotu opcie pre veľký počet cien akcie a teda aj dokážeme presne určiť voľnú hranicu (najmenšia cena akcie, pre ktorú je cena opcie nad svojim payoffom), avšak budeme ju poznať iba v malom počte diskretných časov.

Obdobne pre $m \gg n$ síce poznáme hodnotu voľnej hranice vo veľkom počte časov, ale vzhľadom na nízky počet časových krokov nie úplne presne.

Porovnajme tri spôsoby voľby $m \approx n$:

- A) $n=2m$, B) $n=m$, C) $m=2n$.

Tabuľka 5.2: Zmena pomeru časových a priestorových krokov

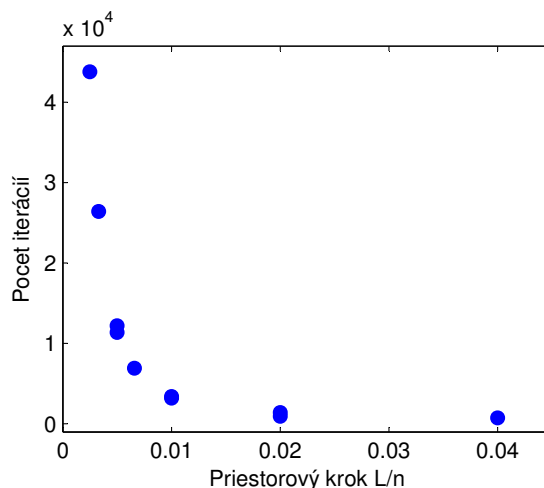
| Typ | Parametre PSOR | | | | Počet iterácií | | Čas s | Odchýlka | | Najlepší | |
|-----|----------------|-----|----------|-----|----------------|--------|----------|--------------------|---------------|--------------------|---------------|
| | n | m | ω | L | Priem. | Celkom | | $\ \cdot\ _\infty$ | $\ \cdot\ _1$ | $\ \cdot\ _\infty$ | $\ \cdot\ _1$ |
| A | 100 | 50 | 1,4 | 2 | 18,3 | 916 | 0,75 | 4,09 | 2,88 | | |
| B | 70 | 70 | 1,4 | 2 | 14,7 | 1 029 | 0,70 | 3,97 | 2,82 | | |
| C | 50 | 100 | 1,4 | 2 | 14,8 | 1 476 | 0,80 | 2,76 | 2,51 | naj | naj |
| A | 100 | 50 | 1,4 | 1 | 64,5 | 3 223 | 0,88 | 3,11 | 2,19 | | naj |
| B | 70 | 70 | 1,4 | 1 | 24,0 | 1 682 | 0,70 | 3,10 | 2,32 | | |
| C | 50 | 100 | 1,4 | 1 | 15,3 | 1 534 | 0,73 | 2,57 | 2,22 | naj | |
| A | 100 | 50 | 1,4 | 0,5 | 238,0 | 11 898 | 1,47 | 2,83 | 1,40 | | naj |
| B | 70 | 70 | 1,4 | 0,5 | 88,1 | 6 170 | 1,02 | 2,58 | 1,65 | | |
| C | 50 | 100 | 1,4 | 0,5 | 34,0 | 3 397 | 0,88 | 2,22 | 1,79 | naj | |
| A | 100 | 50 | 1,95 | 1 | 282,9 | 14 146 | 1,63 | 8,21 | 6,75 | | |
| B | 70 | 70 | 1,95 | 1 | 278,7 | 19 510 | 1,77 | 5,71 | 5,00 | | |
| C | 50 | 100 | 1,95 | 1 | 278,5 | 27 852 | 2,00 | 4,09 | 3,42 | naj | naj |
| A | 100 | 50 | 0,4 | 1 | 539,5 | 26 975 | 2,49 | 2,83 | 1,05 | | naj |
| B | 70 | 70 | 0,4 | 1 | 215,1 | 15 060 | 1,50 | 2,58 | 1,18 | | |
| C | 50 | 100 | 0,4 | 1 | 98,5 | 9 846 | 1,16 | 2,57 | 1,39 | naj | |
| A | 200 | 100 | 1,4 | 1 | 122,3 | 12 231 | 3,97 | 2,08 | 1,19 | | naj |
| B | 140 | 140 | 1,4 | 1 | 46,3 | 6 488 | 2,94 | 1,95 | 1,40 | | |
| C | 100 | 200 | 1,4 | 1 | 18,9 | 3 772 | 2,73 | 1,72 | 1,41 | naj | |
| A | 300 | 150 | 1,4 | 1 | 176,6 | 26 495 | 9,36 | 1,68 | 0,83 | | naj |
| B | 210 | 210 | 1,4 | 1 | 66,3 | 13 916 | 6,95 | 1,59 | 1,00 | | |
| C | 150 | 300 | 1,4 | 1 | 26,2 | 7 848 | 6,28 | 1,46 | 1,13 | naj | |
| A | 200 | 50 | 1,4 | 1 | 238,5 | 11 925 | 2,63 | 2,83 | 1,40 | | naj |
| B | 100 | 100 | 1,4 | 1 | 34,0 | 3 397 | 1,50 | 2,22 | 1,79 | naj | |
| C | 50 | 200 | 1,4 | 1 | 13,8 | 2 758 | 1,58 | 2,55 | 1,79 | | |
| A | | | | | | | | | | 0× | 6× |
| B | | | | | | | | | | 1× | 0× |
| C | | | | | | | | | | 7× | 2× |

A - väčší je počet priestorových krokov n ,

B - počet časových a priestorových krokov je rovnaký,

C - väčší je počet časových krokov m

| L | 0,3 | 0,25 | 0,2 | 0,15 | 0,1 |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\min_t(S_f(t))$ | 78,4272 | 81,2613 | 84,3665 | 87,8974 | 91,5761 |
| $E \exp(-L)$ | 74,0818 | 77,8801 | 81,8731 | 86,0708 | 90,4837 |

Tabuľka 5.3: Porovnanie najmenšieho bodu $S_f(t)$ a najmenšej ceny akcie podľa L Obr. 5.3: Závislosť počtu iterácií od veľkosti priestorového kroku L/n

Výsledky zobrazuje tabuľka (5.2). Pokiaľ berieme ako základ maximovú normu, najlepšie výsledky získavame v prípade C. V integrálnej norme vo väčšine prípadov dosiahneme lepší výsledok použitím rozmerov typu A.

5.2 Voľba hranice L

Ďalším parametrom, ktorý môžeme zvoliť v PSOR výpočte, je hranica pre priestorový krok L . Cenu opcie počítame na sieti $x \in [-L, L]$ v $(2n + 1)$ bodoch x_i :

$$x_i = i \cdot \frac{L}{n}, \quad \text{pre } i = -n, \dots, n. \quad (5.1)$$

pričom x je transformovaná cena akcie a platí $S = Ee^x$. Pokiaľ zvolíme L príliš malé, $S_f(t)$ zostane na spodnej hranici intervalu (blízko Ee^{-L}), hoci v skutočnosti môže byť voľná hranica iná. Viď tabuľka (5.3).

Všimnime si, že veľkosť priestorového kroku v premennej x je $\frac{L}{n}$. Čím menší je tento priestorový krok, tým menšia je diskretizačná chyba (tým presnejšie poznáme kritickú

| Parametre PSOR | | | | Počet iterácií | | Čas | Odchýlka | |
|----------------|-----|----------|-----|----------------|--------|-------|--------------------|---------------|
| n | m | ω | L | Priem. | Celkom | s | $\ \cdot\ _\infty$ | $\ \cdot\ _1$ |
| 200 | 50 | 1,4 | 2 | 64,5 | 3 223 | 1,422 | 3,1146 | 2,1862 |
| 100 | 50 | 1,4 | 1 | 64,5 | 3 223 | 0,766 | 3,1146 | 2,1862 |
| 50 | 50 | 1,4 | 0,5 | 64,1 | 3 204 | 0,438 | 3,1146 | 2,1862 |
| 200 | 150 | 1,4 | 2 | 23,6 | 3 540 | 3,515 | 1,9515 | 1,5963 |
| 100 | 150 | 1,4 | 1 | 23,6 | 3 540 | 1,860 | 1,9515 | 1,5963 |
| 50 | 150 | 1,4 | 0,5 | 24,2 | 3 625 | 1,046 | 1,9515 | 1,5963 |

Tabuľka 5.4: Konštantný priestorový krok L/n

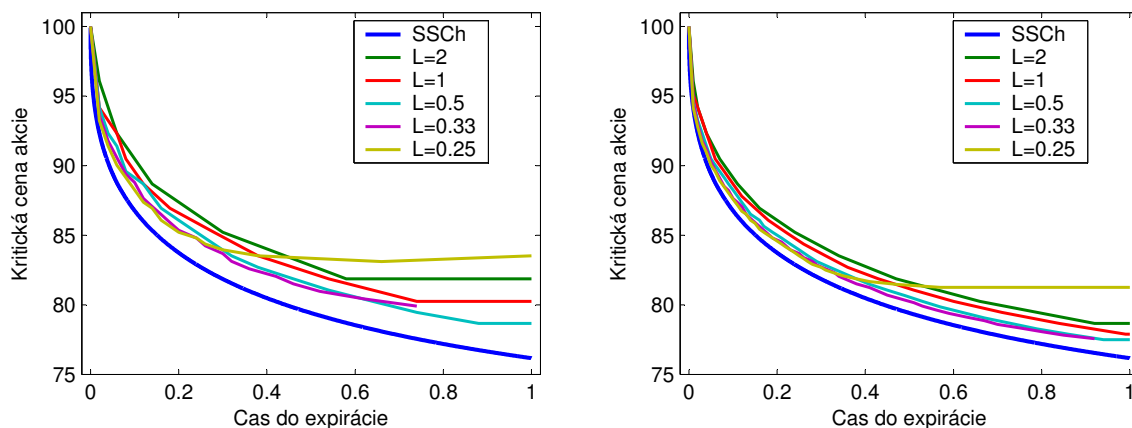
| Parametre PSOR | | | | Počet iterácií | | Čas | Odchýlka | |
|----------------|-----|----------|------|----------------|--------|------|--------------------|---------------|
| n | m | ω | L | Priem. | Celkom | s | $\ \cdot\ _\infty$ | $\ \cdot\ _1$ |
| 50 | 50 | 1,4 | 2 | 15,2 | 760 | 0,39 | 5,7102 | 3,7318 |
| 50 | 50 | 1,4 | 1 | 18,9 | 945 | 0,45 | 4,0890 | 2,8836 |
| 50 | 50 | 1,4 | 0,5 | 64,1 | 3 204 | 0,50 | 3,1146 | 2,1862 |
| 50 | 50 | 1,4 | 0,33 | 138,6 | 6 929 | 0,67 | 3,7367 | 2,0220 |
| 50 | 50 | 1,4 | 0,25 | 227,7 | 11 383 | 0,86 | 7,3641 | 3,0123 |
| 100 | 100 | 1,4 | 2 | 13,9 | 1 393 | 1,39 | 2,5669 | 2,2181 |
| 100 | 100 | 1,4 | 1 | 34,0 | 3 397 | 1,49 | 2,2182 | 1,7899 |
| 100 | 100 | 1,4 | 0,5 | 122,2 | 12 216 | 2,11 | 2,0824 | 1,1918 |
| 100 | 100 | 1,4 | 0,33 | 264,2 | 26 415 | 3,06 | 2,0551 | 0,9263 |
| 100 | 100 | 1,4 | 0,25 | 437,8 | 43 778 | 4,25 | 5,0984 | 1,7115 |

Tabuľka 5.5: Rôzna voľba hranice L

cenu akcie). Na druhej strane, menší priestorový krok výrazne zvyšuje výpočtovú náročnosť (počet potrebných iterácií na obr. (5.3)) a eventuálne môže dôjsť k problémom v počítačovej aritmetike. Priestorový krok môžeme zmenšiť zväčšením počtu bodov n alebo zúžením intervalu, teda zmenšením L .

Vynára sa zaujímavá otázka, či tvar riešenia závisí od počtu bodov n , alebo len od veľkosti priestorového kroku L/n . V tabuľke (5.4) sme vypočítali voľnú hranicu v niekoľkých prípadoch s rovnakým priestorovým krokom. Ako naznačujú údaje v tabuľke (rovnaká odchýlka a počet iterácií), tvar riešenia je vo všetkých prípadoch identický.

Preto pri výpočte sa oplatí zvoliť čo najmenšie L také, aby riešenie voľnej hranice „neutieklo“ z intervalu, v ktorom hodnoty počítame. V tabuľke (5.5) a na obrázku (5.4) počítame riešenie pre rôzne hodnoty L .

(a) Rôzna voľba L pri $m = 50, n = 50$ (b) Rôzna voľba L pri $m = 100, n = 100$

Obr. 5.4: Závislosť tvaru PSOR riešenia voľnej hranice podľa voľby L

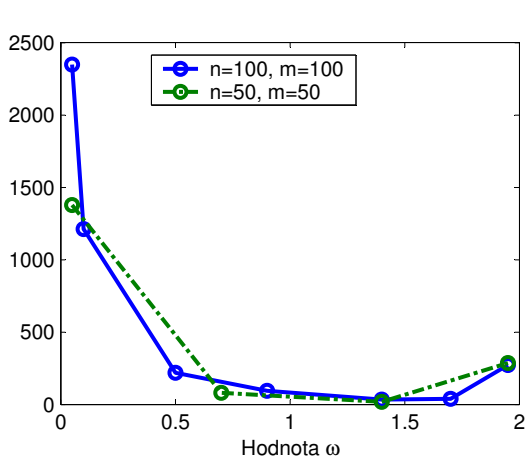
5.3 Voľba váhy vektora zmeny ω

Súvislosť medzi voľbou vektora zmeny ω a presnosťou vypočítanej PSOR voľnej hranice nie je priamočiara. Omegu volíme $\omega \in (0; 2)$. Malá $\omega \rightarrow 0$ spôsobí, že cena opcie sa mení pomaly, teda vyžaduje veľa iterácií na konvergenciu. Na druhej strane veľká $\omega \rightarrow 2$ znamená rýchlu zmenu riešenia, čo však neznamená rýchlu konvergenciu k presnému riešeniu. Preto treba voliť ω zo stredu intervalu.

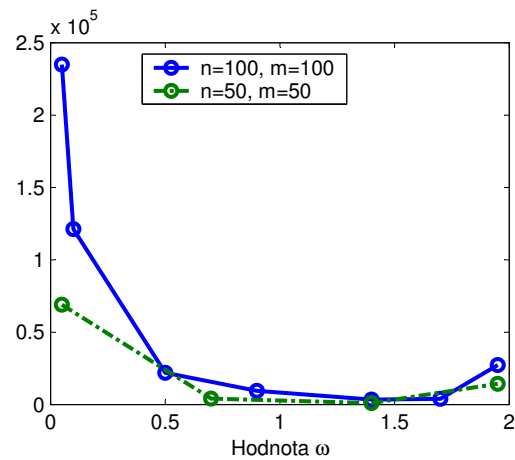
Vypočítajme voľnú hranicu pre niekoľko volieb ω . Výsledky môžeme porovnať v tabuľke (5.6) a na grafoch obrázku (5.5).

Predpoklady sa potvrdili. Pre malé ω máme veľmi veľký počet iterácií, na druhej strane pre $\omega \rightarrow 2$ výrazne rastie maximová aj integrálna odchýlka. Kompromisom sú prostredné hodnoty, napríklad $\omega = 1,4$ - nevyžaduje veľký počet iterácií a dosahuje dostatočnú presnosť. Ako sme overili aj v časti (5.1), táto voľba dosahuje takmer lineárnu konvergenciu.

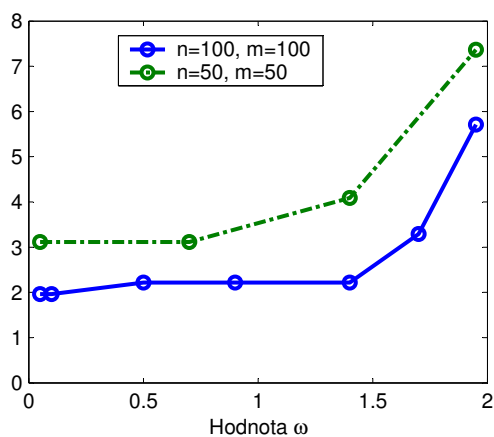
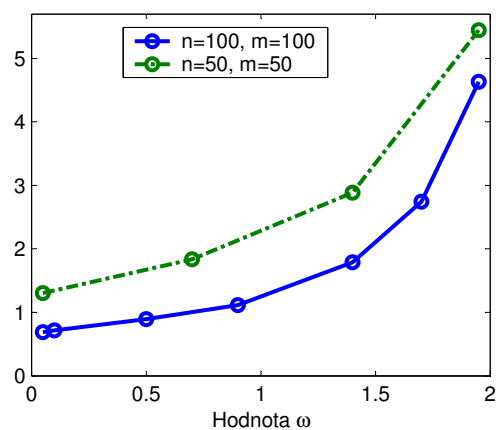
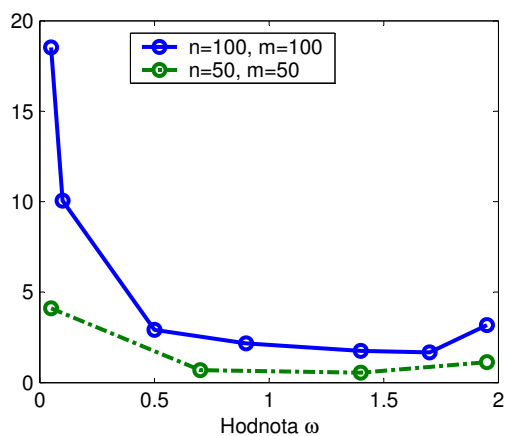
Pre porovnanie sme zostavili aj príklady, v ktorých približne rovnaký počet iterácií - prvá časť tabuľky (5.7) a rovnaký čas výpočtu - druhá časť tabuľky. Počte okolo 70 000 iterácií je možné dosiahnuť pri najväčšom rozmere $n = 500$ (keď $\omega = 1,4$). Toto nastavenie má najmenšiu maximovú odchýlku a takmer najmenšiu integrálnu. Aj v druhom prípade sa ako najvhodnejšie ukazujú $\omega = 1,4$ a $\omega = 0,7$.

Obr. 5.5: Vlastnosti riešení pri voľbe váh ω 

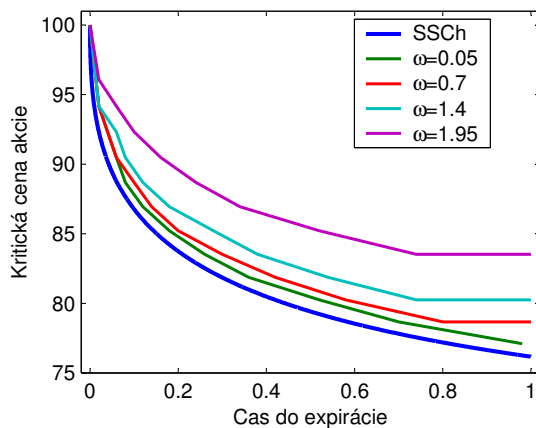
(a) Priemerný počet iterácií



(b) Celkový počet iterácií

(c) Odchýlka $\|\cdot\|_\infty$ (d) Odchýlka $\|\cdot\|_1$ 

(e) Čas trvania výpočtu

Obr. 5.6: Ukážka tvaru riešenia pre rôzne hodnoty parametra ω Tabuľka 5.6: Voľba parametra ω

| Parametre PSOR | | | | Počet iterácií | | Čas | Odchýlka | |
|----------------|-----|----------|-----|----------------|---------|-------|----------------------|---------------|
| n | m | ω | L | Priem. | Celkom | s | $\ \cdot\ _{\infty}$ | $\ \cdot\ _1$ |
| 100 | 100 | 0,05 | 1 | 2 348,3 | 234 830 | 18,53 | 1,965 | 0,687 |
| 100 | 100 | 0,1 | 1 | 1 211,9 | 121 185 | 10,06 | 1,965 | 0,714 |
| 100 | 100 | 0,5 | 1 | 219,0 | 21 902 | 2,92 | 2,218 | 0,894 |
| 100 | 100 | 0,9 | 1 | 94,6 | 9 459 | 2,17 | 2,218 | 1,116 |
| 100 | 100 | 1,4 | 1 | 34,0 | 3 397 | 1,75 | 2,218 | 1,790 |
| 100 | 100 | 1,7 | 1 | 39,5 | 3 947 | 1,67 | 3,291 | 2,742 |
| 100 | 100 | 1,95 | 1 | 273,1 | 27 307 | 3,17 | 5,710 | 4,634 |
| 50 | 50 | 0,05 | 1 | 1 378,3 | 68 914 | 4,11 | 3,115 | 1,304 |
| 50 | 50 | 0,7 | 1 | 80,9 | 4 043 | 0,69 | 3,115 | 1,838 |
| 50 | 50 | 1,4 | 1 | 18,9 | 945 | 0,55 | 4,089 | 2,884 |
| 50 | 50 | 1,95 | 1 | 286,3 | 14 316 | 1,13 | 7,364 | 5,444 |

| Parametre PSOR | | | | Počet iterácií | | Čas | Odchýlka | |
|----------------|-----|----------|-----|----------------|--------|-------|--------------------|---------------|
| n | m | ω | L | Priem. | Celkom | s | $\ \cdot\ _\infty$ | $\ \cdot\ _1$ |
| 50 | 50 | 0,05 | 1 | 1 378,3 | 68 914 | 8,8 | 3,115 | 1,304 |
| 240 | 240 | 0,7 | 1 | 292,5 | 70 203 | 40,4 | 1,361 | 0,427 |
| 500 | 500 | 1,4 | 1 | 141,9 | 70 974 | 136,1 | 0,960 | 0,464 |
| 245 | 245 | 1,95 | 1 | 285,6 | 69 976 | 54,1 | 4,384 | 3,649 |
| 50 | 50 | 0,05 | 1 | 1 378,3 | 68 914 | 3,73 | 3,115 | 1,304 |
| 120 | 120 | 0,7 | 1 | 162,8 | 19 533 | 3,67 | 1,958 | 0,844 |
| 140 | 140 | 1,4 | 1 | 46,3 | 6 488 | 3,17 | 1,953 | 1,403 |
| 95 | 95 | 1,95 | 1 | 273,8 | 26 014 | 3,44 | 5,710 | 4,624 |

Tabuľka 5.7: Rovnaký počet vnútorných iterácií / čas trvania výpočtu

5.4 Presnosť PSOR voľnej hranice

V predchádzajúcich častiach sme sa zamerali na využitie PSOR algoritmu pri výpočte hranice predčasnej expirácie. Zistili sme, že algoritmus funguje a dáva pomerne dobrú aproximáciu. Na druhej strane, úspešnosť silne závisí od voľby parametrov a vysoká presnosť má enormnú výpočtovú náročnosť.

Intuitívne najdôležitejším parametrom je hustota siete bodov - počet deliacich bodov časového intervalu m a dĺžka priestorového kroku L/n . Väčší počet deliacich bodov, resp. menšia dĺžka priestorového kroku dávajú presnejšie riešenie. Avšak dvojnásobný počet bodov m vyžaduje dvojnásobné trvanie výpočtu, polovičný priestorový krok predlžuje výpočet asi štvornásobne.

Kvalita riešenia je zvlášť citlivá na voľbu váhy ω . Nevhodou voľbou parametra ω môžeme výrazne zvýšiť počet vnútorných iterácií, to však nemusí implikovať zmenšenie chyby riešenia. Inou voľbou ω môžeme pri menšom počte iterácií dosiahnuť lepšie riešenie - avšak nie vždy.

Komplikácie spôsobuje aj fakt, že nemáme k dispozícii „presnú“ hodnotu hranice predčasnej expirácie, ktorá by nám mohla poslúžiť ako benchmark pri hľadaní optimálnej hodnoty parametrov PSOR. Pri našich porovnaníach sme používali hranicu vypočítanú pomocou SSCh numerickej metódy s 5120 bodmi. Nie je však jasné, či sa k presnej polohe voľnej hranice viac približuje PSOR alebo SSCh aproximácia, keďže použitím oboch metód vzniká určitá chyba.

Ďalší problém testovania presnosti PSOR súvisí s náročnosťou výpočtov. Pri voľbe veľkého rozmeru n a m výpočty trvajú veľmi dlho. Riešili sme niekoľko úloh s veľkými rozmermi, aby sme získali benchmarkovú PSOR hranicu predčasnej expirácie. Najpresnejšie

| Parametre PSOR | | | | | Čas trvania | Odchýlka | |
|----------------|--------|----------|-----|---------|-------------|--------------------|---------------|
| n | m | ω | L | L/n | | $\ \cdot\ _\infty$ | $\ \cdot\ _1$ |
| 1 280 | 1 280 | 1,4 | 1 | 0,00078 | 18 minút | 0,592 | 0,192 |
| 1 280 | 1 280 | 1,95 | 1 | 0,00078 | 15 minút | 1,780 | 1,636 |
| 10 000 | 20 000 | 1,9 | 1 | 0,00010 | 28 hodín | 0,176 | 0,154 |
| 4 000 | 2 000 | 1,4 | 1 | 0,00025 | 8 hodín | 0,333 | 0,072 |
| 5 000 | 10 000 | 1,4 | 0,4 | 0,00008 | 47 hodín | 0,238 | 0,024 |

Tabuľka 5.8: Výpočty s veľkou presnosťou (benchmark SSCh-5120)

z nich sú v tabuľke (5.8). Najmenšia dosiahnutá odchýlka od SSCh-5120 v integrálnej norme bola na úrovni 0,02, čo je stále pomerne veľa, hoci počítaču výpočet trval takmer 2 dni.

Hľadať „úplne presnú“ PSOR aproximáciu hranice predčasnej expirácie už však prekračuje rámec tejto diplomovej práce. Zároveň to však môže byť zaujímavý námet pre ďalších riešiteľov - zamerať sa na výpočet PSOR hranice predčasného uplatnenia s veľmi vysokou presnosťou a to, ako ju optimálne dosiahnuť.

Záver

Americké call a put opcie patria medzi najčastejšie obchodované finančné deriváty. Avšak ani dnes, 35 rokov od vzniku prelomovej Black-Scholesovej teórie oceňovania opcií, nepoznáme presné analytické vyjadrenie ceny americkej opcie.

Diplomová práca sa zaoberá oceňovaním americkej put opcie, nosnú časť tvorí hľadanie hranice jej predčasného uplatnenia. V práci sme sa zaoberali rôznymi analytickými a numerickými aproximáciami, ktoré sme navzájom porovnávali.

Z analytického hľadiska sme sa zamerali najmä na Stamicara a kol. [13] a Zhua [17]. Druhá kapitola popisuje hlavné myšlienky oboch článkov.

Zhrňme aj numerické výsledky práce. Najdôležitejším prínosom je odvodenie novej numerickej schémy SSCh na výpočet voľnej hranice americkej put opcie. Táto vychádza zo sústavy rovníc (2.4)-(2.6) podľa článku [13], ktorú riešime v jednotlivých časových krokoch hľadaním nulového bodu funkcie.

V štvrtej kapitole sme sa venovali porovnávaníu vypočítaných polôh voľnej hranice. Ako benchmark nám poslúžila hranica vypočítaná PSOR metódou s vysokým stupňom presnosti. Porovnali sme jednotlivé analytické aproximácie v krátkodobom horizonte. Ukázalo sa, že Zhuova aproximácia má odchýlku okolo 2%. V dlhšom časovom horizonte analytické aproximácie pre malé $\tau \rightarrow 0^+$ nemožno použiť, zatiaľ čo Zhu, numerické SSCh aj PSOR majú približne rovnaké výsledky.

Piata kapitola je zameraná na porovnanie presnosti PSOR metódy pri výpočte voľnej hranice v závislosti od voľby parametrov. Ako benchmark sme použili hranicu vypočítanú metódou SSCh s veľkým počtom deliacich bodov.

Ak máme zhrnúť celú prácu - ťažisko tvorí vyčerpávajúce porovnanie jednotlivých analytických aproximácií a numerických metód pri výpočte hranice predčasnej expirácie americkej put opcie. To bolo aj cieľom práce. Preto môžeme konštatovať, že cieľ práce sa nám podarilo splniť.

Literatúra

- [1] Black F., Scholes M.: *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Political Economy 81 (1973), 637-654.
- [2] Bunch D. S., Johnson H.: *The American Put Option and Its Critical Stock Price*, The Journal of Finance 55, No. 5 (2000), 2333–2356.
- [3] Evans J. D., Kuske R., Keller J. B.: *American options on assets with dividends near expiry*, Mathematical Finance 12 (2002), 219–237.
- [4] Hull J. C.: *Options, Futures and Other Derivative Securities*, Prentice Hall (1989).
- [5] Kuske R., Keller J. B.: *Optimal exercise boundary for an American put option*, Applied Mathematical Finance 5 (1998), 107–116.
- [6] Kwok Y. K., Wu L.: *A Front-Fixing Finite Difference Method for the Valuation of American Options*, The Journal of Financial Engineering 6 (1997), 83–97.
- [7] Kwok Y. K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer Finance, Singapore (1998).
- [8] Mallier R.: *Evaluating approximations to the optimal exercise boundary for American options*, Journal of Applied Mathematics 2 (2002), 71–92.
- [9] Mallier R., Alobaidi G.: *The American put option close to expiry*, Acta Math. Univ. Comenianae 73 (2004), 161-174.

- [10] Melicherčík I., Olšanová L., Úradníček V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, Epos, Bratislava (2005).
- [11] Pírko Z., Veit J.: *Laplaceova transformace*, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha (1970).
- [12] Rodolfo K.: *A comparative study of American option valuation and computation*, PhD. Thesis, University of Sydney (2007).
- [13] Stamicar R., Ševčovič D., Chadam J.: *The early exercise boundary for the American put near expiry*, *Canad. Appl. Math. Quarterly* 7 (1999), 427–444.
- [14] Ševčovič D.: *Analysis of the free boundary for the pricing of an American call option*, *Euro. Jnl of Applied Mathematics* 12 (2001), 25–37.
- [15] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Nakladateľstvo STU, Bratislava (2009).
- [16] Vitásek E.: *Numerické metódy*, SNTL - Statní nakladatelství technické literatury, Praha (1987).
- [17] Zhu S. P.: *A new analytical approximation formula for the optimal exercise boundary of American put options*, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 9, No. 7 (2006), 1141–1177.
- [18] Zhu S. P., He Z. W.: *Calculating the early exercise boundary of American put options with an approximation formula*, *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 10, No. 7 (2007), 1203–1227.
- [19] Zhu S. P.: *A Simple Approximation Formula For Calculating the Optimal Exercise Boundary of American Puts*, Preprint (2008).

Prílohy

A. Zdrojové kódy metódy SSCh (Matlab)

eta.m

```
function [ nn ] = eta( t, Ft )
global k;
nn = - log ( sqrt(pi) * k .* sqrt( t ) .* exp (k.*t) .* (1- Ft./sqrt(pi)));
nn(nn<0) = 0;
nn = - sqrt ( nn );
```

Fn.m

```
function [ ff] = F( t )
%F(.) calculated according to Newton-Cotes
n_=1000;
global f_t n sigma T;

for j=1:length(t)
    f_t = t(j);
    ff(j) = 2*Newton(0,pi/2,n_);
end

function [sum] = Newton(a,b,n)
global f_t etatau tau T;
d = (b-a)/n;
i=0:0.25:n;
xx = 4*i+1;
x = a+i*d;
Fp(xx) = Fpod(x);

sum = 7*Fp(1) + 7*Fp(4*n+1)
    + Fp(2:4*n) * (20*mod((1:4*n-1),2)+12 + 2*floor(mod((1:4*n-1)-1,4)/3))';
sum = sum*d/90;
```

```
function [ ffpod ] = Fpod( x)
global k; global f_t;
gg=g(f_t,x);
ffpod = exp ( -k * f_t .* (cos(x).^2)-(gg.^2)).* ( sqrt(f_t) .* sin(x) + gg .* tan(x));
```

g.m

```
function [ gg ] = g( t, x )
global etatau tau n T;

jei = round(t2index(t));
jei(jei>n) = n;
etatau1 = etatau( jei );

tsin = t.*(sin(x).^2);
i = t2index(tsin);

% najdenie vhodnych bodov (lavy a pravy okraj)
left=floor(i);
right=ceil(i);

% osetrime krajne pripady
left(left<1) = 1;
left(left>n) = n;
right(right<1) = 1;
right(right>n) = n;
right(left==1) = 2;
left(right==n) = n-1;
right(tau(left)==tau(right)) = right(tau(left)==tau(right))+1;

lambda = (tsin - tau(left))./(tau(right)-tau(left));
etatau2 = etatau(left).*(1-lambda) + etatau(right) .*lambda;

gg = ( etatau1 - sin(x).*etatau2 ) ./ cos(x);
```

t2index.m

```
function [ i ] = t2index( t )
% t2index prevedie cas "t" na index v poli casov
global T n;
%verzia s rovnomernymi casovymi rozostupmi
%i = n*(t/T);
```

```
%verzia s nerovnomernymi rozostupmi
i = n*sqrt(t/T);
if(i>n) i = n; end;
```

index2t.m

```
function [ t ] = index2t( i )
% t2index prevedie index v poli casov cas "t"
global T n;
%verzia s rovnomernymi casovymi rozostupmi
%t = T * (i/n);
```

```
%verzia s nerovnomernymi rozostupmi
t = T * (i/n).^2;
```

diff_from_zero.m

```
function [ d ] = diff_from_zero( x )
% diff_from_zero - pocita odchylku aktualnej hodnoty F_i od F(\eta(F_i))

global t_time t_it etatau;

etatau(t_it) = eta(t_time,x);
Fx = Fn(t_time);

%rozdiel
d = Fx-x;
```

root_sschr.m - hlavný program

```
% SSCh metoda vypoctu hranice predcasnej expiracie
% hlavny program

clear all;
global k T etatau tau n tau_;

r = 0.1;           % urok
sigma = 0.3;      % volatilita
k = 2*r/(sigma^2); % konstanta k

T = 1;           % doba do expiracie - 1 rok
n = 200;        % pocet deliacich bodov
```

```
%preskalovanie casu
T = T * sigma^2/2;

i = 1:n;

tau = index2t(i);
tau_ = 2*tau/(sigma^2);

global t_time t_it etatau Ftau;
Ftau = tau*0;

for it=1:length(tau)
    disp(it);
    t_it = it;
    t_time = tau(it);

    etatau = eta(tau,Ftau);

    % Pociatocny bod k hladaniu nuloveho bodu
    if(it>1)    x0 = Ftau(it-1);
    else       x0 = 0;
    end;
    % Hladanie nuloveho bodu
    [X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT] = fzero(@diff_from_zero,x0);
    % Ulozenie aktualnej hodnoty
    Ftau(it) = X;
end;

etatau = eta(tau,Ftau);
rho = 100*exp(-(k-1)*tau).*exp(2*sqrt(tau).*etatau);

%%% Graficke zobrazenie vysledkov %%%
plot(tau_, Ftau, 'LineWidth',2)
xlabel('Cas do expiracie \tau=T-t'); ylabel('F(\tau)');

plot(tau_, etatau, 'LineWidth',2)
xlabel('Cas do expiracie \tau=T-t'); ylabel('\eta(\tau)');

plot(tau_, rho, 'LineWidth',2)
xlabel('Cas do expiracie \tau=T-t'); ylabel('\rho(\tau)');
```

B. Zdrojové kódy metódy PSOR (Matlab)

put.m - výpočet hranice predčasnej expirácie

```
function [tau,Sf] = put(T,n,m,omega,hranicneL)
% [tau,Sf] = put(T,n,m,omega,hranicneL)
% numericky vypocet hranice predcasnej expiracie pre americke put opcie

% globalne parametre
global E; global r; global sigma; global D;

% Americka put opcia
E=100;      % expiracna cena 100\$
r=0.1;      % uroková miera: 10 percent
D=0.00;     % dividendová miera: 0 percent
sigma=0.3;  % volatilita akcie: 0.3

% transformacne parametre
global L; global alfa; global beta;
L=hranicneL;
alfa = (r-D)/(sigma^2)-1/2;
beta = (r+D)/2+(sigma^2)/8+(r-D)^2/(2*sigma^2);

% vypocet velkosti krokov
h=L/n;
k=T/m;

% vektor bodov x
xsi = -L : h : L;
lx = length(xsi);
S = E * exp(xsi);
% vektor casovych bodov
tau = 0 : k : T;

% vektor riesenia
ries = zeros(length(xsi),1);

% pociatocna podmienka
for j = 1:length(xsi)
    ries(j,1) = u0(xsi(j));
end;

gamma = 0.5*sigma^2*k/(h^2);
```



```

a = - gamma;
b = 1 + 2*gamma;
N = lx-2; %dlzka vektora rieseni u
Sf = [100]; % pociatocna poloha hranice predcasnej expiracie
for it = 2 : length(tau)

    % okrajove podmienky
    ries(1,1) = max ( phi(tau(it)) , TP(-L, tau(it) ) );
    ries(length(xsi),1) = max( psi(tau(it)), TP(L, tau(it) ) );

    % prava strana
    b_ps = ries(2:lx-1,1) + gamma * [phi(tau(it)); zeros(lx-4,1); psi(tau(it))];

    %predchadzajuca iteracia
    u = ries(2:lx-1,1);

    %zvysime, ak by bola pod transformovanim payoffom
    for i = 1:N
        u(i) = max( u(i), TP(xsi(i+1), tau(it)) );
    end;

    v = 0*u-1;
    trasfpayoff = TP(xsi(2:N+1)', tau(it)); %transformovany payoff

    while ( norm(v-u) > 1e-8 )
        v = u; % predosla vnutorna iteracia

        u(1) = u(1)*(1-omega) + omega/b * ( b_ps(1) + gamma * u(2) );
        for i = 2:N-1
            u(i) = u(i)*(1-omega) + omega/b * ( b_ps(i) + gamma * (u(i-1) + u(i+1))) );
        end;
        u(N) = u(N)*(1-omega) + omega/b * ( b_ps(N) + gamma * u(N-1) );

        u = max(u,trasfpayoff);
    end;

    %aktualne riesenie
    ries(2:lx-1, 1) = u;

    %vypocet volnej hranice v aktualnej casovej vrstve
    %transformovana cena opcie
    V_ = (exp(-alfa*xsi)' * exp(-beta*tau(it))) .* ries(:,1);
    V_ = V_';

```

```

%rozdiel oproti payoffu
Dd = V_ - max(0, 100-S);

%hodnota volnej hranice
Sf(it) = min(S(Dd>1e-8));
end;

%pociatocna podmienka
function u = u0(x)
global alfa; global E;
% u = E*exp(alfa*x)*max(0, exp(x)-1);
u = E*exp(alfa*x)*max(0, 1-exp(x));

%okrajova podmienka S->0
function p = phi(tau)
global L; global E; global D; global alfa; global beta; global r;
x=-L;
p = exp(alfa*x+beta*tau)*E*(-exp(x)*exp(-D*tau)+exp(-r*tau));

%okrajova podmienka S->infty
function ps = psi(tau)
global L; global E; global D; global alfa; global beta; global r;
ps=0;

%transformovany pay off
function t = TP(x, tau)
global alfa; global beta; global E;
t = exp(alfa*x+beta*tau)*E.*max(1-exp(x), 0);

```

remove_duplicates.m

```

function [t_out,s_out] = remove_duplicates(t_in,s_in)
% [t_out,s_out] = remove_duplicates(t_in,s_in)
% funkcia vyberie len potrebne body - s novou hodnotou

t_out = t_in(1);
s_out = s_in(1);

j=2;

```

```
for i=2:length(t_in)
    if(s_in(i)<s_in(i-1))
        t_out(j) = t_in(i);
        s_out(j) = s_in(i);
        j = j+1;
    end;
end;

t_out(j) = t_in(length(t_in));
s_out(j) = s_in(length(t_in));
```

root_psor.m - hlavný program

```
%vypocet hranice predcasnej expiracie metodu PSOR
```

```
tic
```

```
[t,s] = put(1,100,100,1.4,1)
[t,s] = remove_duplicates(t,s)
```

```
plot(t,s)
```

```
toc
```