

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



**Model dôchodkového sporenia minimalizujúci
koncové riziko
a implementácia CPPI stratégie**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2009

Jana Míšaná

Model dôchodkového sporenia minimalizujúci koncové riziko a implementácia CPPI stratégie

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Jana Míšaná

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Vedúca diplomovej práce: Mgr. Soňa Kilianová, PhD.

BRATISLAVA 2009

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím nadobudnutých vedomostí, konzultácií a uvedenej literatúry.

Jana Míšaná

Ďakujem svojej vedúcej diplomovej práce Mgr. Soni Kilianovej, PhD. za odborné vedenie, pripomienky a cenné rady, ktoré mi pomohli pri tvorbe tejto práce.

Abstrakt

Dôchodkový systém na Slovensku je od januára 2005 postavený na troch pilieroch. V práci sa bližšie zaujímame o 2. pilier a jeho možnosti. Cieľom práce je pomôcť sporiteľom, aby sa správne rozhodli pri sporení, ukladaní a zhodnocovaní svojich úspor na dôchodok. Sporiteľ pozná svoju očakávanú koncovú hodnotu, ktorú si želá so svojimi investíciami dosiahnuť. Na jeho optimálne rozhodnutie, kam peniaze investovať, slúži model, ktorý minimalizuje koncové riziko jeho investícií pri danej cieľovej sume. Práca ďalej popisuje aplikáciu zabezpečovacej stratégie (CPPI) na model. Teória je doplnená konkrétnymi príkladmi.

Kľúčové slová: dôchodkový systém, value-at-risk, average value-at-risk, TRMM model, CPPI

Abstract

The three-pillar pension system in Slovak Republic was adopted in January 2005. This master thesis discusses second pillar and its possibilities. The goal of this thesis is to help savers to make right decisions in saving their money and appreciation of their savings for retirement. A future pensioner knows his terminal target wealth he wants to achieve with his investments. A model is instrumental in determining an optimal strategy how to invest savings which minimizes the uncertainty of achieving the target amount. We proceed further with application of insurance method (CPPI) on model. We also introduce some specific examples of this theory.

Keywords: pension system, value-at-risk, average value-at-risk, TRMM model, CPPI

Obsah

Abstrakt	3
Úvod	5
1 Dôchodkový systém na Slovensku	8
1.1 Starobné dôchodkové sporenie - druhý pilier	8
2 Miery rizika	12
2.1 Value-at-Risk	12
2.2 Average Value-at-Risk	15
3 Matematický model dôchodkového sporenia	19
3.1 Motivácia a pôvodný TRMM model	19
3.2 Redukovaný TRMM model	21
3.3 Lineárne obmedzenia	21
3.3.1 Účelová funkcia	23
3.3.2 Reprezentácia pomocou stromu	23
3.3.3 Existencia riešenia	27
3.3.4 Príklad	29
3.4 Nelineárne obmedzenia	33
3.4.1 Príklad	37
4 Model so zabezpečovacou stratégiou	40
4.1 CPPI	41
4.2 Aplikácia CPPI stratégie na redukovaný TRMM model - lineárne obmedzenia	41
4.2.1 Príklad	44
4.3 Zhrnutie výsledkov - lineárne obmedzenia	46
4.4 Aplikácia CPPI stratégie na redukovaný TRMM model - nelineárne obmedzenia	48
4.4.1 Príklad	50
4.5 Zhrnutie výsledkov - nelineárne obmedzenia	52
Záver	53
Referencie	55
Príloha	58

Úvod

V práci sústredíme pozornosť na druhý pilier dôchodkového systému, na starobné dôchodkové sporenie. Uvažujeme sporiteľa, ktorý hľadá optimálne rozloženie svojich investícií do jednotlivých fondov dôchodkového sporenia. Pozná cieľovú hodnotu svojich úspor a chce minimalizovať koncové riziko, s ktorým danú sumu dosiahne. Naše úvahy spracováva v práci popísaný matematický model, ktorý uvažuje pravidelné ročné príspevky sporiteľa, jeho očakávanú cieľovú hodnotu a súčasne minimalizuje koncové riziko úspor. Aby sme preskúmali model, aplikujeme naň zabezpečovaciu stratégiu používanú správcami aktív aj na Slovensku. Ku každej uvažovanej stratégii sporenia na dôchodok uvádzame konkrétny príklad.

Na začiatku práce sa oboznámime s tým, ako funguje dôchodkový systém na Slovensku. Ten je od 1. januára 2005 postavený na troch pilieroch. Keďže sa budeme venovať modelu dôchodkového sporenia, zameriame sa na fungovanie druhého piliera. Druhý pilier predstavuje starobné dôchodkové sporenie. Predstavíme si tri dôchodkové fondy, z ktorých si sporiteľ na základe svojho postoja k riziku vyberá. Každý z týchto fondov má istý podiel akcií, dlhopisov a nástrojov finančného trhu, a preto je každý inak rizikový. V súčasnosti je druhý pilier otvorený, čo znamená, že sporiteľ môže do druhého piliera vstúpiť, ale aj z neho vystúpiť.

V kapitole miery rizika sa oboznámime s pojmami potrebnými na porozumenie modelu. Predstavíme si hlavné typy rizík a bližšie si opíšeme riziko trhové. V posledných rokoch sa synonymom pre trhové riziko stala value-at-risk (VaR). V podkapitole VaR si uvedieme základnú definíciu, ako aj najznámejšie odhady, ktorými sa odhad VaR určuje. Vysvetlíme si pojem average value-at-risk (AVaR). Mieru rizika average value-at-risk deviation (AVaRD) vyjadrenú matematicky budeme neskôr v modeli minimalizovať na dosiahnutie minimálneho rizika investícií investora v dôchodkových fondoch.

Po oboznámení sa s jednotlivými pojmami sa v ďalšej kapitole dostávame k samotnému modelu dôchodkového sporenia. Model slúži na minimalizáciu rizika koncovej hodnoty, ktorú chce investor dosiahnuť v určitom časovom období. Táto sa dosiahne rozložením dostupných prostriedkov do jednotlivých fondov dôchodkového sporenia s prihliadnutím na ich riziko. To, aký podiel

prostriedkov treba vložiť do ktorého fondu, je výsledkom samotného modelu. Matematický model dôchodkového sporenia, popísaný v literatúre [7] a [6], je všeobecný, uvažuje investovanie do viacerých druhov fondov. Na Slovensku sú však zatiaľ dostupné len tri fondy s rozdielnym podielom investovania do akcií. Model sa uvažovaním viacerých fondov stáva zbytočne náročným. My budeme uvažovať v práci obmenu tohto modelu, jeho zjednodušenie. Dostupné prostriedky budeme istým podielom investovať len do akcií a do dlhopisov. Týmto pokryjeme úvahy investovania do troch fondov slovenského doplnkového dôchodkového systému.

Hlavnou úlohou modelu je nájsť optimálne rozloženie prostriedkov v akciách a dlhopisoch tak, aby sme pri minimálnom riziku dosiahli investorom stanovenú cieľovú hodnotu jeho úspor. Túto hodnotu si investor vopred určí s prihliadnutím na príspevky, ktoré každoročne vkladá do akcií a dlhopisov. Do úvahy musí brať aj reálnu výnosnosť finančných nástrojov. Výnosnosť akcií je v modeli, tak ako aj v skutočnosti, náhodný proces. Keď je cieľová hodnota určená, model minimalizuje riziko, s akým sa dosiahne cieľová suma na konci stanoveného časového úseku. Určí optimálnu stratégiu investora, teda ako rozdeliť prostriedky, ktoré má k dispozícii, medzi akcie a dlhopisy. V práci sa zaoberáme aj obmenou modelu, kedy sa investor nerozhoduje o prerozdeľovaní prostriedkov každý rok, ale rozhodne sa na začiatku určitého časového úseku a váhy jeho rozhodnutí sa zachovávajú pri prerozdeľovaní počas daného časového úseku. Pri oboch typoch modelov uvádzame praktický príklad, ako model funguje.

Na trhu však v dnešnej dobe existujú rôzne zaistovacie stratégie, ktoré napomáhajú dosiahnuť stanovenú hodnotu. V kapitole CPPI, constant proportion portfolio insurance, sa budeme venovať jednej z nich. Vysvetlíme si, ako táto zaistovacia stratégia funguje a zahrnieme ju do modelu. Vytvoríme obmenu modelu uvažujúc stratégiu CPPI. V modeli sa nám zmenia vzťahy na výpočet úspor v nekoncových uzloch, ktoré budú brať do úvahy spodnú hranicu, pod ktorú investor so svojimi úsporami nechce klesnúť. Práve optimálna hodnota tejto spodnej hranice v každom časovom úseku je výsledkom simulácie. Do modelu zahrnieme aj investorov postoj k riziku reprezentovaný multiplikátorom. Aj v modeli s CPPI stratégiou vytvoríme obmenu, v ktorej neuvažujeme prerozdeľovanie investícií každý rok sporenia na dôchodok, ale investor prerozdeľuje svoje investície len raz za daný časový úsek. Taktiež

v tejto časti uvádzame príklady fungovania modelu s aplikáciou zaistovacej stratégie CPPI.

V závere práce sú zhrnuté a porovnané výsledky dosiahnuté použitím modelov na príkladoch.

1 Dôchodkový systém na Slovensku

V tejto kapitole si zhrnieme momentálny dôchodkový systém na Slovensku. V podkapitole si priblížime fungovanie druhého piliera, jeho základné princípy a terajšie možnosti. Pre ilustráciu uvedieme niektoré fakty z tejto oblasti. Informácie sú čerpané z [26].

Dôchodkový systém na Slovensku je od januára 2005 postavený na troch pilieroch.

Prvý pilier predstavuje dôchodkové poistenie, ktoré vykonáva Sociálna poisťovňa. Ide o priebežný dôchodkový systém. Občania, ktorí sú zapojení len do 1. piliera, platia na starobné poistenie (ide o súčasť dôchodkového poistenia) poistné Sociálnej poisťovni vo výške 18% z vymeriavacieho základu (ak sú to zamestnanci tak 9% im zráža zamestnávateľ zo mzdy a 9% im platí zamestnávateľ z vlastných zdrojov).

Druhý pilier predstavuje starobné dôchodkové sporenie, ktoré vykonávajú dôchodkové správcovské spoločnosti (DSS). Ide o súkromný, tzv. kapitalizačný pilier. Občania, ktorí sa zapojili aj do 2. piliera, si platia 9% na starobné poistenie do Sociálnej poisťovne a 9%, (t.j. polovicu povinných odvodov) do vybranej DSS (u zamestnancov platí 9% na starobné dôchodkové sporenie zamestnávateľ za svojich zamestnancov). Každý občan má svoj osobný dôchodkový účet vo vybranej správcovskej spoločnosti.

Tretím pilierom je doplnkové dôchodkové sporenie, ktoré vykonávajú doplnkové dôchodkové spoločnosti. Je dobrovoľný a štát ho podporuje daňovými úľavami.

1.1 Starobné dôchodkové sporenie - druhý pilier

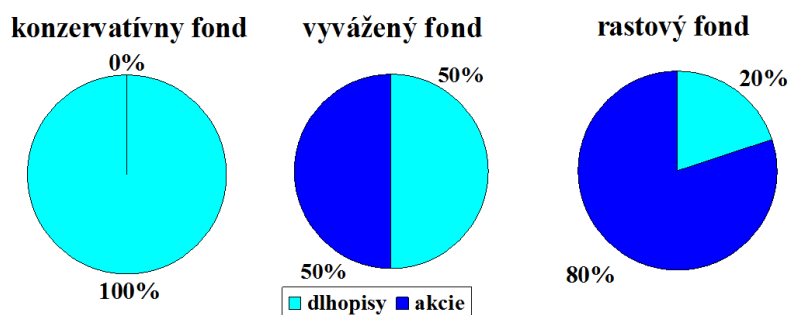
Zavedenie druhého piliera dôchodkového systému prinieslo zásadnú zmenu - možnosť sporiť si na dôchodok na súkromnom dôchodkovom účte v dôchodkovej správcovskej spoločnosti. Peniaze na účte sa prostredníctvom dôchodkových fondov investujú a zhodnocujú tak, aby ich hodnota postupne rástla. Nasporené peniaze na dôchodkovom účte sú investorovým majetkom a podliehajú dedeniu. Výška dôchodku tak závisí od počtu odpracovaných rokov, zárobkov občana počas celého života, ale hlavne od investovania a zhodnotenia peňazí v dôchodkových fondoch (na osobnom dôchodkovom účte

v DSS) - od vývoja na finančných trhoch a od výnosov fondu/fondov, v ktorých si občan na svoj dôchodok sporí. Občan tak dostáva svoj dôchodok z dvoch zdrojov - prvú časť zo Sociálnej poisťovne a druhú časť z DSS.

Odvody na dôchodkovom účte sa investujú vo vybratých dôchodkových fondoch. Informácie o fondoch starobného dôchodkového sporenia sú z internetovej stránky [23]. Na Slovensku každá DSS povinne spravuje tri typy dôchodkových fondov: **konzervatívny dôchodkový fond**, **vyvážený dôchodkový fond** a **rastový dôchodkový fond**. Fondy sa odlišujú hlavne mierou rizikovosti a investičnými limitmi, ktoré sú pre jednotlivé fondy zákonne povolené. Zákonná regulácia maximalizuje mieru bezpečnosti investovania a optimalizuje výšku zhodnotenia peňazí na dôchodkovom účte občanov. Občan si podľa svojho vzťahu k riziku vyberie jeden z fondov a prostredníctvom neho zhodnocuje svoje peniaze.

- Konzervatívny dôchodkový fond - majetok musí byť investovaný len do dlhopisov a peňažných investícií. Predstavuje najnižšiu mieru rizika, ale aj najnižšiu možnosť dosiahnutia potenciálneho výnosu. Tento fond sa odporúča pre vyššie vekové skupiny občanov a na kratšie obdobie sporenia. Všetci sporitelia, ktorí majú 7 rokov pred odchodom do dôchodku, musia do tohto fondu prestúpiť povinne podľa zákona.
- Vyvážený dôchodkový fond - až 50% môže byť investovaných do akcií a min. 50% musí byť investovaných do dlhopisov a peňažných investícií. Tento fond je určený pre občanov, ktorí chcú zhodnocovať svoje finančné prostriedky v strednodobom horizonte, poskytuje stabilný výnos pri primeranej miere rizika.
- Rastový dôchodkový fond - až 80% majetku môže byť investovaných do akcií. Fond je určený predovšetkým pre najmladších sporiteľov, občanov, ktorí majú 15 a viac rokov do dôchodku, a ktorí budú dlhodobo zhodnocovať svoje finančné prostriedky. Z trojice dôchodkových fondov je najviac rizikový, ale poskytuje najvyššiu mieru zhodnotenia prostriedkov.

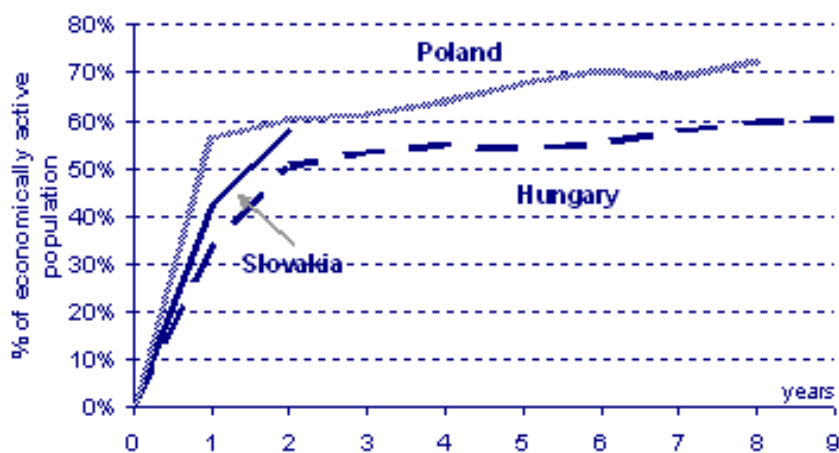
Dôchodkové fondy sa skladajú z určitého podielu akcií, dlhopisov a nástrojov peňažného trhu. Podiel akcií a dlhopisov v jednotlivých fondoch je zobrazený na Obrázku 1. Namiesto troch fondov by sme teda pokojne mohli uvažovať



Obr. 1: Tri typy dôchodkových fondov

len investovanie do akcií a investovanie do dlhopisov. O tento poznatok sa opierame ďalej v kapitole 3.2.

Do 2. piliera sa mohli do júla 2006 dobrovoľne zapojiť všetci ľudia v produktívnom veku. Učinilo tak vyše 1,3 milióna ekonomicky aktívnych občanov. Ich úspory v tomto období boli takmer 20 mld. Sk. Ako vidíme na Obrázku 2,



Obr. 2: Za 2 roky od vzniku (1.1.2005) vstúpilo do druhého piliera na Slovensku takmer 60% ekonomicky aktívnych občanov (Zdroj: [26]).

za 2 roky od otvorenia druhého piliera (1.1.2005) doň vstúpilo takmer 60% ekonomicky aktívnych občanov. K 30. júnu 2007 sa úspory zdvojnásobili a počet sporiteľov stúpol na 1,546 milióna. Druhý pilier sa znovu otvoril od 1. januára do 30. júna 2008. Zo systému za toto obdobie vystúpilo 103 500 ľudí a 21 249 vstúpilo. K 1.7.2008 teda bolo v druhom pilieri 1 476 373

občanov. 15. novembra 2008 ho vláda znovu otvorila a zostane otvorený až do 30. júna 2009. Do 13. januára z neho stihlo vystúpiť 2 536 sporiteľov. Číselné údaje sú čerpané z [24] a [22].

2 Miery rizika

V tejto kapitole sa oboznámime s typmi rizika na dnešnom trhu, predstavíme si najpoužívanejší nástroj na meranie trhového rizika a uvedieme pojem average value-at-risk deviation, ktorý neskôr využijeme na meranie rizika v modeli.

Každý účastník finančných trhov nesie so svojím obchodom určité riziko. Riziko je vlastne miera neistoty z budúcich čistých výnosov. Ak do niečoho investujeme svoje peniaze, tak automaticky podstupujeme riziko, že sa nám investícia nevráti. Manganeli v článku [11] zdefinoval štyri hlavné typy rizík.

- Kreditné riziko (credit risk) – predstavuje odhad možnej straty v dôsledku neschopnosti protistrany splniť svoje záväzky. Zahŕňa v sebe pravdepodobnosť nesolventnosti a stratu v prípade, ak by k nej došlo.
- Operačné riziko (operational risk) – riziko straty spôsobenej nevhodným alebo neúspešným interným procesom, pracovníkmi a systémami alebo vonkajšími udalosťami (prírodné katastrofy, zlyhanie operačných systémov, zlyhanie ľudského faktora).
- Riziko likvidity (liquidity risk) – vzniká z neschopnosti firmy kryť svoje nelikvidné aktíva. Je spôsobené neočakávaným veľkým záporným tokom peňazí v krátkodobom horizonte. Ak má firma prevažne nelikvidné aktíva a náhle potrebuje likvidné, podstupuje riziko, že bude donútená predať časť svojich aktív za zníženú cenu.
- Trhové riziko (market risk) – odhaduje neistotu budúcich výnosov, ktorá je výsledkom zmien v trhových podmienkach (napr. ceny aktív, úrokové miery, menové kurzy).

V modeli budeme minimalizovať trhové riziko, preto sa v nasledujúcich podkapitolách budeme venovať možnostiam ako ho merať.

2.1 Value-at-Risk

Najvýznamnejším z rizík v obchodovaní je trhové riziko. Odráža potenciálnu ekonomickú stratu spôsobenú znížením trhovej ceny portfólia.

Value-at-risk (VaR) je v súčasnosti jeden z najbežnejších nástrojov na meranie trhového rizika. Stala sa mierou, ktorú finanční analytici používajú

na výpočet rizika. V článku [11] je VaR definovaná pre náhodnú premennú straty. Pozmenením definície pre náhodnú premennú zisku je VaR definovaná ako hodnota najmenšieho možného zisku, ktorý môžeme dosiahnuť s vopred danou pravdepodobnosťou a vo vopred zadaný časový horizont. Tento finančný nástroj získal veľkú popularitu medzi finančnými profesionálmi. Stal sa obľúbeným nástrojom rizikového manažmentu finančných inštitúcií. Je to vďaka jeho koncepcnej jednoduchosti. VaR zahŕňa všetky zložky trhového rizika daného portfólia do jedného čísla.

Definícia 2.1.1. [15] *Value-at-risk* $VaR_\alpha(Y)$ náhodnej premennej zisku Y s distribučnou funkciou F a hladinou spoľahlivosti α , $0 < \alpha \leq 1$, je definovaná ako α -kvantil $F^{-1}(\alpha)$:

$$VaR_\alpha(Y) = F^{-1}(\alpha) = \inf\{u; F(u) \geq \alpha\}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Value-at-risk odchýlka (value-at-risk deviation) náhodnej premennej Y s hladinou spoľahlivosti α je definovaná ako

$$VaRD_\alpha(Y) = \mathbb{E}(Y) - VaR_\alpha(Y), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

$VaRD_\alpha$ môže nadobúdať aj záporné hodnoty.

Z matematického hľadiska je value-at-risk podľa [5] definovaná ako jednostranný interval spoľahlivosti potenciálnych ziskov hodnoty portfólia počas špecifikovanej doby držania:

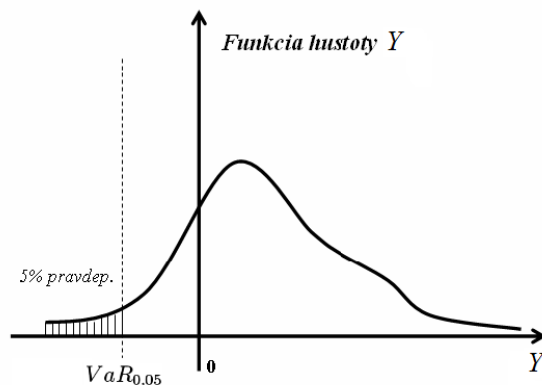
$$P(Y \leq VaR_\alpha) = \alpha,$$

kde P je pravdepodobnosť, Y zisk, VaR_α hodnota v riziku a α je hladina spoľahlivosti.

Pre ilustráciu, nech hladina spoľahlivosti je $\alpha = 0,01$. Znamená to, že s pravdepodobnosťou 99% nebude na konci časového horizontu zisk z hodnoty portfólia nižší ako $VaR_{0,01}$.

Poznamenajme, že v literatúre je často značenie rozdielne. Pri hladine spoľahlivosti α niektorí autori uvažujú VaR_α a iní $VaR_{1-\alpha}$. Jedná sa však o tú istú hodnotu. Aby nedošlo k nedorozumeniu, my v tejto práci budeme uvažovať VaR_α .

Ako uvádza [8], v praktických aplikáciách sa pri výpočte VaR uvažujú nasledujúce faktory:



Obr. 3: Value-at-risk potenciálneho zisku s hladinou spoľahlivosti $\alpha = 0,05$ (Zdroj: [19]).

- Hladina spoľahlivosti - ide o vopred danú pravdepodobnosť $p = 1 - \alpha$, s ktorou určujeme odhadovaný zisk. Najčastejšie sa používa $\alpha = 0,01$ a $\alpha = 0,05$, značíme $VaR_{0,01}$ resp. $VaR_{0,05}$. Znamená to teda, že pravdepodobnosť, že reálny zisk bude väčší ako VaR_{α} , je $(1 - \alpha) * 100\%$. Ak si zvolíme vyššiu hladinu spoľahlivosti α , tak aj VaR_{α} je vyšší.
- Časový horizont – znamená čas, na ktorý je VaR odhadnutá, za predpokladu, že sa nezmenilo portfólio. Obvykle sa hovorí o 1-dňovej VaR, alebo o 10-dňovej VaR. Nie sú však vylúčené ani iné časové obdobia. Platí tu, že čím je časový horizont dlhší, tým je VaR nižšia. Je to kvôli tomu, že na dlhší časový úsek sa dokáže predpovedať dianie na trhu s menšou presnosťou.
- Frekvencia dát - nemusí byť rovnaká ako časový horizont. Často sa používajú denné dáta.
- Distribučná funkcia ziskov $F(y)$ alebo jej kvantily.

Zo štatistického pohľadu je VaR odhadom kvantilu funkcie hustoty pravdepodobnostného rozdelenia ziskov portfólia. V praxi však býva distribučná funkcia, a teda aj hustota, neznáma, preto sa štúdie VaR zaoberajú odhadom empirických distribučných funkcií a ich kvantilom. VaR metodológie zaujímajú hlavne konce týchto rozdelení, chvosty. Veľmi často sa predpokladá normálne rozdelenie ziskov, avšak realita je často iná. Existuje veľa modelov

na odhad VaR (uvedené sú napr. v [11], [10]). Navzájom sa líšia v predpokladoch modelu a v spôsobe odhadu distribučnej funkcie ziskov portfólia. Najčastejšie sú však predpokladom modelu na odhady použité historické dáta. V článku [10] sú uvedené tri metódy na určovanie odhadov VaR:

- Metóda historickej simulácie - veľmi obľúbený a často používaný odhad, vzhľadom na svoju jednoduchosť dáva pomerne presné výsledky. Jeho použitie je časovo nenáročné. Základným predpokladom metódy historickej simulácie je, že výnosy v budúcnosti budú mať také isté rozdelenie, ako mali výnosy v minulosti.
- Variančno-kovariančná metóda - predpokladá normálne rozdelenie budúcich výnosov. Ak hodnotu portfólia ovplyvňuje viacero trhových faktorov, používa sa viacrozmerné normálne rozdelenie. Za takéto trhové faktory sa považujú napríklad úrokové miery, ceny akcií alebo menové kurzy.
- Monte Carlo simulácia - podobná ako metóda historickej simulácie. Rozdiel je v tom, že kým sa metóda historickej simulácie pokúša vytvárať hypotetické rozdelenia výnosov na základe historických dát, Monte Carlo metóda náhodne generuje možný vývin výnosov v budúcnosti na základe meniacich sa trhových faktorov.

2.2 Average Value-at-Risk

Average value-at-risk bola definovaná Uryasevom v [20] ako conditional value-at-risk pre náhodnú premennú straty. My pozmeníme túto definíciu a zdefinujeme si average value-at-risk pre náhodnú premennú zisku.

Definícia 2.2.1. [20] *Nech Y je náhodná premenná predstavujúca zisk s distribučnou funkciou F . Označme F_α dolný α -chvost distribučnej funkcie, ktorý je rovný 1 pre hodnoty zisku Y väčšie ako VaR_α a je rovný $\frac{F}{\alpha}$ pre hodnoty zisku Y menšie alebo rovné VaR_α . Average value-at-risk zisku Y s hladinou spoľahlivosti α je definovaná ako stredná hodnota α -chvostu distribučnej funkcie F_α .*

Definícia 2.2.2. [1] Nech Y je spojitá náhodná premenná. Average value-at-risk premennej Y s hladinou spoľahlivosti α , $0 < \alpha < 1$, je definovaná ako

$$AVaR_\alpha(Y) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(u) du ,$$

kde F je distribučná funkcia Y . Average value-at-risk odchýlka (average value-at-risk deviation) je definovaná

$$AVaRD_\alpha(Y) = \mathbb{E}(Y) - AVaR_\alpha(Y) , \quad 0 < \alpha < 1 .$$

Hodnota average value-at-risk je známa aj pod menami conditional value-at-risk ([17]), tail value-at-risk ([4]) alebo expected shortfall ([1]). Sú známe viaceré možnosti vyjadrenia hodnoty AVaR. Uryasev ([17]) vyjadril AVaR maximalizačným vzorcom.

Veta 2.2.1. [17] Average value-at-risk náhodnej premennej Y s hladinou spoľahlivosti α sa dá vyjadriť ako optimálna hodnota nasledujúceho optimalizačného problému:

$$AVaR_\alpha(Y) = \max_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}([Y - x]^-) \right\} , \quad (1)$$

kde $[g]^- = \max\{-g, 0\}$ je záporná časť g . Maximum v (1) sa nadobúda.

Tvrdenie 2.2.1. [14] Nech $Y, Y^{(1)}, Y^{(2)}$ sú náhodné premenné. Average value-at-risk $AVaR_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, je

(i) ekvvariantná vzhľadom na posun

$$AVaR_\alpha(Y + c) = AVaR_\alpha(Y) + c$$

pre všetky $c \in \mathbb{R}$,

(ii) konkávna

$$AVaR_\alpha(\lambda Y^{(1)} + (1 - \lambda)Y^{(2)}) \geq \lambda AVaR_\alpha(Y^{(1)}) + (1 - \lambda)AVaR_\alpha(Y^{(2)})$$

pre $0 \leq \lambda \leq 1$,

(iii) pozitívne homogénna

$$AVaR_\alpha(\lambda Y) = \lambda AVaR_\alpha(Y)$$

pre ľubovoľné $\lambda > 0$,

(iv) striktná

$$AVaR_\alpha(Y) \leq \mathbb{E}(Y) .$$

Dôkaz. Aby sme dokázali vlastnosť (i), uvažujme $F_Y(y)$ distribučnú funkciu premennej Y a $F_{Y+c}(y+c)$ distribučnú funkciu premennej $Y+c$, kde y je realizácia premennej Y a $y+c$ je realizácia premennej $Y+c$ pre všetky $c \in \mathbb{R}$. Potom pre tieto distribučné funkcie platí:

$$F_{Y+c}(y+c) = P(Y+c < y+c) = P(Y < y) = F_Y(y) .$$

Ďalej

$$\begin{aligned} F_{Y+c}^{-1}(u) &= \inf\{y+c; F_{Y+c}(y+c) \geq u\} = \inf\{y; F_Y(y) \geq u\} + c \\ &= F_Y^{-1}(u) + c , \end{aligned}$$

kde $0 < u < 1$. Z toho vyplýva

$$\begin{aligned} AVaR_\alpha(Y+c) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_{Y+c}^{-1}(u) du = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha [F_Y^{-1}(u) + c] du \\ &= AVaR_\alpha(Y) + c , \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať.

Podobne ukážeme vlastnosť (iii). Nech $F_Y(y)$ je distribučná funkcia premennej Y a $F_{\lambda Y}(\lambda y)$ distribučná funkcia premennej λY , kde y je realizácia premennej Y a λy je realizácia premennej λY pre všetky $\lambda > 0$. Potom platí:

$$F_{\lambda Y}(\lambda y) = P(\lambda Y < \lambda y) = P(Y < y) = F_Y(y)$$

a

$$\begin{aligned} F_{\lambda Y}^{-1}(u) &= \inf\{\lambda y; F_{\lambda Y}(\lambda y) \geq u\} = \lambda \inf\{y; F_Y(y) \geq u\} \\ &= \lambda F_Y^{-1}(u) , \end{aligned}$$

kde $0 < u \leq 1$. Z toho vyplýva

$$\begin{aligned} AVaR_\alpha(\lambda Y) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_{\lambda Y}^{-1}(u) du = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \lambda F_Y^{-1}(u) du \\ &= \lambda AVaR_\alpha(Y) , \end{aligned}$$

čo sme chceli dokázať.

Vlastnosti (ii) a (iv) vyplývajú z duálnej reprezentácie AVaR. Dôkazom týchto vlastností sa nebudeme zaoberať. Duálnou reprezentáciou AVaR sa zaoberá [15, kapitola 2.2.3].

□

Vlastnosť (iv) dokazuje nasledujúce tvrdenie.

Dôsledok 2.2.1. [6] *Average value-at-risk deviation nadobúda nezáporné hodnoty.*

V Definícii 2.1.1 je definovaná $VaR_\alpha(Y) = F^{-1}(\alpha)$. Táto miera súvisí s mierou AVaR podľa nasledujúcich dvoch vzťahov:

$$\begin{aligned} F^{-1}(\alpha) &\in \operatorname{argmax}\left\{x - \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}([Y - x]^-) : x \in \mathbb{R}\right\} , \\ VaR_\alpha(Y) &= F^{-1}(\alpha) \geq \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^\alpha F^{-1}(p) dp = AVaR_\alpha(Y) \end{aligned}$$

pre všetky $\alpha \in (0, 1)$. Tieto vzťahy a ich dôkazy sú uvedené v [6].

Predstavili sme si pojmy value-at-risk deviation a average value-at-risk deviation. Aký je však medzi nimi rozdiel? Článok [2] vyzdvihuje AVaR ako univerzálnu- môže byť využitá pri rôznych druhoch rizík. Taktiež považuje AVaR za kompletnú, lebo dokáže vyrobiť jedinečný celkový odhad pre portfólio, ktoré je vystavené rôznym druhom rizík. AVaR označuje za jednoduchšiu ako VaR, lebo, ako uvádza, je to odpoveď na prirodzenú a právoplatnú otázku na riziko, ktoré portfólio so sebou prináša. A každá banka, ktorá má založený svoj risk management na meraní rizika práve pomocou VaR, môže začať využívať AVaR bez prakticky žiadnych nových výpočtov. Články [2, 21] sa zhodujú na tom, že využívanie VaR v risk managemente môže viesť k trhovej nestabilite. Autori článku [21] pri svojich výpočtoch a porovnávaní VaR a AVaR brali popri ďalších menách do úvahy aj slovenskú korunu.

3 Matematický model dôchodkového sporenia

V tejto kapitole sa budeme venovať matematickému modelu dôchodkového sporenia. Problémom je nájsť optimálne rozloženie prostriedkov v dôchodkových fondoch s rozdielnym rizikom resp. prostriedkov investovaných do akcií a dlhopisov v určitom časovom horizonte. Investor je počas tohto času vystavený riziku. Avšak toto riziko ako aj svoj výnos môže ovplyvniť rebalancovaním svojho portfólia. Informácie v tejto kapitole sú čerpané z [7] a [6], ak nie je uvedené inak.

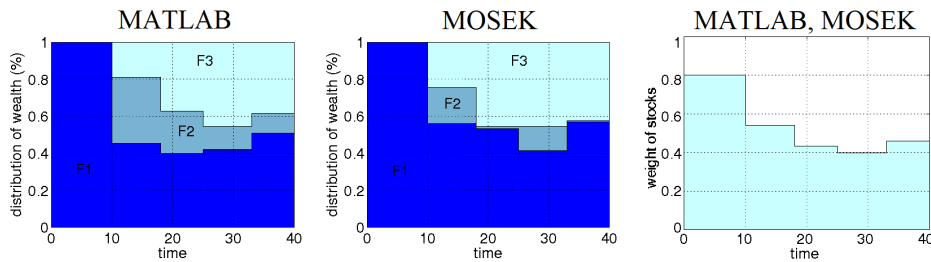
3.1 Motivácia a pôvodný TRMM model

Do dôchodkových úspor musí investor vziať do úvahy aj budúce príspevky. Ak si sporí na dôchodok dostatočne dlho, pokles aktív na začiatku sporenia neovplyvní budúce príspevky, konečná hodnota jeho úspor bude ovplyvnená len čiastočne. Ak sa pokles aktív objaví krátko pred nástupom do dôchodku, ovplyvní všetky jeho doterajšie nahromadené príspevky a výnosy z nich. Konečná hodnota úspor bude ovplyvnená výrazne. Preto je rozumné, že rozhodnutia investora závisia na čase, ktorý zostáva do splatnosti jeho úspor. Ako aj potvrdzujú historické dáta, výnosy z akcií v dlhodobom horizonte sú väčšie ako výnosy z dlhopisov. Preto investori v dlhodobom horizonte uprednostňujú akcie pred dlhopismi.

Poznáme viacero modelov, ktoré pomáhajú investorovi dosiahnuť konečnú hodnotu jeho dôchodkových úspor. Tieto však hodnotu dôchodkových úspor nezabezpečujú. Jedným zo známych modelov je Markowitzov model výberu portfólia ([12]). Zaoberá sa výnosmi a rizikom efektívneho portfólia v efektívnej hranici. Ako uvádza [13], snaží sa maximalizovať výnos portfólia a minimalizovať riziko. Tieto úlohy idú „proti sebe“, nezabezpečujú jedno riešenie. Preto Markowitz berie do úvahy aj investorov postoj k riziku. Do formulácie úlohy ho zahŕňa napr. fixovaním hodnoty výnosu. Rizikovo averznejší investor si určí nižšiu cieľovú hodnotu výnosov ako investor menej averzný k riziku.

V TRMM modeli (Terminal Risk Minimizing Model) predpokladáme, že investor pozná cieľovú hodnotu, ktorú chce dosiahnuť v určitom časovom horizonte. Model minimalizuje riziko jeho cieľovej hodnoty, teda zaoberá sa len dosiahnutím konečnej výšky úspor na konci stanoveného časového úseku.

Určí optimálnu stratégiu investora, koľko peňazí má vložiť do ktorého fondu. V [7] a [6] bol odvodený TRMM model, v ktorom sa uvažovalo rozhodovanie medzi J typmi fondov, za predpokladu, že tieto investujú prostriedky do akcií reprezentovaných jedným (spoločným) akciovým indexom a do dlhopisov. Model viedol na úlohu vysokorozmerného lineárneho programovania, ktorá narážala na technické obmedzenia pri implementácii. Dôsledkom toho bol model aproximovaný nelineárnym modelom s cieľom výpočtovej realizovateľnosti. Ukázalo sa však, že formulácia problému pomocou jednotlivých fondov vedie k nadbytočnému počtu premenných, nakoľko výsledky ukázali, že jedinou dôležitou informáciou sú podiely akciovej a dlhopisovej zložky v daných fondoch. Na Obrázku 4 vidíme optimálne rozloženie prostriedkov medzi tri fondy ako výsledok simulácie TRMM modelu (prvé dva obrázky) a váhu akcií v investíciach (pravý obrázok). Fondy reprezentujú rastový (F1), vyvážený (F2) a konzervatívny (F3) dôchodkový fond a sú zobrazené v percentuálnom podiele. Na optimalizáciu bol použitý softvér MATLAB s funkciou *linprog* v prvej ilustrácii a funkciou *mosekopt* v druhej ilustrácii. V tretej ilustrácii sú sčítané váhy akcií v investíciach. Hoci berieme do úvahy tri typy fondov a výsledok dvoch optimalizačných funkcií použitých na výpočet (*linprog* a *mosekopt*), výsledný podiel prostriedkov investovaných do akcií a do dlhopisov je v oboch prípadoch zhodný.



Obr. 4: Výsledok implementácie TRMM modelu (Zdroj: [6]).

Cieľom tejto kapitoly bude preformulovať TRMM model z [7] a [6] použitím menšieho počtu premenných. Budeme pritom uvažovať investovanie len do dvoch fondov, pričom prostriedky v jednom fonde zodpovedajú prostriedkom investovaným do akcií a prostriedky v druhom fonde zodpovedajú prostriedkom investovaným do dlhopisov. Tento model nazveme „redukovaný“. Budeme pritom sledovať postup použitý v uvedenej literatúre. Model vedie

k riešeniu vysokorozmerných úloh lineárneho programovania s riedkymi a blokovými maticami.

3.2 Redukovaný TRMM model

Matematický model dôchodkového sporenia je založený na minimalizovaní koncového rizika investícií, pričom je daná cieľová (terminálová) očakávaná hodnota. Veľkosť koncovej hodnoty závisí od výnosov akcií a dlhopisov v penzijných fondoch a od rozloženia investorovho portfólia. Hľadáme optimálny podiel investovania do finančných nástrojov tak, aby sme dosiahli stanovenú koncovú hodnotu, pričom minimalizujeme riziko úspor.

3.3 Lineárne obmedzenia

Než pristúpime k samotnému modelu, oboznámme sa so symbolikou použitou v texte:

T	čas ostávajúci do dôchodku, resp. čas, počas ktorého možno sporiť,
A, B	akcie (A) a dlhopisy (B),
y_t^A, y_t^B	objem peňazí investovaných v čase t do akcií (A) resp. dlhopisov (B), uvažujeme prirodzenú podmienku nezápornosti tejto premennej $y_t^A \geq 0, y_t^B \geq 0$ pre všetky t ,
\mathbf{y}_t	vektor $[y_t^A, y_t^B]^T$,
r_t^A, r_t^B	výnos akcií resp. dlhopisov v čase t ,
w_t	hrubá mzda v čase t ,
β_t	rast miezd v čase t definovaný vzťahom $w_{t+1} = w_t(1 + \beta_t)$,
$s_t^A = \frac{1+r_t^A}{1+\beta_t}$	výnos akcií a
$s_t^B = \frac{1+r_t^B}{1+\beta_t}$	výnos dlhopisov v časovom intervale $[t-1, t]$ upravený rastom miezd β_t ,
\mathbf{s}_t	vektor $[s_t^A, s_t^B]^T$,
τ	pravidelné ročné príspevky ako časť hrubej mzdy.
τ_t^A, τ_t^B	časť pravidelných ročných príspevkov investovaných v čase t do akcií (A) resp. dlhopisov (B).

Predpokladáme, že investor očakáva svoj odchod do dôchodku o T rokov.

$t \in \{0, \dots, T-1\}$ označuje čas, v ktorom sa investor rozhoduje, koľko peňazí investuje do akcií a koľko do dlhopisov. Jedenkrát ročne investuje časť τ zo svojej mzdy w_t do nástrojov finančného trhu. Investorovo rozhodnutie, koľko peňazí investuje do ktorého nástroja, závisí od informácií, ktoré má v danom čase. Uvedme dva predpoklady nášho modelu.

Predpoklad 3.3.1. *Výnosy akcií r_t^A v každom čase $t \in \{0, \dots, T-1\}$ sú stochastické a vzájomne nezávislé.*

Predpoklad 3.3.2. *Miery rastu mzdy β_t , $t = 0, \dots, T-1$ sú deterministické a vopred určené.*

Kedže investor investuje do nástrojov finančného trhu, jeho výnosy v čase t sú pre dlhopisy známe (r_t^B), pre akcie sú však stochastické (r_t^A).

Úlohou je nájsť optimálnu hodnotu y_t^A a y_t^B pre všetky t . Teda nájsť optimálny pomer prostriedkov investovaných do akcií a dlhopisov tak, aby sme dosiahli stanovenú konečnú hodnotu investícií a súčasne sme minimalizovali riziko.

Na začiatku v čase $t = 0$ je objem investovaných peňazí $\mathbf{y}_0^\top \mathbf{1}$ rovný prvému príspevku τ . V každom ďalšom roku $t = 1, \dots, T-1$ sa prostriedky v akciách \mathbf{y}_{t-1}^A a dlhopisoch \mathbf{y}_{t-1}^B zhodnotia výnosmi s_t^A a s_t^B a pripočíta sa k nim príspevok τ za daný rok. Investor znovu rozdeľuje prostriedky $\mathbf{y}_t^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{t-1}^\top \mathbf{s}_t + \tau$ medzi akcie a dlhopisy. Na konci sporenia, v čase T , sa už príspevky τ nepripočítavajú. Rovnice opisujúce tento vývoj investícií v čase sú nasledovné:

$$\mathbf{y}_0^\top \mathbf{1} = \tau, \quad (2)$$

$$\mathbf{y}_t^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{t-1}^\top \mathbf{s}_t + \tau \quad \text{pre všetky } t \in \{1, \dots, T-1\}, \quad (3)$$

$$\mathbf{y}_T^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{T-1}^\top \mathbf{s}_T, \quad (4)$$

$$\mathbf{y}_t \geq 0 \quad \text{pre všetky } t \in \{1, \dots, T\}. \quad (5)$$

Nasledujúce obmedzenie v modeli je podmienka na minimálnu očakávanú hodnotu úspor μ v koncovom čase. Ak $\mathbf{y}_T^\top \mathbf{1}$ označuje koncovú hodnotu úspor, stále náhodnú premennú, potom musí byť splnená nasledujúca podmienka:

$$\mathbb{E}(\mathbf{y}_T^\top \mathbf{1}) \geq \mu. \quad (6)$$

Všetky obmedzenia (2)–(6) sú lineárne v premennej y_t^A a y_t^B .

3.3.1 Účelová funkcia

Model je založený na minimalizácii rizika koncovej hodnoty portfólia $\mathbf{y}_T^\top \mathbf{1}$ s podmienkami (2)–(6). Riziko meriame rôznymi mierami rizika. V našom modeli použijeme average value-at-risk deviation. Veľkou výhodou použitia AVaRD je to, že vedie k lineárnej účelovej funkcii. Úlohou je potom riešiť lineárny optimalizačný problém.

Účelová funkcia nášho problému má tvar:

$$g(\mathbf{y}) = \mathbb{E}(\mathbf{y}_T^\top \mathbf{1}) - AVaR_\alpha(\mathbf{y}_T^\top \mathbf{1}), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (7)$$

Budeme minimalizovať riziko koncovej hodnoty cez premenné y_t^A a y_t^B , $t \in \{0, \dots, T-1\}$ s obmedzeniami (2)–(6).

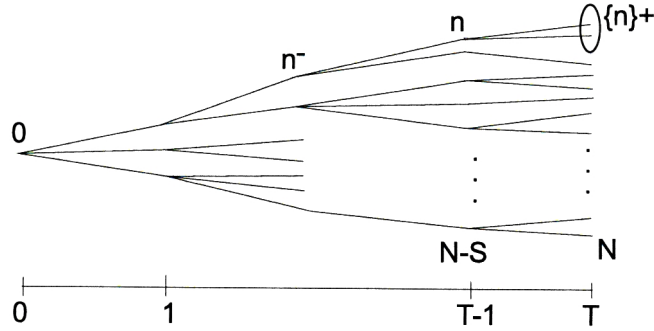
3.3.2 Reprezentácia pomocou stromu

Výnosy akcií s_t^A vytvárajú v diskretnom čase stochastický proces. Tento môžeme aproximovať stromom scenárov. Každý uzol v úrovni t stromu reprezentuje jeden možný stav výnosu s_t^A v čase t . Každá cesta stromu, začínajúca v koreni, reprezentuje jednu možnosť vývoja náhodného procesu s_t^A v čase. Označme

0	koreň stromu,
$\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, N\}$	množinu všetkých uzlov stromu,
S	počet koncových uzlov stromu,
$\mathcal{T} = \{N - S + 1, \dots, N\}$	množinu všetkých S koncových uzlov stromu,
$\mathcal{N}_0 = \{1, \dots, N - S\}$	množinu vnútorných uzlov,
n_-	predchodcu uzla $n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$,
$\{n\}^+$	množinu nasledníkov uzla $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$,
$\xi(n) \in \{0, \dots, T\}$	časovú úroveň uzla $n \in \mathcal{N}$.

Každý uzol, okrem uzla $n = 0$, má práve jedného predchodcu n_- . Naproti tomu každý uzol $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$ má množinu nasledníkov $\{n\}^+$. Tento zápis ilustrujeme na Obrázku 5.

Teraz pre naše potreby upravíme zápis z časti 3.3 využitím reprezentácie pomocou stromu. Dolný index premenných y_t^A , r_t^A a s_t^A bude reprezentovať príslušný uzol n z časovej úrovne t . Znamená to, že budeme používať



Obr. 5: Príklad stromu scenárov. Spodná os reprezentuje časovú os (Zdroj: [6]).

označenie y_n^A , r_n^A a s_n^A . Objasnime, že premenná r_n^A reprezentuje výnos akcií platný v perióde (časť cesty v strome scenárov) z uzla n_- do uzla n . Podobne upravíme ostatné premenné s indexom t . Objem peňazí označíme y_n^A , $y_n^A \geq 0$ pre všetky n . Označenie miery rastu mzdy zmeníme z β_t na $\beta_{\xi(n)}$. Nové označenie zodpovedá časovej úrovni $\xi(n)$ uzla n . Potom upravený výnos v značení stromu scenárov je definovaný ako

$$s_n^A = \frac{1 + r_n^A}{1 + \beta_{\xi(n)}} \quad (8)$$

pre všetky $n \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$. Upravený výnos akcií s_n^A je opäť platný pre periódu $\xi(n_-)$ až $\xi(n)$ s prislúchajúcou cestou z uzla n_- do uzla n . Obdobné značenie budeme používať aj pre dlhopisy. Označenie y_n^B predstavuje objem peňazí v dlhopisoch v uzle n , výnos r_n^B reprezentuje výnos dlhopisov platný v perióde z uzla n_- do uzla n . Predpokladajme, že výnos dlhopisov je deterministický, a teda výnos r_n^B je zhodný pre všetky n periód $\xi(n_-)$ až $\xi(n)$. Potom výnos dlhopisov upravený rastom miezd má tvar

$$s_n^B = \frac{1 + r_n^B}{1 + \beta_{\xi(n)}} \quad (9)$$

a je zhodný pre všetky n periód $\xi(n_-)$ až $\xi(n)$. Náhodná premenná koncová hodnota úspor je reprezentovaná vektorom diskretných hodnôt $\mathbf{y}_m^T \mathbf{1}$, $m \in \mathcal{T}$ s prislúchajúcou pravdepodobnosťou nastatia $p_m > 0$, pričom $\sum_{m \in \mathcal{T}} p_m = 1$. Suma pravdepodobností $p_n > 0$ uzlov v každej časovej úrovni t stromu je rovná jednej, čo vyjadríme ako $\sum_{n: \xi(n)=t} p_n = 1$ pre všetky $t \in \{0, \dots, T\}$.

Použitím Uryasevovej reprezentácie AVaR z Vety 2.2.1, minimalizácia účelovej funkcie (7) je vyjadrená v značení stromu scenárov ako

$$\min_{\mathbf{y}} \left\{ \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m(\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1}) - \max_a \left\{ a - \frac{1}{\alpha} \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m[\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1} - a]^- \right\} \right\}. \quad (10)$$

Obmedzenia (2)–(6) môžeme prepísať do tvaru

$$\sum_{m \in \mathcal{T}} p_m(\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1}) \geq \mu, \quad (11)$$

$$\mathbf{y}_0^\top \mathbf{1} = \tau, \quad (12)$$

$$\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{n-}^\top \mathbf{s}_n + \tau \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}_0, \quad (13)$$

$$\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{n-}^\top \mathbf{s}_n \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{T}, \quad (14)$$

$$\mathbf{y}_n \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}. \quad (15)$$

Ďalej ukážeme, že optimalizačný problém (10)–(15) môžeme prepísať na úlohu lineárneho programovania (lineárny optimalizačný problém).

Tvrdenie 3.3.1. [6] *Optimalizačný problém (10)–(15) je ekvivalentný nasledujúcemu problému lineárneho programovania (lineárnemu optimalizačnému problému):*

$$\min_{a, \mathbf{z}, \mathbf{y}} \left\{ \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m(\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1}) - a + \frac{1}{\alpha} \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m \mathbf{z}_{m-N+S} \right\} \quad (16)$$

s obmedzeniami

$$-a + \mathbf{y}_m^\top \mathbf{1} + z_{m-N+S} \geq 0, \quad z_{m-N+S} \geq 0, \quad \text{pre všetky } m \in \mathcal{T}, \quad (17)$$

$$\sum_{m \in \mathcal{T}} p_m(\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1}) \geq \mu, \quad (18)$$

$$\mathbf{y}_0^\top \mathbf{1} = \tau, \quad (19)$$

$$\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{n-}^\top \mathbf{s}_n + \tau \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}_0, \quad (20)$$

$$\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{n-}^\top \mathbf{s}_n \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{T}, \quad (21)$$

$$\mathbf{y}_n \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}. \quad (22)$$

To znamená, že

- (i) každé optimálne riešenie problému (16)–(22) je optimálne pre (10)–(15),
- (ii) pre každé optimálne riešenie problému (10)–(15) existuje prislúchajúce optimálne riešenie pre (16)–(22).

Dôkaz. Poznamenanajme, že (17) implikuje $z_{m-N+S} \geq [\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1} - a]^- = \max\{0, a - \mathbf{y}_m^\top \mathbf{1}\}$ pre všetky $m \in \mathcal{T}$.

Aby sme dokázali (i), ukážeme, že pre optimálne riešenie (16)–(22) máme $z_{m-N+S} = [\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1} - a]^-$, a preto optimálne riešenie (16)–(22) je minimum $AVaRD_\alpha$ vyhovujúce obmedzeniam (11)–(15).

Nech $\hat{a}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}$ sú optimálne pre (16)–(22). Označme $h(\hat{a}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}})$ hodnotu účelovej funkcie v optimálnom riešení. Predpokladajme, že existuje $m^* \in \mathcal{T}$ také, že $\hat{z}_{m^*-N+S} > [\hat{\mathbf{y}}_{m^*}^\top \mathbf{1} - \hat{a}]^-$. Potom nájdeme \tilde{z} s vlastnosťou $\tilde{z}_{m-N+S} = \hat{z}_{m-N+S}$ pre všetky $m \neq m^*$ a $\hat{z}_{m^*-N+S} > \tilde{z}_{m^*-N+S} \geq [\hat{\mathbf{y}}_{m^*}^\top \mathbf{1} - \hat{a}]^-$ dostávame $h(\hat{a}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}) > h(\hat{a}, \tilde{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}})$, čo je spor s optimalitou $\hat{a}, \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{y}}$.

Aby sme dokázali (ii), predpokladajme, že $\bar{a}, \bar{\mathbf{y}}$ sú optimálne pre systém (10)–(15). Položme $\bar{z}_{m-N+S} = [\bar{\mathbf{y}}_m^\top \mathbf{1} - \bar{a}]^-$ pre všetky $m \in \mathcal{T}$ vyhovujúce nerovnostiam (17). Z optimality $\bar{a}, \bar{\mathbf{y}}$ pre systém (10)–(15) vyplýva, že $\bar{a}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}$ sú optimálne pre (16)–(22). □

Problém (16)–(22) je lineárny a môžeme ho symbolicky zapísať v maticovom tvare ako

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \quad (23)$$

s obmedzeniami

$$A_{ineq} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{ineq}, \quad (24)$$

$$A_{eq} \mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq}, \quad (25)$$

$$\mathbf{y}_n \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}, \quad (26)$$

$$\mathbf{z}_m \geq 0 \quad \text{pre všetky } m \in \{1, \dots, S\}. \quad (27)$$

Vektor premenných $\mathbf{x} = (a, \mathbf{z}, \mathbf{y})$ má dĺžku $vars = 1 + S + 2(1 + N)$. Matica A_{ineq} je typu $(1 + S) \times vars$ a je to riedka matica s $(2 + 2 * 2)S$ nenulovými prvkami. Matica A_{eq} je tiež riedka s $2(1 + 2N)$ nenulovými prvkami a má rozmery $(1 + N) \times vars$. Tvary matíc v plnej forme sú uvedené v Prílohe.

Teraz zhrnieme, ako sa nám zmenil počet premenných uvažovaných v našom redukovanom modeli oproti pôvodnému TRMM modelu uvedenému v [7] a [6]. Modely sa líšia len v počte fondov, do ktorých možno investovať. Vektor premenných $\mathbf{x} = (a, \mathbf{z}, \mathbf{y})$ má v pôvodnom TRMM modeli $vars = 1 + S + J(1 + N)$ prvkov, kde J predstavuje počet fondov, do ktorých možno investovať, pričom výnosy všetkých fondov sú náhodné premenné. Matica A_{ineq}

je typu $(1 + S) \times vars$. Je to riedka matice s $(2J + 2)S$ nenulovými prvkami. Riedka matica A_{eq} je typu $(1 + N) \times vars$ a má $(1 + 2N)J$ nenulových prvkov. Vektor \mathbf{x} v našom redukovanom TRMM modeli má $vars = 1 + S + 2(1 + N)$ prvkov, z čoho vyplýva zjednodušenie vektora o $(J - 2)(1 + N)$ prvkov. Matrica A_{ineq} je rovnakého typu, do úvahy však musíme brať, že v redukovanom modeli je počet prvkov $vars$ menší. Matrica obsahuje $(4 + 2)S$ prvkov, z čoho vyplýva zníženie počtu nenulových prvkov $\frac{J + 1}{3}$ krát. Rovnako matrica A_{eq} má rovnaký počet riadkov ako v pôvodnom modeli, líši sa v počte stĺpcov daných dĺžkou vektora \mathbf{x} . Matrica má v redukovanom modeli $(1 + 2N)2$ prvkov, počet nenulových prvkov A_{eq} sa znížil $\frac{J}{2}$ krát.

3.3.3 Existencia riešenia

Skúmame teraz prípustnosť a optimalitu problému (16)–(22), resp. (23)–(27). Poznamenajme, že obmedzenia

$$A_{eq}\mathbf{x} = \mathbf{b}_{eq} \quad (28)$$

nemajú žiaden reálny dosah na prípustnosť tohto problému. Obmedzenia len určujú vývoj hodnoty investícií pozdĺž stromu scenárov. Podobne obmedzenia

$$A_{ineq}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_{ineq} \quad (29)$$

neovplyvňujú prípustnosť systému (23)–(27), s výnimkou jednej rovnosti. Ak je dané nejaké \mathbf{y}_m^T , $m \in \mathcal{T}$, môžeme $z_{m-N+S} \geq 0$ určiť ľubovoľne, a nakoniec dodefinovať a tak, aby spĺňalo $a \leq \mathbf{y}_m^T \mathbf{1} + z_{m-N+S}$. Teda, ak je dané \mathbf{y} , môžeme jednoducho dopočítať prípustné hodnoty premenných a a \mathbf{z} . Ak však uvažujeme hodnoty s_n^A ako fixné a dané, obmedzenie

$$-\sum_{m \in \mathcal{T}} p_m(\mathbf{y}_m^T \mathbf{1}) \leq -\mu$$

určuje, či je naše riešenie prípustné alebo nie. Je jasné, že ak máme fixné dané s_n^A a riešime (28), nedosiahneme ľubovoľnú hodnotu $\mathbb{E}(\mathbf{y}_T^T \mathbf{1})$. Samozrejme nie je možné dosiahnuť príliš vysokú konečnú hodnotu μ , ak simulované výnosy v strome scenárov sú nízke. Existuje μ_{max} také, že ak $\mu > \mu_{max}$, systém (23)–(27) nemá prípustné riešenie. Hodnota tejto hranice μ_{max} je presne určená

konkrétnymi hodnotami premennej s_n^A a mierou pravidelných príspevkov τ pomocou vzťahu

$$\mu_{max} = \max_{\mathbf{y}} \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m (\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1}) \quad (30)$$

s obmedzeniami (25) a (26), zodpovedajúcimi (19)–(22). Zhrňme vyššie uvedené úvahy do nasledujúceho tvrdenia.

Tvrdenie 3.3.2. [6] *Nech μ_{max} je dané vzťahom (30). Ak $\mu \leq \mu_{max}$, potom optimalizačný problém (23)–(27) má prípustné riešenie.*

Skôr ako pristúpime k tvrdeniu o optimalite riešenia, objasníme si neohraničenosť premennej \mathbf{y} v nasledujúcom tvrdení.

Tvrdenie 3.3.3. [6] *Premenná \mathbf{y} systému (24)–(27) je ohraničená.*

Dôkaz. Definujme

$$\Theta := \max_n \{ |s_n^A|, |s_n^B| \} . \quad (31)$$

Z (20, 22) a definície Θ vyplýva, že

$$0 \leq \mathbf{y}_n^\top \mathbf{1} \leq \tau \sum_{i=0}^{\xi(n)} \Theta^i . \quad (32)$$

□

Veta 3.3.1. [6] *Ak problém (23)–(27) má prípustné riešenie, potom má aj optimálne.*

Dôkaz. Ak má problém lineárneho programovania prípustné riešenie, potom má aj optimálne alebo je riešenie neohraničené ([16]). Ukážeme, že v systéme (23)–(27) nenastáva neohraničenosť. Účelová funkcia má tvar

$$\min_{a, \mathbf{z}, \mathbf{y}} \left\{ \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m \mathbf{y}_m^\top \mathbf{1} - a + \frac{1}{\alpha} \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m \mathbf{z}_{m-N+S} \right\} ,$$

čo je ekvivalentný výraz k

$$\min_{\mathbf{z}, \mathbf{y}} \left\{ \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m \mathbf{y}_m^\top \mathbf{1} - \max_a \left\{ a - \frac{1}{\alpha} \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m \mathbf{z}_{m-N+S} \right\} \right\} ,$$

kde $\mathbf{z}_{m-N+S} = [\mathbf{y}^\top \mathbf{1} - a]^-$ v optime (ako vidieť v dôkaze Tvrdenia 3.3). V Tvrdení 3.3.3 sme ukázali, že premenná \mathbf{y} je ohraničená. Z toho vyplýva, že neohraničenosť účelovej funkcie môže byť spôsobená jedine neohraničenosťou premenných a alebo \mathbf{z} . Súčasne $\max_a \{a - \frac{1}{\alpha} \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m \mathbf{z}_{m-N+S}\} = AVaR_\alpha(\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1})$. Tento výraz je konečný, a teda aj ohraničený, lebo premenná \mathbf{y} je konečná a ohraničená.

Iný argument na vylúčenie neohraničenosti (23)–(27) je ten, že v účelovej funkcii minimalizujeme $AVaRD_\alpha$. Dôsledok 2.2.1 uvádza, že $AVaRD_\alpha$ nadobúda nezáporné hodnoty. Z toho vyplýva spomínaná neohraničenosť. \square

Nasledujúci dôsledok vyplýva zo známej skutočnosti v lineárnom programovaní, že ak primárna (duálna) úloha má optimálne riešenie, potom aj duálna (primárna) úloha má optimálne riešenie ([16]).

Dôsledok 3.3.1. *Pre $\mu \leq \mu_{max}$ má problém (23)–(27) optimálne riešenie. Optimálne riešenie má aj jeho duálna úloha.*

3.3.4 Príklad

Teraz uvedieme jednoduchý ilustračný príklad implementácie redukovaného TRMM modelu (16)–(22). Obdržané výsledky nám poslúžia pre porovnanie v Kapitole 4. Na výpočet použijeme softvér MATLAB, konkrétne funkciu *linprog*.

Vysvetlime si najprv použité hodnoty jednotlivých parametrov. Kľúčovými hodnotami sú hodnoty výnosov dlhopisov a akcií v modeli. Penzijné fondy v starobnom dôchodkovom sporení investujú do európskych, amerických a ázijských akcií, do dlhopisov (zväčša vládnych dlhopisov) a do nástrojov finančného trhu. Keďže najviac investícií ide do európskych nástrojov, modelujeme výnosy akcií a dlhopisov v našom modeli európskym akciovým a dlhopisovým indexom. Indexy a ich priemerné hodnoty čerpáme z [6]. Na modelovanie akciových výnosov použijeme Standard & Poor's Europe 350 Index. Ako uvádza stránka indexu [25], akciový index je vybraný zo 17 európskych trhov a celkovo pokrýva približne 70% európskeho akciového trhu. S&P Europe 350 je súčasťou indexu S&P Global 1200. Výnosy dlhopisov budú reprezentovať vládne dlhopisy európskych krajín. MSCI EMU (Morgan

Stanley Capital International European Monetary Union) Sovereign Debt Index pozostáva z vládnych dlhov 11 krajín európskej menovej únie. Index vznikol 31. decembra 1993. Priemerné ročné výnosy a štandardné odchýlky obidvoch indexov v období január 1994–jún 2007 sú uvedené v Tabuľke 1. Korelačný koeficient S&P Europe 350 a MSCI EMU Sovereign Debt Index v pozorovanom období je $cor = -0,07943$.

	priemerný výnos	štandardná odchýlka
S&P Europe 350 Index	$\bar{r}^A = 0,09185$	$\sigma^A = 0,17259$
MSCI EMU Sovereign Debt Index	$\bar{r}^B = 0,05594$	$\sigma^B = 0,03340$

Tabuľka 1: Priemerný ročný výnos a štandardná odchýlka indexov z historických dát január 1994–jún 2007 (Zdroj: [6]).

Podobne ako v [6] predpokladáme, že cena akcií sa správa ako geometrický Brownov pohyb:

$$dS_t = \bar{r}^A S_t dt + \sigma S_t dW_t ,$$

kde \bar{r}^A je priemerný výnos akcií, σ je štandardná odchýlka (z Tabuľky 1) a W_t je Brownov pohyb. Použitím Itôvej lemy ([18]) dostávame

$$S_{t+l} = S_t \exp ((\bar{r}^A - 0,5(\sigma^A)^2)l + \sigma(W_{t+l} - W_t))$$

pre ľubovoľný interval dĺžky l . Špeciálne pre $l = 1$:

$$\frac{S_{t+1}}{S_t} = \exp (\bar{r}^A - 0,5(\sigma^A)^2 + \sigma(W_{t+1} - W_t))$$

Teda výnos je daný ako

$$1 + \bar{r}_{\{n\}+}^A = \exp (\bar{r}^A - 0,5(\sigma^A)^2 + \sigma Z_{\xi(n)+1}) ,$$

kde $Z_{\xi(n)+1}$ sú nezávislé náhodné premenné s normálnym rozdelením $N(0, 1)$ pre neprekrývajúce sa časové intervaly $[t_{\xi(n)}, t_{\xi(n)+1}]$. Na vytvorenie diskrétného scenára výnosov akcií používame 3 charakteristické body normálneho rozdelenia (3-point discretization for the standard normal distribution). Body rozdelenia sú sústredené v hodnotách $(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ s pravdepodobnosťami $(1/4, 1/2, 1/4)$. Na základe tejto skutočnosti si vyjadríme premennú Z nasledovne:

$$Z = \begin{cases} -\sqrt{2} & \text{s pravdepodobnosťou } 1/4 , \\ 0 & \text{s pravdepodobnosťou } 1/2 , \\ \sqrt{2} & \text{s pravdepodobnosťou } 1/4 . \end{cases}$$

Dostaneme tri scenáre vývoja výnosov akcií. Z toho vyplýva, že každý uzol stromu scenárov výnosov akcií bude v našom prípade stupňa tri. Výnosy dlhopisov uvažujeme konštantné a ich hodnota je rovná $r_n^B = \bar{r}^B$.

Na ilustračný príklad sme použili 5 ročný horizont. V príklade sa investor rozhoduje o prerozdelení svojich prostriedkov a pravidelných príspevkov vždy na začiatku každého roka, každej periódy. Príspevky, ktorými investor každoročne prispieva do starobného dôchodkového sporenia, sú legislatívne stanovené na 9% príjmu. V našom príklade sú rovné $\tau = 0,09$ v každom roku sporenia. Tieto sa optimálne rozdeľujú do akcií a dlhopisov na základe výsledkov nášho redukovaného TRMM modelu. Investor na konci daného päťročného obdobia očakáva koncovú hodnotu jeho vložených investícií vo výške 0,46 jednotiek. Teda očakáva, že za 5 rokov vloží do dlhopisov a akcií $5 \times 0,09 = 0,45$ jednotiek, ktoré sa mu zhodnotia a jeho nasporená suma bude 0,46 jednotiek. Táto suma je investorova konečná hodnota, kde berieme do úvahy nielen výnosy akcií a dlhopisov, ale uvažujeme aj priemerný rast miezd, čo nasporenú sumu znižuje na reálnu hodnotu. Hodnota parametra priemerného rastu miezd je čerpaná z [9], má hodnotu 0,071 a je uvažovaná pre roky 2011-15 (Tabuľka 3, strana 38). Pri meraní a minimalizovaní rizika pomocou average value-at-risk berieme do úvahy hladinu spoľahlivosti $\alpha = 0,05$.

Výsledky softvéru MATLAB nám udávajú hodnoty investícií v akciách a dlhopisoch $\mathbf{y}_n = [y_n^A, y_n^B]^T$ v každom uzle $n \in \mathcal{N}$. Tieto hodnoty prepočítame na váhy w_n^A, w_n^B nasledovne:

$$w_n^A = \frac{y_n^A}{y_n^A + y_n^B}, \quad w_n^B = \frac{y_n^B}{y_n^A + y_n^B}.$$

Označme $\mathbf{w}_n = [w_n^A, w_n^B]$, $\mathbf{w}_n \geq 0$ a $\mathbf{w}_n^T \mathbf{1} = 1$. Keďže v poslednom roku investovania už neprerozdeľujeme prostriedky do akcií a dlhopisov, počítame váhy akcií a dlhopisov len v nekoncových uzloch $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$. Máme teda $2 \times (N - S)$ váh v každom nekoncovom uzle pre akcie a pre dlhopisy. Keďže každý uzol má svoju pravdepodobnosť nastatia, výsledné váhy pre akcie a dlhopisy v čase $t \in \{0, \dots, T - 1\}$ vypočítame ako strednú hodnotu váh v uzloch v príslušnom čase t s ich pravdepodobnosťami a označíme ju $\bar{\mathbf{w}}_t = [\bar{w}_t^A, \bar{w}_t^B]$, pričom platí:

$$\bar{\mathbf{w}}_t = \sum_{n: \xi(n)=t} p_n \mathbf{w}_n,$$

kde $\sum_{n:\xi(n)=t} p_n = 1$ pre všetky $t \in \{0, \dots, T-1\}$.

V Tabuľke 2 výsledná suma v dlhopisoch a akciách uvádza súčet strednej hodnoty prostriedkov dosiahnutých na začiatku daného roku. Túto sme vypočítali ako súčet stredných hodnôt prostriedkov v akciách a dlhopisoch v každej časovej úrovni:

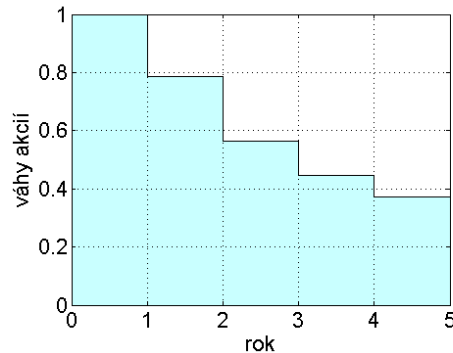
$$\bar{y}_t = \sum_{n:\xi(n)=t} p_n (y_n^A + y_n^B),$$

pre všetky $t \in \{0, \dots, T\}$. Hodnota váh prostriedkov investovaných do akcií a dlhopisov je nami hľadaná stratégia pre investora, aby mohol optimálne rozhodnúť o rozdelení svojich investícií do akcií a dlhopisov na začiatku daného roku za účelom dosiahnutia vopred stanovenej koncovkej hodnoty za minimalizácie rizika. Dostávame optimálnu stratégiu investora, ktorý si sporí 5 rokov s každoročným prerozdelením prostriedkov do akcií a dlhopisov za minimalizácie rizika average value-at-risk deviation $AVaRD_{0,05}$.

0.rok	1.rok	2.rok	3.rok	4.rok	5.rok
Výsledná suma v dlhopisoch a akciách					
0,0900	0,1821	0,2751	0,3674	0,4591	0,4600
Stredná hodnota prostriedkov investovaných do akcií					
1,0000	0,7870	0,5629	0,4474	0,3705	
Stredná hodnota prostriedkov investovaných do dlhopisov					
0,0000	0,2130	0,4371	0,5526	0,6295	

Tabuľka 2: Výsledky príkladu použitím redukovaného TRMM modelu.

Výsledná hodnota účelovej funkcie, hodnota minimalizovaného koncového rizika stanovenej cieľovej sumy 0,46 jednotiek je 0,0568. Znamená to, že s pravdepodobnosťou $\alpha = 5\%$ bude hodnota investorových úspor menej ako $0,46 - 0,0568 = 0,4032$ jednotiek. Ak napríklad sporiteľ zarába mesačne 1000 EUR, odvádza ročne 9% svojho platu, chce si našetriť za 5 rokov 460 EUR a jeho mzda sa mu napriek ročnému rastu miezd nezvýšila, prerozdeľuje ročne svoje úspory podľa výsledkov v Tabuľke 2, tak môže očakávať, že hodnota jeho úspor s 95%-nou pravdepodobnosťou neklesne v priemere pod hodnotu 403,2 EUR.



Obr. 6: Priemerné optimálne váhy akcií v portfóliu pri použití redukovaného TRMM modelu.

Na Obrázku 6 si môžeme všimnúť, že pomer prostriedkov investovaných do akcií s blížiacim sa koncovým časom klesá. Takýto výsledok sleduje zníženie rizika nášho portfólia ku koncu skúmaného časového horizontu. Ak by sme investovali všetky prostriedky do akcií v prvom roku a pokles akcií by bol napr. 20%, znamenalo by to stratu 20% z nášho jednoročného pravidelného príspevku, koncová hodnota portfólia by týmto šokom na trhu nebola zásadne ovplyvnená. Pokles akcií by nemal dosah na pravidelné príspevky v nasledujúcich rokoch. V tomto prípade by koncová hodnota úspor závisela na ďalšom prerozdelení investícií a vývojom na finančnom trhu. Ak by sa však pokles udial v poslednom roku a všetky investorove úspory by boli v akciách, investor by prišiel o 20% svojich celkových úspor. Vyplýva z toho, že väčšie množstvo úspor ku koncu časového horizontu je viac citlivé na zmeny na finančnom trhu, preto aj redukovaný TRMM model znižuje riziko investovania ku koncu časového horizontu investovaním väčšej sumy do dlhopisov.

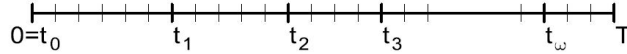
3.4 Nelineárne obmedzenia

Veľkosť stromu (počet uzlov) je presne určený stupňom nekoncových uzlov a hĺbkou stromu (počtom časových úrovní). Ak b_n je stupeň uzla $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$, potom veľkosť stromu je $1 + \sum_{n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}} b_n$. Špeciálne, ak $b_n \equiv b$ pre všetky $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$, potom veľkosť stromu je $\sum_{i=0}^T b^i$. Teda veľkosť stromu závisí polynomiálne od stupňa b nekoncových uzlov a exponenciálne od hĺbky stromu.

Typická dĺžka produktívneho života človeka, počas ktorého pracuje a sporiť si na dôchodok, je, povedzme, 40 rokov. Veľkosť najjednoduchšieho — bino-

mického — stromu s hĺbkou 40 je rádovo $2 * 10^{12}$. Dĺžka vektora premenných *vars* v modeli s lineárnymi obmedzeniami je potom rádovo $5 * 10^{12}$. Ak by sme chceli uvažovať hustejší strom s viacerými scenármi, napr. pre lepšiu aproximáciu stochastických procesov, veľkosť stromu bude ďalej rásť.

Na zmenšenie počtu premenných uvažujme, že sporiteľ sa nerozhoduje o rozložení svojich úspor do akcií a dlhopisov každý rok, ale len v rokoch $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\omega < T$, kde $0, 1, \dots, \omega$ reprezentujú časovú úroveň nekonečných uzlov (pozri Obrázok 7). Poznamenajme, že posledná časová úroveň stromu zodpovedá skutočnému času T . Tento čas je časom odchodu do dôchodku, kedy už sporiteľ nerobí žiadne rozhodnutia o rozdelení svojich úspor, a preto posledná rozhodovacia časová úroveň je $t_\omega < T$. Preto hĺbka stromu scenárov je $\omega + 1$.



Obr. 7: Rozhodovacie periódy (Zdroj: [6]).

Nech $l_k = t_k - t_{k-1}$ označuje dĺžku periódy $[t_{k-1}, t_k]$, $k \in \{1, \dots, \omega + 1\}$. Redukovaný TRMM systém (10)–(15) a jeho lineárny ekvivalent (16)–(22) sú založené na predpoklade, že $l_k = 1$ pre všetky k . Predpokladajme teraz, že $l_k > 1$ pre všetky alebo aspoň niektoré k . Znamená to, že úspory sú l_k -krát zhodnocované počas periódy $[t_{k-1}, t_k]$. Aj pravidelné príspevky τ sú vkladané l_k -krát a zhodnocované za príslušné obdobie. Predpokladáme, že úspory a príspevky sú prerozdeľované každú časovú úroveň medzi akcie a dlhopisy podľa váh z predchádzajúceho rozhodovacieho času t_{k-1} . Ak $\tau_n = [\tau_n^A, \tau_n^B]$ je vektor ročných príspevkov odvodených $l_{\xi(n)+1}$ ráz do akcií a dlhopisov počas periódy $[t_{\xi(n)}, t_{\xi(n)+1}]$ z uzla n do ktoréhokoľvek z jeho nasledovníkov z množiny $\{n\}^+$, $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$, potom

$$\frac{\tau_n^A}{\tau} = \frac{y_n^A}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{1}}, \quad \frac{\tau_n^B}{\tau} = \frac{y_n^B}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{1}}, \quad (33)$$

$\tau_n^T \mathbf{1} = \tau$ pre všetky $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$.

Cena akcií sa podobne ako v redukovanom TRMM modeli s lineárnymi obmedzeniami správa ako geometrický Brownov pohyb. Z toho vychádzame

pri určení tvaru výnosu akcií. Z Itôvej lemy ([18]) dostávame:

$$\frac{S_{t+l}}{S_t} = \exp \left((\bar{r}^A - 0,5(\sigma^A)^2)l + \sigma(W_{t+l} - W_t) \right)$$

kde \bar{r}^A je priemerný výnos akcií, σ je štandardná odchýlka (z Tabuľky 1) a W_t je Brownov pohyb. l je dĺžka časového intervalu, ktorý v našom prípade zodpovedá rozhodovacím uzlom. Odtiaľ

$$1 + \bar{r}_{\{n\}+}^A = \exp \left((\bar{r}^A - 0,5(\sigma^A)^2)l_{\xi(n)+1} + \sigma \sqrt{l_{\xi(n)+1}} Z_{\xi(n)+1} \right),$$

kde $Z_{\xi(n)+1}$ sú nezávislé náhodné premenné s normálnym rozdelením $N(0, 1)$ pre neprekrývajúce sa časové intervaly $[t_{\xi(n)}, t_{\xi(n)+1}]$. Aby sme vytvorili diskretný scenár výnosov akcií používame opäť 3 charakteristické body normálneho rozdelenia, a teda premennú Z v tvaroch:

$$Z = \begin{cases} -\sqrt{2} & \text{s pravdepodobnosťou } 1/4, \\ 0 & \text{s pravdepodobnosťou } 1/2, \\ \sqrt{2} & \text{s pravdepodobnosťou } 1/4. \end{cases}$$

V modeli s nelineárnymi obmedzeniami sa zaoberáme úvahami pre periódu dĺžky $l_{\xi(n)}$. Preto počítame s výnosmi akcií na celé rozhodovacie obdobie, celú periódu. Výnosy akcií upravené mierou rastu miezd majú potom tvar

$$s_n^A = \frac{1 + \bar{r}_{\{n\}+}^A}{(1 + \beta_{\xi(n)})^{l_{\xi(n)}}} \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}.$$

Výnosy dlhopisov sú konštantné. Ich tvar upravený mierou rastu pre periódu dĺžky $l_{\xi(n)}$ je nasledovný:

$$s_n^B = \left(\frac{1 + r^B}{1 + \beta_{\xi(n)}} \right)^{l_{\xi(n)}} \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}.$$

Obmedzenia (13) a (20), ktoré vyjadrujú zhodnocovanie úspor v nekoncovej úrovni, zmeníme nasledovne:

$$\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{n-}^\top \mathbf{s}_n + \tau_{n-}^\top \sum_{i=0}^{l_{\xi(n)}-1} (\mathbf{s}_n)^{i/l_{\xi(n)}} \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}_0, \quad (34)$$

kde zložky vektora τ_{n-} sú dané vzťahom (33) v uzle n_- . Mocnina vo výraze $(\mathbf{s}_n)^{i/l_{\xi(n)}}$ je uvažovaná po zložkách ako $(\mathbf{s}_n)^{i/l_{\xi(n)}} = [(s_n^A)^{i/l_{\xi(n)}}, (s_n^B)^{i/l_{\xi(n)}}]^\top$.

Uvažujúc všetky predchádzajúce vzťahy dostaneme systém s jedným nelineárnym obmedzením (38):

$$\min_{\mathbf{y}} \left\{ \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m(\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1}) - \max_a \left\{ a - \frac{1}{\alpha} \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m[\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1} - a]^- \right\} \right\} \quad (35)$$

$$\sum_{m \in \mathcal{T}} p_m(\mathbf{y}_m^\top \mathbf{1}) \geq \mu, \quad (36)$$

$$\mathbf{y}_0^\top \mathbf{1} = \tau, \quad (37)$$

$$\frac{\tau_n^A}{\tau} = \frac{y_n^A}{\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1}}, \quad \frac{\tau_n^B}{\tau} = \frac{y_n^B}{\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1}} \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}, \quad (38)$$

$$\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{n-}^\top \mathbf{s}_n + \tau_{n-}^\top \sum_{i=0}^{l_{\xi(n)}-1} (\mathbf{s}_n)^{i/l_{\xi(n)}} \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}_0, \quad (39)$$

$$\mathbf{y}_n^\top \mathbf{1} = \mathbf{y}_{n-}^\top \mathbf{s}_n \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{T}, \quad (40)$$

$$\mathbf{y}_n \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}. \quad (41)$$

Poznámka: Podobne ako v dôkaze Tvrdenia 3.3 predchádzajúci systém je ekvivalentný systému minimalizácie lineárnej účelovej funkcie (16) s obmedzeniami (36)–(41) a pridaným obmedzením (17). Ďalej poznamenajme, že (38) a (39) môžeme spojiť do jedného nelineárneho obmedzenia vyjadrením τ_{n-}^A a τ_{n-}^B zo vzťahu (38).

Problém nelinearity v modeli môžeme prekenuť použitím iteračnej metódy. Rovnako ako v [6], uvažujeme nasledovnú iteračnú schému:

1. nastavíme štartovací bod $\tau_n^A = \tau/2$ a $\tau_n^B = \tau/2$ pre všetky $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$,
2. riešime lineárny systém (36)–(41). Dostaneme optimálne hodnoty y_n^A , y_n^B pre všetky n ,
3. vypočítame nové τ_n^A a τ_n^B použitím (33),
4. opakujeme kroky 2 a 3, pokiaľ nebude splnené isté kritérium presnosti.

Ak si označíme riešenie k -tej iterácie ako $\mathbf{x}^{(k)} = [a^{(k)}, \mathbf{z}^{(k)}, \mathbf{y}^{(k)}]$, potom má optimalizačný problém v maticovom tvare nasledujúci tvar:

$$\min_{\mathbf{x}^{(k+1)}} \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^{(k+1)} \quad (42)$$

s obmedzeniami

$$A_{ineq} \mathbf{x}^{(k+1)} \leq \mathbf{b}_{ineq}, \quad (43)$$

$$A_{eq} \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b}_{eq}(\mathbf{x}^{(k)}), \quad (44)$$

$$\mathbf{z}^{(k+1)}, \mathbf{y}^{(k+1)} \geq 0, \quad (45)$$

pričom

$$[\mathbf{b}_{eq}(\mathbf{x}^{(k)})]_j = \begin{cases} \tau & j = 1, \\ (\tau_{n-}^A(k), \tau_{n-}^B(k)) \sum_{i=0}^{l_{\xi(n)}-1} (\mathbf{s}_n)^{i/l_{\xi(n)}} & j = 2, \dots, N - S + 1, \\ 0 & j = N - S + 2, \dots, N + 1, \end{cases}$$

kde $n = j - 1$. Matice A_{ineq} a A_{eq} zostávajú nezmenené (ako v Prílohe).

Ako kritérium na ukončenie algoritmu sme zvolili rozdiel hodnôt optimálnej účelovej funkcie dvoch po sebe nasledujúcich iterácií k a $k + 1$ v absolútnej hodnote. Ak $\mathbf{x}^{(k)}$ a $\mathbf{x}^{(k+1)}$ sú riešenia iterácií k a $k + 1$, a ak $\epsilon > 0$ je fixné a malé, potom podmienka na zastavenie algoritmu má tvar $|\mathbf{c}^\top \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{c}^\top \mathbf{x}^{(k)}| \leq \epsilon$. V našej implementácii sme si zvolili $\epsilon = 0,001$. Konvergenciou tohto algoritmu sa zaoberá [6, kapitola 7.4].

3.4.1 Príklad

Aj k tejto časti uvedieme ilustračný príklad. Teória je postavená na rozhodovaní sa o prerozdelení investícií do akcií a dlhopisov v určitých časových obdobiach, teda nie každý rok. Každoročnému prerozdeleniu investícií sa venuje Príklad 3.3.4. Využijeme postup na riešenie problému pomocou iteračnej metódy uvedenej vyššie. Investície sa sporiteľovi zhodnocujú každý rok, rozhodnutie, či zaujme rizikovejšiu stratégiu alebo menej rizikovú, robí len raz za časové obdobie. V príklade berieme do úvahy 40 ročný horizont. Časové obdobia, v ktorých sa rozhoduje o svojej stratégii, sme rozložili postupne do 9., 17., 23., 30. a 36. roku sporenia. Všetky ďalšie parametre používame z predchádzajúceho príkladu. Investor prispieva pravidelne každý rok 9% zo svojej

mzdy a príspevok sa mu rozdelí do akcií a dlhopisov podľa poslednej zvolenej stratégie, teda podľa stratégie zvolenej na začiatku daného časového obdobia. Prostriedky sa mu náležite zhodnotia, hodnoty výnosov finančných nástrojov sú uvedené v Tabuľke 1, strana 30. Priemerný rast miezd v jednotlivých rokoch je čerpaný z [9], zobrazuje ho Tabuľka 3.

Obdobie	2009–10	2011–15	2016–21	2022–24	2025–50
t	1–2	3–7	8–13	14–16	17–40
miera rastu $(1 + \beta_t)$	1,07	1,071	1,065	1,060	1,050

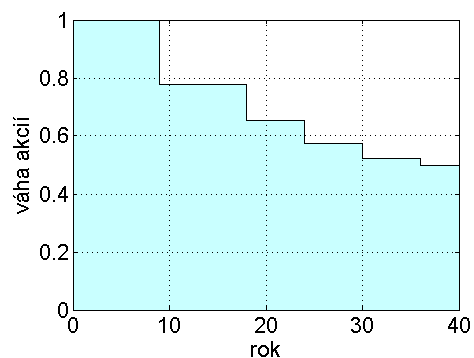
Tabuľka 3: Predpoveď miery rastu mzdy na Slovensku v rokoch 2009–2050 (Zdroj: [9]).

Minimalizujeme investorove koncové riziko pomocou average value-at-risk deviation ($\alpha = 0,05$) s cieľom dosiahnuť na konci 40 ročného horizontu čiastku 7 jednotiek. Výsledná hodnota rizika stanovenej cieľovej sumy je 3,8524. Teda s pravdepodobnosťou $\alpha = 5\%$ môže investor očakávať hodnotu úspor menšiu ako $7 - 3,8524 = 3,1476$ jednotiek. Tabuľka 4 udáva samotné výsledky, priemernú optimálnu stratégiu investovania.

0.rok	9.rok	18.rok	24.rok	30.rok	36.rok	40.rok
Výsledná suma v dlhopisoch a akciách						
0,0900	0,9855	2,1506	3,2296	4,5309	6,1130	7,0000
Stredná hodnota prostriedkov investovaných do akcií						
1,0000	0,7790	0,6547	0,5752	0,5228	0,4979	
Stredná hodnota prostriedkov investovaných do dlhopisov						
0,0000	0,2210	0,3453	0,4248	0,4772	0,5021	

Tabuľka 4: Výsledky príkladu použitím redukovaného TRMM modelu.

Z tabuľky ako aj na Obrázku 8 vidíme, že podobne ako v predchádzajúcom príklade podiel investícií do akcií s časom klesá. Zabezpečuje sa tak zníženie rizika investícií ku koncu časového horizontu, ku koncu sporenia na dôchodok. Čím bližšie je sporiteľ k svojmu dôchodku, tým viac znižuje svoje riziko dosiahnutia cieľovej čiastky, ktorú si určil. Preto väčšinu investícií presúva ku koncu časového horizontu do dlhopisov.



Obr. 8: Priemerné optimálne váhy akcií v portfóliu pri použití redukovaného TRMM modelu s nelineárnymi obmedzeniami.

Ak porovnáme výsledky príkladov s lineárnymi aj nelineárnymi obmedzeniami s výsledkami práce [6], ktoré uvádzame na začiatku kapitoly, všímame si, že vo všetkých prípadoch pomer investícií do akcií jasne klesá s časom. Vďaka tomu klesá aj nami merané riziko, ktoré sme v modeli minimalizovali na konci stanoveného časového obdobia.

4 Model so zabezpečovacou stratégiou

Portfólio manažéri spravujú dobre rozložené portfólio akcií. Často sa však zamýšľajú, ako sa sami zaistia voči pádu hodnoty portfólia pod istú hranicu. Dnes existuje viacero stratégií, spôsobov, ako ochrániť hodnotu portfólia. Využívajú ich už aj portfólio manažéri na Slovensku.

Ako uvádza [27], stratégie zabezpečenia portfólia sa môžu týkať portfólia zloženého z akcií, dlhopisov, či finančných derivátov, hlavne opcií. Základnou myšlienkou týchto stratégií je kombinovať obchody tak, aby sa pri rastúcom trhu hodnota príslušného portfólia zvyšovala (aj keď pomalšie ako bez uplatnenia tejto stratégie), ale pri klesajúcom trhu by stratégia mala obmedzovať stratu. Zabezpečuje teda sumu, pod ktorú hodnota portfólia v zvolenom časovom horizonte nepoklesne. Podľa spôsobu riešenia problému členíme tieto stratégie na:

- statické stratégie – je pre ne charakteristické, že na obdobie, po ktoré sa má zabezpečiť istá minimálna hodnota portfólia, sa akceptuje jednorazové riešenie, ktoré sa v priebehu príslušného obdobia nekoriguje.
- dynamické stratégie – ich spoločnou črtou je rozdelenie investovanej sumy na časť vloženú do akcií a časť vloženú do dlhopisov. V priebehu obdobia, po ktoré má byť podľa rozhodnutia investora hodnota portfólia zabezpečená, sa pomer uvedených dvoch zložiek portfólia podľa vývoja trhu mení. Pri raste trhu sa zvyšuje podiel vložený do akcií a znižuje sa podiel dlhopisov, pri poklese trhu je to obrátene.

V istom, hoci aj krátkom, časovom úseku teda môže prísť k odklonu hodnoty portfólia pozitívnym alebo negatívnym smerom. V zaistovaní môžeme na zmiernenie rizika využiť aj poistenie. Uplatňuje sa však len v prípade poistiteľných rizík. Ďalším prostriedkom na zmiernenie rizika je hedging. Hedging vylúči možnosť neočakávaného zisku alebo straty. Základnými nástrojmi hedgingu sú finančné deriváty.

Zaistovanie portfólia dáva investorovi schopnosť obmedziť riziko poklesu investície. Takéto metódy dovoľujú investorovi v čase maturity získať určitý podiel z jeho počiatočného kapitálu. Existujú viaceré stratégie na zaistenie portfólia. Jednou z nich je constant proportion portfolio insurance (CPPI).

4.1 CPPI

Ako je uvedené v [3], metóda CPPI používa zjednodušenú stratégiu, je postavená na alokovaní prostriedkov v čase. Riadi riziko dynamicky, patrí medzi dynamické stratégie. Investor si určí dolnú hranicu rovnú najmenej akceptovateľnej hodnote portfólia. Pod túto hranicu nesmie klesnúť hodnota investícií. Potom vypočíta rezervu ako nadbytok hodnoty portfólia od dolnej hranice. Presne určí hodnotu investovanú do rizikového aktíva a to vynásobením rezervy s vopred určeným multiplikátorom. Zostávajúce prostriedky sú investované do bezrizikového aktíva.

$$\text{multiplikator} * \underbrace{\left(\frac{\text{hodnota portfólia} - \text{spodna hranica}}{\text{rezerva}} \right)} = \text{rizikova zlozka}$$

$$\text{hodnota portfólia} - \text{rizikova zlozka} = \text{bezrizikova zlozka}$$

Rizikové aktívum v našich úvahách predstavujú akcie, bezrizikové aktívum reprezentujú dlhopisy. Dolná hranica a multiplikátor sú exogénnymi funkciami miery investorovho postoja k riziku. Multiplikátor určuje možný pokles investícií v rizikovej zložke pred ďalším rebalancovaním portfólia. Ak napríklad investor znesie pokles hodnoty rizikovej zložky o 20%, multiplikátor sa uvažuje ako prevrátaná hodnota tohto percenta, teda 5. Najbežnejšie sú multiplikátory medzi 3 a 6.

Čím vyšší multiplikátor, tým viac bude investor ťažiť zo vzrastu cien akcií. Napriek tomu, čím vyšší multiplikátor, tým rýchlejšie bude portfólio dosahovať spodnú hranicu, keď ceny akcií budú klesať. Keď rezerva dosiahne nulu, investície vložené do akcií dosiahnu nulu tiež. Vďaka tomu hodnota portfólia nespadne pod dolnú hranicu. Spadnúť môže, iba ak sa na trhu objaví výrazný pokles ceny aktíva skôr, ako investor má šancu obchodovať, resp. rebalancovať svoje portfólio.

4.2 Aplikácia CPPI stratégie na redukovaný TRMM model - lineárne obmedzenia

Zabezpečenie úspor sa zdá byť výhodné pri sporení na dôchodok. Aj dnes sa už na slovenskom trhu nachádzajú fondy riadené metódou CPPI. My

budeme taktiež uvažovať metódu CPPI a zavedieme ju v jednotlivých krokoch do nášho modelu. Cieľ modelu zostane nezmenený, budeme minimalizovať riziko investícií, pričom je daná cieľová očakávaná hodnota. Všetky predpoklady modelu zostávajú zachované. Úlohou modelu je nájsť optimálnu hodnotu spodnej hranice f_n v každom uzle n tak, aby sme dosiahli stanovenú konečnú hodnotu investícií a súčasne minimalizovali riziko.

Na zavedenie nových pojmov do modelu potrebujeme aj nové premenné, ktoré budú v modeli vystupovať:

- m multiplikátor CPPI stratégie určujúci možný pokles investícií v rizikovej zložke,
- f_n spodná hranica pre portfólio v uzle n .

Predtým ako sa stratégia aplikuje, musí investor tak ako pri redukovanom TRMM modeli poznať ako dlho bude sporiť, akú časť svojho príjmu bude pravidelne vkladať do svojich úspor. Musí si určiť aj spodnú hranicu hodnoty portfólia, pod ktorú neklesnú jeho investície a multiplikátor. Rozhoduje sa podľa informácií, ktoré má v danom čase.

Na začiatku v čase $t = 0$ je objem investovaných peňazí do akcií rovný $y_0^A = m(\tau - f_0)$ a do dlhopisov $y_0^B = \tau - y_0^A$. Vyplýva to zo základnej rovnice stratégie CPPI. Ak berieme do úvahy vývoj výnosov podľa stromu scenárov, v každom ďalšom uzle $n = 1, \dots, N - S$ sa za hodnotu portfólia považujú investície ohodnotené výnosmi plus príspevok τ za daný rok. Hodnota spodnej hranice f_n sa mení v každom uzle. Je dôležité, aby hodnota spodnej hranice neklesla pod nulu, ani aby neprekročila celkovú hodnotu úspor v danom čase. Tieto prípady ošetríme obmedzeniami (49) a (47)-tretia nerovnosť. Prostriedky sa v ďalšom roku znovu prerozdelia medzi akcie $y_n^A = m(\tau + \mathbf{y}_n^T \mathbf{s}_n - f_n)$ a dlhopisy $y_n^B = \tau + \mathbf{y}_n^T \mathbf{s}_n - y_n^A$. Na konci sporenia, v čase T , sa už len zhodnotia prostriedky v bezrizikovej a rizikovej zložke. Rovnice opisujúce tento vývoj investícií v čase majú tvar:

$$y_0^A = m(\tau - f_0), \quad y_0^B = \tau - y_0^A, \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} y_n^A &= m(\tau + \mathbf{y}_n^T \mathbf{s}_n - f_n) \\ y_n^B &= \tau + \mathbf{y}_n^T \mathbf{s}_n - y_n^A \\ m(\tau + \mathbf{y}_n^T \mathbf{s}_n - f_n) &\leq \tau + \mathbf{y}_n^T \mathbf{s}_n \end{aligned} \right\} \text{ pre všetky } n \in \mathcal{N}_0, \quad (47)$$

$$y_n^A = y_{n-}^A s_n^A, \quad y_n^B = y_{n-}^B s_n^B \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{T}, \quad (48)$$

$$\mathbf{y}_n \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}. \quad (49)$$

Ako aj v redukovanom TRMM modeli platí podmienka na minimálnu konečnú hodnotu úspor μ v koncovom čase:

$$\sum_{m \in \mathcal{T}} p_m (\mathbf{y}_m^T \mathbf{1}) \geq \mu. \quad (50)$$

Model je založený na minimalizácii rizika koncovej hodnoty portfólia, minimalizuje sa vzhľadom na dolnú hranicu hodnoty portfólia a objem peňazí investovaných do akcií a dlhopisov. To znamená, že účelová funkcia má tvar

$$\min_{\mathbf{y}, \mathbf{f}} \left\{ \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m (\mathbf{y}_m^T \mathbf{1}) - \max_a \left\{ a - \frac{1}{\alpha} \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m [\mathbf{y}_m^T \mathbf{1} - a]^- \right\} \right\}. \quad (51)$$

Podobne ako v redukovanom TRMM modeli (10)–(15) prepíšeme optimalizačný problém (46)–(51) na lineárny optimalizačný problém:

$$\min_{a, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{f}} \left\{ \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m (\mathbf{y}_m^T \mathbf{1}) - a + \frac{1}{\alpha} \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m \mathbf{z}_{m-N+S} \right\} \quad (52)$$

s obmedzeniami

$$-a + \mathbf{y}_m^T \mathbf{1} + z_{m-N+S} \geq 0, \quad z_{m-N+S} \geq 0, \quad \text{pre všetky } m \in \mathcal{T}, \quad (53)$$

$$\sum_{m \in \mathcal{T}} p_m (\mathbf{y}_m^T \mathbf{1}) \geq \mu, \quad (54)$$

$$y_0^A = m(\tau - f_0), \quad y_0^B = \tau - y_0^A, \quad (55)$$

$$\left. \begin{aligned} y_n^A &= m(\tau + \mathbf{y}_{n-}^T \mathbf{s}_n - f_n) \\ y_n^B &= \tau + \mathbf{y}_{n-}^T \mathbf{s}_n - y_n^A \\ m(\tau + \mathbf{y}_{n-}^T \mathbf{s}_n - f_n) &\leq \tau + \mathbf{y}_{n-}^T \mathbf{s}_n \end{aligned} \right\} \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}_0, \quad (56)$$

$$y_n^A = y_{n-}^A s_n^A, \quad y_n^B = y_{n-}^B s_n^B \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{T}, \quad (57)$$

$$\mathbf{y}_n \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}. \quad (58)$$

Účelová funkcia aj obmedzenia problému (53)–(58) sú lineárne.

V modeli sa nám oproti redukovanému TRMM modelu zmenil počet premenných. Nový vektor premenných $\mathbf{x} = (a, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{f})$ má dĺžku $vars = 1 + S + 2(1 + N) + N - S + 1$. V dôsledku pridania $N - S$ nových obmedzení v každom nekoncevom uzle je matica A_{ineq} zložitejšia oproti redukovanému TRMM modelu bez použitia CPPI stratégie. Táto matica je typu $(1 + N) \times vars$ a je to riedka matica s $(2 + 2 * 2)S + 3 * (N - S)$ nenulovými prvkami. Matica A_{eq} je tiež riedka s $2(N + 2 * (N - S) + 2)$ nenulovými prvkami a má rozmery $2 * (1 + N) \times vars$.

Keď porovnáme počet premenných v redukovanom modeli s modelom s CPPI stratégiou, v druhom prípade sa počet premenných zväčšil. Vektor \mathbf{x} sme zväčšili o $N - S$ prvkov. Rozmery matice A_{ineq} sa taktiež zväčšili o $(N - S)$ riadkov a zväčšil sa aj počet nenulových prvkov o $3 * (N - S)$. Počet riadkov matice A_{eq} sa zdvojnásobil a počet prvkov sa zväčšil o $2N - 4S + 2$.

4.2.1 Príklad

Podobne ako v Kapitole 3.3.4 uvedieme ilustračný príklad implementácie uvedenej stratégie. Budeme vychádzať zo stratégie CPPI aplikovanej na redukovaný TRMM model, t.j. zo systému (52)–(58). Na riešenie opäť použijeme MATLABovskú funkciu *linprog*. Parametre použijeme bezo zmeny, pribudnú nám však nové. Budeme predpokladať 5 ročný horizont investovania. Investor bude ročne prerozdeľovať prostriedky, ktoré bude následne investovať do akcií a dlhopisov. Na začiatku každého roka mu k investíciám pribudne pravidelný ročný príspevok 9%. Jeho účelová funkcia bude funkcia rizika reprezentovaná average value-at-risk deviation s parametrom $\alpha = 0,05$. Budeme opäť minimalizovať riziko za predpokladu očakávanej koncovej hodnoty portfólia vo výške 0,46 jednotiek. Parametre pre výnos akcií a dlhopisov ponecháme z Tabuľky 1. Aj v tomto príklade uvažujeme priemerný rast miezd $\beta = 0,071$ ako je uvedené v [9]. V modeli ďalej vystupuje multiplikátor, ktorý odzrkadľuje investorov postoj k riziku. Keďže hodnoty multiplikátora v praxi sa pohybujú medzi 3 a 6, zvolili sme si priemerne rizikovo averzného investora s multiplikátorom $m = 4$.

Vo výsledkoch nás v tomto príklade bude zaujímať aj hodnota spodnej hranice portfólia, ktorú sme podobne ako váhy a výslednú sumu spočítali ako

strednú hodnotu spodnej hranice v danej časovej úrovni:

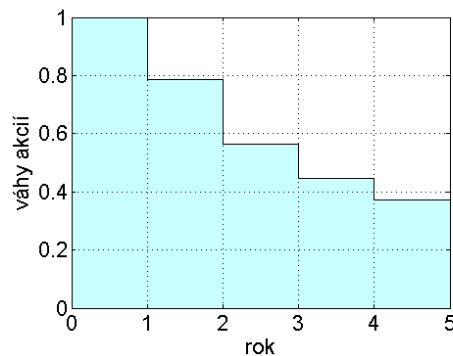
$$\bar{f}_t = \sum_{n:\xi(n)=t} p_n f_n,$$

pre všetky $t \in \{0, \dots, T - 1\}$. Výsledky opäť prepočítame na váhy akcií a dlhopisov za jednotlivé roky, aby boli lepšie čitateľné. V Tabuľke 5 sa nachádzajú výstupy našej optimalizačnej úlohy. Nový údaj v tabuľke, stredná hodnota spodnej hranice portfólia, udáva spodnú hranicu, pod ktorú neklesnú investície sporiteľa do rizikovej časti, do akcií, na začiatku daného roka. Hodnota spodnej hranice je vlastne hľadaná optimálna stratégia investora pri investovaní v danom časovom horizonte do akcií a dlhopisov. Podľa nej a multiplikátora určujúceho investorov postoj k riziku si sporiteľ zvolí objem peňazí investovaných do jednotlivých nástrojov. Toto je teda priemerná optimálna stratégia investora sporiaceho 5 rokov v dlhopisoch a akciách, ktorý minimalizuje koncové riziko svojich úspor za účelom dosiahnutia vopred stanovenej sumy 0,46 jednotiek. Investor zároveň pravidelne — každoročne — prerozdeľuje svoje získané prostriedky a pravidelné ročné príspevky.

0.rok	1.rok	2.rok	3.rok	4.rok	5.rok
Výsledná suma v dlhopisoch a akciách					
0,0900	0,1821	0,2751	0,3674	0,4591	0,4600
Stredná hodnota prostriedkov investovaných do akcií					
1,0000	0,7870	0,5629	0,4474	0,3705	
Stredná hodnota prostriedkov investovaných do dlhopisov					
0,0000	0,2130	0,4371	0,5526	0,6295	
Stredná hodnota spodnej hranice portfólia					
0,0675	0,1454	0,2336	0,3218	0,4102	

Tabuľka 5: Výsledky príkladu použitím CPPI stratégie aplikovanej na redukovaný TRMM model ($m = 4$).

Výsledná hodnota účelovej funkcie, minimalizovaného koncového rizika nasprenej čiastky, je rovná 0,0568. S pravdepodobnosťou 5% bude investora koncová suma menšia ako $0,46 - 0,0568 = 0,4032$ jednotiek.



Obr. 9: Priemerné optimálne váhy akcií pri použití CPPI stratégie na redukovaný TRMM model.

Na Obrázku 9 sledujeme znižovanie váhy akcií v čase, znižovanie rizika ku koncu časového horizontu. Podobne ako výsledky v tabuľke aj obrázky pre obe stratégie sú zhodné.

Zaujímavé je porovnanie výsledkov pri zmene investorovho postoja k riziku, pri zmene multiplikátora. Daný príklad bol uvažovaný s multiplikátorom rovným 4. Pri jeho obmene v bežnom rozsahu 3-6 sa stredné hodnoty prostriedkov investovaných do akcií a dlhopisov nemenia, mení sa len spodná hranica portfólia. Táto sa mení v dôsledku zachovania optimálneho riešenia modelu a základných vzťahov stratégie CPPI (46) a (47) tak, aby hodnota ostatných premenných zostala zachovaná. Uveďme napríklad strednú hodnotu spodnej hranice portfólia investora s multiplikátorom $m = 6$. Pri porovnaní Tabuľky 5 a Tabuľky 6 vidíme, že s rastúcim multiplikátorom stredná hodnota spodnej hranice portfólia rastie. Nemení sa ani hodnota účelovej funkcie, hodnota rizika meraná pomocou average value-at-risk deviation. Hodnota rizika pre príklad s multiplikátorom $m = 6$ je rovná 0,0568.

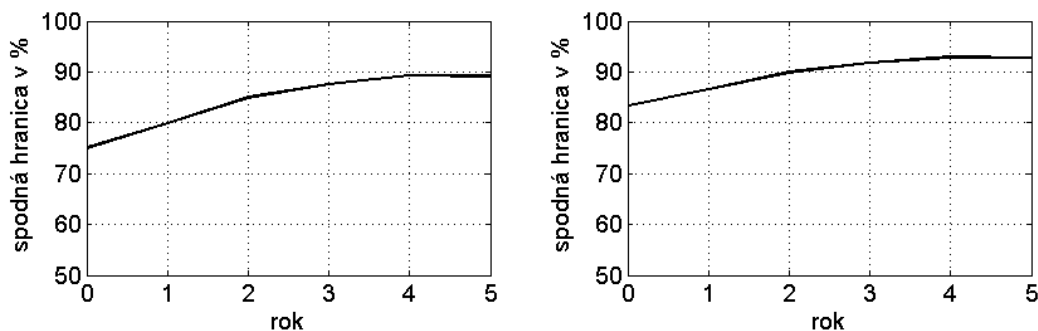
Na Obrázku 10 sú zakreslené percentuálne podiely obidvoch stredných hodnôt spodnej hranice v pomere k priemernej výslednej sume v dlhopisoch a akciách s multiplikátorom $m = 4$ a $m = 6$.

4.3 Zhrnutie výsledkov - lineárne obmedzenia

Porovnaním výsledkov účelových funkcií z príkladu redukovaného TRMM modelu (Príklad 3.3.4, strana 29) a hodnoty účelovej funkcie príkladu s im-

0.rok	1.rok	2.rok	3.rok	4.rok	5.rok
Vysledná suma v dlhopisoch a akciách					
0,0900	0,1821	0,2751	0,3674	0,4591	0,4600
Stredná hodnota prostriedkov investovaných do akcií					
1,0000	0,7870	0,5629	0,4474	0,3705	
Stredná hodnota prostriedkov investovaných do dlhopisov					
0,0000	0,2130	0,4371	0,5526	0,6295	
Stredná hodnota spodnej hranice portfólia					
0,0750	0,1577	0,2474	0,3370	0,4265	

Tabuľka 6: Výsledky príkladu použitím CPPI stratégie aplikovanej na redukovaný TRMM model ($m = 6$).



Obr. 10: Percentuálny podiel strednej hodnoty spodnej hranice portfólia s multiplikátorom $m = 4$ a $m = 6$ v pomere k priemernej dosiahnutej sume.

plementáciou CPPI stratégie, ďalej porovnaním Tabuľky 2 (strana 32) a Tabuľky 5 resp. 6 vidíme, že výsledky úlohy s použitím CPPI stratégie a bez nej sú zhodné, optimálne riešenia oboch stratégií sa rovnajú. Ak sa pozrieme na prerozdelenie prostriedkov v ľubovoľnom nekoncovom uzle redukovaného TRMM modelu, nezávisí toto rozdelenie od žiadnej pevne danej konštanty. V systéme aplikácie CPPI na redukovaný TRMM model máme však pevne daný multiplikátor, ktorý určuje investorov postoj k riziku. Tento môže byť pre dvoch investorov rozdielny a ovplyvňuje prerozdelenie investícií. V základnom princípe CPPI stratégie platí, že čím je multiplikátor väčší, tým sa investuje viac prostriedkov do akcií. Váha prostriedkov investovaných do ak-

cií však závisí aj od spodnej hranice hodnoty portfólia. Táto sa v našich výsledkoch optimalizácie mení práve v závislosti od veľkosti multiplikátora, aby zostali zachované váhy prerozdeľovaných prostriedkov. Z toho dôvodu nám pri zadaní rôznych multiplikátorov vyšli zhodné pomery investícií rozdelených do akcií a do dlhopisov a rozdielne spodné hranice hodnoty portfólia. Jednoducho povedané, spodná hranica sa v optimalizačnej úlohe dopočítala v závislosti od veľkosti multiplikátora - investorovho postoja k riziku.

Rôzne výsledky redukovaného TRMM modelu a aplikácie CPPI na tento model by mohli nastať, keby sme neuvažovali investovanie do akcií ako celku. Keby sme napr. optimalizovali úlohu pre investovanie do troch akcií a dlhopisov. Jednotlivé akcie by mali rozličné výnosy (rozdielne stredné hodnoty výnosov a rozdielne volatility). Stratégia CPPI nám presne určí, koľko prostriedkov investovať do rizikovej a bezrizikovej zložky, neurčuje nám však, koľko prostriedkov v rizikovej zložke dať do konkrétnej akcie, napr. pri možnosti investovať do troch akcií. Potom by v našich priemerných optimálnych stratégiách vystupovali hodnoty investované do jednotlivých akcií, ktoré by boli v redukovanom TRMM modeli a v modeli s CPPI stratégiou odlišné, ale ich súčet by bol zhodný. Výsledkom by bola rovnaká dosiahnutá suma s rozdielnym prerozdelením investícií.

Z výsledkov príkladov pozorujeme, že váha prostriedkov investovaných do akcií s časom klesá, rastie váha prostriedkov investovaných do dlhopisov. Z toho vyplýva, že klesá riziko našich úspor ku koncu sledovaného časového obdobia.

4.4 Aplikácia CPPI stratégie na redukovaný TRMM model - nelineárne obmedzenia

Podobne ako pri redukovanom TRMM modeli aj pri aplikácii CPPI stratégie nám nelineárne obmedzenia zmenšia počet premenných, dĺžku vektora premenných. Budeme uvažovať, že investor zvažuje a prerozdeľuje svoje investície v rokoch $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_\omega < T$, kde $0, 1, \dots, \omega$ reprezentujú časovú úroveň nekonečných uzlov, čo je znázornené na Obrázku 7, strana 34. Označme $l_k = t_k - t_{k-1}$ dĺžku periódy $[t_{k-1}, t_k]$, $k \in \{1, \dots, \omega + 1\}$. Pravidelné príspevky τ investor vkladá každoročne a spolu s úsporami sú l_k -krát zhodnocované za príslušné obdobie, periódu $[t_{k-1}, t_k]$. Váhy investícií v akciách

a dlhopisoch sa určujú v čase t_{k-1} a zostávajú počas periódy nezmenené. Podobne pomer príspevkov $\tau_n = [\tau_n^A, \tau_n^B]$ zostáva nezmenený počas periódy $[t_{\xi(n)}, t_{\xi(n)+1}]$. Jednotlivé hodnoty určíme nasledovne:

$$\frac{\tau_n^A}{\tau} = \frac{y_n^A}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{1}}, \quad \frac{\tau_n^B}{\tau} = \frac{y_n^B}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{1}}, \quad (59)$$

$\tau_n^T \mathbf{1} = \tau$ pre všetky $n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}$. Výnosy akcií a dlhopisov sa správajú ako v predchádzajúcich prípadoch. Na redukovaný TRMM model s nelineárnym obmedzením (35)–(41) aplikujeme stratégiu CPPI. Celý systém aplikácie CPPI stratégie na redukovaný TRMM model s jedným nelineárnym obmedzením bude mať potom tvar:

$$\min_{\mathbf{y}, \mathbf{f}} \left\{ \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m (\mathbf{y}_m^T \mathbf{1}) - \max_a \left\{ a - \frac{1}{\alpha} \sum_{m \in \mathcal{T}} p_m [\mathbf{y}_m^T \mathbf{1} - a]^- \right\} \right\} \quad (60)$$

$$\sum_{m \in \mathcal{T}} p_m (\mathbf{y}_m^T \mathbf{1}) \geq \mu, \quad (61)$$

$$y_0^A = m(\tau - f_0), \quad y_0^B = \tau - y_0^A, \quad (62)$$

$$\frac{\tau_n^A}{\tau} = \frac{y_n^A}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{1}}, \quad \frac{\tau_n^B}{\tau} = \frac{y_n^B}{\mathbf{y}_n^T \mathbf{1}} \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{T}, \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} y_n^A &= m(\tau + \mathbf{y}_{n-}^T \mathbf{s}_n - f_n) \\ y_n^B &= \tau + \mathbf{y}_{n-}^T \mathbf{s}_n - y_n^A \\ m(\tau + \mathbf{y}_{n-}^T \mathbf{s}_n - f_n) &\leq \tau + \mathbf{y}_{n-}^T \mathbf{s}_n \end{aligned} \right\} \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}_0, \quad (64)$$

$$y_n^A = y_{n-}^A s_n^A, \quad y_n^B = y_{n-}^B s_n^B \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{T}, \quad (65)$$

$$\mathbf{y}_n \geq 0 \quad \text{pre všetky } n \in \mathcal{N}. \quad (66)$$

To, že je problém nelineárny, vyriešime použitím iteračnej metódy rovnako ako v prípade nelineárneho obmedzenia redukovaného TRMM modelu. Postup je popísaný na strane 36.

4.4.1 Príklad

K aplikácii CPPI stratégie na redukovaný TRMM model s nelineárnymi obmedzeniami uvedieme ilustračný príklad. Ako vzor príkladu nám poslúži sporiteľ, ktorý má do dôchodku 40 rokov. Tento sporiteľ si prispieva pravidelnými príspevkami 9% zo svojej mzdy každoročne do sporenia, ale nepre rozdeľuje svoje investície každý rok, ale len na začiatku sporenia, a potom v 9., 17., 23., 30. a 36. roku sporenia. Svoje investície zhodnocuje ročne spolu s ďalšími novými príspevkami, príspevky prerozdeľuje podľa stratégie zvolenej na začiatku daného časového obdobia. Výnosy akcií a dlhopisov uvádza Tabuľka 1, strana 30. Priemerný rast miezd v jednotlivých rokoch je čerpaný z [9], uvedený je v Tabuľke 3, strana 38. Ako v predchádzajúcich príkladoch minimalizujeme koncové riziko investícií pomocou average value-at-risk deviation ($\alpha = 0,05$) s cieľom dosiahnuť konečnú očakávanú hodnotu úspor 7 jednotiek. Uvažujeme priemerne rizikovo averzného investora s multiplikátorom $m = 4$.

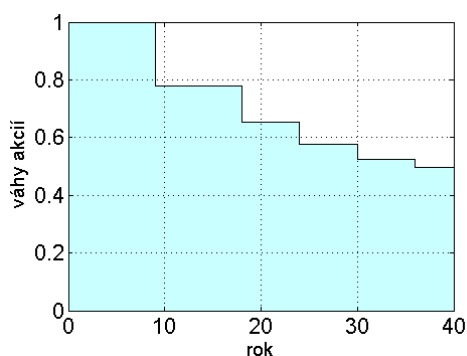
Výsledná hodnota rizika meraná pomocou average value-at-risk deviation je 3,8524, čo predstavuje, že sporiteľ s 5% pravdepodobnosťou dosiahne o 40 rokov koncovú čiastku $7 - 3,8524 = 3,1476$ jednotiek. V Tabuľke 7 sú

0.rok	9.rok	18.rok	24.rok	30.rok	36.rok	40.rok
Výsledná suma v dlhopisoch a akciách						
0,0900	0,9855	2,1506	3,2296	4,5309	6,1130	7,0000
Stredná hodnota prostriedkov investovaných do akcií						
1,0000	0,7790	0,6547	0,5752	0,5228	0,4979	
Stredná hodnota prostriedkov investovaných do dlhopisov						
0,0000	0,2210	0,3453	0,4248	0,4772	0,5021	
Stredná hodnota spodnej hranice portfólia						
0,0675	0,7815	1,7360	2,6320	3,7024	4,9767	

Tabuľka 7: Výsledky príkladu použitím CPPI stratégie aplikovanej na redukovaný TRMM model s nelineárnymi obmedzeniami ($m = 4$).

zhrnuté výsledky príkladu. Priemerná hodnota optimálnych stratégií, koľko peňazí má sporiteľ na dôchodok investovať do akcií a koľko do dlhopisov, je označená ako stredná hodnota prostriedkov investovaných do akcií resp.

dlhopisov. Podobne ako na Obrázku 11 si môžeme všimnúť, že úspory investované do akcií s časom klesajú, riziko investovania klesá ku koncu časového horizontu, počas ktorého sme sporili.



Obr. 11: Priemerné optimálne váhy akcií v portfóliu pri použití redukovaného TRMM modelu s nelineárnymi obmedzeniami.

Ako v predchádzajúcom príklade porovnajme teraz, čo sa zmení pri zmene investorovho postoja k riziku. Zmeňme priemerne rizikovo averzného investora (s multiplikátorom $m = 4$) na investora rizikovo averzného - s multiplikátorom $m = 6$. Všetky ostatné predpoklady a parametre zostávajú nezmenené. Pri pohľade na Tabuľky 7 a 8 vidíme, že priemerná optimálna

0.rok	9.rok	18.rok	24.rok	30.rok	36.rok	40.rok
Výsledná suma v dlhopisoch a akciách						
0,0900	0,9855	2,1506	3,2296	4,5309	6,1130	7,0000
Stredná hodnota prostriedkov investovaných do akcií						
1,0000	0,7790	0,6547	0,5752	0,5228	0,4979	
Stredná hodnota prostriedkov investovaných do dlhopisov						
0,0000	0,2210	0,3453	0,4248	0,4772	0,5021	
Stredná hodnota spodnej hranice portfólia						
0,0750	0,8495	1,8742	2,8312	3,9785	5,3554	

Tabuľka 8: Výsledky príkladu použitím CPPI stratégie aplikovanej na redukovaný TRMM model s nelineárnymi obmedzeniami ($m = 4$).

stratégia investora sa nezmenila, nezmenila sa ani výsledná suma dosiah-

nutá v dlhopisoch a akciách. Aj hodnota účelovej funkcie zostala nezmenená, riziko má hodnotu 3,8524. Jediná sledovaná premenná stredná hodnota spodnej hranice portfólia zmenila svoju hodnotu. Táto hodnota sa zmenila tak, aby zostala zachovaná priemerná výsledná suma v dlhopisoch a akciách, optimálne riešenie modelu.

4.5 Zhrnutie výsledkov - nelineárne obmedzenia

Podobne ako pri porovnávaní výsledkov z príkladu redukovaného TRMM modelu a príkladu s implementáciou CPPI stratégie s lineárnymi obmedzeniami, aj pri nelineárnych obmedzeniach sledujeme zhodu v hodnote účelovej funkcie z príkladu redukovaného TRMM modelu (Príklad 3.4.1, strana 37) a príkladu s implementáciou CPPI stratégie. Zhodu vidíme aj pri porovnaní priemernej optimálnej stratégie investora - hodnotu strednej hodnoty prostriedkov investovaných do akcií a dlhopisov z Tabuľky 4 (strana 38) a Tabuľky 7 resp. 8. Touto zhodou sme overili, že výsledky jednotlivých príkladov sú optimálne. Pri výsledkoch CPPI stratégie môžeme vidieť, že pri zmene multiplikátora sa mení aj spodná hranica hodnoty portfólia. Táto sa mení v závislosti od multiplikátora tak, aby zostali zachované váhy prostriedkov investované do akcií a do dlhopisov. Preto sú aj výsledky oboch príkladov rovnaké, lebo spodná hranica portfólia sa prispôsobila veľkosti multiplikátora tak, aby váha investícií v akciách a dlhopisoch bola optimálna.

Opäť možno uviesť, že pri uvažovaní investovania do viacerých druhov akcií, stratégia CPPI nevymedzuje, koľko peňazí investovať do ktorých akcií. Stratégia presne určuje objem peňazí investovaný do akcií ako celku, nie do jednotlivých zložiek. A preto by sme rovnaký obnos úspor mohli dosiahnuť rozdielnym prerozdelením investícií.

Ďalším výsledkom je, že pomer úspor investovaných do akcií v čase klesá a rastie pomer úspor investovaných do dlhopisov. Teda klesá hodnota prostriedkov investovaných do rizikových zložiek a rastie objem prostriedkov presunutých do zložiek bezrizikových.

Záver

V práci sú uvedené modely venujúce sa optimálnemu výberu portfólia dôchodkového sporenia. Zaoberali sme sa redukovaným TRMM modelom (Terminal Risk Minimizing Model) a aplikáciou zabezpečovacej stratégie CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance) na tento model.

Redukovaný TRMM model je obmenou pôvodného TRMM modelu (z práce [6]), ktorý uvažuje investovanie do troch typov dôchodkových fondov. Už v spomínanej práci bol smerodajný pomer prostriedkov investovaných do akcií a do dlhopisov. O tento poznatok sa opierame a celá práca uvažuje investovanie do akcií a dlhopisov samostatne. Redukovaný TRMM model má týmto znížený počet premenných, čo umožňuje jednoduchšiu technickú manipuláciu s nástrojom. Využitím základných pravidiel zabezpečovacej stratégie CPPI sme túto aplikovali na redukovaný TRMM model, a tým sme rozšírili využiteľnosť modelu.

Z výsledkov jednotlivých príkladov vidíme, že hodnota investícií vložených do akcií s rastúcim časom klesá. Deje sa to vo všetkých príkladoch bez ohľadu na dĺžku časového horizontu. Je to výsledok, ktorý sme očakávali, vzhľadom na to, že väčšie množstvo peňazí je viac citlivé na výkyvy na finančnom trhu, na zmenu výnosov akcií (v našich príkladoch). Sporitelia by teda mali znižovať riziko svojich investícií s blížiacim sa odchodom do dôchodku, a to umiestnením väčšej časti svojich úspor do dlhopisov, resp. menej rizikových nástrojov finančného trhu.

Ďalej sa vo výsledkoch príkladov redukovaného TRMM modelu a implementácie CPPI stratégie ukázalo, že optimálne riešenia obidvoch stratégií sú zhodné. Hoci stratégia CPPI umožňuje určiť si multiplikátor, investorov postoj k riziku, ktorý môže byť pre dvoch investorov rozdielny, v modeli uvažujeme pohyblivú spodnú hranicu. A táto sa mení práve v závislosti od veľkosti multiplikátora tak, aby zostala zachovaná optimálna hodnota váh prerozdelených investícií.

Rozdielne výsledky prerozdelenia investícií by sme mohli dostať pri uvažovaní investovania do viacerých druhov akcií. Stratégia CPPI určuje váhu prostriedkov investovaných do rizikovej zložky, akcií ako celku, neurčuje pomer medzi jednotlivými druhmi akcií. Pri uvažovaní viacerých by nám mohla vyjsť rovnaká koncová hodnota úspor pri redukovanom TRMM modeli a stratégii

CPPI aplikovanej na tento model, ale zároveň by sa nerovnal pomer jednotlivých druhov akcií v priemernej optimálnej stratégii.

Literatúra

- [1] Acerbi, C. (2002): Spectral Measures of Risk: a Coherent Representation of Subjective Risk Aversion. *Journal of Banking and Finance*, Vol. 26, s. 1505–1518.
- [2] Acerbi, C. and Tasche, D. (2001): Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk, 2001, s. 7–8.
- [3] Bertrand, P. and Prigent, J. (2002): Portfolio Insurance Strategies: OBPI versus CPPI. GREQAM et Université Montpellier1; THEMA, Université de Cergy, s. 1,2.
- [4] Desmedt, S. and Walhin, J.-F. (2008): On the Subadditivity of Tail Value at Risk: An Investigation with Copulas, 2008, s. 231–252.
- [5] Hallerbach, W., G. (1996): Decomposing Portfolio Value-at-Risk A General Analysis. Erasmus University Rotterdam, Department of Finance, 1996, s. 3.
- [6] Kilianová, S. (2008): Stochastic dynamic optimization models for pension planning. Dizertačná práca, Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, 2008.
- [7] Kilianová, S. and Pflug, G. (2009): Optimal pension fund management under multi-period risk minimization. *Annals of Operations Research*, 2009, 166, s. 261–270.
- [8] Krátka, J. (2006): GARCH modely a Value-at-Risk aplikácie. Diplomová práca, Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, 2006, s. 11.
- [9] Kvetan, V., Mlýnek, M., Páleník, V. a Radvanský M. (2007): Starnutie, zdravotný stav a determinanty výdavkov na zdravie v podmienkach Slovenska. Ekonomický ústav SAV, Bratislava 2007.
- [10] Linsmeier, T. J. and Pearson, N. D. (1996): Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1996, s. 7–15.

- [11] Manganelli, S. and Engle, R. F. (2001): Value at Risk Models in Finance. Working Paper No. 75, European Central Bank, 2001, s. 6.
- [12] Markowitz, H. (1952): Portfolio Selection. The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, s. 77–91.
- [13] Melicherčík, I., Olšarová, L. a Úradníček, V.: Kapitoly z finančnej matematiky. EPOS, Bratislava, 2005.
- [14] Pflug, G.: Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. Department of Statistics and Decision Support Systems, University of Vienna.
- [15] Pflug, G. and Römisch, W. (2007): Modeling, Measuring and Managing Risk. World Scientific Publishing Company, 2007.
- [16] Plesník, J., Dupačová, J. a Vlach, M.: Lineárne programovanie. Alfa, Bratislava 1990.
- [17] Rockafellar, R. T. and Uryasev, S. (2000): Optimization of Conditional Value-at-Risk. The Journal of Risk, Vol. 2, No. 3, s. 21–41.
- [18] Ševčovič, D., Stehlíková, B. a Mikula, K. (2009): Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Slovenská technická univerzita, Bratislava, 2009.
- [19] Štalmach, M. (2007): Value-at-Risk: nástroj na meranie trhového rizika. Diplomová práca, Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, 2007, s. 18. Bratislava 2009.
- [20] Uryasev, S. (2000): Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications. Financial Engineering News, Vol. 14, February 2000.
- [21] Yamai, Y. and Yoshihara, T. (2002): Comparative analyses of expected shortfall and value-at-risk under market stress, Bank of Japan, 2002, s. 18.
- [22] <http://aktualne.centrum.sk>, internetový denník Aktuálne.sk.
- [23] <http://dss.allianzsp.sk>, Allianz - Slovenská dôchodková správcovská spoločnosť, a.s.

- [24] <http://hnonline.sk>, Hospodárske noviny.
- [25] <http://www2.standardandpoors.com>, leading provider of financial market intelligence.
- [26] <http://www.adss.sk>, Asociácia dôchodkových správcovských spoločností.
- [27] <http://www.euroekonom.sk>, ekonomický portál EuroEkonom - ekonomika pre moderných euroekonómov.

Príloha

Matice A_{ineq} a A_{eq} z redukovaného TRMM modelu majú nasledovný tvar:

$$A_{ineq} = \left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -p_1 & \dots & -p_S & 0 & \dots & 0 & -p_1 & \dots & -p_S \\ 1 & -1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots & & & \ddots \\ 1 & 0 & & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & -1 \end{array} \right)$$

$$A_{eq} = \left(\begin{array}{c|cccc|cccc|cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & -s^B & 1 & & & & & & 0 & -s_1^A & 1 & & & & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & -s^B & & & 1 & & & & -s_k^A & & & & 1 & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & -s^B & & & 1 & & & & -s_{k+1}^A & & & & 1 & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & & \vdots & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & -s^B & & & & & \ddots & & & -s_{k+k}^A & & & & & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \ddots & & & & & & & & & & \ddots & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & & & \ddots & & & & & & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & -s^B & & 1 & 0 & & & & & & -s_N^A & & 1 \end{array} \right)$$