

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITY KOMENSKÉHO  
V BRATISLAVE

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2009

Miroslav Mlynárik

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
UNIVERZITY KOMENSKÉHO  
V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



**KALIBRÁCIA JEDNOFAKTOROVÝCH MODELOV  
ÚROKOVÝCH MIER POMOCOU ANALYTICKEJ  
APROXIMÁCIE CIEN DLHOPISOV**

**Diplomová práca**

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Vedúca diplomovej práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2009

Miroslav Mlynárik

### **Čestné prehlásenie**

*Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne len s použitím uvedenej literatúry.*

V Bratislave, 29. apríla 2009

.....

Miroslav Mlynárik

## **Pod'akovanie**

*Touto cestou by som sa chcel pod'akovať vedúcej diplomovej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za jej odborné vedenie, pripomienky a cenné rady, ktoré mi pomohli pri napísaní tejto diplomovej práce. Zvláštne pod'akovanie patrí aj Mgr. Jánovi Somorčíkovi za jeho vytrvalosť pri konzultáciach viacerých štatistických otázok, bez ktorých by najmä prvá kapitola neuzrela svetlo sveta.*

# Abstrakt

Cieľom diplomovej práce je nájsť efektívne metódy kalibrácie jednofaktorových modelov úrokových mier. V prípade reálnej pravdepodobnostnej miery sa na základe simulácií zaoberáme problematikou korekcie maximálne vierohodných odhadov parametrov týchto modelov. S využitím analytickej aproximácie cien dlhopisov sa snažíme nakalibrovat' rizikovo neutrálne parametre modelu a odhadnúť trhovú cenu rizika. Výsledky kalibrácií testujeme na reálnych dátach slovenského a európskeho peňažného trhu porovnaním s kalibráciou z dostupnej literatúry.

## Kľúčové slová

krátkodobá úroková miera, kalibrácia, jednofaktorové modely, funkcia vierohodnosti, analytická aproximácia, rizikovo neutrálna miera, simulované žíhanie

# Obsah

Úvod	4
<b>1 Teoretické základy modelovania úrokových mier</b>	<b>5</b>
1.1 Teória úrokových mier	5
1.1.1 Časová štruktúra úrokových mier	5
1.1.2 Krátkodobá úroková miera	6
1.2 Teória stochastických procesov	7
1.2.1 Brownov pohyb. Itóova lema	7
1.3 Rizikovo neutrálna verzus reálna miera	9
1.3.1 Podmienená stredná hodnota	9
1.3.2 Martingaly	10
1.3.3 Zmena miery	10
1.3.4 Girsanovova veta	11
<b>2 Short rate modely</b>	<b>13</b>
2.1 Dve verzie stochastickej diferenciálnej rovnice	14
2.2 Parciálna diferenciálna rovnica pre cenu dlhopisu	14
2.3 Prehľad short rate modelov	16
2.3.1 Mean-reversion	16
2.3.2 Vašíčkov model	17
2.3.3 Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model	18
<b>3 Metódy kalibrácie short rate modelov</b>	<b>21</b>
3.1 Kalibrácia reálnych parametrov modelu	21
3.1.1 Diskrétna aproximácia všeobecného short rate modelu	21
3.1.2 Metódy odhadovania parametrov diskrétného modelu	23
3.1.3 Vlastnosti odhadov získaných zo simulácií	25
3.2 Kalibrácia rizikovo neutrálnych parametrov modelu	27
3.2.1 Analytická aproximácia ceny dlhopisu	27
3.2.2 Minimalizácia nákladovej funkcie	29
3.2.3 Kalibrácia parametrov simulovaného žihania	31
<b>4 Vylepšenie kalibračných metód</b>	<b>34</b>
4.1 Korekcia maximálne vierohodných odhadov	34
4.1.1 Porovnanie kvality korekcie s inými metódami odhadovania	35

4.2	Vylepšená aproximácia ceny dlhopisu . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Kalibrácia modelov na základe reálnych výnosových kriviek</b>	<b>42</b>
5.1	Kalibrácia reálnych parametrov výnosových kriviek . . . . .	42
5.2	Odhad rizikovo neutrálnych parametrov . . . . .	45
	<b>Záver</b>	<b>51</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>52</b>
	<b>Príloha</b>	<b>i</b>

# Úvod

Modelovanie úrokových mier sa stalo už takmer neoddeliteľnou súčasťou finančných trhov. Jednou z oblastí, ktorú pokroky v modelovaní úrokov výrazne ovplyvnili sú derivátové trhy, v súčasnosti pútajúce na seba zvýšenú pozornosť najmä pre globálnu finančnú krízu, ktorej vznik je dávaný do súvisu práve so zložitými derivátovými kontraktmi. V celom kontexte derivátov predstavujú úrokové miery akúsi fundamentálnu informáciu, ktorá spolu s ďalšími faktormi vstupuje do vzorca pre ich korektné oceňovanie. S postupným rozmachom derivátov tak vznikol dopyt po čo najpresnejšom modelovaní a následnom predpovedaní vývoja úrokových mier.

Derivátové kontrakty možno rozdeliť do dvoch skupín v závislosti od toho, či sú ich ceny významne závislé na vývoji niektorej z úrokových mier. Existujú totiž deriváty, ktorých cena je síce funkciou úroku, avšak jej citlivosť na jeho zmenu je zanedbateľná v porovnaní s citlivosťou na zvyšné parametre. Do tejto skupiny patria najmä akciové a menové deriváty, vyznačujúce sa tým, že hodnota úroku vstupujúceho do vzorca pre ich cenu sa považuje za deterministickú (konštantnú). My sa budeme zaoberať druhou skupinou tzv. derivátmi úrokových mier, ktoré sú charakteristické tým, že uvažujú stochastický vývoj svojho podkladového aktíva – úroku. Základným derivátom úrokovej miery je diskontný dlhopis. Od neho sa odvídzajú zložitejšie kontrakty ako sú swapy, capy, floory, ale aj opcie a forwardy na dlhopisy a mnohé iné.

Matematická teória, pomocou ktorej je možné tieto deriváty oceniť, je pomerne komplikovaná a častokrát vyžaduje riešenie ťažkých diferenciálnych rovníc popisujúcich napríklad vývoj krátkodobej úrokovej miery alebo priamo cenu dlhopisu. V kontexte existujúceho výskumu v oblasti kalibrovania modelov krátkodobej úrokovej miery sme si ako prvý cieľ tejto práce stanovili otestovať kvalitu aproximatívneho vzorca pre cenu dlhopisu vyjadreného pri rizikovo neutrálnej miere. Jeho význam spočíva v možnosti vyhnúť sa riešeniu zložitej, vo všeobecnosti analyticky neriešiteľnej parciálnej diferenciálnej rovnice.

V našom prípade využijeme toto približné riešenie pri kalibrácii rizikovo neutrálnych parametrov short rate modelov. Na druhej strane však vystupuje reálna pravdepodobnostná miera, pri ktorej je kalibrovaný model popísaný mierne odlišnými parametrami. Na kalibráciu týchto parametrov existuje viacero prístupov. Nás bude zaujímať metóda maximálnej vierohodnosti, ktorej výstupom sú často značne vychýlené odhady. Toto vychýlenie sa pokúsime zmenšiť, pričom nám efektívne poslúžia simulácie. Po získaní, resp. korekcii parametrov z oboch častí nakoniec odhadneme posledný parameter – trhovú cenu rizika.

Práca je rozdelená na päť kapitol. V prvých dvoch sa venujeme teórii modelovania a prezentácii základných modelov. V tretej kapitole popisujeme základné metódy kalibrácie jednofaktorových modelov, pričom okrem existujúcich metód prezentujeme aj relatívne nový približný vzorec pre ceny dlhopisov. V ťažiskovej štvrtej kapitole sa zaoberáme korekciou a vylepšením metód z tretej kapitoly, ktoré testujeme na simulovaných dátach. V poslednej kapitole tieto metódy otestujeme na reálnych dátach a porovnáme naše výsledky s existujúcou kalibráciou v dostupnej literatúre.



# Kapitola 1

## Teoretické základy modelovania úrokových mier

### 1.1 Teória úrokových mier

Úrok ako pojem vzťahujúci sa k danému finančnému aktívu vo všeobecnosti vyjadruje odmenu držiteľa tohto aktíva za jeho neskoršiu (odloženú) spotrebu. Medzi takéto aktíva patria napríklad vklady v bankách na bežných, príp. termínovaných účtoch, úvery (z pohľadu ich poskytovateľa) ale aj štátne dlhopisy či akcie. Všetky uvedené finančné nástroje majú potenciál priniesť ich držiteľovi výnos vo forme úroku. Pri vkladoch a dlhopisoch je tento výnos pevne stanovený, v prípade akcie je jeho výška neistá a môže byť dokonca záporná.

#### 1.1.1 Časová štruktúra úrokových mier

Aby sme vedeli presne kvantifikovať úrok, budeme uvažovať tzv. *diskontný dlhopis*. Je to aktívum, ktoré jeho držiteľovi zaručuje vyplatenie hodnoty jednej peňažnej jednotky (napr. 1\$) vo vopred stanovenom čase expirácie  $T$ . Prívlastok *diskontný* znamená, že sa pomocou neho dajú diskontovať (prevádzať na súčasnosť) budúce peňažné hodnoty. Použitím symboliky z [1] vypočítame súčasnú hodnotu takéhoto dlhopisu podľa vzorca

$$P(T_0, T) = e^{-R(T_0, T)(T - T_0)}, \quad (1.1)$$

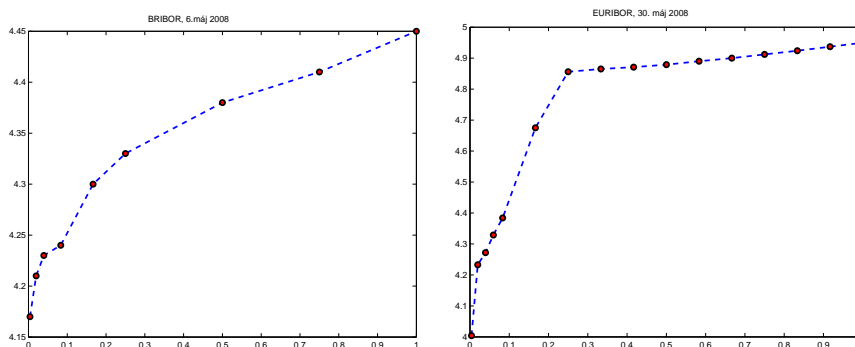
pričom hodnotou  $T_0$  vyjadrujeme súčasnosť. Nás bude v tomto vyjadrení zaujímať hodnota  $R(T_0, T)$  – úroková miera na dobu  $T - T_0$ . Tú je možné analogicky vyjadriť ako funkciu ceny diskontného dlhopisu:

$$R(T_0, T) = -\frac{1}{T - T_0} \ln P(T_0, T). \quad (1.2)$$

Jednotlivé hodnoty  $R(T_0, T)$  vytvárajú tzv. *časovú štruktúru úrokových mier*, čo je vlastne funkčná závislosť úrokových mier od maturít príslušných diskontných dlhopisov.

Pod hodnotou  $R(T_0, T)$  máme na mysli tzv. spojitý úrok, ktorý sa však (pozri [1]) od bežne používaného diskretného úroku líši len v druhom ráde, pretože medzi spojitým úrokom  $r_c$  a diskretným ročným úrokom  $r_d$  platí pre obdobie úročenia  $t$  rokov rovnosť

$$e^{r_c t} = (1 + r_d)^t, \quad \text{a preto} \quad r_c = \ln(1 + r_d) \approx r_d.$$



Obrázok 1.1: Medzibankové "offered" sadzby Bribor a Euribor – máj 2008.

## 1.1.2 Krátkodobá úroková miera

Uvažujme začiatok krivky úrokových mier, pričom súčasnosť označíme časom  $t$ . V súlade s definíciou (1.2) potom pod krátkodobou úrokovou mierou budeme rozumieť limitu

$$r(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\ln P(t, t + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Keďže  $P(t, t) \equiv 1$ , s použitím definície derivácie vzhľadom na druhú premennú funkcie  $R(t, T)$  (expiračný čas) dostávame vzťah pre  $r(t)$  v kompaktnom tvare:

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\ln P(t, t + \Delta t) - \ln P(t, t)}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \ln P(t, \tau) \Big|_{\tau=t}.$$

Z hľadiska teórie úrokových mier je krátkodobá úroková miera totožná s tzv. okamžitou forwardovou úrokovou mierou *platnou v súčasnosti*.<sup>1</sup> Tá je totiž pre všetky  $T \geq t$  definovaná vzťahom

$$f(t, T) := -\frac{\partial}{\partial \tau} \ln P(t, \tau) \Big|_{\tau=T}, \quad (1.4)$$

z ktorého je okamžite vidieť súvis  $r(t)$  s  $f(t, T)$ . Je teda zrejmé, že

$$R(t, t) \equiv r(t) = f(t, t),$$

čo znamená, že počiatky kriviek  $R(t, T)$  a  $f(t, T)$  splývajú.

<sup>1</sup>Forwardový úrok  $F(t, T_1, T_2)$ ,  $T_2 > T_1 \geq t$  je úrok dohodnutý v čase  $t$ , platný v čase medzi  $T_1$  a  $T_2$ . Limitným prechodom  $T_1 \rightarrow T_2$  je možné definovať okamžitú forwardovú úrokovú mieru.

## 1.2 Teória stochastických procesov

Pri modelovaní úrokových mier zohráva významnú úlohu náhodnosť alebo neistota. Matematickými objektami, pomocou ktorých vieme túto neistotu implementovať do modelov, sú práve tzv. stochastické (náhodné) procesy. V nasledujúcej časti sa preto zameriame nielen na ich základné vlastnosti, ale v skratke uvedieme aj niektoré príklady ich použitia.

### 1.2.1 Brownov pohyb. Itóova lema

Pod jednorozmerným stochastickým procesom s hodnotami v  $\mathbb{R}$  budeme rozumieť súbor náhodných premenných

$$X = \{X_t; 0 \leq t < \infty\}$$

definovaný na spoločnom pravdepodobnostnom priestore  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , kde  $\mathcal{F}$  symbolizuje  $\sigma$ -algebru merateľných množín a  $P$  pravdepodobnostnú mieru na  $\Omega$ . Časový index  $t$  prebieha kladnú časť reálnej osi, čo znamená, že proces  $X$  obsahuje celé kontinuum náhodných premenných. Inými slovami, pre každé  $\omega \in \Omega$  existuje reálna funkcia

$$t \rightarrow X_t(\omega); 0 \leq t < \infty,$$

ktorú nazývame trajektória  $X$  priradená  $\omega$ .

Centrálne postavenie medzi stochastickými procesmi má tzv. štandardný Brownov pohyb, nazývaný aj Wienerov proces. Definujeme ho podľa [2] nasledovne:

**Definícia 1.1.** Stochastický proces  $\{W(t), 0 \leq t \leq T\}$  s vlastnosťami:

- (i)  $W(0) = 0$ ,
- (ii) zobrazenie  $t \mapsto W(t)$  je s pravdepodobnosťou 1 spojitá funkcia na  $[0, T]$ ,
- (iii) prírastky  $W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_k) - W(t_{k+1})$  sú nezávislé pre každé  $k$  a pre všetky  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq T$ ,
- (iv)  $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$  pre každé  $0 \leq s < t \leq T$

sa nazýva jednorozmerný štandardný Brownov pohyb.

Z definície vyplýva, že pre štandardný Brownov pohyb platí  $W(t) \sim N(0, t)$ . Ďalší dôležitý proces odvodený od Brownovho pohybu je tzv. Itóov proces, ktorého definícia predpokladá zavedenie tzv. Itóovho integrálu (pozri [1]).

**Definícia 1.2** (Itóov proces). Nech  $W(t)$  je štandardný Brownov pohyb na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Potom jednorozmerný Itóov proces definujeme vzťahom

$$X_t(\omega) = X_0 + \int_0^t \mu(s, \omega) ds + \int_0^t \sigma(s, \omega) dW_t(\omega), \quad (1.5)$$

resp. v tzv. diferenciálnom tvare

$$dX_t(\omega) = \mu(t, \omega)dt + \sigma(t, \omega)dW_t(\omega). \quad (1.6)$$

V ďalšom budeme symbol  $\omega$  zvyčajne vynechávať. Podľa zaužívanej terminológie funkcie  $\mu(t, \omega)$  a  $\sigma(t, \omega)$  voláme *drift*, resp. *volatilita* stochastického procesu (1.6), pričom drift predstavuje jeho deterministickú a volatilita stochastickú (náhodnú) časť. Ak umožníme, aby drift aj volatilita záviseli od  $X(t)$ , pričom za  $X(t)$  dosadíme krátkodobú úrokovú mieru  $r(t)$ , dostaneme všeobecné vyjadrenie short rate modelov (modelov krátkodobej úrokovej miery):

$$dr(t) = \mu(r(t), t)dt + \sigma(r(t), t)dW(t). \quad (1.7)$$

Posledný pojem ktorý zavedieme v súvislosti so stochastickými procesmi je Itóova lema. Pomocou nej budeme vedieť korektne manipulovať so stochastickými funkciami a procesmi, ktoré pri diferencovaní vykazujú mierne odlišnosti v porovnaní s deterministickým svetom. Jej formulácia je podľa [1] nasledovná:

**Lema 1.3** (Itóova lema). *Nech  $X_t(\omega)$  je Itóov proces*

$$dX_t(\omega) = \mu(t, \omega)dt + \sigma(t, \omega)dW_t(\omega),$$

a nech  $g(t, x) \in C^2([0, \infty] \times \mathbb{R})$ . Potom

$$Y_t(\omega) = g(t, X_t(\omega))$$

je tiež Itóov proces a platí

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)\sigma^2 dt. \quad (1.8)$$

Člen druhého rádu, ktorý sa v prípade deterministických funkcií pri diferencovaní nevyskytuje, je dôsledkom nenulovej kvadratickej variácie stochastických funkcií. Nulová kvadratická variácia totiž hovorí o *nie veľkej rýchlosti* zmien funkčných hodnôt na danom intervale. Stochastické funkcie menia podľa [1] svoje funkčné hodnoty *príliš rýchlo*, čoho dôsledkom je, že pre diferenciál času a Brownovho pohybu platí limitná formulka:

$$(dW_t)^2 \approx dt.$$

Použitie Itóovej lemy sa dá jednoducho demonštrovať pri výpočte prvého diferenciálu funkcie ceny dlhopisu  $P(r(t), t, T)$ . Proces  $r(t)$  je, ako neskôr uvedieme, stochastického charakteru, preto jeho príspevok k diferenciálu  $dP$  bude obsahovať aj výraz pri  $(dW_t)^2$ , ktorý je ekvivalentný s členmi prvého rádu:

$$\begin{aligned} dP(r(t), t, T) &= \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial r} dr(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma^2(r(t), t) dt \\ &= \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial r} [\mu(r(t), t) dt + \sigma(r(t), t) dW(t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma^2(r(t), t) dt. \end{aligned}$$

## 1.3 Rizikovo neutrálna verzus reálna miera

Hoci je problematika tzv. rizikovo neutrálnaj a reálnaj pravdepodobnostnej miery pomerne náročná, tvorí neoddeliteľnú súčasť vedomostí, ktoré sú potrebné pri práci s modelmi úrokových mier a oceňovaní ich derivátov. V tejto súvislosti definujeme pojmy ako podmienená stredná hodnota alebo martingal, ktoré nám neskôr pomôžu pri pochopení princípu zmeny miery.

### 1.3.1 Podmienená stredná hodnota

Podmienená stredná hodnota sa dá definovať viacerými spôsobmi. Pre naše potreby ju zavedieme ako náhodnú premennú podmienenú danou  $\sigma$ -algebrou, na ktorej bude existovať. Zaužívanú symboliku preberáme opäť z [1].

**Definícia 1.4.** *Nech  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  je pravdepodobnostný priestor,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  náhodná premenná s  $E(|X|) < \infty$ . Nech  $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$  je  $\sigma$ -algebra. Podmienená stredná hodnota  $E(X|\mathcal{H})$  je náhodná premenná s nasledujúcimi vlastnosťami:*

- (i)  $E(X|\mathcal{H})$  je  $\mathcal{H}$ -merateľná,
- (ii)  $\int_H E(X|\mathcal{H})dP = \int_H XdP \quad \forall H \in \mathcal{H}$

Uvedená definícia vyjadruje dve dôležité vlastnosti.  $E(X|\mathcal{H})$  ako náhodná premenná je *len*  $\mathcal{H}$ -merateľná, teda nie je taká "bohatá" ako  $X$ , presnejšie, existuje len na "menej bohatej"  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{H}$  obsahujúcej menej podmnožín  $\Omega$  ako  $\mathcal{F}$ . Druhá vlastnosť hovorí, že na množinách  $H \in \mathcal{H}$  vie  $E(X|\mathcal{H})$  odmerať (preto  $\mathcal{H}$ -merateľnosť) strednú hodnotu rovnako ako pôvodná náhodná premenná  $X$ .

Existencia a jednoznačnosť  $E(X|\mathcal{H})$  je zaručená Radon-Nikodymovou vetou<sup>2</sup>. O ďalších dôležitých vlastnostiach podmienenej strednej hodnoty (pozri [1]), ktoré neskôr využijeme, hovorí nasledujúca veta:

**Veta 1.5.** *Nech  $X, Y$  sú náhodné premenné na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  s  $E(|X|) < \infty$  a  $E(|Y|) < \infty$ . Nech  $\mathcal{H}, \mathcal{G}$  sú  $\sigma$ -algebry také, že*

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{F}.$$

*Potom platí:*

- (i)  $E(E(X|\mathcal{H})) = E(X)$ ,
- (ii)  $E(X|\mathcal{H}) = X$ , ak  $X$  je  $\mathcal{H}$ -merateľná,
- (iii)  $E(YX|\mathcal{H}) = YE(X|\mathcal{H})$ , ak  $Y$  je  $\mathcal{H}$ -merateľná,
- (iv)  $E(X|\mathcal{G}) = E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G})$ .

Druhá vlastnosť hovorí o limitnom prípade, keď  $X$  je podmienená  $\sigma$ -algebrou, na ktorej sama existuje. Podmienenie v tomto prípade nemá význam, a teda  $X = E(X|\mathcal{H})$ . Posledná vlastnosť, v literatúre nazývaná aj *tower law* hovorí, že strednú hodnotu možno počítať iteračne smerom "od najbohatšej" k "menej bohatým"  $\sigma$ -algebbrám.

---

<sup>2</sup> Pozri [1, str. 137].

### 1.3.2 Martingaly

Martingaly ako podmnožina stochastických procesov úzko súvisia s podmienenou strednou hodnotou. Pre ich jednoznačnú definíciu sa zavádza pojem *filtrácie*, teda systému  $\sigma$ -algebier  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ , pre ktoré platí

$$0 \leq t < s \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s.$$

Martingalom budeme potom nazývať taký proces, ktorého náhodné premenné sú v každom čase  $\mathcal{F}_t$ -merateľné a navyiac podmienená stredná hodnota jeho budúceho stavu je jeho súčasná hodnota. Formálne o tom hovorí nasledujúca definícia:

**Definícia 1.6.** *Stochastický proces  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  sa nazýva martingal vzhľadom k filtrácii  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ , ak*

- (i) *náhodná premenná  $X_t$  je  $\{\mathcal{F}_t\}$ -merateľná a platí  $E[|X_t|] < \infty \quad \forall t \geq 0$ ,*
- (ii)  *$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad \forall t \geq s$ .*

Na otázku ako spoznať martingal existuje pomerne jednoduchá odpoveď – nesmie obsahovať drift (pozri [1]). Zo známych procesov patria medzi martingaly Brownov pohyb, Itóov integrál, alebo aj systém podmienených stredných hodnôt podmienených príslušnou filtráciou. Nás však budú zaujímať najmä tie martingaly, ktoré reprezentujú diskontované deriváty, teda procesy definované vzťahom

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right) V_t, \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.9)$$

ktoré vzhľadom na vlastnosť (ii) vieme oceniť použitím podmienenej strednej hodnoty pri rizikovo neutrálnej miere  $Q$ :

$$V_0 = E_Q\left[\exp\left(-\int_0^T r(s) ds\right) V_T\right].$$

Prevod medzi reálnou a rizikovo neutrálnou mierou zabezpečí práve operácia zmeny miery, ktorú realizujeme aplikovaním Girsanovovej vety. Vzhľadom na zložitosť uvedenej problematiky preberáme tvrdenia obsiahnuté v nasledujúcich dvoch podkapitolách z [2].

### 1.3.3 Zmena miery

Zjednodušene povedané, zmenou miery budeme chcieť dosiahnuť, aby určitý Itóov proces (najčastejšie proces daného diskontovaného podkladového aktíva) bol martingal pri rizikovo neutrálnej miere  $Q$ , čo je ekvivalentné tomu, že z príslušného výchýleného Brownovho pohybu pri miere  $P$  sa stane štandardný Brownov pohyb pri miere  $Q$ . Najprv však začneme všobecným definovaním zmeny miery.

Podľa Radon-Nikodymovej vety platí, že pre každú absolútne spojitú<sup>3</sup> mieru  $Q$  vzhľadom k  $P$  existuje náhodná premenná  $X$  na  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  s vlastnosťami  $E(X) = 1$  a  $P(X \geq 0) = 1$  taká, že platí:

$$Q(A) = E[\mathbf{1}_A X] = \int_A X(\omega) dP(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad (1.10)$$

pričom priradenie  $\omega \mapsto \mathbf{1}_A(\omega)$  znamená indikátorovú funkciu množiny  $A \subset \Omega$ . Uvedená formulácia platí aj naopak, teda pre každú náhodnú premennú spĺňajúcu dané vlastnosti existuje práve jedna absolútne spojitá miera  $Q$ . Náhodná premenná  $X$  sa označuje aj  $dQ/dP$  alebo *Radon-Nikodymova derivácia*  $Q$  vzhľadom k  $P$ .

V prípade spojitých náhodných premenných existuje jednoduchá ilustrácia uvedených pojmov. Predpokladajme, že je daná hustota  $g$  náh. premennej  $Z$  pri miere  $P$

$$P(Z < z) = \int_{-\infty}^z g(x) dx, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Ďalej predpokladajme, že existuje iná hustota  $f$ , ktorá je navyiac absolútne spojitá vzhľadom ku  $g$ , teda  $g(z) = 0 \Rightarrow f(z) = 0$ . Ak definujeme množinovú funkciu  $Q$  na  $(\Omega, \mathcal{F})$  položením

$$Q(A) := E_P \left[ \mathbf{1}_A \frac{f(Z)}{g(Z)} \right] = \int_A \frac{f(Z)}{g(Z)} dP,$$

potom vzhľadom na platnosť  $P(f(Z)/g(Z) \geq 0) = 1$  a

$$E_P \left[ \frac{f(Z)}{g(Z)} \right] = \int_{\Omega} \frac{f(Z(\omega))}{g(Z(\omega))} dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = 1,$$

dostávame, že  $Q$  je pravdepodobnostná miera na  $(\Omega, \mathcal{F})$ , pričom  $dQ/dP \equiv f(Z)/g(Z)$ . Nakoniec, vzhľadom na platnosť (1.10) dostávame po dosadení za  $dQ/dP$ :

$$Q(Z < z) = \int_{\omega: Z(\omega) < z} \frac{f(Z(\omega))}{g(Z(\omega))} dP(\omega) = \int_{-\infty}^z \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = \int_{-\infty}^z f(x) dx,$$

teda  $f$  je funkcia hustoty náhodnej premennej  $Z$  pri miere  $Q$ .

### 1.3.4 Girsanovova veta

Predpokladajme, že  $g$  je funkcia hustoty náhodnej premennej  $Z \sim N(\mu, 1)$  so strednou hodnotou  $\mu$  a varianciou 1 a  $f$  je funkcia hustoty  $N(0, 1)$ . Vytvorme podiel  $f(x)/g(x) = \exp(\mu^2/2 - \mu x)$  a definujme mieru  $Q$  položením

$$\frac{dQ}{dP} := e^{\frac{1}{2}\mu^2 - \mu Z}.$$

Potom  $Z$  má normované normálne rozdelenie pri  $Q$ .

<sup>3</sup> $Q$  je absolútne spojitá vzhľadom k  $P \Leftrightarrow \{Q(A) > 0 \Rightarrow P(A) > 0, \forall A \in \mathcal{F}\}$ .

Tento jednoduchý príklad transformácie na normovanú normálnu náhodnú premen-  
nú teraz rozšírime na celý stochastický proces – Brownov pohyb  $W(t)$ , kde  $t \in [0, T]$ .  
Uvažujme nezáporný martingal  $\{X(t), t \in [0, T]\}$  vzhľadom k filtrácii  $\mathcal{F}_t$ , ktorého  
 $E[X(T)] = 1$ . Stotožnením  $X(t)$  so systémom Radon-Nikodymových derivácií  $dQ_t/dP_t$   
definujeme systém mier  $\{Q_t\}$  na  $\mathcal{F}_t, t \in [0, T]$ :

$$Q_t(A) := E_P \left[ \mathbf{1}_A \frac{dQ_t}{dP_t} \right] = E_P[\mathbf{1}_A X(t)] = E_{P_t}[\mathbf{1}_A X(t)], \quad \forall A \in \mathcal{F}_t,$$

pričom z vlastností (ii) z definícií podmienenej strednej hodnoty a martingalov vyplýva

$$Q_T(A) = E_P[\mathbf{1}_A X(T)] = E_P[\mathbf{1}_A E_P[X(T)|\mathcal{F}_t]] = E_P[\mathbf{1}_A X(t)] = Q_t(A),$$

teda  $\forall t \in [0, T]$  je  $Q_t$  zúženie  $Q_T$  na  $\mathcal{F}_t$ , čo znamená, že  $Q_t, t \in [0, T]$  sú konzistentné.

Našou úlohou je teda nájsť uvedený nezáporný martingal  $X(t)$  s  $E[X(T)] = 1$  s  
vlastnosťou, že jeho náhodné premenné budú Radon-Nikodýmове derivácie zúženia  
 $Q_T$  na  $\mathcal{F}_t$  vzhľadom k zúženiu  $P_T$  na  $\mathcal{F}_t$ , pre  $\forall t \in [0, T]$ . Nech  $P$  a  $Q$  sú ekvivalentné  
miery na  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$  a ich  $\mathcal{F}_T$ -merateľná Radon-Nikodymova derivácia nech je  $dQ/dP$ .  
Definujme

$$\left( \frac{dQ}{dP} \right)_t = \begin{cases} \frac{dQ}{dP} & t = T \\ E_P \left[ \frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}_t \right] & t \in [0, T) \end{cases} \quad (1.11)$$

Vieme, že proces (1.11) podmienených stredných hodnôt je martingal (pozri napr. [1]).  
Okrem toho, keďže  $\forall A \in \mathcal{F}_t, \forall t \in [0, T]$  platí

$$E_P \left[ \mathbf{1}_A \left( \frac{dQ}{dP} \right)_t \right] = E_P \left[ E_P \left[ \mathbf{1}_A \frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right] = E_P \left[ \mathbf{1}_A \frac{dQ}{dP} \right] = Q(A),$$

proces (1.11) definuje hľadaný systém konzistentných mier vzhľadom k  $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ .

**Veta 1.7** (Girsanovova veta). *Nech  $\lambda(t)$  je  $\mathcal{F}_t^W$ -adaptovaný proces spĺňajúci  $\int_0^t \|\lambda(u)\|^2 du < \infty$  pre  $t \in [0, T]$ . Nech*

$$X(t) = \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^t \|\lambda(u)\|^2 du - \int_0^t \lambda(u) dW(u) \right).$$

Ak  $E_P[X(T)] = 1$ , potom  $\{X(t), t \in [0, T]\}$  je martingal a pravdepodobnostná miera  $Q$  na  
 $(\Omega, \mathcal{F}_T)$  definovaná vzťahom

$$\frac{dQ}{dP} = X(T)$$

je ekvivalentná s mierou  $P$ . Navyiac, pri miere  $Q$  je proces

$$\widetilde{W}(t) := W(t) + \int_0^t \lambda(u) du, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.12)$$

štandardný Brownov pohyb vzhľadom k  $\{\mathcal{F}_t^W\}$ .



# Kapitola 2

## Short rate modely

Ťažiskom nasledujúcich kapitol bude modelovanie krivky časovej štruktúry úrokových mier, resp. oceňovanie derivátov úrokových mier – dlhopisov. Vieme už, že ceny dlhopisov sú zviazané s príslušnými úrokovými mierami vzťahom (1.2). Ak teda budeme vedieť modelovať ceny dlhopisov, úrokové miery z nich potom už jednoducho dopočítame príslušným vzorcom.

K modelovaniu úrokových mier existujú dva základné prístupy. Prvý, tzv. *no arbitrage* prístup, vychádza zo súčasnej krivky časovej štruktúry úrokových mier a snaží sa vytvoriť modelovú krivku, ktorej výnosy korešpondujú s aktuálnymi výnosmi skutočnej krivky úrokových mier. Druhý prístup postupuje opačne, pričom súčasnú krivku neberie ako vstup, ale naopak, aktuálne úrokové miery získame ako výstup modelu. V takomto prípade však dochádza k nekonzistencii medzi skutočnými a modelovanými úrokovými mierami. Takýto prístup vychádza obvykle z modelu trhu, na ktorom sa snažíme vytvoriť rovnováhu, preto tieto modely dostali označenie *equilibrium* modely.

V prípade úrokových mier spočíva podstata modelovania cien ich derivátov v nadviazanosti týchto cien na určitý počet v čase sa vyvíjajúcich stavových premenných. Uvažujme pre ilustráciu diskontný dlhopis  $P(t, T)$  a krátkodobú úrokovú mieru  $r(t)$  ako stavovú premennú. Potom všeobecná funkčná závislosť ceny dlhopisu od príslušnej stavovej premennej bude mať tvar

$$P(r_t, t, T) = \phi(r(t), t, T).$$

V našej práci sa budeme zaoberať modelmi s jednou stavovou premennou, a to konkrétne krátkodobou úrokovou mierou  $r(t)$ . V rámci uvedenej terminológie pôjde o tzv. *equilibrium* modely, čo znamená, že modelovaná a reálna krivka sa nebudú úplne zhodovať. Jedným z našich cieľov bude nájsť také hodnoty parametrov modelu, aby vážená suma štvorcov rozdielov skutočných a modelových výnosov bola minimálna. Okrem toho sa budeme venovať aj maximalizácii funkcie vierohodnosti, vyplývajúcej z časového vývoja  $r(t)$ , ktorý je opísaný už spomenutou stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr(t) = \mu(r(t), t)dt + \sigma(r(t), t)dW(t). \quad (2.1)$$

## 2.1 Dve verzie stochastickej diferenciálnej rovnice

Vývoj krátkodobej úrokovej miery pomocou diferenciálnej rovnice je v podstate možné zapísať dvoma základnými spôsobmi. V závislosti od toho akú pravdepodobnostnú mieru použijeme, dostávame buď vyjadrenie pri reálnej alebo rizikovo neutrálnej miere.

Z technických dôvodov predpokladajme, že drift pôvodnej rovnice (2.1) je lineárny a volatilita nelineárna v  $r$ , takže rovnica nadobudne štandardizovaný tvar

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t. \quad (2.2)$$

K úplnému popisu situácie nám chýba informácia, pri akej miere je daná rovnica formulovaná. Zaved'eme tzv. vlnovkovú konvenciu, čo znamená, že rizikovo neutrálny zápis bude zvýraznený vlnovkovým Brownovým pohybom (oproti reálnemu bez vlnovky). V súlade s Girsanovovou vetou a (1.12) platí

$$d\widetilde{W}_t = dW_t + \lambda(r)dt, \quad \text{resp.} \quad dW_t = d\widetilde{W}_t - \lambda(r)dt.$$

V závislosti od toho, či uprednostňujeme štandardizovaný drift v reálnom (P-miera) alebo rizikovo neutrálnom vyjadrení (Q-miera), dostávame dve možné dvojice rovníc (2.2):

P-miera	Q-miera
$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$	$dr_t = (\alpha + \beta r_t - \lambda(r)\sigma r_t^\gamma)dt + \sigma r_t^\gamma d\widetilde{W}_t$
$dr_t = (\alpha + \beta r_t + \lambda(r)\sigma r_t^\gamma)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^\gamma d\widetilde{W}_t$

Pre nás bude výhodné zaviesť takú symboliku, aby obe vyjadrenia mali štandardizovaný tvar, preto definujeme vlnovkové parametre  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ :

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t \implies dr_t = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} r_t)dt + \sigma r_t^\gamma d\widetilde{W}_t,$$

pričom

$$\lambda(r) = \frac{(\alpha - \tilde{\alpha}) + (\beta - \tilde{\beta})r}{\sigma r^\gamma}.$$

Tzv. trhová cena rizika  $\lambda(r)$  nám určuje závislosť medzi reálnymi a rizikovo neutrálnymi parametrami driftu.

## 2.2 Parciálna diferenciálna rovnica pre cenu dlhopisu

Tvar všeobecnej rovnice (2.2) umožňuje odvodiť vzťah medzi short rate modelom a príslušnými cenami diskontných dlhopisov  $P(t, T)$ . Týmto vzťahom je parabolická parciálna diferenciálna rovnica (PDR), pričom poznáme dva spôsoby jej odvodenia. Jeden spôsob využíva konštrukciu bezrizikového portfólia zloženého z dvoch dlhopisov

a na základe tzv. *no-arbitrage* princípu odvodí príslušnú rovnicu. Postup uvedený v našej práci<sup>1</sup> je jednoduchší a vychádza z práve definovanej rizikovo neutrálnej verzie rovnice (2.2).

Uvažujme diskontný dlhopis  $P(t, T)$  ako derivát úrokovej miery (podkladové aktívum bude  $r(t)$ ), teda ako funkciu troch premenných  $P(r_t, t, T)$ . Podľa Itóovej lemy dostávame prvý diferenciál tejto funkcie:

$$\begin{aligned} dP(r_t, t, T) &= \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial r} dr_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \sigma^2 r_t^{2\gamma} dt \\ &= \frac{\partial P}{\partial t} dt + \frac{\partial P}{\partial r} [(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} r_t) dt + \sigma r_t^\gamma d\tilde{W}_t] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t^{2\gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} dt \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dôvod použitia vlnovkovej symboliky spočíva v tom, že podľa teórie oceňovania derivátov musí byť každý diskontovaný derivát  $B_t^{-1} V_t$  martingalom pri rizikovo neutrálnej miere  $Q$ , teda pri tej, pri ktorej platí oceňovacia formuľka

$$V_t = B_t E_Q[B_T^{-1} V_T | \mathcal{F}_t^W]$$

pre podkladové aktívum – v tomto prípade  $r(t)$ . V našom prípade to znamená, že proces  $B_t^{-1} P(r_t, t, T)$  nesmie obsahovať drift, z čoho následne dostávame

$$d(B_t^{-1} P) = B_t^{-1} (-r_t dt) P + B_t^{-1} dP = \hat{\sigma}_t d\tilde{W}_t$$

pre vhodný  $\mathcal{F}_t^{\tilde{W}}$ -adaptovaný proces  $\hat{\sigma}_t$ . Z toho hneď vyplýva

$$dP = r_t P dt + B_t \tilde{\sigma}_t d\tilde{W}_t. \quad (2.4)$$

Nakoniec použijeme obvyklý matematický trik – porovnáme koeficienty v (2.3) a (2.4) pri  $dt$ , čím dostaneme rovnicu

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r} (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} r_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t^{2\gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - r_t P = 0. \quad (2.5)$$

Dôležitý bude pre nás aj jej tvar v reálnom svete, ktorý dostaneme spätnou transformáciou vlnovkových premenných

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} r_t = \alpha + \beta r_t - \lambda(r) \sigma r_t^\gamma.$$

Takto dostávame hľadanú diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu odvodenú od short rate modelu (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r} (\alpha + \beta r_t - \lambda(r) \sigma r_t^\gamma) + \frac{1}{2} \sigma^2 r_t^{2\gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - r_t P &= 0. \\ P(r_t, T, T) &= 1, \quad \forall r_t > 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

---

<sup>1</sup>Pozri [1, str. 224]

Za pozornosť stojí, že v rovnici vystupuje nami zvolený drift  $\alpha + \beta r_t$ , pričom je od neho odčítaný násobok volatility. Táto vlastnosť diferenciálnej rovnice sa zachová aj pri jej odvodení z ináč formulovaného modelu (jeho druhého štandardného tvaru).

## 2.3 Prehľad short rate modelov

Short rate model ako stochastický proces je jednoznačne určený svojím driftom a volatilitou. V tejto časti uvedieme dva základné modely, pričom sa zameriame na opis ich charakteristických vlastností, ich výhod a nevýhod pri modelovaní úrokových mier. Nakoniec sa zmienime o možnosti rozšírenia týchto modelov na prípad všeobecných hodnôt  $\gamma$  (rôznych od 0 a 0.5), na ktorom v nasledujúcej kapitole postavíme metódy na ich kalibráciu.

### 2.3.1 Mean-reversion

Pri definovaní štandardného tvaru rovnice short rate modelov sme sa odvolali na technický dôvod, pre ktorý sme drift zaviedli ako lineárnu funkciu v  $r_t$ . Nebolo to však samoučelné. Väčšina známych short rate modelov vykazuje tzv. *mean-reversion* vlastnosť, ktorá je ekvivalentná práve linearite driftu. Mean-reversion, alebo aj spätné priťahovanie k určitej rovnovážnej hodnote znamená, že časový proces krátkodobej úrokovej miery konverguje k tejto dlhodobej priemernej hodnote. Povedané terminológiou diferenciálnych rovníc je to jeho pevný bod. V prípade rovnice (2.2) sa  $r_t$  v čase blíži k hodnote  $-\frac{\alpha}{\beta}$ . Aby sme sa vyhli zlomkom, upravme drift a tým aj celú rovnicu na *druhý* štandardný tvar

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t. \quad (2.7)$$

V takejto formulácii modelu sú jeho parametre ľahko stotožniteľné s mean-reversion vlastnosťou. Dlhodobá priemerná hodnota  $r_t$  je v tomto prípade rovná  $\theta$  a tzv. *rýchlosť*, ktorou je  $r_t$  priťahovaná k tejto hodnote, vyjadruje parameter  $\kappa$ . Vidíme, že volatilitu sme oproti prvému štandardnému tvaru nezmenili, z čoho vyplýva aj analogický tvar parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r}(\kappa(\theta - r_t) - \lambda(r)\sigma r_t^\gamma) + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t^{2\gamma} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - r_t P = 0. \\ P(r_t, T, T) = 1, \quad \forall r_t > 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ďalšou rovnako dôležitou vlastnosťou, tentokrát súvisiacou s tvarom volatility (s hodnotou parametra  $\gamma$ ), je tzv. *level-effect* vlastnosť. Túto model vykazuje v prípade, že  $\gamma \neq 0$ , teda ak podmienená volatilita  $\sigma(r_t, t)$  modelu závisí od úrovne  $r_{t-1}$ . Inými slovami,  $\gamma$  vyjadruje rozsah, akým zmeny  $r_t$  závisia od jej aktuálnej hodnoty.

### 2.3.2 Vašíčekov model

V roku 1977 navrhol Oldřich Vašíček<sup>2</sup> model opisujúci vývoj krátkodobej úrokovej miery, ktorého zápis v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice pri reálnej miere je

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t. \quad (2.9)$$

Ak aplikujeme Girsanovovu vetu, dostaneme tvar pri rizikovo neutrálnej miere:

$$dr_t = [\kappa(\theta - r_t) - \sigma\lambda]dt + \sigma d\widetilde{W}_t. \quad (2.10)$$

Takto definovaný proces je typu mean-reversion, zároveň avšak nevykazuje vlastnosť level-effect, teda jeho volatilita je konštantná vzhľadom k  $r_t$ . Z pôvodných štyroch parametrov v ňom vystupujú len tri, čo však nie je jeho jediná výhoda. Medzi short rate modelmi má význačné postavenie, pretože preň vieme nájsť riešenie jeho rovnice (2.9), čo znamená, že existuje analytické vyjadrenie podmieneného rozdelenia jeho krátkodobej úrokovej miery. Navyiac, toto rozdelenie je *presné* podmienené rozdelenie. Pre väčšinu modelov totiž platí, že rozdelenie ich short rate je buď komplikované (CIR model), resp. vo všeobecnosti nie je vyjadriteľné vôbec. V takom prípade existuje len diskrétna aproximácia daného rozdelenia.

Aplikáciou Itóovej lemy a metód riešenia obyčajných diferenciálnych rovníc (pozri [1]) dostaneme vyjadrenie pre podmienené rozdelenie  $r_t$  podľa Vašíčekovho modelu:

$$r_t|_{r_0} \sim N\left(\theta + (r_0 - \theta)e^{-\kappa t}, \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2\kappa}\right). \quad (2.11)$$

Ak  $t \rightarrow \infty$ , konverguje rozdelenie  $r_t$  k limitnému normálnemu rozdeleniu  $N(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa})$ . Výhodou normality  $r_t$  je, že ceny odvodených diskontných dlhopisov sú lognormálne rozdelené (pozri [1]). Na druhej strane predstavuje normalita  $r_t$  aj hlavnú nevýhodu Vašíčekovho modelu, pretože umožňuje, aby  $r_t$  dosiahla s nenulovou pravdepodobnosťou záporné hodnoty, čo samozrejme nie je žiaduce. Iné vylepšené modely však za určitých podmienok vedú zamedziť, aby úroková miera klesla pod nulu.

Mimo to, že vo Vašíčekovom modeli poznáme presné podmienené rozdelenie jeho short rate, vieme spočítať aj ceny dlhopisov  $P(r_t, t, T)$  od neho odvodených. Štandardný postup (pozri [3]) odvodenia spočíva v predpoklade o tvare vzorca pre cenu dlhopisu. Po dosadení do príslušnej rovnice (2.8) dostaneme sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc, ktorých riešenie vytvára hľadaný vzorec, závislý od parametrov modelu vrátane trhovej ceny rizika  $\lambda$ , ktorú v tomto prípade definujeme ako konštantu  $\lambda(r) = \lambda$ . Predpokladajme teda, že cena diskontného dlhopisu je v tvare

$$P(r_t, t, T) = a(t, T)e^{-b(t, T)r_t} \quad (2.12)$$

<sup>2</sup>Oldřich Vašíček (1942-) vyštudoval matematiku na Karlovej univerzite, kde získal aj doktorát z teórie pravdepodobnosti. Po vpáde sovietskych vojsk do Československa v roku 1968 emigroval do USA, kde sa ovplyvnený Blackom, Scholesom a Mertonom začal venovať vlastnému výskumu modelovania dynamiky úrokových mier. Hlavný prínos do teórie úrokových mier predstavuje jeho model navrhnutý v roku 1977, ktorý po ňom neskôr pomenovali. Za svoju prácu bol uvedený do viacerých finančných siení slávy.

a dosad' me ho do (2.8). Dostávame sústavu rovníc

$$\frac{da}{dt} + (\lambda\sigma - \alpha\theta)ab + \frac{1}{2}\sigma^2 ab^2 = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{db}{dt} - \kappa b + 1 = 0, \quad (2.14)$$

ktorej riešenie po dosadení do (2.12) nám dáva hľadanú cenu dlhopisu (pozri [3]):

$$P(r_t, t, T) \equiv \mathbf{P}(\mathbf{r}_t, \boldsymbol{\tau}) = \exp\left(\frac{1}{\kappa}[1 - e^{-\kappa\tau}](R_\infty - r_t) - R_\infty\tau - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}[1 - e^{-\kappa\tau}]^2\right), \quad (2.15)$$

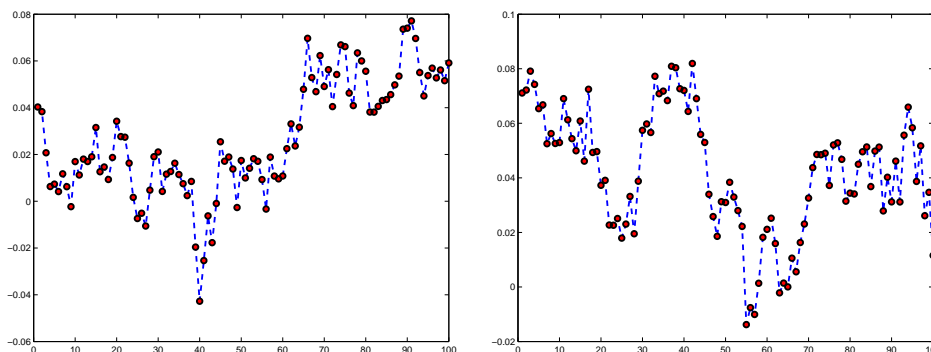
resp.

$$R(t, T) \equiv \mathbf{R}(\mathbf{r}_t, \boldsymbol{\tau}) = R_\infty + (r_t - R_\infty)\frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau} + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3\tau}(1 - e^{-\kappa\tau})^2,$$

pričom zavádzame čas do expirácie  $\tau := T - t$  a dlhodobú úrokovú mieru

$$R_\infty := \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(r_t, \tau) = \theta - \frac{\sigma\lambda}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}.$$

Je zřejmé, že  $R_\infty$  je  $\forall r_t$  konštantná, teda dlhší koniec časovej štruktúry úrokových mier sa limitne blíži ku konštantnej hodnote.



Obrázok 2.1: Simulácia short rate vo Vašíčkovom modeli –  $\sigma = 0.2$ ,  $\theta = 0.04$ ,  $\kappa = 26$ .

Uvedené simulácie short rate sú generované nasledovne: počiatkové  $r_0$  je vybrané z limitného rozdelenia a ďalší vývoj sleduje rozdelenie podľa (2.11). Vidíme, že pre vhodne zvolené parametre existuje nenulová pravdepodobnosť, že  $r_t$  klesne do záporných hodnôt, čo je v súlade s predchádzajúcimi úvahami.

### 2.3.3 Cox-Ingersoll-Ross (CIR) model

Ako alternatíva a zároveň prirodzené rozšírenie Vašíčkovho modelu vývoja krátkodobej úrokovej miery sa javí model, ktorý v roku 1985 navrhli Cox, Ingersoll a Ross. V literatúre nazývaný aj ako *square-root model* má tvar

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t. \quad (2.16)$$

Najdôležitejšou vlastnosťou CIR modelu je nezápornosť hodnôt  $r_t$ . Umožňuje ju práve level-effect, ktorý sme vo Vašíčkovom modeli nemohli pozorovať. Keďže však volatilita modelu CIR je rovná  $\sigma\sqrt{r_t}$ , v prípade priblíženia sa  $r_t$  k nule konverguje k nule, čím znižuje náhodnosť hodnôt  $r_t$  a tým pádom zaručuje, že úrokové miery ostanú nezáporné.<sup>3</sup> Pre ľubovoľnú kombináciu parametrov  $\theta, \sigma, \kappa$  a  $r_0$ , pre ktorú

$$2\kappa\theta \geq \sigma^2$$

navyše platí, že  $r_t$  dosahuje len kladné hodnoty. V opačnom prípade je zaručená len nezápornosť (s nenulovou pravdepodobnosťou dosiahnutia nulovej hodnoty). V prípade, že sa nulová hodnota nadobudne, sa však  $r_t$  vráti okamžite do kladných hodnôt.

Podobne ako v predchádzajúcom modeli nás bude zaujímať riešenie rovnice (2.16). V tomto prípade však jeho nájdenie nie je úplne priamočiare, pretože volatilita závisí od  $r_t$ . Napriek tomu existuje explicitné riešenie v tvare podmieneného rozdelenia pravdepodobnosti (pozri [2]):

$$r_t|_{r_0} \sim \frac{\sigma^2(1 - e^{-\kappa t})}{4\kappa} \chi_d'^2 \left( \frac{4\kappa e^{-\kappa t}}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa t})} r_0 \right), \quad (2.17)$$

pričom

$$d = \frac{4\theta\kappa}{\sigma^2}.$$

Pripomíname, že náhodná premenná  $\chi_\nu'^2(\lambda)$  má tzv. necentrálne chi-kvadrát rozdelenie pravdepodobnosti s  $\nu$  stupňami voľnosti a parametrom necentrality  $\lambda$ , ak jej distribučná funkcia má tvar

$$P(\chi_\nu'^2(\lambda) \leq y) = e^{-\lambda/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}\lambda)^j / j!}{2^{(\nu/2)+j} \Gamma(\frac{\nu}{2} + j)} \int_0^y z^{(\nu/2)+j-1} e^{-z/2} dz.$$

Z vyššie uvedeného vyplýva, že proces (2.16) dokážeme simulovať vtedy, ak vieme simulovať rozdelenie necentrálneho chi-kvadrátu. Pre  $t \rightarrow \infty$  konverguje rozdelenie  $r_t$  k stacionárnemu rozdeleniu

$$r_\infty \sim \frac{\sigma^2}{4\kappa} \chi_d^2.$$

S výnimkou Vašíčkovho modelu je model CIR jediný, pre ktorý vieme explicitne vyjadriť cenu dlhopisu v závislosti od short rate  $r_t$ . Postup je analogický ako v prípade Vašíčkovho modelu, teda cenu hľadáme opäť v tvare  $P(r_t, t, T) = a(t, T)e^{-b(t, T)r_t}$ . Dosadením  $P$  a príslušných derivácií do obmenenej rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial r} (\kappa(\theta - r_t) - \lambda(r)\sigma\sqrt{r_t}) + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - r_t P &= 0. \\ P(r_t, T, T) &= 1, \quad \forall r_t > 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

dostávame sústavu diferenciálnych rovníc (pozri [3]):

---

<sup>3</sup>Pozri [6, str.4]

$$\frac{db}{dt}(\kappa + \lambda\sigma)b - \frac{1}{2}\sigma^2b^2 + 1 = 0 \quad (2.19)$$

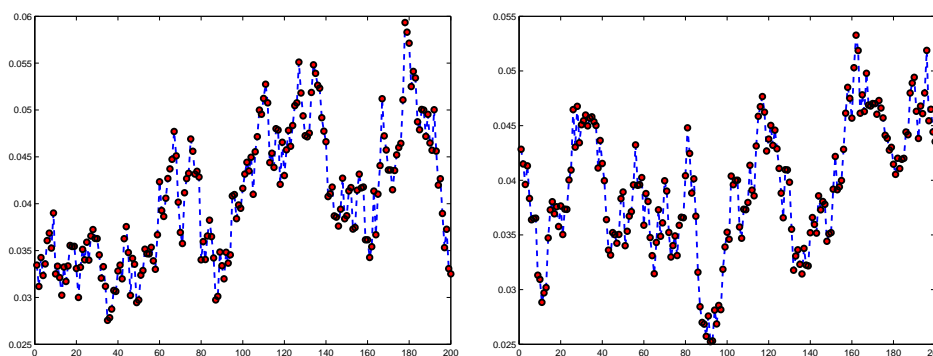
$$\frac{da}{dt} - \kappa\theta ab = 0, \quad (2.20)$$

ktorej riešením, pri použití času do splatnosti  $\tau$ , sú funkcie  $a(\tau)$  a  $b(\tau)$  (pozri [3]):

$$a(\tau) = \left\{ \frac{2\phi e^{(\phi+\psi)\tau/2}}{(\phi+\psi)[e^{\phi\tau} - 1] + 2\phi} \right\}^{2\kappa\theta/\sigma^2} \quad b(\tau) = \left\{ \frac{2[e^{\phi\tau} - 1]}{(\phi+\psi)[e^{\phi\tau} - 1] + 2\phi} \right\}, \quad (2.21)$$

kde

$$\psi = \kappa + \lambda\sigma, \quad \phi = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2}.$$



Obrázok 2.2: Simulácia  $r_t$  v CIR modeli  $\sigma = 0.2, \theta = 0.04, \kappa = 26$ .

Vašíčkov aj CIR model, ktorými sme sa zaoberali doteraz, majú svoj nezastupiteľný význam pri demonštrovaní teoretických vlastností short rate modelov, keďže pre oba existujú riešenia ich stochastických diferenciálnych rovníc a parciálnych diferenciálnych rovníc pre ceny dlhopisov. Ako už však naznačil prechod od Vašíčkovho modelu k modelu CIR, za každé vylepšenie v zmysle kvality a lepšej schopnosti popisovať reálne úrokové miery je potrebné zaplatiť určitou zvýšenou zložitou – tak pri hľadaní riešenia rozdelenia  $r_t$ , ako aj pri riešení rovnice pre cenu dlhopisu.

V prípade, že  $\gamma = 0$ , resp.  $\gamma = 0.5$  bola situácia výpočtovo zvládnuteľná, avšak pri všeobecných hodnotách  $\gamma$  to už neplatí. V prípade, že nám nestačí volatilita v tvare druhej odmocniny a chceme mať voľnosť aj pri hľadaní hodnoty  $\gamma$ , musíme sa vzdať nádeje, že riešenie uvedených rovníc dostaneme v explicitnom, ľahko vyjadriteľnom tvare. V dostupnej literatúre (pozri napr. [5]) sa spomína množstvo zovšeobecnených modelov, ktoré umožňujú pevne voliť hodnoty niektorých parametrov, resp. kalibrovať aj parameter  $\gamma$ . Odhad týchto parametrov sa však rovnako ako v [5] často zakladá na zjednodušených ekonometrických predpokladoch. Naše metódy budú na jednej strane zložitejšie, na druhej strane si takisto vyžadujú určité obmedzujúce zjednodušenia. V nasledujúcej kapitole sa tak budeme venovať dvom problémom – metódam aproximácie všeobecného rozdelenia  $r_t$  a približnému vyjadreniu cien dlhopisov, ktoré odvodíme z rizikovo neutrálnej verzie príslušného modelu.



# Kapitola 3

## Metódy kalibrácie short rate modelov

### 3.1 Kalibrácia reálnych parametrov modelu

Cieľom každého modelovania je pomocou zvoleného modelu popísať reálny vývoj skúmaných veličín. V našom prípade sú týmito veličinami úrokové miery, ktoré modelujeme short rate modelmi. Najdôležitejšiu časť celého modelovania tvorí tzv. *kalibrácia* – teda také nastavenie parametrov modelu, aby jeho výstupy čo najlepšie odzrkadľovali skutočnosť. V tejto časti budeme kalibrovať parametre prislúchajúce k reálnej verzii short rate modelov. Keďže odhady parametrov sú (ako náhodné premenné) často zaťažené diskretizačnou chybou, ktorej sa z technických dôvodov nedá vyhnúť, bude pre nás dôležité poznať aj niektoré štatistické vlastnosti týchto odhadov. K tomu nám najlepšie poslúžia simulácie príslušných modelov. Práve na základe vlastností odhadov parametrov získaných zo simulácií budeme mať možnosť lepšie pochopiť aj vlastnosti odhadov z reálnych dát. Postupovať budeme nasledovne: najprv odvodíme diskretnú aproximáciu všeobecného modelu, následne popíšeme metódy pre odhad parametrov a nakoniec spravíme simulácie, na ktorých budeme tieto metódy testovať.

#### 3.1.1 Diskrétna aproximácia všeobecného short rate modelu

Počnúc touto kapitolou bude naším cieľom odhadovať parametre  $\alpha, \beta, \sigma$  a  $\gamma$ , preto v nasledujúcom texte budeme väčšinou používať rovnicu (2.2)

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t.$$

Nasledujúce odvodenie vychádza zo [4]. Na začiatku sa rovnica vynásobí  $e^{-\beta s}$  (premenná  $t$  sa dočasne zmení na premennú  $s$ ) a zintegruje sa od  $t - 1$  po  $t$ :

$$\begin{aligned} dr_s &= (\alpha + \beta r_s)ds + \sigma r_s^\gamma dW_s \\ e^{-\beta s} dr_s - \beta e^{-\beta s} r_s ds &= \alpha e^{-\beta s} ds + \sigma e^{-\beta s} r_s^\gamma dW_s \\ \frac{d}{ds} (e^{\beta s} r_s) &= \alpha e^{-\beta s} ds + \sigma e^{-\beta s} r_s^\gamma dW_s \end{aligned}$$

takže po zintegrovaní dostaneme rovnicu

$$e^{-\beta t} r_t - e^{-\beta(t-1)} r_{t-1} = \frac{\alpha}{\beta} \left( e^{-\beta(t-1)} - e^{-\beta t} \right) + \int_{t-1}^t \sigma r_s^\gamma e^{-\beta s} dW_s.$$

Poznamenávame, že predposledná úprava bola možná len vďaka deterministickej povahe výrazu  $e^{-\beta s}$ , v opačnom prípade by totiž vznikol zložitý výraz na základe tzv. súčinového pravidla pre Itóove procesy (pozri [1]). Na tomto mieste je potrebné zaviesť určité zjednodušenie, ktoré nám umožní jednoducho zintegrovat' výraz na pravej strane. Ak položíme volatilitu na intervale  $[t-1, t)$  rovnú jej začiatočnej hodnote z tohto intervalu, potom daný integrál je ľahko vyčísliteľný a môžeme pokračovať v úpravách:

$$e^{-\beta t} r_t - e^{-\beta(t-1)} r_{t-1} = \frac{\alpha}{\beta} \left( e^{-\beta(t-1)} - e^{-\beta t} \right) + \sigma r_{t-1}^\gamma \int_{t-1}^t e^{-\beta s} dW_s.$$

Vynásobením rovnice výrazom  $e^{\beta t}$  dostávame diskretný model

$$r_t = e^\beta r_{t-1} + \frac{\alpha}{\beta} \left( e^\beta - 1 \right) + \sigma r_{t-1}^\gamma e^{\beta t} \int_{t-1}^t e^{-\beta s} dW_s \quad (t = 2, \dots, N).$$

Z teórie Itóových procesov možno odvodiť vzťah medzi strednou hodnotou a disperziou Itóovho integrálu, v ktorom sa variancia stochastického integrálu zmení na strednú hodnotu "obyčajného" Lebesgueovho integrálu<sup>1</sup>, čo v našom prípade spôsobí, že

$$\varepsilon_t := \sigma r_{t-1}^\gamma e^{\beta t} \int_{t-1}^t e^{-\beta s} dW_s \sim \mathcal{N} \left( 0, \sigma^2 r_{t-1}^{2\gamma} \frac{e^{2\beta} - 1}{2\beta} \right).$$

Takto dostávame kompaktný tvar diskretnej aproximácie modelu (2.2):

$$r_t = e^\beta r_{t-1} + \frac{\alpha}{\beta} \left( e^\beta - 1 \right) + \varepsilon_t, \quad (t = 2, \dots, N) \quad (3.1)$$

Táto formulácia však predpokladá, že časová jednotka je totožná s intervalom medzi jednotlivými dátami. To ale vo väčšine prípadov neplatí, preto zavedieme alternatívnu verziu modelu (3.1) za predpokladu, že interval medzi dátami je rovný  $\Delta t$  (aproximácia volatility a integrálu bude potom na intervale  $[t - \Delta t, t)$ ):

$$r_t = e^{\beta \Delta t} r_{t-\Delta t} + \frac{\alpha}{\beta} \left( e^{\beta \Delta t} - 1 \right) + \varepsilon_t^{\Delta t}, \quad (t = 2, \dots, N),$$

resp.

$$r_k = e^{\bar{\beta}} r_{k-1} + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \left( e^{\bar{\beta}} - 1 \right) + \bar{\varepsilon}_k, \quad (k = 2, \dots, N), \quad (3.2)$$

pričom

$$\varepsilon_t^{\Delta t} \sim \mathcal{N} \left( 0, \sigma^2 r_{t-\Delta t}^{2\gamma} \frac{e^{2\beta \Delta t} - 1}{2\beta} \right) \quad \text{a} \quad \bar{\alpha} = \alpha \Delta t, \quad \bar{\beta} = \beta \Delta t, \quad \bar{\sigma}^2 = \sigma^2 \Delta t.$$

<sup>1</sup>V pozadí tohto prechodu medzi integrálmi stojí tzv. Itóova izometria (pozri [1]).

Je teda ekvivalentné odhadovať parametre pôvodného a čiarkovaného modelu, pričom čiarkované odhady  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\sigma}^2$  vydělíme  $\Delta t$  (resp.  $\sqrt{\Delta t}$  pri odhade  $\sigma$ ). Naopak,  $\gamma$  ostáva v oboch modeloch rovnaká, teda nezávisí od parametrizácie.

### 3.1.2 Metódy odhadovania parametrov diskrétného modelu

Model (3.2) je síce určitým zjednodušením reality, na druhej strane nám poskytuje možnosť s ním jednoducho manipulovať. Tak ako v prípade Vašíčkovho a CIR modelu nám definuje rozdelenie príslušného short rate podmienené hodnotou minulého pozorovania. Na druhej strane sa naň dá pozeráť ako na regresný model časového radu  $r_t$ , čo naznačuje možnosť odhadu pomocou lineárnej regresie. V závislosti od toho, či poznáme parameter  $\gamma$  preto rozlišujeme dve metódy odhadovania parametrov:

#### 1. prípad: parameter $\gamma$ je známy

Podľa očakávania je situácia jednoduchšia, ak predpokladáme, že hodnotu  $\gamma$  poznáme. To je napríklad prípad CIR modelu, kde  $\gamma = 0.5$ . V súlade so [4] zaved'eme nasledujúcu transformáciu (čiarkovanú symboliku momentálne vynechávame):

$$a = \frac{\alpha}{\beta}(e^\beta - 1), \quad b = e^\beta, \quad s^2 = \sigma^2 \frac{e^{2\beta} - 1}{2\beta}.$$

Model (3.2) nadobudne potom tvar

$$r_t = a + br_{t-1} + \varepsilon_t,$$

pričom  $\varepsilon_t | r_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, s^2 r_{t-1}^{2\gamma})$ .

Takto formulovaný model je oproti štandardnému regresnému modelu odlišný v tom, že disperzia náhodných chýb nie je konštantná – avšak poznáme predpis, ktorým je pre dané  $r_t$  definovaná. Z tohto dôvodu odhady  $a$ ,  $b$  a  $s^2$  získame pomocou vzorca

$$\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = (X^T \Omega^{-1} X)^{-1} X^T \Omega^{-1} y, \quad \hat{s}^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{t=2}^N \hat{\varepsilon}_t^2.$$

kde

$$X = \begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & r_{N-1} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix}, \quad \Omega = \text{diag}(r_1^{2\gamma}, \dots, r_{N-1}^{2\gamma}), \quad \hat{\varepsilon}_t = r_t - \hat{a} - \hat{b}r_{t-1},$$

ktorý efektívne zohľadňuje heteroskedasticitu.

Tento postup, aj keď priamočiary, je pre simulačné účely nevhodný, pretože pri veľkých rozmeroch matice  $X$  vyplývajúcej z veľkosti vektora  $r_t$  sa výpočtová náročnosť prudko zvyšuje.

## 2. prípad: parameter $\gamma$ je neznámy

Funkcia vierohodnosti prislúchajúca k diskretného modelu (3.2), resp. jeho kompaktnějšímu tvaru

$$r_t = a + br_{t-1} + \varepsilon_t$$

nadobúda tvar (pozri [4]):

$$\log L = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^N \left( \log \nu_t^2 + \frac{\varepsilon_t^2}{\nu_t^2} \right),$$

kde

$$\nu_t^2 = \frac{\sigma^2}{2\beta} \left( e^\beta - 1 \right) r_{t-1}^{2\gamma}, \quad \varepsilon_t = r_t - \frac{\alpha}{\beta} \left( e^\beta - 1 \right) - e^\beta r_{t-1}.$$

Odvodenie vzorcov pre maximálne vierohodné odhady parametrov ako aj tvaru vierohodnostnej funkcie je pomerne zdĺhavé (a v literatúre väčšinou nepublikované), a preto ho neuvádzame ani my v tejto práci. Vzorce pre optimálne odhady  $\alpha, \beta$  a  $\sigma$  získané derivovaním funkcie  $\log L$  preto preberáme zo [4]:

$$\hat{\beta}(\hat{\gamma}) = \log \frac{(\sum_{t=2}^N r_t r_{t-1}^{1-2\gamma})(\sum_{t=2}^N r_{t-1}^{-2\gamma}) - (\sum_{t=2}^N r_t r_{t-1}^{-2\gamma})(\sum_{t=2}^N r_{t-1}^{1-2\gamma})}{(\sum_{t=2}^N r_{t-1}^{2-2\gamma})(\sum_{t=2}^N r_{t-1}^{-2\gamma}) - (\sum_{t=2}^N r_{t-1}^{1-2\gamma})^2},$$

$$\hat{\alpha}(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) = \frac{\beta}{e^\beta - 1} \frac{\sum_{t=2}^N r_t r_{t-1}^{-2\gamma} - e^\beta \sum_{t=2}^N r_{t-1}^{1-2\gamma}}{\sum_{t=2}^N r_{t-1}^{-2\gamma}}, \quad \hat{\sigma}^2(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) = \frac{1}{N-1} \frac{2\beta}{e^{2\beta} - 1} \sum_{t=2}^N \varepsilon_t^2 r_{t-1}^{2\gamma},$$

pričom

$$\varepsilon_t = r_t - \frac{\alpha}{\beta} \left( e^\beta - 1 \right) - e^\beta r_{t-1}.$$

Poradie výpočtu odhadov je presne určené ich vzájomnou nadväznosťou – po stanovení  $\gamma$  sa počítajú odhady v poradí  $\beta, \alpha, \sigma$ . Optimalizačný proces pomocou maximalizácie funkcie vierohodnosti je v našom prípade dvojkrokový. V prvom kroku najprv pre zvolené  $\gamma_0$  nájdeme pomocou vyššie uvedených vzorcov optimálne odhady parametrov  $\alpha_0, \beta_0, \sigma_0$ , čím dostaneme maximálnu hodnotu vierohodnostnej funkcie prislúchajúcu  $\gamma_0$ . Pre viaceré hodnoty  $\gamma_0$  tak dostávame funkciu jednej premennej

$$\gamma_0 \mapsto \left\{ \max \left[ \log L(\alpha(\gamma), \beta(\gamma), \sigma(\gamma)) \Big|_{\gamma=\gamma_0} \right] \right\},$$

ktorej maximum hľadáme v prvom kroku. Argument, ktorý maximalizuje túto funkciu prehlásime za odhad parametra  $\hat{\gamma}$ . V druhom kroku potom jednoducho dopočítame zvyšné optimálne odhady  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}^2$ .

Vzhľadom na prítomnosť logaritmu vo vzorci pre  $\beta$  nie je existencia tohto odhadu vždy zaručená. Tento problém sme pri simuláciách vyriešili tak, že do priemerovania sme komplexné odhady nezahŕňali.

### 3.1.3 Vlastnosti odhadov získaných zo simulácií

Vieme už, ako získať odhady parametrov nášho modelu. Zatiaľ však nemáme informáciu o tom, ako dobre tieto odhady v priemere zachytávajú ich skutočné hodnoty. Ako vhodný spôsob zisťovania kvality odhadov sa ukazujú simulácie, pri ktorých si sami volíme optimálne hodnoty parametrov a vieme preto posúdiť aj kvalitu odhadov. Na základe týchto simulácií potom budeme môcť navrhnúť spôsob, ako niektoré nepresné odhady upraviť tak, aby sa po korekcii čo najlepšie zhodovali so skutočnými hodnotami. Je dôležité si uvedomiť, že pri odhadovaní na reálnych dátach budeme uvažovať všeobecnú hodnotu  $\gamma$ , teda akékoľvek ďalšie úpravy odhadov (za pomoci simulácií) budú založené výlučne na aproximatívnom rozdelení (3.2) závislom na prvotných odhadoch. Z praktických dôvodov však na ilustráciu vlastností odhadov budeme používať CIR model, ktorý vieme simulovať nielen pomocou presného rozdelenia

$$r_t \sim \frac{\sigma^2(1 - e^{-\kappa\Delta t})}{4\kappa} \chi_d'^2 \left( \frac{4\kappa e^{-\kappa\Delta t}}{\sigma^2(1 - e^{-\kappa\Delta t})} r_{t-\Delta t} \right),$$

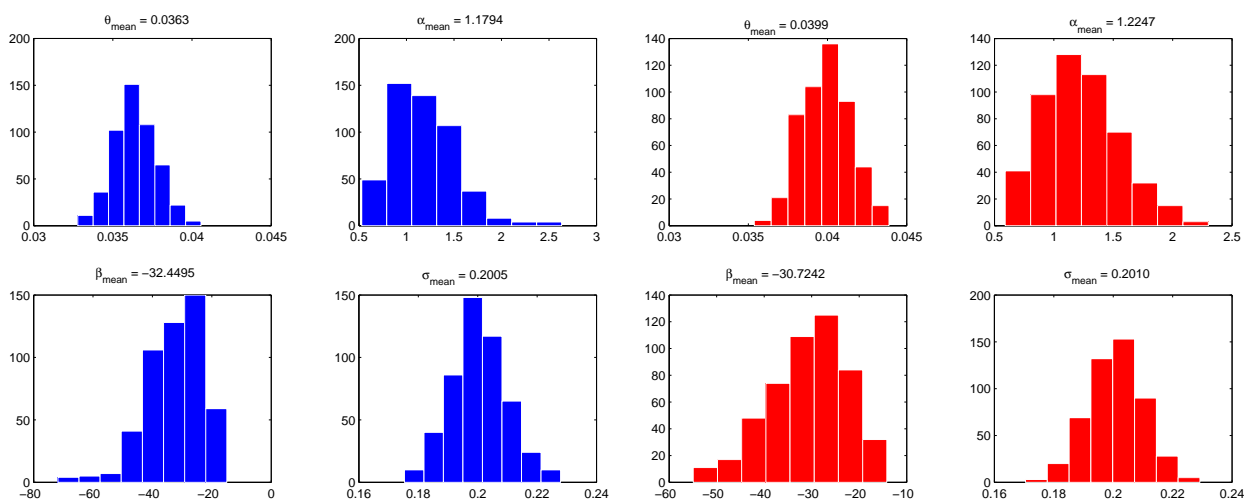
ale aj pomocou jeho aproximatívneho ekvivalentu

$$r_t \approx e^{\beta\Delta t} r_{t-\Delta t} + \frac{\alpha}{\beta} \left( e^{\beta\Delta t} - 1 \right) + \varepsilon_t^{\Delta t}, \quad (t = 2, \dots, N).$$

Uvažujme nasledujúce vstupné parametre:

$$\alpha = 1.04, \quad \beta = -26, \quad \sigma = 0.2, \quad \theta = 0.04$$

a zobrazme histogramy odhadov jednotlivých parametrov získaných pomocou maximalizácie vierohodnostnej funkcie:



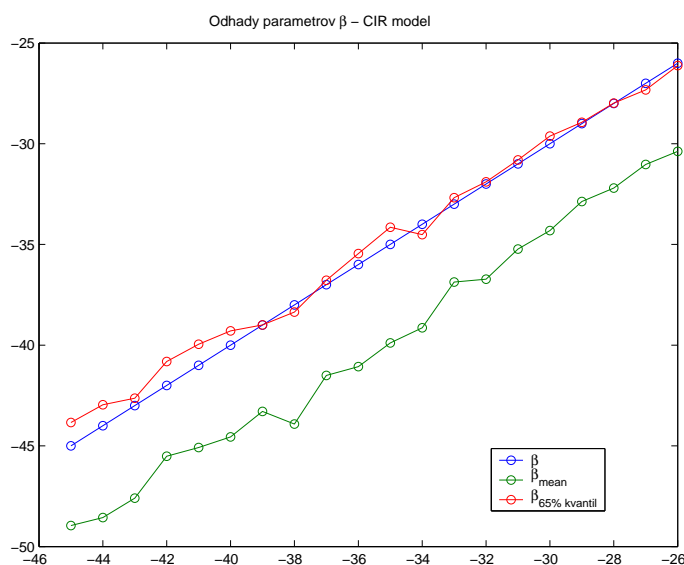
Obrázok 3.1: Histogramy odhadov parametrov CIR modelu.

Obidve časti zodpovedajú 500 replikáciám časového radu  $r_t$  s dĺžkou 250, pričom červená časť bola nasimulovaná pomocou aproximatívneho rozdelenia a modrá pomocou presného  $\chi^2$  rozdelenia.

Z uvedených grafov vieme vyčítať hneď niekoľko faktov. Ako prvé si možno všimnúť symetriu rozdelenia odhadov  $\sigma$  a  $\theta$ . V prípade  $\alpha$  zaznamenávame pozitívny sklon a pri  $\beta$  zase naopak negatívny. Keďže všetky tieto (ne)symetrie zjavne nezávisia od spôsobu simulácie  $r_t$ , je možné očakávať, že podobné vlastnosti budú mať odhady aj pri všeobecnej hodnote  $\gamma$ , pri ktorej používame už len aproximatívne rozdelenie.

Ďalšou dôležitou informáciou je, že v prípade odhadov  $\sigma$  a  $\theta$  pozorujeme tzv. nevychýlenosť, keďže priemerné hodnoty týchto odhadov sa takmer presne zhodujú s preddefinovanými hodnotami. Tieto odhady preto nebude potrebné upravovať. Iná situácia je ale pri parametroch  $\alpha$  a  $\beta$ , ktoré vďaka sklonu svojich výberových histogramov zrejme nie sú nevychýlené. Vyžadujú si tak určitú korekciu, pretože pri reálnych dátach, pri ktorých budeme mať k dispozícii len odhad z jedného časového radu, nebudeme môcť využívať výhodný "priemerujúci" efekt simulácií.

Pozrime sa teraz, ako vyzerajú odhady pre rôzne hodnoty  $\beta$ . Použili sme aproximatívne rozdelenie a nasimulovali niekoľko CIR modelov. V každom modeli sme odhadli  $\hat{\beta}$ , ktoré sme zakreslili do jedného grafu spolu s príslušnými preddefinovanými hodnotami z rozsahu  $\{-26, \dots, -46\}$ . Každá simulácia pozostávala z 200 replikácií na 500 pozorovaniach  $r_t$ .



Obrázok 3.2: Odhady parametra  $\beta$  (CIR model)

Vidíme, že v súlade s histogramami sú odhady  $\hat{\beta} \equiv \beta_{mean}$  vychýlené smerom nadol. Okrem toho je zrejماً takmer lineárna závislosť medzi optimálnymi a odhadnutými hodnotami v danom rozsahu. V súvislosti s porovnaním presnosti odhadovacích metód (regresia verus vierohodnosť) ešte doplníme, že v prípade CIR aj Vašíčkovho modelu sme získali takmer identické odhady, čo je v súlade so všeobecnou teóriou, podľa ktorej sú maximálne vierohodné odhady ekvivalentné odhadom z metódy najmenších štvorcov (pozri [13]).

## 3.2 Kalibrácia rizikovo neutrálnych parametrov modelu

V prvej kapitole sme sa podrobne zaoberali problematikou prechodu medzi pravdepodobnostnými mierami. V druhej kapitole sme potom zaviedli alternatívnu formuláciu short rate modelu na základe prechodu z reálnej do rizikovo neutrálnej miery. Naším cieľom bude teraz pomocou ďalších vzťahov odvodiť explicitný vzorec pre ceny dlhopisov odvodených z príslušného short rate modelu. Ceny dlhopisov sú totiž martingaly pri  $Q$ -miere, pričom ich súčasnú hodnotu vieme vypočítať prostredníctvom podmienenej strednej hodnoty z ich oddiskontovanej hodnoty v čase expirácie. Postupovať budeme podobne ako pri kalibrácii reálnych parametrov – v prvej časti teoreticky odvodíme vzorec pre cenu dlhopisu v rizikovo neutrálnom svete (pozri [6]), následne skonštruujeme funkciu, pomocou ktorej budeme tieto parametre kalibrovať a nakoniec pomocou simulácií CIR modelu otestujeme efektívnosť tejto metódy.

### 3.2.1 Analytická aproximácia ceny dlhopisu

Zopakujme, že short rate model je pri rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere  $Q$  definovaný rovnicou

$$dr_t = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r_t)dt + \sigma r_t^\gamma d\tilde{W}_t,$$

pričom platí

$$(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r_t) = \alpha + \beta r_t - \lambda(r)\sigma r_t^\gamma. \quad (3.3)$$

V prípade CIR modelu sa pri použití špeciálneho tvaru trhovej ceny rizika  $\lambda(r) = \lambda\sqrt{r}$  tento vzťah zjednoduší na:

$$(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r_t) = \alpha + (\beta - \lambda\sigma)r_t \implies \tilde{\alpha} = \alpha, \quad \tilde{\beta} = \beta - \lambda\sigma.$$

Z prvej kapitoly vieme, že cenu diskontného dlhopisu v čase  $t$ , ktorý maturuje v čase  $T = t + \tau$  vypočítame pri  $Q$ -miere pomocou vzorca

$$P_{t,T-t} = E_t^Q \left[ \exp \left( - \int_t^T r_s ds \right) \right].$$

Oproti prípadu reálnej miery, pri ktorej sa cena dlhopisu odvádza od jedinej hodnoty  $r_t$ , sa do výpočtu pri rizikovo neutrálnej miere de-facto zahrňajú všetky hodnoty short rate v danom časovom intervale. Túto zjavnú zložitosť však neskôr odstránime, čím výpočet ceny dlhopisu dostaneme na ekvivalentnú úroveň s výpočtom pri reálnej miere.

Bez straty na všeobecnosti môžeme predpokladať, že aktuálny čas je  $t = 0$ , resp.  $T = \tau$ , a teda  $P_{t,T-t} \equiv P_{0,\tau}$ . Ďalší postup je podľa [6]. Uvažujme lichobežníkové pravidlo pre integrály a vyčíslime pomocou neho integrál v exponente:

$$\int_0^\tau r_s ds \approx h \left[ \frac{1}{2}r_0 + r_1 + \dots + r_{n-1} + \frac{1}{2}r_n \right],$$

kde interval  $[0, \tau]$  sme rozdelili delením  $t_0 = 0 < t_1 \dots < t_n = \tau$  na podintervaly dĺžky  $t_k = kh, h = \frac{\tau}{n}$ .

Okrem diskretizácie integrálu budeme ešte potrebovať upraviť podmienenú strednú hodnotu. K tomu použijeme *tower law* z prvej kapitoly, ktoré hovorí, že podmienenú strednú hodnotu možno rátať späť smerom od "najbohatšej" k "najchudobnejšej"  $\sigma$ -algebre. Hodnotu dlhopisu tak určíme pomocou vzťahu

$$P_{0,\tau} = E_0 E_1 \cdots E_{n-1} \left[ \exp \left( - \int_0^\tau r_s ds \right) \right].$$

V [6] sa okrem ďalších pomocných tvrdení zavádza aj tzv. *Euler-Murayamova* aproximácia, pripomínajúca odvodenie diskretnej aproximácie zo začiatku tejto kapitoly:

$$r_{k-1} - r_k \approx (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} r_k)h + \sigma r_k^\gamma \Delta W_k(h).$$

Na základe tejto aproximácie možno najvnútornejšiu strednú hodnotu vyjadriť v tvare

$$\begin{aligned} & E_{n-1} \left[ \exp \left( - \int_0^\tau r_s ds \right) \right] \\ &= \exp \left( - h \left[ \frac{r_0}{2} + r_1 + \cdots + r_{n-2} \right] - h r_{n-1} \right) \\ & \quad \times E_{n-1} \left[ \exp \left( - \frac{h}{2} [r_{n-1} + (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} r_{n-1})h + \sigma r_{n-1}^\gamma \Delta W_{n-1}(h)] \right) \right] \quad (3.4) \\ &= \exp \left( - h \left[ \frac{r_0}{2} + r_1 + \cdots + r_{n-2} \right] - \frac{\tilde{\alpha} h^2}{2} - \frac{h}{2} (3 + \tilde{\beta} h) r_{n-1} \right) \\ & \quad \times \exp \left( \frac{h^3 \sigma^2}{8} r_{n-1}^{2\gamma} \right). \end{aligned}$$

Pri úprave sme použili identitu log-normálneho rozdelenia

$$\phi \sim \mathcal{N}(0, 1) \implies E[e^{b\sqrt{T}\phi}] = e^{\frac{1}{2}b^2T}.$$

V ďalšom postupe sa rekurzívne prejde od podmienenia v čase  $t - 1$  až k času  $t = 0$  a po aplikovaní limitného prechodu sa posledná podmienená stredná hodnota upraví na výsledný tvar, o ktorom hovorí nasledujúca veta:

**Veta 3.1** ([6], Theorem 1). *Za predpokladu, že  $\gamma = 0$ , je súčasná ( $t = 0$ ) hodnota diskontného dlhopisu maturujúceho v čase  $T = t + \tau$  rovná*

$$P_{0,\tau} = E_0^Q \left[ \exp \left( - \int_0^\tau r_s ds \right) \right] = \exp \left( - r_0 B(\tau) + \frac{\sigma^2}{4\tilde{\beta}} B^2(\tau) + \frac{\tilde{\alpha}\tilde{\beta} + \sigma^2/2}{\tilde{\beta}^2} [\tau - B(\tau)] \right),$$

kde  $B(\tau) = B(0, \tau) = \frac{1}{\tilde{\beta}} [e^{\tilde{\beta}\tau} - 1]$ .



Pomocou ekvivalencie medzi vlnkovými a obyčajnými parametrami  $\alpha$  a  $\beta$  sa dá ukázať, že v prípade Vašíčkovho modelu je táto aproximatívna hodnota dlhopisu tožná s presnou hodnotou (2.15).

V prípade všeobecnej hodnoty  $\gamma$  vznikajú dodatočné výpočtové problémy pri analytickej úprave výrazu podobnému poslednému činiteľu v (3.4). Aplikáciou Itóovej lemy, ktorou sa aproximuje hodnota  $r_{n-k}^{2\gamma}$  v čase  $t = 0$ , sa tieto elegantne vyriešia, čím dostávame druhú verziu aproximácie ceny dlhopisu pomocou rizikovo neutrálnych parametrov:

**Veta 3.2** ([6], Theorem 2). *V prípade všeobecnej hodnoty  $\gamma$  je súčasná hodnota diskontného dlhopisu maturujúceho v čase  $T = \tau$  daná vzťahom*

$$\begin{aligned} \ln \bar{P}_{0,\tau} = & -r_0 B(\tau) + \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}(\tau - B(\tau)) \\ & + [r_0^{2\gamma} + q_0 \tau] \frac{\sigma^2}{4\tilde{\beta}} \left[ B^2(\tau) + \frac{2}{\tilde{\beta}}[\tau - B(\tau)] \right] \\ & - q_0 \frac{\sigma^2}{8\tilde{\beta}^2} \left[ B^2(\tau)[2\tilde{\beta}\tau - 1] - 2B(\tau)[2\tau - 3/\tilde{\beta}] + 2\tau^2 - 6\tau/\tilde{\beta} \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{kde } q_0 = \gamma(2\gamma - 1)\sigma^2 r_0^{2(2\gamma-1)} + 2\gamma r_0^{2\gamma-1}(\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r_0), B(\tau) = \frac{1}{\tilde{\beta}}(e^{\tilde{\beta}\tau} - 1).$$

Vidíme, že ceny dlhopisov závisia v každom čase  $t$  a pre každý čas do splatnosti  $\tau$  len od aktuálnej hodnoty  $r_t$ , podobne ako tomu bolo aj pri reálnej miere. Na rozdiel od reálnej miery však v tomto prípade vieme tieto ceny analyticky vyjadriť pre ľubovoľnú hodnotu  $\gamma$ , z čoho nám pri kalibrácii vyplýva možnosť aplikovať tzv. *nákladovú funkciu* časovo vážených štvorcov rozdielov teoretických a príslušných reálnych úrokových mier, teda nelineárnu regresiu parametrov  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \sigma, \gamma$  (pozri napr. [7]):

$$U(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \sigma, \gamma) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_j^i - \bar{R}_j^i)^2 \tau_j^2,$$

pričom  $\{R_j^i, j = 1, \dots, m\}$  sú reálne výnosové krivky a  $\{\bar{R}_j^i, j = 1, \dots, m\}$  sú úrokové miery odvodené z príslušných aproximatívnych cien z vety 3.2, obe v časoch  $i = 1, \dots, n$ .

### 3.2.2 Minimalizácia nákladovej funkcie

Funkcia štvorcov rozdielov teoretických a reálnych výnosových kriviek je závislá od štyroch parametrov, preto ju nemožno graficky zobrazit'. Napriek tomu je zrejme, že je (ako celok) silne nekonvexná, pričom táto nekonvexnosť je spôsobená najmä jej aproximatívnu zložkou, ktorou aproximujeme teoretické úrokové miery. Ďalšou črtou tejto funkcie ovplyvňujúcou jej minimalizáciu je fakt, že v okolí minima je výrazne plochá, t.j. jej derivácia je v danej oblasti približne rovná nule. Z uvedených dôvodov je použitie bežných deterministických minimalizačných metód nevhodné – schopnosť

týchto metód nachádzať minimum je úzko späté s podmienkou konvexnosti minimalizovanej funkcie, plochosť funkcie v okolí minima zase eliminuje šancu na nájdenie presného minima.

Metódu riešenia minimalizačného problému sme preto hľadali v kategórii stochastických algoritmov. Tieto na rozdiel od deterministických postupov vykazujú niektoré zaujímavé vlastnosti. Ich najdôležitejšou vlastnosťou je, že vďaka svojej stochastickej povahe dokážu (aj keď nie s určitosťou) nájsť globálny extrém. Okrem toho majú lepšie predpoklady pre zvládnutie situácie, keď je okolie hľadaného extrému ploché, tak ako je to aj v našom prípade. Najznámejšie stochastické algoritmy sú tzv. evolučné algoritmy, pod ktoré spadá aj metóda simulovaného žihania, ktorú aplikujeme na našu funkciu.

Simulované žihanie (simulated annealing) (pozri [8]) je stochastický algoritmus založený na fyzikálnom princípe využívanom pri tzv. žíhaní telesa, t.j. procese, pri ktorom sa teleso zahrieva na vysokú teplotu a následne pomaly ochladzuje, pričom sa odstraňujú defekty v jeho atómovej štruktúre. V priebehu znižovania teploty sa predpokladá, že častice telesa sa dostanú do rovnovážnej polohy, čím sa postupne znižuje vnútorná energia telesa. Ochladzovanie pritom musí byť natoľko pomalé, aby v každom čase bolo teleso v tepelnej rovnováhe (popísanej Boltzmanovým rozdelením pravdepodobnosti). V prípade, že by bolo ochladzovanie príliš rýchle, mohlo by dôjsť k vzniku defektov, ktoré sú vzdialené od mriežkovej štruktúry s najnižšou energiou.

Metóda simulovaného žihania simulujúca tento fyzikálny fenomén funguje na princípe opakovania jednoduchých cyklov. Každý takýto optimalizačný cyklus začína v štartovacom bode  $x_{old}$  s energetickou hladinou  $E_{old}$ , z ktorého sa generuje ďalší bod  $x_{new}$  perturbáciou (malým posunom) v súradniciach bodu  $x_{old}$ . Veľkosť vychýlenia je normálne rozdelená s nulovou strednou hodnotou (symetria) a štandardnou odchýlkou  $\sigma$ , ktorá je predmetom kalibrácie tejto metódy. Ak pre rozdiel medzi pôvodnou a perturbovanou úrovňou energie platí  $\Delta E = E_{new} - E_{old} < 0$ , proces pokračuje z nového bodu  $x_{new}$ , v opačnom prípade sa nový bod prijíma len s určitou pravdepodobnosťou danou exponenciálnym rozdelením. Celkovo teda platí tzv. Metropolisovo kritérium akceptovania porušeného stavu (pozri [8])

$$P[x_{new} \leftarrow x_{old}] = \min \left( 1, \exp \frac{-\Delta E}{kT} \right)^2.$$

Samotná implementácia metódy je nasledovná: na začiatku sa zvolí východzia teplota  $T_{max}$ , pri ktorej sa viacnásobne aplikuje Metropolisov algoritmus (úlohu energetickej hladiny zohrávajú funkčné hodnoty minimalizovanej funkcie), až kým sa nedosiahne tepelná rovnováha. Následne sa teplota upraví škálovacou konštantou na nižšiu hodnotu  $T_{new} = \lambda T_{old}$ , pričom  $0 \ll \lambda < 1$ . Celý postup sa opakuje, až sa dosiahne teplota  $T_{min}$ , pri ktorej sa algoritmus zastaví a výsledný bod  $x_{min}$  sa prehlási za minimum.<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Boltzmanova konštanta  $k$  sa pri implementácii algoritmu zvykne vynechávať.

<sup>3</sup>Zdrojový kód algoritmu simulovaného žihania je uvedený v prílohe.

Nevýhodou tohto algoritmu oproti deterministickým metódam je potreba kalibrácie jeho parametrov, ktoré významne ovplyvňujú schopnosť nájsť minimum. Štandardne najťažšia je kalibrácia smerodajnej odchýlky perturbácií  $\sigma$  a nastavenie začiatkovej teploty  $T_{max}$ . Zvyšné parametre  $\lambda, T_{min}$  a počet opakovaní však tiež ovplyvňujú vlastnosti tejto metódy a ich správne nastavenie sa zvyčajne obmedzuje na metódu "pokus - omyl".

### 3.2.3 Kalibrácia parametrov simulovaného žihania

Aby sme mohli nakalibrovať parametre optimalizačnej metódy, vráťme sa k našej funkcii  $U$ . Vieme, že v prípade CIR modelu je možné nasimulovať dáta krátkodobej úrokovej miery  $r_t$  a explicitne napočítať celú výnosovú krivku  $R(r_t, \tau)$ . Na druhej strane z rovnakých nasimulovaných hodnôt  $r_t$  vieme dostať pomocou vety 3.2 aproximáciu tejto výnosovej krivky. Ak teda namiesto reálnych úrokových mier použijeme nasimulované hodnoty, vieme do funkcie  $U$  doplniť všetky potrebné údaje a následne hľadať jej minimum. Tento postup je však možný len pri CIR modeli (aproximácia Vašíčkovho modelu je totožná s presnými hodnotami a pri  $\gamma \neq 0.5$  nepoznáme presné ceny dlhopisov). Ak si teda pri simulácii CIR short rate zvolíme reálne parametre  $\alpha, \beta, \sigma, \lambda$ , potom za vhodné hodnoty parametrov simulovaného žihania, použiteľné aj pri reálnych dátach, budeme považovať tie, pomocou ktorých sa minimum funkcie  $U$  dosiahne pri vektore argumentov ( $\tilde{\alpha} \equiv \alpha, \tilde{\beta} \equiv \beta - \sigma\lambda, \sigma, \gamma = 0.5$ ).

Aplikovaním tohto postupu sme nasimulovali CIR model s reálnymi parametrami

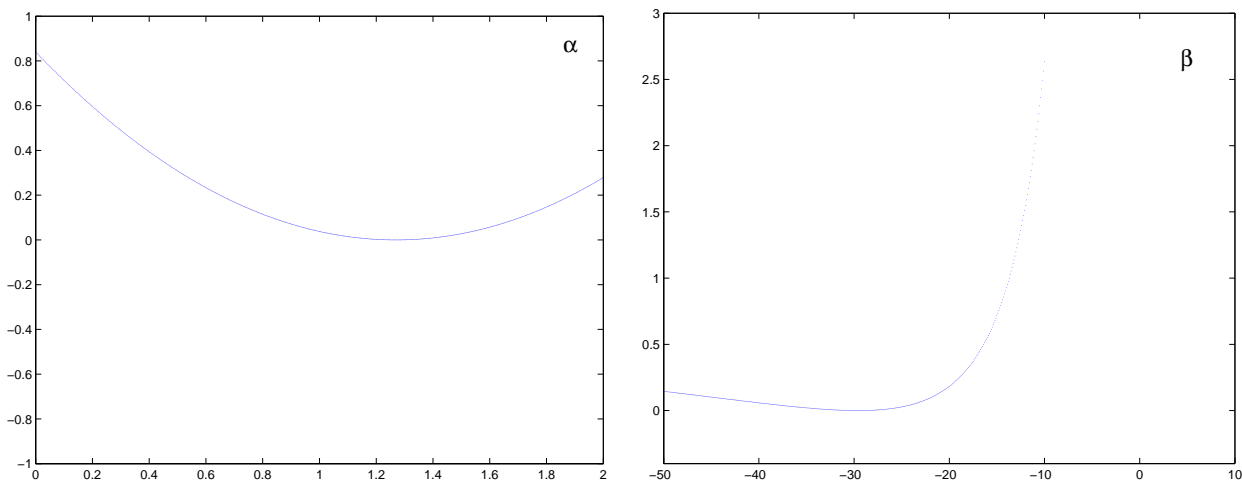
$$\alpha = 1.323, \beta = -30.9619, \sigma = 0.886, \gamma = 0.5, \lambda = -0.784^4$$

a pomocou riešenia PDR sme napočítali hodnoty  $R(r_t, \tau) \equiv R_j^i, \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, m$ . Prvé zaujímavé číslo, ktoré sme získali, bola *optimálna* hodnota minimalizovanej funkcie  $\hat{U}(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \sigma, \gamma) \approx 10^{-4}$  pri oficiálnych rizikovo neutrálnych parametroch, predstavujúca približnú chybu aproximačného vzorca z vety 3.2. Naším ďalším cieľom bolo aplikáciou simulovaného žihania dosiahnuť minimálne rovnakú presnosť aj s odhadnutými parametrami.

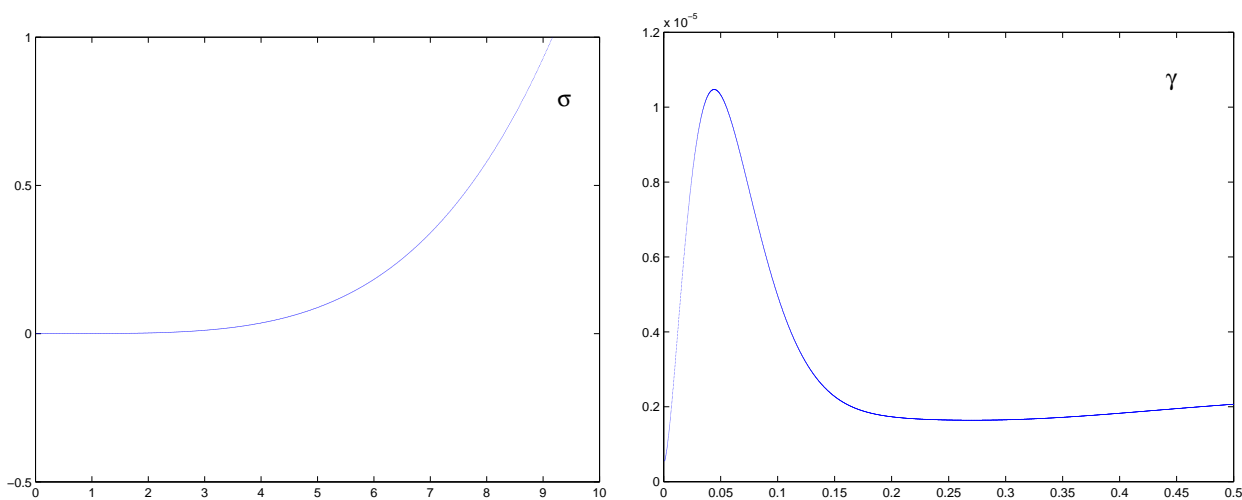
Sledovaním priebežných výsledkov algoritmu sme zistili, že vždy po niekoľkých úvodných iteráciách sa algoritmus dostal do pomerne presnej oblasti optimálnych hodnôt parametrov, avšak ďalej už nebol schopný sa ustáliť okolo konkrétnej hodnoty, čo malo za následok vysokú volatilitu vo funkčných hodnotách, často až v niekoľkých rádoch. Takéto správanie sa algoritmu sme, ako sa neskôr uvidí, pripísali plochosti funkcie v okolí optimálnych hodnôt parametrov. Väčšie prekvapenie však spôsobilo nájdenie takej kombinácie parametrov, pri ktorej bola hodnota  $\hat{U} \approx 10^{-6}$ , resp.  $\hat{U} \approx 10^{-7}$ . Existencia takejto kombinácie vzbudila prirodzenú otázku, nakoľko sa výnosové krivky pri *optimálnych* parametroch líšia od tých, ktoré zodpovedajú napríklad hodnote "lepšieho minima"  $\hat{U} \approx 10^{-7}$ . Odpoveď na túto otázku, ako aj to, ako

<sup>4</sup>Vzhľadom k ďalšiemu testovaniu metódy na slovenských dátach sú tieto parametre zvolené podľa výsledkov kalibrácie Briboru z roku 2004 (pozri [4]).

vyzerajú rezy v jednotlivých parametroch v bode "lepšieho minima" dáva nasledujúcich šesť grafov:



Obrázok 3.3: Rezy v bode optima pri hodnote  $U \approx 10^{-7}$  pre parametre  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ .

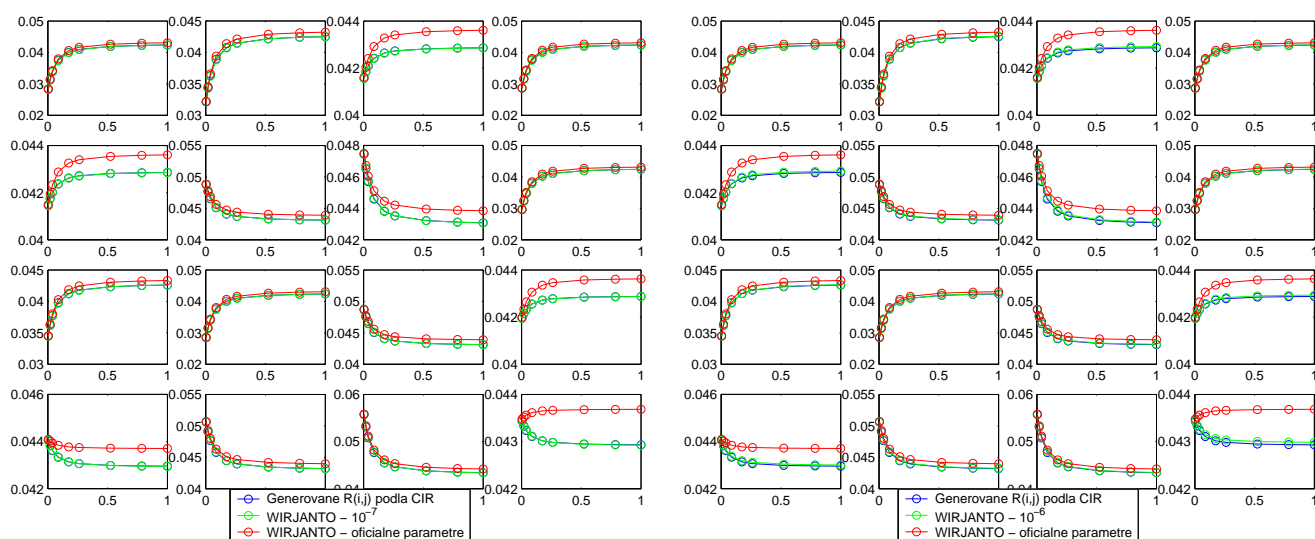


Obrázok 3.4: Rezy v bode optima ( $U \approx 10^{-7}$  a  $U \approx 10^{-6}$ ) pre parametre  $\sigma, \gamma$ .

$U \approx$	$\tilde{\alpha}$	$\tilde{\beta}$	$\sigma$	$\gamma$
$10^{-4}$	1.323	-30.2672	0.886	0.5
$10^{-6}$	1.2712	-29.5836	1.0933	0.9582
$10^{-7}$	1.2712	-29.5836	0.3429	0

V tabuľke uvádzame rozdiely v hodnotách parametrov podľa úrovne nákladovej funkcie  $U$ . Vidíme, že jej najmenšia hodnota sa dosahuje pri  $\gamma = 0$ , čo dokumentuje aj

príslušný graf. V prípade hodnoty  $\sigma$ , kde obrázok indikuje nulu, je situácia menej jasná, vzhľadom na nízku schopnosť grafu odlišiť menšie hodnoty ako  $10^{-4}$ . Na druhej strane nie je potrebné vykresľovať záporné hodnoty  $\sigma$  (ktoré ani nie sú pre nás prípustné), keďže funkcia aproximatívnej ceny dlhopisu závisí len od  $\sigma^2$ . Podobná situácia je v prípade  $\gamma$ , avšak pri tomto parametri je nezápornosť jeho odhadov zabezpečená výhodnými vlastnosťami algoritmu simulovaného žihania závislými od správne zvoleného štartovacieho bodu a  $\sigma$  náhodných porúch. Porovnanie výnosových kriviek zo šesťnástich po sebe idúcich dní pre úrokové miery napočítané na základe aproximačného vzorca (pre odhadnuté aj oficiálne parametre) a pomocou presného vzorca (len pre oficiálne parametre), sú nasledujúce:



Obrázok 3.5: Porovnanie výnosových kriviek: Wirjantova aproximácia (oficiálne a odhadnuté parametre), krivky vygenerované z presného riešenia PDR pre CIR (oficiálne parametre)

Pri pohľade na grafy možno za prekvapivú určite považovať presnosť, s akou sa krivky generované podľa presného vzorca zhodujú s aproximačnými krivkami napočítanými pre odhadnuté parametre. Nevýznamný rozdiel v zhode kriviek medzi grafmi zase vypovedá o úrovni citlivosti zhody výnosových kriviek pri danej hodnote nájdeného minima  $U$ . V našom prípade sa pri presnosti  $U \approx 10^{-6}$  dosahuje rozdiel medzi výnosovými krivkami maximálne okolo 0.01%.

V ďalšej časti sa budeme snažiť vylepšiť doteraz uvedené kalibračné metódy, pričom najväčšiu pozornosť upriamime na zmenšenie vychýlenia, príp. disperzie pôvodných (tzv. Nowmanových) odhadov. Podobnému vylepšeniu týchto odhadov sa venujú aj viaceré publikované články. Nasimulovaním konzistentných dát tak budeme mať možnosť porovnať kvalitu našich korigovaných odhadov s odhadmi publikovanými v týchto článkoch.

# Kapitola 4

## Vylepšenie kalibračných metód

### 4.1 Korekcia maximálne vierohodných odhadov

V predchádzajúcej kapitole sme zistili, že odhady parametrov  $\alpha$  a  $\beta$  sú navzájom opačne vychýlené, pričom ich podiel  $\theta$  je v tomto ohľade pomerne robustný. Ďalej z obrázka 3.2 vieme, že medzi odhadmi a príslušnými presnými hodnotami  $\beta$ , podľa ktorých sa simulujú hodnoty  $r_t$ , existuje takmer lineárny vzťah. Táto jednoduchá závislosť zohrá významnú úlohu pri našej korekčnej metóde, ktorou budeme odhady  $\beta$  korigovať. Keďže však ekvivalentné vychýlenie existuje aj v odhade  $\alpha$ , otestujeme korečnú metódu aj pre prípad tohto parametra.

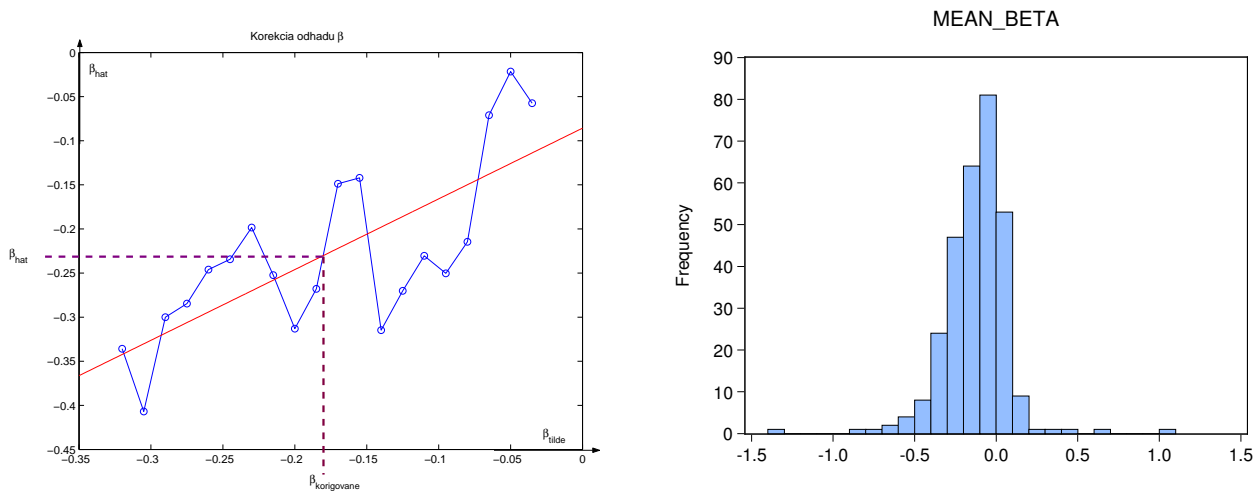
Predpokladajme teda, že máme odhad  $\hat{\beta}$ , o ktorom si myslíme, že je vychýlený smerom nadol. Ďalej predpokladajme, že máme odhadnuté aj ostatné parametre  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\sigma}$  a  $\hat{\gamma}$ . Princíp korekčnej metódy spočíva v hľadaní takej hodnoty  $\tilde{\beta}$ , pri použití ktorej (ako parametra pomocnej simulácie) vyjde z nasimulovaných dát odhad  $\beta$  približne rovný  $\hat{\beta}$ . Čo sa týka zvyšných parametrov, pomocnú simuláciu generujeme na základe ich pôvodných odhadov. Tento, na prvý pohľad jednoduchý postup, sa tak snaží spätne korigovať pôvodný odhad  $\hat{\beta}$  pomocou skutočnej závislosti medzi jeho odhadnutou a presnou hodnotou.

Názorne si možno uvedený postup predstaviť na grafe, ktorého  $x$ -ová os pozostáva zo zvoleného vektora hodnôt  $\tilde{\beta}$ . Keďže výsledný korigovaný odhad budeme hľadať na  $x$ -ovej osi, rozsah tohoto vektoru volíme tak, aby pokrýval aj hodnoty väčšie, teda o čosi menej záporné ako pôvodný odhad  $\hat{\beta}$ . Na zvislej osi potom zaznamenávame odhadnuté hodnoty  $\bar{\beta}$ , prislúchajúce k jednotlivým zložkám vektoru  $\tilde{\beta}$ . Z takéhoto grafu by sme potom mali byť schopní *odčítať* takú hodnotu  $\tilde{\beta}$  ležiacu na  $x$ -ovej osi, ktorá prislúcha približne hodnote  $\hat{\beta}$  (tú naopak hľadáme na  $y$ -ovej osi). V prípade, že také  $\tilde{\beta}$  identifikujeme, prehlásime ho za korigovaný odhad parametra  $\beta$ .

Na ďalšej strane uvádzame graf, ktorý ilustruje postup pri získaní korekcie odhadu  $\beta$  zo simulácie CIR modelu. Vstupné parametre

$$\alpha = 0.72, \beta = -0.12, \sigma = 0.06, \theta = 6. \quad (4.1)$$

uvádzame zatiaľ len informatívne, bližšie ich popíšeme neskôr.



Obrázok 4.1: Korekcia odhadu parametra  $\beta$  a jeho histogram z 300 replikácií.

Rastúca (aj keď volatilná) závislosť medzi  $\bar{\beta}$  a  $\tilde{\beta}$  je v súlade s našimi očakávaniami. Pre lepšiu názornosť sme do grafu zakreslili aj lineárnu regresiu odhadnutú priamku, z ktorej sme jednoducho odčítali hľadanú hodnotu. V našom prípade teda platí nasledujúci vzťah medzi odhadom a jeho korekciou:

$$\hat{\beta} \approx -0.23 \Rightarrow \tilde{\beta} \approx -0.18.$$

Vidíme, že vychýlená hodnota sa po korekcii mierne priblížila k presnej hodnote. Je dôležité si uvedomiť, že uvedená korekcia vznikla len z jednej replikácie CIR modelu. Pre kvalitatívne porovnanie tejto metódy s inými metódami je potrebné vykonať viacero replikácií, pri ktorých nás bude zaujímať priemerná hodnota a disperzia skorigovaného parametra.

#### 4.1.1 Porovnanie kvality korekcie s inými metódami odhadovania

Problematike gaussovských odhadov v short rate modeloch sa venuje viacero publikovaných prác. V roku 2001 napísali Jun Yu a Peter C.B. Phillips článok s názvom *Gaussian Estimation of Continuous Time Models of the Short Term Interest Rate* (ďalej len [9]), v ktorom sa pokúsili o vylepšenie Nowmanových vychýlených odhadov pomocou nimi navrhnutej pokročilejšej metódy odhadovania.

Nowmanov princíp odhadovania spočíva v diskretizácii short rate modelu, presnejšie len jeho difúznej časti – volatility. Už tento postup je v podstate vylepšený, oproti najjednoduchšej Eulerovej metóde, ktorá (zbytočne) diskretizuje aj driftový člen, čím zvyšuje tzv. časovo agregované vychýlenie. Aby bol však Nowmanov model ľahko spočítateľný, umelo zavádza konštantnú volatilitu na jednotlivých diskretných časových úsekoch, čoho dôsledkom je, že jeho rozdelenie je normálne. Táto normalita je však len podmienená, pretože disperzia rozdelenia závisí od predchádzajúcej hodnoty  $r_{t-1}$ .

Nowmanom zavedené zjednodušenia sa autori v [9] snažili odstrániť za pomoci techniky transformácie náhodného času (Random Time Change), ktorá využíva fakt,

že každý martingal vychádzajúci z nuly sa vhodnou zmenou časového indexu transformuje na štandardný Brownov pohyb. Hovorí o tom nasledujúca veta:

**Veta 4.1** ([9], Lemma (DDB Theorem)). *Nech  $M$  je taký  $(\mathcal{F}_t, P)$ -spojitý martingal, že  $M_0 = 0$  a nech pre jeho kvadratickú variáciu  $[M]_t$  platí  $[M]_\infty = \infty$ . Položme*

$$T_t = \inf\{s | [M]_s > t\}.$$

*Potom platí, že  $B_t = M_{T_t}$  je štandardný  $(\mathcal{F}_t)$ -Brownov pohyb a  $M_t = B_{[M]_t}$ .*

Ak teda časový index  $t$  daného martingalu  $M_t$  transformujeme tak, že nový časový index  $T_t$  kopíruje hodnoty kvadratickej variácie  $M_t$  totožné s hodnotami pôvodného času  $t$  ( $T_t = \inf\{s | [M]_s > t\}$ ), potom v rámci tohto nového časového indexu je  $M_{T_t}$  Brownov pohyb, teda je to normálne rozdelený stochastický proces. Pre nás to znamená, že z pôvodne obyčajného Itóovho integrálu vystupujúceho pri odvodení Nowmanovho diskretného modelu vieme dostať Brownov pohyb, ktorý sa dá jednoducho simulovať. V našom prípade pre pôvodný (Nowmanom neupravený) model platí:

$$r(t+h) = \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta h} - 1) + e^{\beta h}r(t) + \underbrace{\int_0^h \sigma e^{\beta(h-\tau)} r^\gamma(t+\tau) dB(\tau)}_{\equiv M(h)}, \quad \forall h > 0$$

pričom predmetný martingal je práve  $M(h)$ . Zmenu časového indexu v martingale  $M(h)$  zavedieme pre ľubovoľné pevné  $a > 0$  pomocou skonštruovanej postupnosti časových prírastkov  $\{h_j\}$ :

$$h_{j+1} = \inf\{s | [M_j]_s \geq a\} = \inf\{s | \sigma^2 \int_0^s e^{2\beta(s-\tau)} r^{2\gamma}(t_j + \tau) d\tau \geq a\}. \quad (4.2)$$

V súlade s vetou 4.1 dostaneme po zavedení nových časových indexov  $t_{j+1} = t_j + h_{j+1}$ ,  $t_1 = 0$  výsledný gaussovský model

$$r(t_{j+1}) = \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta h_{j+1}} - 1) + e^{\beta h_{j+1}}r(t_j) + M(h_{j+1}),$$

pričom  $M(h_{j+1}) = B(a) \sim \mathcal{N}(0, a)$  je Brownov pohyb, ktorý vieme simulovať. Nové časové body  $t_{j+1}$  sú konštruované tak, že kvadratická variácia sa na jednotlivých intervaloch dĺžky  $h_{j+1}$  zakaždým zväčší o hodnotu  $a$ , čo znamená, že parameter  $a$  má funkciu disperzie "inkrementálneho" Brownovho pohybu  $B(a) = M(h_{j+1}) = M(t_{j+1} - t_j)$ . Hodnota parametra  $a$  sa v [9] prakticky odhaduje ako nepodmienená variancia disturbancie v pomocnom modeli s konštantnou volatilitou

$$r(t + \Delta) = \frac{\alpha}{\beta}(e^{\Delta\beta} - 1) + e^{\Delta\beta}r(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, a).$$

Implementácia vylepšenej metódy tak pozostáva z odhadu parametra  $a$ , vypočítania štandardných Nowmanových odhadov parametrov a nakoniec vylepšenia odhadov  $\alpha$  a  $\beta$  pomocou optimalizácie likelihood funkcie s využitím diskretnej aproximácie



vzorca pre časové intervaly (4.2), pričom za  $\sigma$  a  $\gamma$  sú do likelihood funkcie dosadzo-  
vané pôvodné Nowmanove odhady, v [9] považované za dostatočne dobre odhadnuté.

Prejdime teraz k samotnému porovnaniu našej metódy s metódou v [9]. Naším cieľom  
bolo na základe simulácií kvalitatívne zistiť, ktorá z metód lepšie odstránila vychýle-  
nie Nowmanových odhadov. Pri výpočte našich odhadov sme použili nastavenie  
parametrov z úvodu tejto kapitoly, ktoré sme získali preškálovaním parametrov z  
[9] tak, aby hodnoty (4.1) boli konzistentné s konvenciou z prechádzajúcich kapitol.  
Konvencia v [9] totiž predpokladá vyjadrenie úrokových mier v percentách, oproti  
zaužívanému vyjadreniu v tvare desatinných čísel. Rozdiel však vznikol len v prí-  
pade  $\sigma$ , ktorú sme museli oproti pôvodnej hodnote v [9] vydeliť desiatimi. Z tohto  
dôvodu nebudeme porovnávať kvalitu jej odhadu medzi metódami, ale len v rám-  
ci jednotlivých metód. Počet replikácií bol zvolený  $M = 300$ , pričom sme uvažovali  
 $N = 500$  mesačných dát.

V každej z  $M$  replikácií sa po výpočte prvotných odhadov všetkých parametrov  
prešlo k výpočtu korekcie podľa nasledujúceho postupu: vygeneroval sa vektor hod-  
nôt  $\tilde{\beta} \equiv \{\tilde{\beta}_k, k = 1, \dots, 20\}$ , pričom sa pre každú jeho zložku v rámci vnútornej simulá-  
cie (založenej na odhadoch  $\hat{\alpha}, \hat{\sigma}, \hat{\theta}, \hat{\gamma}$  z prvej časti) vypočítal odhad  $\tilde{\beta}_k$ . Aplikovaním  
priamkovej regresie na vektory  $\tilde{\beta}$  a  $\tilde{\beta}$  sme následne získali príslušnú funkčnú závis-  
losť. Po dosadení prvotného odhadu  $\tilde{\beta}$  za závislú premennú sme dostali hľadaný  
korigovaný odhad  $\hat{\beta}$ . Aby sme eliminovali náhodné chyby, pre každú replikáciu sme  
výsledný korigovaný odhad napočítali ako priemernú hodnotu zo sto takýchto korek-  
cií. Pre lepšiu orientáciu vo výsledkoch uvádzame najprv hodnoty zo simulácií z [9] a  
až následne po nich prezentujeme naše výsledky:

	Nowmanove odhady				Time-Change metóda			
	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$
MEAN	1.344	-0.2332	0.6173	0.4919	<b>1.2330</b>	<b>-0.2275</b>	0.6173	0.4919
STDEV	0.7679	0.4139	0.0995	0.0843	0.7571	0.3986	0.0995	0.0843

Tabuľka 4.1: Porovnanie Nowmanových odhadov s metódou Time-Change pre presné  
hodnoty parametrov  $\alpha = 0.72, \beta = -0.12, \sigma = 0.6, \theta = 6$ .

Vidíme, že rozdiely v smerodajných odchýlkach sú pri parametroch  $\alpha$  aj  $\beta$  minimálne, s  
mierne vyššími hodnotami pri Nowmanových odhadoch (odhady  $\sigma$  a  $\gamma$  autori ponecha-  
li bezo zmeny). Dôležitejšie sú však aritmetické priemery (MEAN), pri ktorých sme  
očakávali hodnoty bližšie k optimálnym ( $\alpha = 0.72, \beta = -0.12$ ). Vidíme však, že pri  
daných simulačných nastaveniach nebola metóda príliš úspešná.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Predmetom kalibrácie v [9] sú aj denné a týždenné dáta, pričom vykazujú podobne neuspokojivé  
výsledky. Vzhľadom na vysokú časovú náročnosť našich výpočtov už pri týždenných dátach sme sa  
rozhodli porovnávať len mesačné dáta.

$\beta$ -I.	Nowmanove odhady				Metóda korekcie $\beta$			
	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$
MEAN	1.4295	-0.2385	0.1007	0.4040	<b>0.7467</b>	<b>-0.1240</b>	0.1007	0.4040
STDEV	0.7483	0.1243	0.0532	0.6348	1.3501	0.2263	0.0532	0.6348
$\beta$ -II.	Nowmanove odhady				Metóda korekcie $\beta$			
	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$
MEAN	1.3335	-0.2228	0.0963	0.4426	<b>0.7865</b>	<b>-0.1310</b>	0.0963	0.4426
STDEV	0.7418	0.1238	0.0549	0.6473	1.7204	0.2889	0.0549	0.6473
$\beta$ -III.	Nowmanove odhady				Metóda korekcie $\beta$			
	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$
MEAN	1.3609	-0.2271	0.1000	0.4263	<b>0.6956</b>	<b>-0.1157</b>	0.1000	0.4263
STDEV	0.7718	0.1281	0.0562	0.6337	1.0932	0.1836	0.0562	0.6337
$\beta$ -IV.	Nowmanove odhady				Metóda korekcie $\beta$			
	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$
MEAN	1.4252	-0.2377	0.1013	0.4520	<b>0.7330</b>	<b>-0.1159</b>	0.1013	0.4520
STDEV	0.8289	0.1391	0.0564	0.7304	1.8481	0.4059	0.0564	0.7304
$\beta$ -V.	Nowmanove odhady				Metóda korekcie $\beta$			
	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$
MEAN	1.2995	-0.2173	0.0600	0.5	<b>0.6669</b>	<b>-0.1114</b>	0.0600	0.5
STDEV	0.7208	0.1220	0.0018	0	1.5658	0.2599	0.0018	0

Tabuľka 4.2: Porovnanie našich Nowmanových odhadov s odhadmi získanými korekciou  $\beta$  (presné parametre:  $\alpha = 0.72$ ,  $\beta = -0.12$ ,  $\sigma = \mathbf{0.06}$ ,  $\theta = 6$ ).

Uvedené výsledky prezentujú päť nezávislých operácií simulácie a následnej korekcie  $\beta$  v CIR modeli, z toho prvé štyri zahŕňajú aj optimalizáciu parametra  $\gamma$ , v piatej bola zvolená pevne presná hodnota. Z tabuľky je zrejmé, že korekcia  $\beta$  sa vo všeobecnosti ukázala ako úspešná, pričom korigované  $\alpha$  sme dopočítali pomocou príslušných hodnôt  $\theta$ , ktoré už štandardne vykazovali stabilné vlastnosti (vo všetkých prípadoch sa ich odchýlka od presnej hodnoty pohybovala len v stotinách). Na druhej strane odhady  $\sigma$  výrazne závisia od presnosti odhadov  $\gamma$ , čo si možno všimnúť pri výsledkoch z poslednej simulácie, v ktorej sme  $\gamma$  neodhadovali. Pri ostatných simuláciách sme pri odhade  $\gamma$  postupovali v súlade s postupom uvedeným v časti 3.1.2, pričom sme navyše aplikovali podmienku nezápornosti

$$\hat{\gamma}(i) := \max(0, \hat{\gamma}(i)), \quad \forall i \in 1, \dots, M.$$

Čo sa týka výsledkov smerodajných odchýliek, dôležité sú hodnoty pre  $\beta$ , ktoré vyšli s výnimkou jednej simulácie menšie ako pri použití metódy z [9]. Možno to pripísať tomu, že práve  $\beta$  bola predmetom korekcie, čím sa do určitej miery mohlo podať zmenšiť jej rozptyl.

Pre porovnanie sme rovnakou procedúrou odhadli aj prípad korekcie  $\alpha$ , pričom nastavenie simulačných parametrov sme ponechali rovnaké. Výsledky sú nasledujúce:

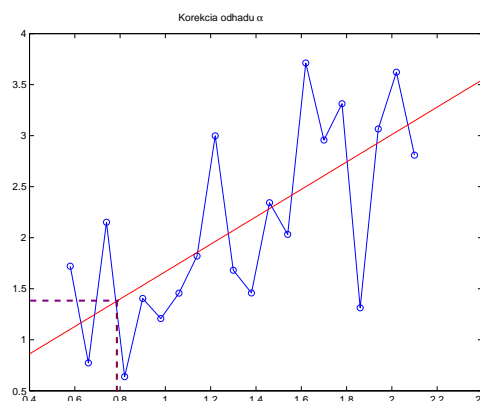
$\alpha$ -I.	Nowmanove odhady				Metóda korekcie $\alpha$			
	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$
MEAN	1.27	-0.2114	0.1012	0.419	<b>1.2535</b>	<b>-0.2097</b>	0.1012	0.419
STDEV	0.7341	0.1213	0.0546	0.6636	12.4957	2.0953	0.0546	0.6636
$\alpha$ -II.	Nowmanove odhady				Metóda korekcie $\alpha$			
	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$
MEAN	1.3968	-0.2324	0.1027	0.3950	<b>0.6491</b>	<b>-0.1077</b>	0.1027	0.3950
STDEV	0.8232	0.137	0.0546	0.6340	1.7420	0.2880	0.0546	0.6340
$\alpha$ -III.	Nowmanove odhady				Metóda korekcie $\alpha$			
	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$
MEAN	1.4112	-0.2355	0.1024	0.4104	<b>0.6921</b>	<b>-0.1156</b>	0.1024	0.4104
STDEV	0.7569	0.1269	0.0529	0.7553	1.3384	0.2233	0.0529	0.7553
$\alpha$ -IV.	Nowmanove odhady				Metóda korekcie $\alpha$			
	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$
MEAN	1.3627	-0.2269	0.1009	0.3847	<b>0.9595</b>	<b>-0.1633</b>	0.1009	0.3847
STDEV	0.7536	0.1257	0.0531	0.5711	7.9059	1.3790	0.0531	0.5711
$\alpha$ -V.	Nowmanove odhady				Metóda korekcie $\alpha$			
	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$	$\gamma$
MEAN	1.3671	-0.2279	0.0600	0.5	<b>0.3204</b>	<b>-0.0539</b>	0.0600	0.5
STDEV	0.7957	0.1335	0.0019	0	2.4430	0.4020	0.0019	0

Tabuľka 4.3: Porovnanie Nowmanových odhadov s odhadmi získanými korekciou  $\alpha$  (presné parametre:  $\alpha = 0.72, \beta = -0.12, \sigma = 0.06, \theta = 6.$ ).

Vidíme, že v porovnaní s korekciou  $\beta$  sme dosiahli o čosi horšie výsledky nielen v priemeroch, ale aj v smerodajných odchýlkach, najmä čo sa týka parametrov  $\alpha$  a  $\beta$ . Napriek tomu sa tejto metódy nevzdávame úplne. V prípade, že pri reálnych dátach vyjde odhad smerodajných odchýlok primerane malý, je možné využiť aj tieto odhady pri výpočte priemerného korigovaného odhadu:

$$\bar{\tilde{\alpha}} := \frac{\tilde{\alpha}_{\alpha\text{-corr.}} + \tilde{\alpha}_{\beta\text{-corr.}}}{2},$$

$$\bar{\tilde{\beta}} := \frac{\tilde{\beta}_{\alpha\text{-corr.}} + \tilde{\beta}_{\beta\text{-corr.}}}{2}.$$



Obrázok 4.2: Korekcia parametra  $\alpha$  pomocou regresnej priamky.

## 4.2 Vylepšená aproximácia ceny dlhopisu

V procese kalibrácie rizikovo neutrálnej verzie rovnice short rate modelu sme naznačili odvodenie aproximatívneho vzorca pre ceny dlhopisov, ktoré vyplývajú z príslušného modelu. V práci [6] autori okrem iného prezentujú diferenciu presných a približných cien dlhopisov, pričom ju odhadujú na CIR modeli – jedinom short rate modeli, pre ktorý je takéto porovnanie možné. Ich grafické znázornenie rozdielu  $P_{approx} - P_{exact}$  však naznačuje, že pre  $\tau < 10$  je aproximatívny vzorec dostatočne presný. Podobný výsledok platí aj pre vyčíslenie relatívnej chyby, tzv. relative mispricing, ktorá na rovnakom intervale dosiahla hodnoty maximálne 1%.

V inej práci [10] autori odhadli presnosť vzorca (3.5) a následne sa ho pokúsili ďalej vylepšiť. Prvá časť ich práce sa venuje dôkazu chyby aproximácie pôvodného vzorca, ktorú sa autorom podarilo odhadnúť výrazom  $o(\tau^5)$ , čo znamená, že rozdiel medzi presnou a približnou cenou je rádu vyššieho ako piateho. V druhej časti potom navrhl vlastné vylepšenie (3.5), ktoré takisto doplnili o dôkaz rádu presnosti. Pre pôvodnú a vylepšenú aproximáciu tak platia nasledujúce vety:

**Veta 4.2** ([10], Theorem 3). *Nech  $\bar{P}_{0,\tau}(r)$  je približné riešenie rovnice pre cenu dlhopisu dané vzťahom (3.5) a nech  $P_{ex}$  je presné riešenie rovnice (2.6). Potom platí*

$$\ln P_{ap}(\tau, r) - \ln P_{ex}(\tau, r) = c_5(r)\tau^5 + o(\tau^5), \quad \text{pre } \tau \rightarrow 0^+,$$

kde

$$\begin{aligned} c_5(r) = & -\frac{1}{120}\gamma r^{2\gamma-4}\sigma^2(2\alpha^2(-1+2\gamma)r^2 + 4\beta^2\gamma r^4 - 8r(3+2\gamma)\sigma^2 \\ & + 2\beta(1-5\gamma+6\gamma^2)r^{2+2\gamma}\sigma^2 + \sigma^4 r^{4\gamma}(2\gamma-1)^2(4\gamma-3) \\ & + 2\alpha r(\beta(-1+4\gamma)r^2 + (2\gamma-1)(3\gamma-2)r^{2\gamma}\sigma^2)). \end{aligned}$$

**Veta 4.3** ([10], Theorem 4). *Pre rozdiel medzi presným riešením  $P_{ex}$  a približným riešením  $P_{ap2}$  platí:*

$$\ln P_{ap2}(\tau, r) - \ln P_{ex} = o(\tau^6), \quad \text{pre } \tau \rightarrow 0^+,$$

pričom vylepšená aproximácia  $\ln P_{ap2}$  je definovaná vzťahom

$$\ln P_{ap2}(\tau, r) = \ln \bar{P}_{0,\tau}(r) - c_5(r)\tau^5 - c_6(r)\tau^6,$$

kde  $\ln \bar{P}_{0,\tau}(r)$  je pôvodná aproximácia (3.5),  $c_6(r)$  je dané vzťahom

$$c_6(r) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 r^{2\gamma} c_5''(r) + (\alpha + \beta r)c_5'(r) - k_5(r)\right),$$

pričom

$$\begin{aligned} k_5(r) = & \frac{\gamma\sigma^2}{120}r^{2\gamma-4}(6\alpha^2\beta(-1+2\gamma)r^2 + 12\beta^3\gamma r^4 - 10(1-2\gamma)^2r^{1+4\gamma}\sigma^4 + \\ & + 6\beta^2\sigma^2(1-5\gamma+6\gamma^2)r^{2+2\gamma} \\ & + \beta r^{2\gamma}\sigma^2(-10(5+2\gamma)r^3 + 3(1-2\gamma)^2(-3+4\gamma)r^{2\gamma}\sigma^2) \\ & + 2\alpha r(3\beta^2(-1+4\gamma)r^2 + 3\beta(2-7\gamma+6\gamma^2)r^{2\gamma}\sigma^2 - 5(-1+2\gamma)r^{1+2\gamma}\sigma^2)) \end{aligned}$$

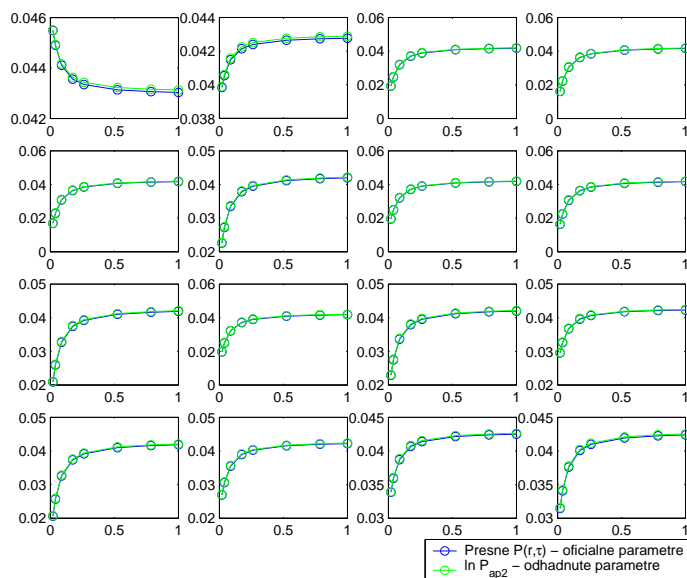
a  $c_5'(r)$ ,  $c_5''(r)$  znamenajú derivácie vzhľadom k  $r$ .

Zložitosť a najmä rozsiahlosť tejto aproximácie má na jednej strane význam pri redukcii jej chyby až do rádu  $o(\tau^6)$ , na druhej strane však vyvoláva otázku, nakoľko táto zvýšená zložitosť povedie k zlepšenej schopnosti nákladovej funkcie  $U$  odhadovať hľadané parametre pomocou metódy simulovaného žihania. Pre zodpovedanie tejto otázky sme do funkcie  $U$  zahrnuli upravenú hodnotu  $R(r_i, \tau_j)$ , odvodenú podľa vety 4.2 z výrazu  $\ln P_{ap2}$ , obsahujúceho derivácie  $c_5(r)$ . Tieto derivácie sme si spočítali analyticky.

Tak ako pri pôvodnej funkcii, aj v tomto prípade sme museli nakalibrovať našu simulačnú metódu, keďže pri pôvodných parametroch nekonvergovala. Ako najrozhodujúcejšia sa opäť ukázala hodnota  $\sigma$  – veľkosť náhodnej odchýlky – pričom ostatné parametre úspešnosť metódy ovplyvňovali len málo, ak vôbec. Po niekoľkých pokusoch sme nakoniec upravili len veľkosť odchýlky pri koeficiente  $\beta$ , ktorú sme znížili na tretinu z pôvodnej hodnoty 0.3, keďže pri vyšších číslach konvergovala  $\beta$  k príliš nízkym hodnotám. Zvyšné odchýlky sme ponechali nezmenené. Za povšimnutie stojí kovergencia (aj keď nie vždy jednoznačná) priebežných hodnôt  $\sigma$  k nule, ktorú sme v prípade pôvodnej funkcie  $\ln \bar{P}_{0,\tau}$  tak výrazne nepozorovali. Pri testovacích simuláciách sme ako oficiálne parametre použili tie isté hodnoty ako v predchádzajúcej kapitole (pozri str. 31). Jedna z najnižších hodnôt  $U$  sa dosiahla pri nasledujúcich hodnotách argumentov:

$$\tilde{\alpha} = 1.3513, \tilde{\beta} = -31.4089, \sigma = 0.00325, \gamma = 0.9362, \hat{U} \approx 1.0041 \times 10^{-5}.$$

V porovnaní s pôvodnou aproximáciou sa dostatočná zhoda kriviek dosiahla o jeden rád presnosti  $\hat{U}$  skôr ( $10^{-5}$  oproti  $10^{-6}$ ), pričom hodnoty optimálnych argumentov sú porovnateľné. Vzhľadom k lepšej presnosti funkcie  $\ln P_{ap2}$  pri daných optimálnych argumentoch budeme túto funkciu preferovať pri kalibrácii reálnych kriviek.



Obrázok 4.3: Výnosové krivky pri použití vylepšenej aproximačnej funkcie  $\ln P_{ap2}$ .

## Kapitola 5

# Kalibrácia modelov na základe reálnych výnosových kriviek

Záverečnú kapitolu venujeme otestovaniu vylepšených kalibračných metód na reálnych dátach. Zameriame sa na historické dáta slovenského (Bribor) a európskeho (Euribor) peňažného trhu z roku 2003. Dôvodom pre výber tohoto roku je existencia podobnej kalibrácie v práci Ševčoviča a Csajkovej Urbánkovej: *Calibration of one factor interest rate models*, (ďalej len [7]). V prvej časti sa budeme zaoberať odhadom a korekciou reálnych parametrov, ktoré následne porovnáme s výsledkami zo [7]. V druhej časti potom nakalibrujeme rizikovo neutrálne parametre a vypočítame trhovú cenu rizika.

### 5.1 Kalibrácia reálnych parametrov výnosových kriviek

Autori práce [7] navrhli a otestovali vlastnú tzv. dvojfázovú metódu kalibrácie short rate modelov. Ich postup bol takýto: v prvej fáze implementovali nákladovú funkciu  $U$  (rovnakú ako používame v našej práci my pri kalibrácii rizikovo neutrálnych parametrov). Rozdiel je v tom, že za teoretické ceny dlhopisov dosadili presné ceny dlhopisov (na rozdiel od nás kalibrovali len CIR model) napočítané z príslušného analytického riešenia parciálnej diferenciálnej rovnice. Tieto ceny, rovnako ako aj PDR, sú vo svojej podstate uvažované pri reálnej miere, teda do výsledného vzorca nutne vstupuje aj trhovú cenu rizika  $\lambda(r)$ . Dá sa ukázať, že štyri parametre, ktoré sú potrebné pre identifikáciu reálneho CIR modelu sú navzájom závislé, teda v jednom parametri existuje voľnosť, ktorú kalibrácia nevie odstrániť. Riešenie prvej fázy tak poskytuje len čiastočný výsledok, závislý od parametra voľnosti, ktorým je v tomto prípade  $\lambda$ . Nasledovať musí teda druhá fáza kalibrácie. V nej autori aplikovali funkciu vierohodnosti, ktorú maximalizovali pozdĺž jednorozmernej krivky parametrizovanej práve parametrom  $\lambda$ . Na základe jej optimálnej hodnoty nakoniec dopočítali hľadané parametre.

Na príklade tejto metódy si možno dobre všimnúť filozofiu kalibrácie parametrov short rate modelov a z nich odvodených cien dlhopisov. Ceny dlhopisov v rámci reálnej miery, tak ako ich autori počítajú, explicitne obsahujú trhovú cenu rizika, ktorá

tvorí dodatočný parameter kalibrácie. Takýmto postupom vzniká problém identifikácie tohto parametra, ktorý autori vyriešili elegantnou dvojfázovou metódou. Ako je však už zrejmé z predchádzajúcich kapitol, v prípade rizikovo neutrálnej miery problém s trhovou cenou rizika odpadá (preto aj príslušný názov) a ceny dlhopisov sú s veľkou presnosťou vyčísliteľné pomocou troch (v prípade voľnej  $\gamma$  štyroch) rizikovo neutrálnych parametrov. Na druhej strane, v prípade, že je naším cieľom stanoviť hodnotu  $\lambda$ , musíme prejsť do reálnej miery, v ktorej sa tento parameter vyskytuje. V našom prípade sme využili skutočnosť, že  $\lambda$  vieme vyjadriť zo vzťahu medzi reálnymi a rizikovo neutrálnymi parametrami. Tento výhodný postup preto použijeme v druhej časti.

Tak ako v [7], aj my sme rozdelili dáta z roku 2003 na štyri štvrt' roky a odhadovali sme jednotlivé parametre na každom z období. Ako aproximáciu okamžitej úrokovej miery pre Bribor sme vzali v súčasnosti už bývalú O/N sadzbu, ktorú si banky medzi sebou účtovali za jednoduchové pôžičky (keďže išlo o Bribor). Dáta o sadzbách sme získali zo stránky Národnej banky Slovenska (pozri [11]). Výsledky uvádzame v dvoch tabuľkách – prvá porovnáva našu kalibráciu s výsledkami zo [7], druhá prezentuje naše pôvodné verzus korigované ML odhady:

Bribor	$\kappa$		$\sigma$		$\theta$		$\alpha$	
	Korigované ML	Článok	Korigované ML	Článok	Korigované ML	Článok	Korigované ML	Článok
1Q2003	<b>50.2694</b>	688.298	<b>0.5120</b>	8.960	<b>0.0594</b>	0.0025	<b>2.9838</b>	1.7457
2Q2003	<b>66.1431</b>	38.467	<b>0.6492</b>	1.509	<b>0.0642</b>	0.0458	<b>4.2467</b>	1.7617
3Q2003	<b>134.012</b>	598.875	<b>0.5855</b>	8.276	<b>0.0579</b>	0.0031	<b>7.7620</b>	1.8565
4Q2003	<b>78.6979</b>	793.487	<b>0.5855</b>	9.396	<b>0.0599</b>	0.0022	<b>4.4005</b>	1.7456

Tabuľka 5.1: Korigované Nowmanove odhady verzus kalibrácia zo [7] – Bribor 2003.

Bribor	$\kappa$		$\alpha$		$\sigma$	$\theta$
	Pôvodný odhad	Korigovaný odhad	Pôvodný odhad	Korigovaný odhad	Korigovaný odhad	Korigovaný odhad
1Q2003	68.4503	50.2694	4.063	2.9838	0.5120	0.0594
2Q2003	83.4388	66.1431	5.3571	4.2467	0.6492	0.0642
3Q2003	154.7371	134.012	8.9622	7.7620	0.5855	0.0579
4Q2003	98.2322	78.6979	5.4927	4.4005	0.5855	0.0599
<b>2003</b>	<b>84.9263</b>	<b>80.7759</b>	<b>5.038</b>	<b>4.7918</b>	<b>0.5734</b>	<b>0.0593</b>

Tabuľka 5.2: Pôvodné verzus korigované ML odhady – Bribor 2003.

Z prvej tabuľky vidíme, že metódy dávajú pomerne odlišné výsledky, pričom sa nezhodujú dokonca ani v prípade dlhodobej úrovne krátkodobej sadzby  $\theta$ . Nejasnosť ohľadom výrazných rozdielov v hodnotách parametrov však budeme schopní odstrániť až po odhade trhovej ceny rizika  $\lambda$  nasimulovaním výnosových kriviek podľa odhadov parametrov v [7], resp. podľa našich korigovaných odhadov.

Z porovnania pôvodných a korigovaných Nowmanových odhadov vyplýva, že korekcia posúva odhady  $\kappa$  jednoznačne smerom nadol (rozdiel je v priemere 15-20), čo zodpovedá v našej terminológii korekcii  $\beta$  smerom nahor. Hodnoty  $\alpha$  dopočítané z  $\beta$  sa príslušne korigovali smerom nadol. V súlade s výsledkami zo simulácií, v ktorých  $\sigma$  a  $\theta$  vykazovali dostatočnú stabilitu, uvádzame pre tieto parametre len korigované hodnoty.

Výsledky pre Euribor sú nasledovné:

Euribor	$\kappa$		$\sigma$		$\theta$		$\alpha$	
	Korigované ML	Článok	Korigované ML	Článok	Korigované ML	Článok	Korigované ML	Článok
1Q2003	<b>105.853</b>	34.118	<b>0.1876</b>	0.689	<b>0.0276</b>	0.0241	<b>2.9212</b>	0.8222
2Q2003	<b>18.926</b>	0.734	<b>0.0976</b>	0.024	<b>0.0242</b>	0.0244	<b>0.4574</b>	0.0179
3Q2003	<b>228.404</b>	40.018	<b>0.2005</b>	0.699	<b>0.0206</b>	0.0175	<b>4.7153</b>	0.7003
4Q2003	<b>167.276</b>	9.217	<b>0.2380</b>	0.286	<b>0.0201</b>	0.0178	<b>3.3626</b>	0.1641

Tabuľka 5.3: Korigované Nowmanove odhady verzus kalibrácia zo [7] – Euribor 2003.

Euribor	$\kappa$		$\alpha$		$\sigma$	$\theta$
	Pôvodný odhad	Korigovaný odhad	Pôvodný odhad	Korigovaný odhad	Korigovaný odhad	Korigovaný odhad
1Q2003	143.9377	105.8537	3.9722	2.9212	0.1876	0.0276
2Q2003	28.6747	18.9268	0.693	0.4574	0.0976	0.0242
3Q2003	277.1804	228.4042	5.7223	4.7153	0.2005	0.0206
4Q2003	194.7768	167.2767	3.9154	3.3626	0.2380	0.0201
<b>2003</b>	<b>30.1849</b>	<b>26.5052</b>	<b>0.6936</b>	<b>0.6091</b>	<b>0.1641</b>	<b>0.0230</b>

Tabuľka 5.4: Pôvodné verzus korigované ML odhady – Euribor 2003.

V prípade európskych sadzieb sme ako aproximáciu short rate použili hodnoty EONIA (Euro OverNight Index Average), ktorá má v rámci eurozóny podobnú funkciu ako bývalá slovenská O/N sadzba, pozri [12]. Výsledky naznačujú, že európska krátkodobá sadzba sa v roku 2003 pohybovala na úrovniach o 3 % nižších ako slovenská. Čo sa týka stability parametrov sa zdá, že slovenský aj európsky peňažný trh boli pomerne vyrovnané, miernu odchýlku sme v prípade Briboru zaznamenali v treťom štvrtroku, zatiaľ čo Euribor vykazuje vychýlené hodnoty v druhom kvartáli.

K samotnému výpočtu korekcií ešte dodajme, že v korekčnej fáze algoritmu sme mali voľnosť pri voľbe počtu korekcií  $M$ , z ktorých sa výsledná korekcia vypočítala ako ich priemer. Ako najvhodnejšie sa nám javilo nastavenie  $M = 300$ , keďže väčšia hodnota už neprinášala dodatočnú ustálenosť výsledných priemerov. V korekčnej fáze sme skúšali použiť aj korekciu cez  $\alpha$ , výsledky však naznačovali príliš veľké rozdiely pri opakovaných pokusoch v porovnaní s korekciou cez  $\beta$ .



## 5.2 Odhad rizikovo neutrálnych parametrov

Prejdime teraz ku kalibrácii rizikovo neutrálnych parametrov. Ich hodnoty sú zviazané s trhovou cenou rizika vzťahom (3.3), pričom v prípade CIR modelu, v ktorom definujeme  $\lambda(r) = \lambda\sqrt{r}$ , sa tento vzťah zjednoduší na

$$\lambda = \frac{\beta - \tilde{\beta}}{\sigma} \iff \tilde{\alpha} = \alpha, \tilde{\beta} = \beta - \sigma\lambda.$$

Pred samotnou kalibráciou sme museli otestovať, či algoritmus simulovaného žihania funguje s rovnakými parametrami ako pri simuláciach. Náš predpoklad sa potvrdil, takže sme mohli priamo prejsť ku kalibrácii.

Keďže kalibrujeme CIR model, parametre  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{\gamma}$ , ale aj  $\tilde{\alpha}$  by sa teoreticky mali zhodovať s ich reálnymi ekvivalentmi. Vzhľadom na túto skutočnosť a fakt, že optimalizácia parametra  $\sigma$  pomocou funkcie  $\ln P_{ap2}$  je nepresná, rozhodli sme sa odhadovať trhovú cenu rizika  $\lambda$  dvoma nezávislými spôsobmi:

- odhadom všetkých rizikovo neutrálnych parametrov okrem  $\gamma$  s následným výpočtom  $\lambda$  pri použití hodnoty reálnej  $\sigma$ , získanej korekciou Nowmanovho ML odhadu
- implikovaným odhadom  $\tilde{\beta}$  pri zafixovaných  $\tilde{\alpha} = \alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma$  (minimalizácia funkcie jednej premennej – grafické riešenie), analogickým výpočtom  $\lambda$ .

Ak neuvažujeme nepresnosť odhadu  $\sigma$  (ktorú nahrádzame v ďalšom výpočte jej reálnym ekvivalentom), použitím prvého spôsobu optimalizácie všetkých troch parametrov máme možnosť overiť si presnosť teoretického predpokladu  $\tilde{\alpha} \approx \alpha$ . V druhom prípade naopak z predpokladov  $\tilde{\alpha} = \alpha$ , resp.  $\tilde{\sigma} = \sigma$  vychádzame a môžeme porovnať stabilitu odhadu  $\tilde{\beta}$  v porovnaní s predchádzajúcim spôsobom. Výsledky uvádzame opäť po štvrt'rokoch:

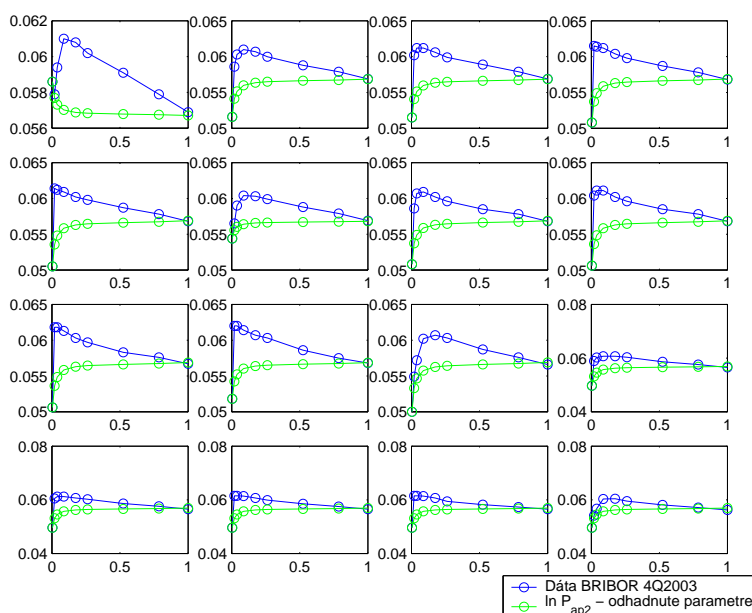
Bribor	$\alpha$		$\beta$			$\sigma$		$\lambda$	
	Real	Risk-free	Real	Risk-free	Risk-free (impl.)	Real	Risk-free	$\lambda_{\sigma_{real}}$	$\lambda_{impl.}$
1Q2003	2.984	2.747	-50.269	-47.946	-48.55	0.512	0.066	-4.539	-3.358
2Q2003	4.247	3.439	-66.143	-60.488	-62.55	0.649	0.061	-8.711	-5.535
3Q2003	7.762	8.020	-134.012	-133.035	-129.05	0.586	0.002	-1.669	-8.475
4Q2003	4.401	4.409	-78.698	-77.694	-74.10	0.586	0.026	-1.714	-7.853
2003	4.792	4.681	-80.776	-81.141	-76.25	0.573	0.042	0.636	-7.893

Tabuľka 5.5: Rizikovo neutrálne parametre a trhovú cenu rizika – Bribor 2003.

Výsledky sme rozdelili podľa parametrov, pričom za hodnoty v bunkách označených *Real* sme vzali korigované ML odhady z predchádzajúcej časti. Optimálne hodnoty nákladovej funkcie  $U$  sa v každom zo štvrt'rokov dosahovali na úrovni  $10^{-4}$ , pre celoročné dáta sa rád presnosti znížil na  $10^{-3}$ . Z tabuľky je ďalej zrejmé, že hodnoty rizikovo neutrálnej  $\sigma$  sú neopodstatnene nízke, čo naznačuje, že výpočet  $\lambda$  pomocou

reálnej  $\sigma$  je odôvodnený. Rozdiely  $\tilde{\alpha} - \alpha$  vyšli s výnimkou druhého kvartálu pomerne malé, čo potvrdzuje naše predpoklady. Druhý spôsob odhadu  $\lambda$  pomocou implikovanej hodnoty  $\tilde{\beta}$  pri zafixovaní ostatných parametrov sa takisto ukázal ako prijateľný, keďže rozdiely odhadov  $\tilde{\beta}$  v oboch metódach neboli taktiež príliš výrazné. Očakávané záporné znamienko  $\lambda$  sa nepotvrdilo len v celoročných dátach, čo však mohlo byť spôsobené aj nepresnou korekciou reálnej  $\beta$  (pre prvotný odhad by  $\lambda$  vyšla záporná).

Porovnanie skutočných a napočítaných výnosových kriviek podľa odhadnutých parametrov z prvých 16 dní štvrtého kvartálu dokumentuje nasledujúci graf:



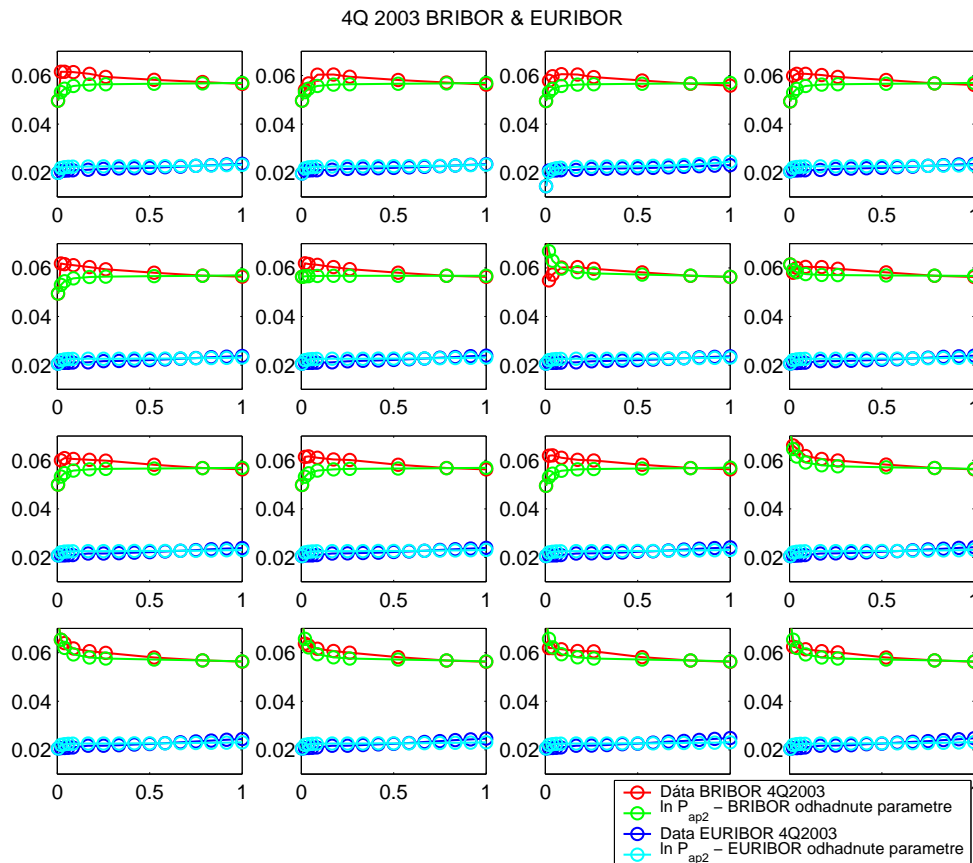
Obrázok 5.1: Výnosové krivky z reálnych dát (Bribor 4Q 2003) a krivky napočítané pomocou funkcie  $\ln P_{ap2}$  z odhadnutých parametrov.

Euribor	$\alpha$		$\beta$			$\sigma$		$\lambda$	
	Real	Risk-free	Real	Risk-free	Risk-free (impl.)	Real	Risk-free	$\lambda_{\sigma_{real}}$	$\lambda_{impl.}$
1Q2003	2.921	2.759	-105.853	-107.371	-107.70	0.188	0.035	8.090	9.845
2Q2003	0.457	0.346	-18.927	-15.403	-15.40	0.098	0.088	-36.101	-36.135
3Q2003	4.715	4.899	-228.404	-225.614	-226.05	0.201	0.013	-13.916	-11.742
4Q2003	3.363	3.818	-167.277	-168.778	-163.25	0.238	0.031	6.308	-16.919
2003	0.6091	0.680	-26.5052	-29.583	-26.250	0.164	0.004	18.754	-1.555

Tabuľka 5.6: Rizikovo neutrálne parametre a tržová cena rizika – Euribor 2003.

Aj pri Euribore sú výsledky oboch metód pomerne porovnateľné. Keďže hodnoty rizikovo neutrálnych  $\beta$  vyšli v prvom a treťom kvartáli pre oba spôsoby približne rovnaké, ani tržové ceny rizika pre tieto obdobia sa navzájom veľmi nelíšia. Implikovaný odhad  $\tilde{\beta}$  v poslednom štvrtroku je o niečo väčší ako reálne  $\beta$ , preto tržové ceny rizika vyšli v tomto kvartáli s opačnými znamienkami. Optimálna hodnota účelovej funkcie

$\hat{U}$  sa opäť pohybovala na úrovniach rádovo okolo  $10^{-4}$  pri kvartálnych dátach, resp.  $10^{-3}$  pri celoročných dátach. Spoločné porovnanie reálnych výnosových kriviek a kriviek generovaných pomocou odhadnutých parametrov z kalibrácie je nasledovné:

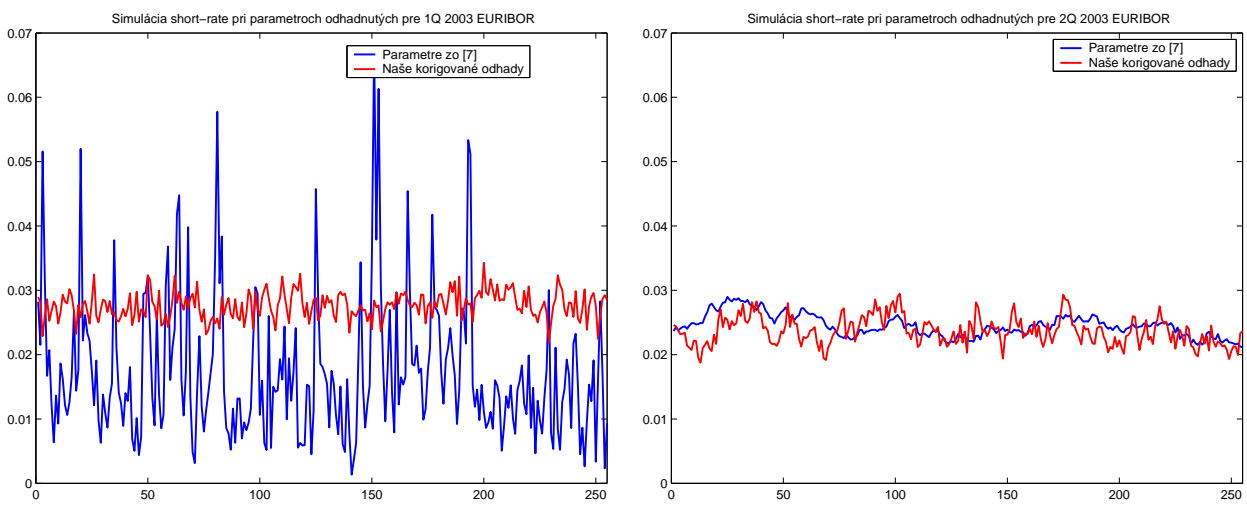


Obrázok 5.2: Reálne a teoretické výnosové krivky napočítané pomocou funkcie  $\ln P_{ap2}$  pre Bribor & Euribor 4Q 2003.

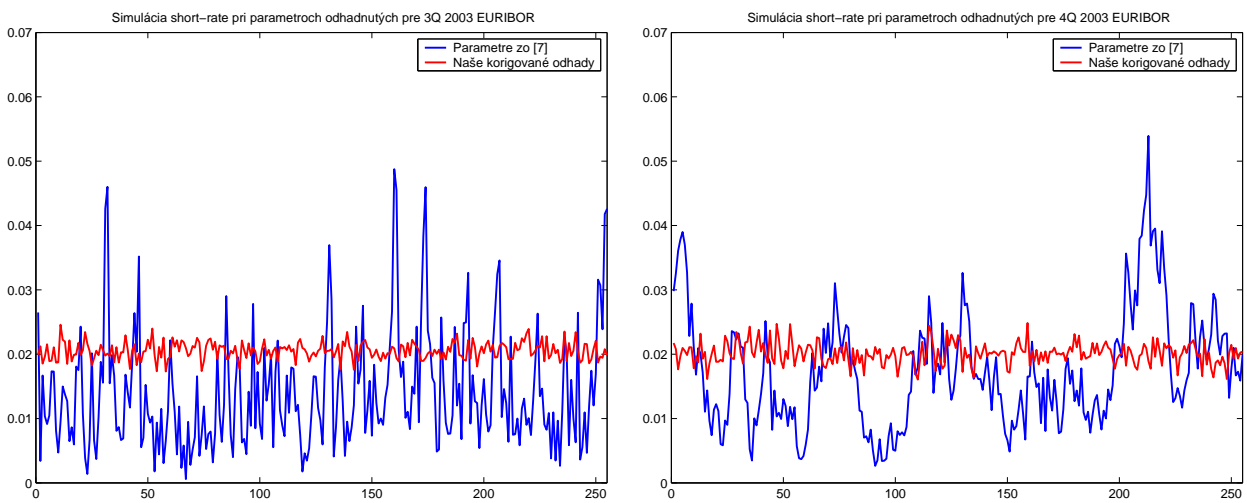
Na ilustráciu celkovej ekvivalencie medzi našimi korigovanými odhadmi a odhadmi zo [7] sme si pre obe nastavenia parametrov vygenerovali časové rady short rate a zakreslili ich priebeh do spoločného grafu. Iné porovnanie je možné nasimulovaním výnosových kriviek pre zvolené spoločné hodnoty short rate  $r$ . Nech napr.  $r \in \{1\%, 2\%, 2.6\%, 3\%\}$ . Potom pomocou vzorca pre CIR model (pozri str. 19) a s využitím hodnôt  $\lambda$  z tabuľky 5.7 dostávame pre každú úroveň  $r$  dvojicu porovnateľných výnosových kriviek. V každom so štvrt' rokov sme do jedného z grafov zahrnuli aj reálnu výnosovú krivku tak, aby sa jej short rate približne zhodovala s hodnotou na danom grafe. Vzhľadom na výrazné rozdiely v odhadoch  $\theta$  pri sadzbách Briboru (tab. 5.1), spôsobujúce okrem iného problémy pri simulovaní vývoja  $r$ , uvádzame simulácie len pre Euribor. Na záver poznamenávame, že metodológiu korekcie maximálne vierohodných odhadov, resp. kalibrácie rizikovo neutrálnych parametrov na základe analytickej aproximácie ceny dlhopisu je možné aplikovať aj na všeobecný short rate model ( $\gamma \neq 0.5$ ), pre ktorý je približné riešenie jediné, ktoré vieme efektívne získať.

Euribor	$\lambda_{\text{článok}}$	$\lambda_{\sigma_{real}}$	$\lambda_{impl}$
1Q2003	-1.897	8.090	9.845
2Q2003	0.276	-36.101	-36.135
3Q2003	-7.797	-13.916	-11.742
4Q2003	-2.243	6.308	-16.919

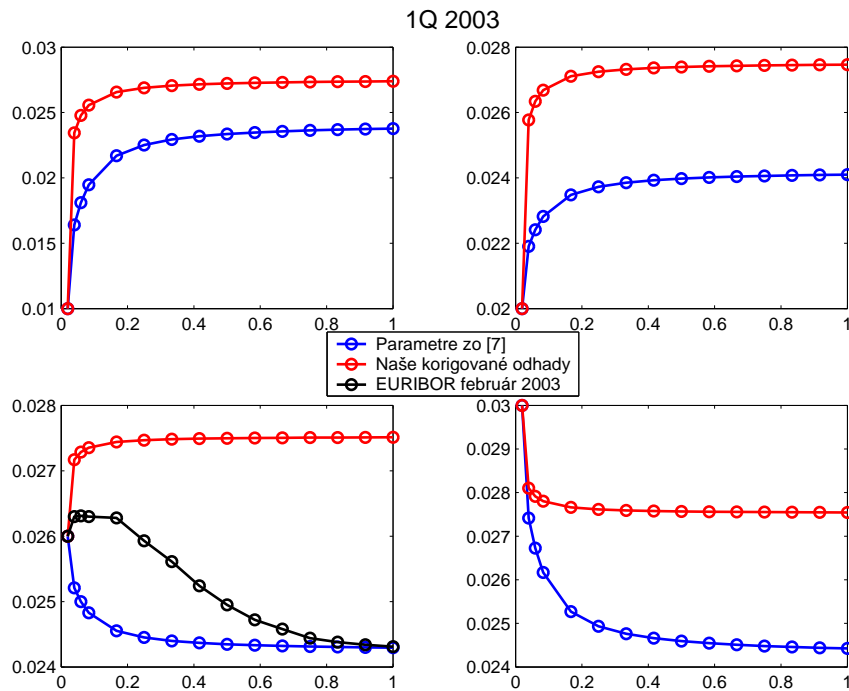
Tabuľka 5.7: Trhová cena rizika – Euribor 2003.



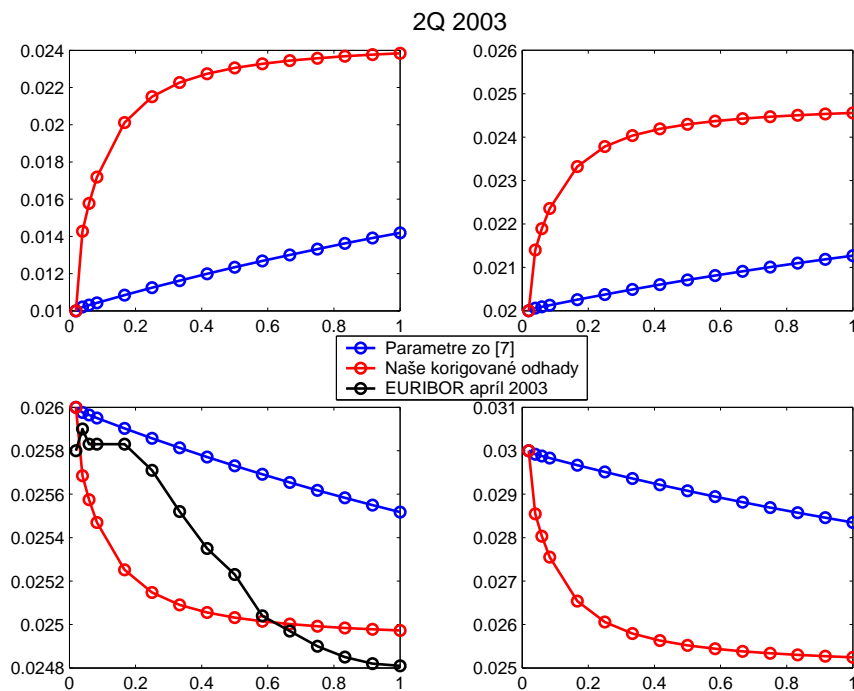
Obrázok 5.3: Simulácia short rate pri parametroch odhadnutých pre 1Q a 2Q 2003 Euribor.



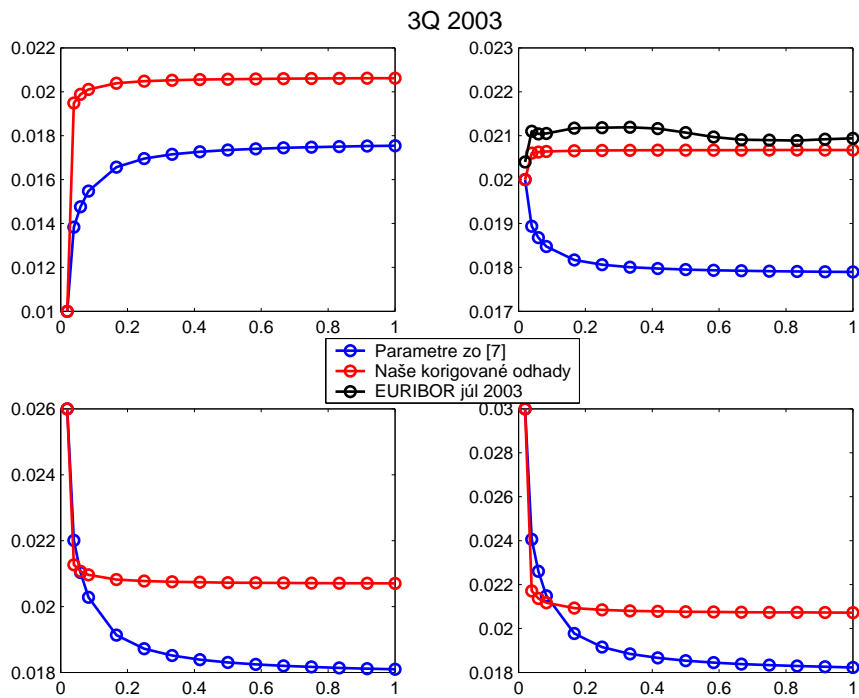
Obrázok 5.4: Simulácia short rate pri parametroch odhadnutých pre 3Q a 4Q 2003 Euribor.



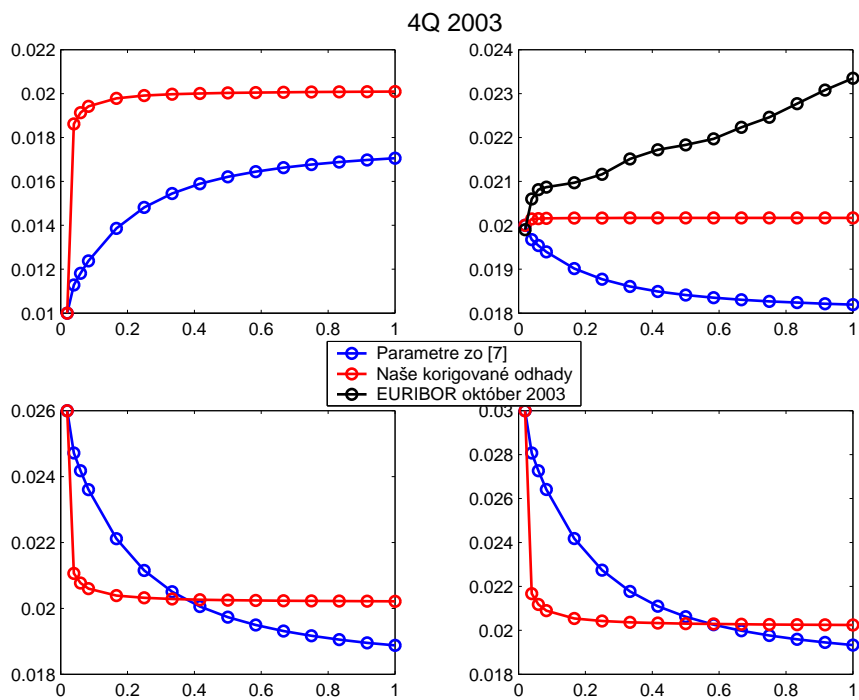
Obrázok 5.5: Simulácia výnosových kriviek 1Q2003 Euribor.



Obrázok 5.6: Simulácia výnosových kriviek 2Q2003 Euribor.



Obrázok 5.7: Simulácia výnosových kriviek 3Q2003 Euribor.



Obrázok 5.8: Simulácia výnosových kriviek 4Q2003 Euribor.

## Záver

Metódy kalibrácie jednofaktorových modelov úrokových mier založené na maximalizácii vierohodnostnej funkcie často generujú vychýlené odhady. Prvým cieľom v rámci diplomovej práce bolo preto eliminovať toto vychýlenie na základe nájdenej závislosti medzi presnou a odhadnutou hodnotou parametra  $\beta$ . V teoretickej časti, v ktorej sme dáta simulovali, sme túto závislosť odhadli a následne použili pri nájdení (maximálne vierohodných) korigovaných odhadov. Našu metódu sme na báze simulácií kvalitatívne porovnali s metódou tzv. transformácie náhodného času, v rámci ktorej sa autori práce [9] takisto snažili vylepšiť pôvodné Nowmanove odhady. Z výsledkov tohto porovnania vyplynulo, že nami navrhnutá metóda bola po teoretickej stránke úspešná, čo umožnilo použiť ju aj pri reálnych dátach.

Kalibráciou, avšak pri rizikovo neutrálnej miere, sme sa zaoberali aj v ďalšej časti práce. V tomto prípade sme využili relatívne nový analytický vzorec aproximujúci ceny dlhopisov odvodených z príslušného short rate modelu. Tieto teoretické ceny sme dosadili do nákladovej funkcie váženého súčtu štvorcov rozdielov teoretických a nasimulovaných výnosových kriviek. Optimalizáciou pomocou algoritmu simulovaného žihania sme získali rizikovo neutrálne parametre, ktoré spolu s parametrami odhadnutými v prvej časti práce určujú trhovú cenu rizika. Na otestovanie kalibrácie rizikovo neutrálnych parametroch sme použili model CIR, jediný model s výnimkou Vašíčkovho, pre ktorý vieme presne simulovať výnosové krivky.

V praktickej časti sme kalibrovali výnosové krivky Briboru a Euriboru z roku 2003, ktoré modelovali aj autori práce [7]. Kým v prípade Briboru sme v porovnaní s hodnotami zo [7] získali výrazne odlišné výsledky, kvalita kalibrácie Euriboru sa v zmysle zhody výnosových kriviek ukázala ako pomerne uspokojivá. Treba však poznamenať, že prínos analytickej aproximácie je možné naplno využiť až pri kalibrácii všeobecného modelu, pre ktorý neexistuje presné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice. V budúcnosti je možné zo zlepšenej kvality odhadov profitovať aj pri použití viacfaktorových modelov. Tieto majú schopnosť zachytiť niektoré všeobecnejšie tvary výnosových kriviek, ktoré jednofaktorové short rate modely nedokážu postihnúť.

# Literatúra

- [1] Melicherčík, I., Olšarová, L., Úradníček, V. (2005): *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS.
- [2] Glasserman, P. (2004): *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer Science, New York.
- [3] Kwok, Y.K. (1998): *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer Finance, Singapore.
- [4] Stehlíková, B. (2005): *Kalibrácia jednofaktorových modelov úrokových mier*, Rigorózná práca, Bratislava.
- [5] Chan, K.C., Karolyi Andrew G., Longstaff A., Sanders Anthony B. (1992): *An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate*, The Journal of Finance, Vol. 47, No. 3, pp. 1209-1227.
- [6] Youngsoo Choi, Wirjanto S. Tony (2007): *An Analytic Approximation Formula For Pricing Zero-Coupon Bonds*, Finance Research Letters, 4(2), 116-126
- [7] Ševčovič, D., Csajková Urbánková, A. (2004): *Calibration of one factor interest rate models*, Journal of ELECTRICAL ENGINEERING, Vol. 55, NO. 12/s, 46-50
- [8] Kvasnička, V., Pospíchal, J., Tiňo, P. (2000): *Evolučné algoritmy, 1. vyd.*, Vydavateľstvo STU, Bratislava, 223 s. ISBN 80-227-1377-5
- [9] Yu, J., Phillips, Peter C. B. (2002): *Gaussian Estimation of Continuous Time Models of the Short Term Interest Rate*, Yale Cowles Foundation Disc. Paper No. 1309.  
<http://ssrn.com/abstract=278539>
- [10] Stehlíková, B., Ševčovič, D. (2009): *Aproximate Formulae For Pricing Zero-Coupons Bonds And Their Asymptotic Analysis*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling, 6(2), 274-283.
- [11] Národná banka Slovenska, [www.nbs.sk](http://www.nbs.sk)
- [12] Sadzby európskeho peňažného trhu, [www.euribor.org](http://www.euribor.org), [www.eonia.org](http://www.eonia.org)
- [13] Hansen, Bruce E. (2009): *Econometrics*, Current Manuscript (2009).  
<http://www.ssc.wisc.edu/~bhansen/econometrics>



# Príloha

## Algoritmus simulovaného žihania

```
x=x0;
Tmax=2;
Tmin=10^(-20);
Sigma=[0.1,0.3,0.01,0.0];

%U(r,R,x0(1),x0(2),x0(3),x0(4))
T=Tmax;
Ries=[0;0;0;0;0;0;0;0];
Lambda=0.4;
maxIter=80;
while (T>Tmin)
    for i=1:maxIter
        xNew(1)=x(1)+normrnd(0,Sigma(1));
        xNew(2)=x(2)+normrnd(0,Sigma(2));
        xNew(3)=x(3)+normrnd(0,Sigma(3));
        xNew(4)=x(4)+normrnd(0,Sigma(4));
        if ( U(r,R,xNew(1),xNew(2),xNew(3),xNew(4)) <
            U(r,R,x(1),x(2),x(3),x(4)) ) ||
            (rand(1) < exp(-( U(r,R,xNew(1),xNew(2),xNew(3),xNew(4)) -
                U(r,R,x(1),x(2),x(3),x(4)))/T));
            x=xNew;
        end
    end
    T=Lambda*T;
    Ries=[Ries,[xNew';0;T; U(r,R,xNew(1),xNew(2),xNew(3),xNew(4))]]
    xNew;
end
```

---

```
function U=U(r,R,alfa_tilde,beta_tilde,sigma_tilde,gamma_tilde)
U=0;
N=258;
```

```

dt=1/N;
tau=[5/252,10/252,22/252,44/252,66/252,132/252,9*22/252,1];
M=length(taue);

```

```

for j = 1:M
  for i = 1:N
    U = U + (R(i,j) - R_wir(r(i),taue(j),alfa_tilde, ...
      beta_tilde,sigma_tilde,gamma_tilde))^2 * taue(j)^2;
  end
end
end

```

---

```

function [R,P] = R_wir(short_rate,tau,alfa,beta,sigma,gamma)
r=short_rate;
B_tau = beta^(-1) * (exp(beta*tau) - 1);
q0 = gamma * (2*gamma-1) * sigma^2 * r^(2*(2*gamma-1))...
  + 2*gamma*r^(2*gamma-1) * (alfa + beta*r);

c_5 = -1/120*gamma*r^(2*gamma-4)*sigma^2*(2*alfa^2*...
  (-1+2*gamma)*r^2 + 4*beta^2*gamma*r^4 - 8*...
  r^(3+2*gamma)*sigma^2 + 2*beta*(1-5*gamma + ...
  6*gamma^2)*r^(2+2*gamma)*sigma^2 + sigma^4*...
  r^(4*gamma)*(2*gamma-1)^2*(4*gamma-3) + 2*alfa*...
  r*(beta*(-1+4*gamma)*r^2 + (2*gamma-1)*(3*gamma-2)...
  *r^(2*gamma)*sigma^2));

ln_P = -r*B_tau + alfa/beta*(tau-B_tau) + ...
  (r^(2*gamma)+q0*tau) * sigma^2/(4*beta) * ...
  (B_tau^2 + 2/beta*(tau-B_tau)) - ...
  q0 * sigma^2/(8*beta^2) * (B_tau^2 * (2*beta*tau-1) ...
  - 2*B_tau * (2*tau - 3/beta) + 2*tau^2 - 6*tau/beta) ...
  - c_5*tau^5;

P = exp(ln_P);
R = - ln_P/tau;

end

```