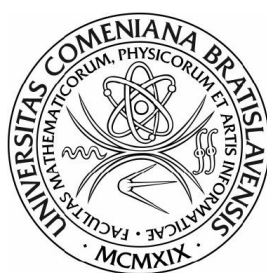


UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



# Aukcie

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2009

Martin Novák

# Aukcie

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Martin Novák

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY**

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.

Bratislava 2009

## Čestné prehlásenie

Týmto prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

V Bratislave, 24.4.2009

.....

*Vlastnoručný podpis*

## **Pod'akovanie**

Týmto by som chcel poďakovať vedúcemu práce, Doc. RNDr. Jánovi Pekárovi, PhD., za cenné pripomienky a jeho veľkú trpezlivosť pri odbornom vedení práce. Špeciálne poďakovanie patrí prof. Bartovi Wilsonovi za odborné konzultácie a veľké množstvo nových podnetov.

Ďakujem i mojej rodine za ich neustálu podporu počas celého môjho štúdia.

# Abstrakt

V práci podávame zhrnutie základných objavov teórie aukcií s dôrazom na tzv. *private values modely*. Skúmame najmä optimálne stratégie jednotlivých účastníkov v zmysle nekooperatívneho Nashovho ekvilibria, a následne hľadáme spoločné resp. diametrálne odlišné črty jednotlivých aukčných mechanizmov. Snažíme sa taktiež o porovnanie teoretických záverov s výsledkami špecializovaných experimentov.

**Kľúčové slová:**

aukcia, Nashovo ekvilibrium, veta o ekvivalencii výnosov, experimentálna ekonómia

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Úvod do teórie aukcií</b>	<b>4</b>
1.1 Základné aukčné mechanizmy . . . . .	4
1.2 Základné predpoklady . . . . .	7
<b>2 Porovnávanie základných aukčných mechanizmov</b>	<b>11</b>
2.1 Ekvivalencie medzi aukčnými mechanizmami . . . . .	11
2.2 Hľadanie optimálnych stratégií . . . . .	13
2.3 Veta o ekvivalencii výnosov . . . . .	17
2.4 Efektívnosť alokácie draženého objektu . . . . .	20
2.5 Aukcie s endogénnym množstvom . . . . .	21
<b>3 Experimentálne výsledky</b>	<b>26</b>
3.1 Ekvivalencia holandskej a FPSB aukcie . . . . .	26
3.2 Ekvivalencia anglickej a SPSB aukcie . . . . .	33
3.3 Online aukcie . . . . .	37
<b>Záver</b>	<b>42</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>43</b>

# Úvod

Aukcie sú už od nepamäti využívané ľudstvom ako spôsob predaja rozličných tovarov, služieb, pozemkov alebo práv. Napriek tomu sa stali predmetom teoretického skúmania len relatívne nedávno - prvý vedecký článok, ktorý ich seriózne analyzuje, pochádza z roku 1961. Od tejto doby sa však záujem vedeckej verejnosti o ne veľmi zvýšil. V priebehu niekoľkých desaťročí sme zaznamenali doslova explóziu v počte kníh, článkov a odborných diskusií zaoberajúcich sa výlučne aukciami. Bolo navrhnutých množstvo modelov, ktoré pomohli objasniť a zodpovedať fundamentálne otázky a nejasnosti. Žiaľ, toto sa nedá povedať o slovenskej literatúre - v dobe písania tejto práce sme mali informáciu o jedinom(!) diele.

Cieľom tejto práce bude preto najmä snaha o čiastočné vyplnenie tejto obrovskej medzery. Práca podáva sumárny prehľad o najvýznamnejších objavoch v teórii aukcií, pričom sa zameriavame na tzv. *private values model*. Okrem analýzy samotných aukčných mechanizmov a optimálnych stratégií jednotlivých účastníkov sa snažíme i bližšie skúmať ich „neracionálne“ správanie a pokúsiť sa ho miestami obhájiť vhodným rozšírením už existujúcich modelov. Univerzálnym nástrojom na identifikáciu takéhoto správania sú pokusy experimentálnej ekonómie. Keďže našim želaním je, aby práca mohla ďalej slúžiť i na vzdelávacie účely, prispôbili sme tomu i jej štruktúru. Kde to je možné, snažíme sa o intuitívne vysvetlenie problematiky. Presné formulácie vo forme viet resp. dôkazov používame iba na miestach, kde to považujeme naozaj za navyhnutné. Celkovo je práca koncipovaná

tak, aby na jej štúdium postačovali základné znalosti z teórie hier, matematickej analýzy a teórie pravdepodobnosti.

Práca sa skladá z troch kapitol. V prvej kapitole predstavujeme základné typy aukcií, ktorými sa budeme zaoberať. Pripájame i základné predpoklady potrebné k ich uspokojivému modelovaniu. Druhá kapitola slúži na vzájomné porovnávanie týchto aukčných mechanizmov z rôznych hľadísk. V tretej kapitole potom sústredíme našu pozornosť na konfrontáciu predpovedí teórie s dosiahnutými výsledkami experimentov.



# Kapitola 1

## Úvod do teórie aukcií

Cieľom tejto kapitoly bude zoznámiť sa s pojmom aukcie a bližšie predstaviť základné aukčné mechanizmy. Uvedieme tiež základné predpoklady nevyhnutné k ich uspokojivému matematickému modelovaniu.

### 1.1 Základné aukčné mechanizmy

Aukciou nazývame spôsob predaja, kedy dvaja alebo viacerí potenciálni kupci súťažia o získanie jedného alebo viacerých objektov prostredníctvom zadávania cenových ponúk predajcovi. Aukcie sa medzi sebou líšia priebehom, pravidlami i spôsobom určenia víťaza spolu s cenou, ktorú má zaplatiť. V tejto časti si v stručnosti predstavíme štyri fundamentálne aukčné formáty spolu s ich pravidlami. Ak nebude uvedené inak, v celej kapitole budeme predpokladať, že organizátor aukcie je predajca a zúčastnení sú potenciónálni kupci. Predajca bude ponúkať na vydraženie jeden kus nedeliteľného objektu.

#### *Holandská aukcia*

Tento typ aukcie sa vo veľkej miere využíva v Holandsku pri predaji kvetín, odkiaľ pochádza i jeho názov. Pri tomto mechanizme predajca najprv ponúka objekt za vysokú cenu a postupom času túto cenu znižuje. K tomuto procesu sa využívajú špeciálne hodinky - aktuálna cena sa zobrazuje na ciferníku a v pravidelných časových intervaloch

klesá. Prvý záujemca, ktorý sa ozve, dostane objekt za cenu, ktorá bola aktuálna v momente, kedy sa ozval. Podľa princípu jej fungovania sa pre tento typ aukcie niekedy používa i názov aukcia s klesajúcou cenou.

### ***FPSB aukcia***<sup>1</sup>

Pri tomto type aukčného mechanizmu nedeklarujú záujemcovia ponúkanú cenu verejne, ale ju dražiteľovi doručia v zalepenej obálke. Tento ponúkané ceny vyhodnotí, pričom objekt získa ten, kto ponúkol najvyššiu cenu. Táto cena bude zároveň i predajnou cenou objektu.

### ***Anglická aukcia***

Asi najznámejším typom spomedzi všetkých aukčných mechanizmov je práve anglická aukcia. Pri tejto forme aukcie sa začína na úrovni vyvolávacej ceny určenej predajcom. Táto je eventuálnymi záujemcami postupne navyšovaná<sup>2</sup>. Ak v istom momente už žiaden zo zúčastnených neprejaví záujem ponúknuť vyššiu cenu, aukcia končí a objekt je predaný poslednému „navýšiteľovi“ za cenu rovnajúcu sa jeho poslednej ponuke. Keďže vývoj ceny je v tomto prípade opačný ako v Holandskej aukcii, pre tento typ sa zaužívalo i pomenovanie aukcia so stúpajúcou cenou.

### ***SPSB aukcia***<sup>3</sup>

Jedná sa taktiež o aukciu, kde záujemcovia zadávajú ceny v zalepených obálkach. Objekt bude predaný tomu, koho ponúkaná cena bude navyššia. Víťaz však nezaplatí ním ponúkanú cenu, ale prvú odmietnutú t.j. druhú najvyššiu cenu v poradí.

---

<sup>1</sup>Skratka pochádza z anglického *first-price sealed bid*. Žiaľ, v slovenčine podobné skrátené pomenovanie, ktoré by s takou výstižnosťou popisovalo daný mechanizmus, nemáme. Preto budeme ďalej používať uvedenú skratku.

<sup>2</sup>Ak sa nenájde nikto, kto by navýšil vyvolávaciu cenu, dražený objekt nie je predaný

<sup>3</sup>Z anglického *second-price sealed bid*. Pozri tiež <sup>1</sup>.

Prirodzene, okrem uvedených existuje ešte nespočetné množstvo iných aukčných mechanizmov. Tieto sa môžu vo veľkej miere podobať spomenutým typom alebo sa od nich aj zásadným spôsobom líšiť ako napr. aukčné mechanizmy, kde dražený objekt získa iba jediný účastník, avšak zaplatiť svoju ponuku musia viacerí. Ak budeme namiesto jedného nedeliteľného objektu uvažovať ako predmet aukcie viacero kusov (pričom predpokladáme, že každý zo zúčastnených má záujem o najviac jeden z týchto identických objektov), potom prídeme k ešte pestrejšej palete aukcií. Tento fakt spočíva v rozličnom spôsobe priraďovania finálnej predajnej ceny jednotlivým kupcom. Dva základné spôsoby sú *diskriminačný* a *nediskriminačný*. Pri diskriminačnom type aukčného mechanizmu zaplatí každý z úspešných kupcov za získaný objekt ním ponúkanú cenu. Pri nediskriminačnom type je určená pre všetkých úspešných kupcov jednotná cena, ktorá je rovná najvyššej spomedzi všetkých ponúk. Porovnávaníu týchto dvoch typov sa venovať nebudeme, zvedavého čitateľa si dovoľíme odporučiť na detailnejšie analýzy Harris, Raviv [6] a Holt [7].

Na druhej strane, nie je to len aukčný mechanizmus, ktorý zohráva úlohu pri alokácii daného objektu. Celkový výsledok je do značnej miery ovplyvnený spôsobom, ako jednotliví kupujúci formujú svoje ponuky. A toto je individuálnou záležitosťou každého z nich - či už na základe vlastných preferencií alebo nejakých dodatočných informácií o kvalite objektu. Toto správanie sa budeme snažiť matematicky popísať pomocou vhodnej funkcie užitočnosti resp. očakávaného zisku. Konkrétne budeme predpokladať, že každý z účastníkov aukcie sa správa racionálne za účelom maximalizácie svojho očakávaného zisku. Navyše budeme predpokladať, že účastníci sú *rizikovo neutrálni* t.j. že ich očakávaný zisk sa dá popísať lineárnou funkciou. Niektoré dôležité výsledky uvedené v práci závisia na týchto predpokladoch. Z toho dôvodu ich na príslušných miestach opäť pripomenieme.

## 1.2 Základné predpoklady

Berúc do úvahy, že aukcie sú ľudstvom využívané už po mnohé stáročia, jednotná teória, ktorá by ich bližšie skúmala vznikla relatívne nedávno. Jeden z prvých pokusov o matematické modelovanie týchto mechanizmov podáva článok Friedman [3] z roku 1956. Autor navrhuje, aby účastník aukcie skúmal výšky ponúk, ktoré robili jeho súper v minulosti. Význam takejto informácie spočíva v tom, že ju môžeme použiť ako základ pre odhadovanie distribučnej funkcie ponúk ľubovoľného súpera. Inak povedané, budeme vedieť zistiť, s akou pravdepodobnosťou bude ponuka toho-ktorého konkurenta nižšia ako nejaká fixná hodnota. Nasledujúci krátky príklad, ktorý možno nájsť i v Milgrom [12], ilustruje túto myšlienku.

Predpokladajme, že sme účastníkmi FPSB aukcie. Naším záujmom je získať objekt, ktorý si osobne ceníme na  $c$  peňažných jednotiek. To znamená, že ak ponúkneme dražiteľovi  $b$  a aukciu vyhráme, dosiahneme zisk vo výške  $c - b$ . Prirodzene, ak aukciu nevyhráme, náš zisk bude nulový. Aby sme aukciu vyhrali, je nutné, aby ponuky všetkých ostatných hráčov boli nižšie ako tá naša. Ak uvažujeme súčasnú prítomnosť  $N$  konkurentov, pričom poznáme distribučnú funkciu ponúk  $F_i$  každého z nich, potom aukciu vyhráme s pravdepodobnosťou

$$P(b) = F_1(b)F_2(b)\dots F_N(b) \quad (1.1)$$

A náš očakávaný zisk bude teda

$$E\pi(b) = P(b)(c - b)$$

Friedman odporúčal voliť ponuku  $b$  tak, aby maximalizovala očakávaný zisk  $E\pi$ . Samozrejme, aby takýto postup bol korektný, musia byť splnené niektoré technické predpoklady, ktoré na tomto mieste uvádzame.

**PREDPOKLAD 0** (*cdf assumption*)

*Poznáme pravdepodobnostné rozdelenia cenových ponúk všetkých našich konkurentov.*

**PREDPOKLAD 1** (*private values assumption*)

*Každý zo zúčastnených potencionálnych kupcov pozná presnú cenu akú má preňho dražený objekt.*

**PREDPOKLAD 2** (*independence assumption*)

*Cenové ponuky našich konkurentov sú štatisticky nezávislé.*

V našom konkrétnom príklade by sa matematicky tieto predpoklady dali interpretovať nasledovne: Predpoklad 0 hovorí, že poznáme distribučnú funkciu  $F_i$  ponúk každého z našich konkurentov. Tento predpoklad je nevyhnutný pre matematickú formuláciu problému a odteraz ho budeme považovať vždy za splnený. Predpoklad 2 hovorí, že združenou ditribučnou funkciou ponúk všetkých našich súperov je

$$F(x) = \prod_{i=1}^N F_i(x)$$

Inak povedané, pravdepodobnosť, že vyhráme aukciu môžeme zapísať podľa vzťahu (1.1). Nakoniec, Predpoklad 1 hovorí, že  $c$  bolo presne dané a nejednalo sa napríklad o náhodnú premennú.

Milgrom [12] poznamenáva, že:

..takéto predpoklady síce do veľkej miery zjednodušujú výpočty, avšak často nedokážu dostatočne presne popísať prostredie aukcie. (str. 4)

Modely, ktoré sa pri analýze aukčných mechanizmov budú opierať o tieto predpoklady, budeme nazývať *independent private values models*. Dovoľujeme si vopred poznamenať, že táto práca bude vo väčšine

prípadoch používať práve tieto modely - najmä pre ich jednoduchosť a názornosť. Na druhej strane, ako už bolo spomenuté, nie všetky prostredia sa dajú vhodne modelovať pomocou independent private values modelov. Túto skutočnosť si dovoľíme predostrieť na krátkom príklade.

Opäť ako v predchádzajúcom príklade predpokladajme, že sme účastníkmi FPSB aukcie. Draženým objektom bude v tomto prípade ropné pole na Aljaške. Na porovnaní s predchádzajúcim príkladom ukážeme, že predpoklady independent private values modelu nie sú v tomto prípade použiteľné. V prvom rade si musíme uvedomiť, že objekt v prvom príklade sme vedeli presne oceniť na základe nejakých osobných preferencií. V tomto prípade tomu tak zrejme nebude, nakoľko jediná relevantná hodnota objektu spočíva v možnom zisku z ťažby. Množstvo nerastných surovín na ťažbu ako i náklady spojené s budúcou ťažbou nemôžeme presne poznať. V najlepšom prípade môžeme disponovať nejakými ich odhadmi, ktoré sa viac alebo menej odlišujú od neznámej skutočnej hodnoty. Z tohoto dôvodu sa Predpoklad 1 stáva nepoužiteľným. Pre úspešnú formuláciu problému je potrebné nahradiť ho iným, vhodnejším. Teória sa do značnej miery ujednotila na nasledujúcom.

**PREDPOKLAD 1\*** (*common values assumption*)

*Každý zo zúčastnených potencionálnych kupcov má rovnaké schopnosti a z danej parcely dokáže vyťažiť zisk  $B$  peňažných jednotiek.*

Pre zjednodušenie ešte predpokladajme, že kupujúci majú nevychýlený odhad, čo sa týka ich ponúkanej ceny. Toto môžeme zapísať ako

$$b_i = B + \varepsilon_i,$$

kde  $b_i$  označuje cenu ponúkanú  $i$ -tým kupcom a  $\varepsilon_i$  chybu jeho odhadu, pričom  $\varepsilon_i$  a  $\varepsilon_j$  sú nezávislé pre každé  $i, j : i \neq j$  a  $E[\varepsilon_i] = 0$  pre každé  $i$ .

Z takejto formulácie ihneď vidno, že aj keď sú jednotlivé chyby nezávislé, spoločný člen  $B$  spôsobí, že jednotlivé ponuky nezávislé nie sú. Predpoklad 2 teda nie je možné aplikovať.

I v tomto prípade je nutné nájsť náhradný predpoklad, o ktorý by sme sa mohli oprieť. Prirodzenou myšlienkou bolo uvažovať jednotlivé ponuky ako kladne korelované. Pri takomto prístupe sa však výpočty v modeli stávajú skoro neuskutočniteľné. Milgrom a Weber [13] prišli so silnejším predpokladom - *affiliation*<sup>4</sup>, ktorý spôsobil revolúciu v teórii aukcií. Ak o ohodnoteniach jednotlivých kupcov predpokladáme, že sú v tomto vzťahu, v praxi to znamená, že ak má jeden kupec relatívne vysoký odhad o cene objektu, z jeho pohľadu budú i odhady ostatných vysoké s vyššou pravdepodobnosťou. Použitím tohoto predpokladu sa väčšina výpočtov stáva uskutočniteľná (pri istých dodatočných technických predpokladoch), vďaka čomu je možné skúmať veľmi široké spektrum aukčných mechanizmov a ich prostredí. Na záver tejto časti dodajme, že modely, ktoré využívajú Predpoklad 1\* namiesto Predpokladu 1, nazývame aj *common values modely*.

---

<sup>4</sup>Tento termín by sa dal do slovenčiny preložiť ako pridruženosť resp. sesterskosť.

## Kapitola 2

# Porovnávanie základných aukčných mechanizmov

V tejto kapitole sa budeme ďalej zaoberať základnými typmi aukčných mechanizmov, ktoré boli predstavené už v predchádzajúcej kapitole. Naším prvotným cieľom bude ich hlbšia analýza z hľadiska formovania ponúk jednotlivých účastníkov aukcie. Pritom budeme stále uvažovať platnosť základných predpokladov uvedených taktiež v Kapitole 1. Následne sa pokúsime nájsť isté spoločné črty medzi jednotlivými mechanizmami a bližšie ich skúmať. V druhej časti kapitoly budeme zase klásť dôraz na ich rozdielne vlastnosti v rôznych prostrediach.

### 2.1 Ekvivalencie medzi aukčnými mechanizmami

V tejto časti si ukážeme, že pri niektorých dvojiciach aukcií sa rozhodovací proces účastníkov nemení. Inak povedané, formovanie cenovej ponuky prebieha rovnakým spôsobom a má teda za výsledok identické ponuky. Dvojice aukcií, pre ktoré je toto splnené, budeme nazývať *ekvivaletné*.

Ako už vieme, v prípade FPSB aukcie každý potencionálny kupec ponúkne predajcovi cenu, za ktorú je ochotný objekt kúpiť, pričom vyhráva ten, kto ponúkne najviac. Rozhodovanie kupca spočíva teda v určení najvyššej ceny  $p^*$ , za ktorú je ešte ochotný objekt kúpiť. Po-



kúsme sa teraz popísať rozhodovací proces kupca v prípade holandskej aukcie. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že kupec, ktorý plánuje svoju akciu vopred, postupuje nasledovne. Najprv počká, kým cena objektu dosiahne istú úroveň  $p_0$ . Keď sa tak stane a objekt ešte nebude predaný, zistí, čo sa dá usúdiť z toho, že ani žiaden zo zvyšných záujemcov cenu  $p_0$  neakceptoval. Potom sa na základe nejakého výpočtu rozhodne pre jednu z možností: buď akceptuje uvedenú cenu alebo počká, kým táto opäť klesne na nejakú úroveň  $p_1$ , kde bude postupovať rovnakým algoritmom ako pri cene  $p_0$ . Toto bude pokračovať, až kým sa nedostaneme na nejakú úroveň  $p$ , kde bude kupec prvýkrát ochotný objekt kúpiť. Z toho je vidno, že víťazom aukcie bude kupec s najväčším  $p$ . Inými slovami, proces rozhodovania sa nám podarilo redukovať na voľbu maximálnej ceny, pri ktorej je daný kupec ochotný objekt kúpiť. Toto je však postup totožný s prípadom FPSB aukcie. Záver tejto analýzy uvádzame v podobe nasledujúcej vety:

#### **VETA 1**

*FPSB aukcia a holandská aukcia sú strategicky ekvivalentné t.j. množiny stratégií sú rovnaké a pravidlá, na základe ktorých sa profily stratégií transformujú do finálnej alokácie, tiež.*

#### **DÔSLEDOK**

*Pre danú množinu účastníkov a daný dražený objekt budú mať FPSB aukcia a holandská aukcia rovnakého víťaza, pričom predajné ceny objektu sa budú rovnať.*

Pokúsme sa teraz podobným spôsobom porovnať anglickú aukciu a FPSB aukciu. Budeme pritom predpokladať platnosť Predpokladu 1 z Kapitoly 1 t.j. každý účastník aukcie presne pozná cenu, akú má preňho dražený objekt. V anglickej aukcii bude účastník ochotný navyšovať cenu tak dlho, až kým táto nepresiahne hodnotu, ktorú objektu sám pripisuje. Pre zjednodušenie si predstavme, že navyšovanie sa uskutoč-

ňuje po veľmi malých množstvách  $dp$ . Potom je zrejmé, že posledný účastník ochotný kúpiť objekt bude ten, ktorý objektu pripisuje najvyššiu hodnotu. Predajná cena objektu bude cena, ktorú už nie je žiadny zo zvyšných kupcov ochotný navýšiť t.j. druhá najvyššia cena pripisovaná objektu zo strany kupcov. To je však presne v zhode s postupom pri SPSB aukcii. Záverom teda dostávame nasledujúce tvrdenie.

## VĚTA 2

*Pri platnosti Predpokladu 1 sú SPSB aukcia a anglická aukcia ekvivalentné.*

## 2.2 Hľadanie optimálnych stratégií

V tejto časti budeme pokračovať v našej analýze jednotlivých typov aukcií z pohľadu rozhodovania potencionálnych kupcov. Naším cieľom bude určiť ich optimálne stratégie t.j. spôsob, akým sformulovať ponuku, ktorá maximalizuje ich očakávaný zisk.

Prv, než sa dostaneme ku konkrétnym príkladom, zhrňme si označenia a predpoklady, ktoré použijeme. Aukcie, ktoré budeme analyzovať uvažujeme v prostredí opísanom pomocou *independent private values modelu* t.j. predpokladáme platnosť Predpokladov 0, 1 a 2 z Kapitoly 1. Navyše budeme predpokladať, že pravdepodobnostné rozdelenia, z ktorých pochádzajú osobné ohodnotenia jednotlivých účastníkov aukcie, sú rovnaké. Osobné ohodnotenie hráča  $i$  označíme  $v_i$ . Cenu, ktorú ponúkne na aukcii označíme  $b_i$ . Táto ponuka bude zrejme rastúcou funkciou osobného ohodnotenia  $b_i = f_i(v_i)$ . Toto odzrkadľuje fakt, že účastníci, ktorí si budú ceníť objekt viac, budú ochotní i viac ponúknuť. Predpokladajme ešte, že platí  $f_i(0) = 0$  pre každé  $i$  t.j. kupujúci, ktorý si objekt cení na 0 peňažných jednotiek, nie je ochotný ponúknuť

zaň kladnú čiastku. Našou úlohou bude teda nájsť neznámu funkciu  $f_i$ , ktorá bude predstavovať optimálnu stratégiu  $i$ -teho účastníka aukcie. Pri tom sa budeme zaujímať iba o *symetrické Nashove ekvilibriá*. Budeme teda analyzovať iba prípady, kde  $f_i \equiv f$  pre každé  $i$ . Výsledky uvádzame vo forme viet:

### VETA 3

*Ak predpokladáme, že osobné ohodnotenia jednotlivých účastníkov aukcie pochádzajú z rovnomerného rozdelenia na intervale  $\langle 0, 1 \rangle$ , potom pre FPSB aukciu platí:*

$$f(v_i) = \frac{N-1}{N}v_i,$$

kde  $N$  je počet účastníkov aukcie.

### DŔKAZ

$i$ -ty účastník aukcie získa objekt, ak jeho ponuka bude prevyšovať každú z ponúk jeho súperov. Pravdepodobnosť, že vyhrá aukciu je teda

$$\begin{aligned} P(b_i > b_1 \wedge \dots \wedge b_i > b_N) &= P(f(v_i) > f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_i) > f(v_N)) = \\ &= \prod_{i=1}^{N-1} P(v_1 < f^{-1}(b_i)) = F^{N-1}(f^{-1}(b_i)) = [(f^{-1}(b_i))]^{N-1}, \end{aligned}$$

pričom posledná rovnosť vyplýva z tvaru distribučnej funkcie rovnomerného rozdelenia.

Jeho očakávaný zisk pri ponuke vo výške  $b_i$  môžeme potom zapísať ako

$$E\pi_i(b_i) = [(f^{-1}(b_i))]^{N-1}(v_i - b_i)$$

Použijúc nutné podmienky prvého rádu, dostaneme

$$\frac{dE\pi_i(b_i)}{db_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{(N-1)v_i^{N-2}}{f'(v_i)}(v_i - f(v_i)) - v_i^{N-1} = 0$$

Poslednú rovnicu môžeme prepísať na tvar

$$(N - 1)v_i^{N-1} = f'(v_i)v_i^{N-1} + (N - 1)v_i^{N-2}f(v_i),$$

odkiaľ integrovaním oboch strán dostaneme

$$\frac{N - 1}{N}v_i^N + K = f(v_i)v_i^{N-1}, K \in \mathbb{R}$$

Zrejme z  $f(0) = 0$  vyplýva  $K = 0$ , a teda konečné riešenie má tvar

$$f(v_i) = \frac{N - 1}{N}v_i$$

□

#### VETA 4

Pre SPSB aukciu platí  $f(v_i) = v_i$ .

#### DÔKAZ

Ukážeme, že zadaním inej ponuky ako  $v_i$  si účastník aukcie môže iba pohoršiť oproti prípadu, keby ponúkol práve  $v_i$ .

Predpokladajme, že by zadal ponuku  $v_i - \varepsilon, \varepsilon > 0$ . Ak označíme najvyššiu ponuku zvyšných  $N - 1$  účastníkov ako  $w$ , potom môžu nastať nasledovné prípady:

1.  $w < v_i - \varepsilon$

V tomto prípade tento účastník aukciu vyhrá, pričom za objekt zaplatí cenu  $w$  - tú istú, akú by zaplatil v prípade, keby bol ponúkol  $v_i$ .

2.  $w > v_i$

V tomto prípade aukciu nevyhrá a jeho zisk bude 0. Taký istý výsledok by dosiahol aj v prípade ponúknutia  $v_i$ .

3.  $v_i - \varepsilon < w < v_i$

Ak by bol tento účastník ponúkol  $v_i$ , bol by vyhral aukciu so ziskom  $v_i - w > 0$ . Pri ponuke  $v_i - \varepsilon$  ale aukciu nevyhrá, a jeho zisk bude v takom prípade 0.

Z tejto analýzy vyplýva, že pre účastníka aukcie nie je výhodné ponúknuť menej ako  $v_i$ .

Podobnú úvahu spravíme i pre prípad ponuky  $v_i + \varepsilon, \varepsilon > 0$  t.j. ľubovoľnej vyššej ako  $v_i$ .

1.  $w < v_i$

Potom zrejme platí i  $w < v_i + \varepsilon$ . To znamená, že tento účastník aukciu vyhrá a zaplatí  $w$  - rovnako ako keby bol ponúkol  $v_i$ .

2.  $w > v_i + \varepsilon$

V tomto prípade aukciu nevyhrá a jeho zisk bude 0. Taký istý výsledok by dosiahol aj v prípade ponúknutia  $v_i$ .

3.  $v_i < w < v_i + \varepsilon$

Ak by bol tento účastník ponúkol  $v_i$ , nebol by vyhral aukciu a jeho zisk by bol 0. Tým, že ponúkol  $v_i + \varepsilon$  síce aukciu vyhral, avšak z toho dôvodu zaznamenal stratu vo výške  $w - v_i$ .

Zistili sme, že ani ponuky vyššie ako  $v_i$  nie sú optimálne.

Záverom teda je, že stratégia  $f(v_i) = v_i$  je dominantnou stratégiou pre ľubovoľného účastníka aukcie, a teda je optimálnou.  $\square$

Vidno teda, že v prípade SPSB aukcie (a teda i anglickej aukcie) je optimálnou stratégiou každého účastníka ponúknuť presne toľko, na koľko si daný objekt cení. V prípade FPSB aukcie (a teda i holandskej aukcie) je optimálna ponuka účastníka nižšia ako jeho osobné ohodnotenie objektu, pričom rozdiel medzi týmito dvoma záleží od celkového počtu zúčastnených. Posledne menované je však v platnosti iba za predpokladu, že osobné ohodnotenia sú rovnomerne rozdelené na intervale  $(0, 1)$ . Zatiaľ čo samotná voľba intervalu je iba vecou škálovania a pri kvalitatívnej analýze teda nehrá žiadnu úlohu, naskytá sa prirodzená otázka relevantnosti voľby rovnomerného rozdelenia. Našou odpoveďou je, že rovnomerné rozdelenie najlepšie odráža skutočnosť,

že o ostatných účastníkoch aukcie nemáme žiadne dodatočné informácie. Použitím iného typu rozdelenia by sme totiž prikladali väčšiu váhu resp. pravdepodobnosť niektorým špecifickým ponukám súperov, čo by ale v takomto prípade nemalo racionálny základ. Samozrejme, optimálne stratégie sa dajú spočítať aj pre iné typy rozdelení, avšak výpočet je oveľa zdĺhavejší. Poznamenajme ešte, že v asymetrickom prípade sú takéto výpočty vo všeobecnosti prakticky neuskutočniteľné.

### 2.3 Veta o ekvivalencii výnosov

Iným porovnaním z hľadiska ekvivalencie aukcií je porovnanie na základe očakávanej predajnej ceny. Je zrejmé, že z pohľadu predajcu by bolo optimálne, aby táto cena bola čo možno najvyššia, z pohľadu kupujúcich zase čo najnižšia. Keďže ale voľba typu aukcie je plne v rukách predajcu, naskytá sa nám zaujímavý problém - aký typ aukcie má predajca zvoliť, aby zaznamenal čo najväčší očakávaný zisk resp. najvyššiu očakávanú predajnú cenu? Vo svojej podstate sa jedná o optimalizačnú úlohu - vybrať na nejakej triede aukčných mechanizmov ten optimálny v zmysle maximalizácie očakávaného zisku predajcu. Teórii optimálnych aukcií sa však kvôli jej komplexnosti v tejto práci detailne venovať nebudeme. V každom prípade, z veľkého množstva dostupnej literatúry na túto tému by sme si dovolili odporučiť záujemcom najmä prvú publikovanú analýzu tohoto druhu Harris, Raviv [6], a taktiež detailnú analýzu Myerson [14]. Veľmi zrozumiteľný výklad a prekvapujúce výsledky v tomto smere uvádzajú Riley, Samuelson [17].

Náš záujem sa sústreďuje na jeden z vedľajších produktov týchto analýz - na tzv. *vetu o ekvivalencii výnosov*. Táto veta porovnáva očakávané zisky jednotlivých účastníkov aukcie resp. predajcu objektu pri rôznych typoch aukčných mechanizmov. Uvedený dôkaz je prebraný z Milgrom [12].

**VEĽA 5** (*Revenue Equivalence Theorem*)

Uvažujme symetrické prostredie independent private values modelu s rizikovo neutrálnymi účastníkmi. Potom každý aukčný mechanizmus, ktorý spĺňa nasledovné podmienky

1. Dražený objekt je alokovaný efektívne t.j. získa ho vždy účastník, ktorý si ho cení najvyššie
2. Účastník, ktorý si objekt cení na 0 peňažných jednotiek, má nulový očakávaný zisk,

má za výsledok rovnaký očakávaný zisk pre každé ohodnotenie zo strany účastníkov aukcie a rovnaký očakávaný zisk pre vypisovateľa aukcie.

**DÔKAZ**

Jediný spôsob, ktorým sa každý zo záujemcov môže podieľať na aukcii a na jej výstupe, je prostredníctvom formovania ponuky kúpnej ceny. Avšak, skutočné veličiny, ktoré berieme do úvahy pri rátaní očakávaného zisku, sú pravdepodobnosť, s ktorou aukciu vyhrá  $P$ , a výška platby  $E$ , ktorú bude musieť v takomto prípade uskutočniť. Keďže predpokladáme racionálnosť u každého zo zúčastnených, samotné formovanie ponuky môžeme stotožniť s výberom vhodnej dvojice  $(P, E)$ . Prípustné páry sú určené pravidlami samotnej aukcie spolu so stratégiami všetkých súperov. Predpokladajme, že osobné ohodnotenie objektu pre jedného z účastníkov aukcie má výšku  $X$ . Ak tento vyhrá aukciu, jeho zisk bude presne  $X - E$ . Inými slovami, ak si tento účastník aukcie „vyberie“ dvojicu  $(P, E)$ , potom jeho očakávaný zisk bude

$$U[P, E; X] = P(X - E) \quad (2.1)$$

Zrejme optimálny výber páru  $(P, E)$  bude závisieť od hodnoty  $X$ . Ak označíme optimálny pár pre dané  $X$  ako  $(P^*(X), E^*(X))$ , potom zodpovedajúci maximálny očakávaný zisk môžeme zapísať ako

$$U^*(X) = U[P^*(X), E^*(X); X] \quad (2.2)$$

Aplikujúc obáľkovú vetu na (2.1) dostaneme

$$U^{*'}(X) = \frac{\partial U}{\partial X}[P^*(X), E^*(X); X] = P^*(X) \quad (2.3)$$

Z podmienky 1 vyplýva, že  $U^*(0) = 0$ . Potom z (2.3) integrovaním dostaneme

$$U^*(X) = \int_0^X P^*(s)ds \quad (2.4)$$

Uvedomme si teraz, že pre ľubovoľnú aukciu, ktorá sprostredkuje efektívnu alokáciu je  $P^*(X)$  vlastne pravdepodobnosť, že ohodnotenia ostatných účastníkov aukcie sú menšie ako  $X$ . Len pripomeňme, že z platnosti predpokladov symetrického independent private values modelu vyplýva, že jednotlivý účastník má tú istú funkciu  $P(\cdot)$  v každom aukčnom mechanizme spĺňajúcom podmienky vety. Z (2.4) potom vyplýva, že takéto aukcie majú za výsledok rovnaký očakávaný zisk pre tohto účastníka. Keďže toto platí pre každého účastníka, celkový surplus z obchodovania je pri týchto aukciách zrejme tiež rovnaký. Z týchto dvoch poznatkov potom vyplýva, že aj očakávaný zisk predajcu musí byť rovnaký.  $\square$

Trošku predbeheme a vopred prezradíme, že všetky štyri nami analyzované aukčné mechanizmy spĺňajú predpoklady Vety 5. Vysvetlenie, prečo toto platí bude mať čitateľ možnosť nájsť v nasledujúcom odseku. Potom dostaneme zrejmy dôsledok poslednej vety:

#### **DÔSLEDOK**

*Za predpokladu symetrického prostredia independent private values modelu majú FPSB aukcia (resp. holandská aukcia) a SPSB aukcia (resp. anglická aukcia) za výsledok rovnaký očakávaný zisk pre každého zo zúčastnených potencialných kupcov a rovnaký očakávaný zisk pre vypisovateľa aukcie.*



Ako už bolo spomenuté v úvode tejto kapitoly, vo zvyšných odsekoch sa zameriame na rozdielne vlastnosti jednotlivých aukcií v rôznych prostrediach.

## 2.4 Efektívnosť alokácie draženého objektu

Táto krátka časť má za úlohu predostrieť názorný príklad, kedy niektoré aukčné mechanizmy nemusia alokovať statok efektívne, zatiaľ čo iné majú túto vlastnosť za každých podmienok. Vybratý príklad je prevzatý z Milgrom [12]. V práci sa bližšej analýze tejto problematiky venovať už nebudeme. Prípadných záujemcov si dovoľujeme odporučiť na Vickrey [20] a Perry, Reny [16].

Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že máme iba dvoch záujemcov o kúpu objektu. Prvý si objekt cení na 101 peňažných jednotiek. U druhého je situácia trochu zložitejšia - buď si objekt cení na 50 peňažných jednotiek, toto s pravdepodobnosťou  $\frac{4}{5}$ , alebo na 75 peňažných jednotiek s pravdepodobnosťou  $\frac{1}{5}$ . Predpokladáme, že prvý záujemca nepozná presnú hodnotu ohodnotenia druhého záujemcu, ale iba jeho rozdelenie.

Najprv budeme analyzovať prípad FPSB aukcie (resp. holandskej aukcie). Skúsme sa na celú vec pozrieť očami prvého záujemcu. Vo väčšine prípadov (presnejšie v štyroch z piatich) bude mať druhý účastník aukcie osobné ohodnotenie „iba“ 50 peňažných jednotiek. Ak teda prvý záujemca ponúkne 51 peňažných jednotiek, potom aukciu vyhrá a jeho zisk bude v takomto prípade  $101 - 51 = 50$  peňažných jednotiek. Toto znamená celkový očakávaný zisk 40 peňažných jednotiek (50 peňažných jednotiek v štyroch z piatich prípadov). Na druhej strane, ak by ponúkol 62 peňažných jednotiek, potom nemôže v žiadnom prípade dosiahnuť vyšší očakávaný zisk ako  $(101 - 62) = 39$  peňažných jednotiek. Z tohoto dôvodu nebude mať nikdy v úmysle ponúknuť 62 alebo viac peňažných jednotiek. Preto v prípadoch, kedy bude mať druhý

záujemca osobné ohodnotenie 75 peňažných jednotiek, tento aukciu vyhrá, čo bude mať za výsledok neefektívnu alokáciu daného objektu. Na záver môžeme teda konštatovať, že neefektívna alokácia statku nastáva v tomto prípade s nenulovou pravdepodobnosťou.

Na druhej strane, ako už vieme, v prípade SPSB aukcie (resp. anglickej aukcie) je dominantnou stratégiou každého zo záujemcov ponúknuť presne toľko, na koľko si daný objekt cení. Je teda zrejmé, že tieto dve v tomto (i ľubovoľnom inom) prípade zaručia efektívnu alokáciu draženého statku. Na záver ešte pre úplnosť poznamenajme, že v symetrickom prípade independent private values modelu platí, že existuje rovnovážny stav, v ktorom každý zo zúčastnených záujemcov volí rovnakú stratégiu. Pozornejší čitateľ si iste všimne, že tento poznatok sme implicitne využili i v časti 2.2. Navyše, táto stratégia je pre každého zúčastneného rastúcou funkciou jeho osobného ohodnotenia. Z toho teda vyplýva, že najvyššia ponuka bude v tomto prípade patriť záujemcovi s najvyšším osobným ohodnotením. Alokácia objektu bude teda za takýchto podmienok efektívna pri všetkých štyroch uvažovaných aukčných mechanizmoch.

## 2.5 Aukcie s endogénnym množstvom

V tejto časti sa zameriame na porovnanie FPSB a SPSB (resp. anglickej) aukcie v špecifickom prostredí - účastníci aukcie budú tentokrát potenciónálni predajcovia a budú sa uchádzať o právo predaja spojitého množstva nejakého tovaru kupcovi s klesajúcou dopytovou funkciou. V takomto kontexe sa predané množstvo stáva endogénnou premenou. Analýzou a porovnaním vlastností uvedených dvoch aukčných mechanizmov sa pokúsime vysvetliť, prečo sa pri verejnom obstarávaní používa takmer výhradne FPSB aukcia. Budeme vychádzať z modelu použitom v článku Hansen [5] spolu s drobnými korektúrami technického charakteru uvedenými v Dastidar [2].

Najprv si v stručnosti predstavme predpoklady modelu. Pre zjednodušenie budeme uvažovať dvoch predávajúcich. Každý z nich dokáže vyrobiť neobmedzené množstvo homogénneho výrobku pri konštantných hraničných nákladoch. Tieto hraničné náklady môžeme v kontexte independent private values modelu stotožniť s osobným ohodnotením toho-ktorého predávajúceho. Výrobca  $i$  pozná výšku vlastných hraničných nákladov  $c_i$ , avšak hraničné náklady jeho súpera sú preňho neznáme. Bude sa na ne preto pozeráť ako na náhodnú premennú pochádzajúcu z nejakého spojitého pravdepodobnostného rozdelenia s distribučnou funkciou  $F(\cdot)$ . Táto je spojitá na uvažovanom intervale hraničných nákladov  $\langle \underline{c}, \bar{c} \rangle$ , pričom  $F(\underline{c}) = 0$  a  $F(\bar{c}) = 1$ . Príslušnú hustotu budeme značiť  $f(\cdot)$ . Čo sa týka kupujúceho, tento je charakterizovaný spojitou a klesajúcou dopytovou funkciou  $q(p)$ .

Našu analýzu začneme SPSB aukciou. Treba si uvedomiť, že cena, ktorá bude zaplatená, nezáleží v tomto prípade od výšky ponuky víťaza aukcie, ale od ponuky druhého účastníka. Toto platí bez ohľadu na to, či sa predáva jeden alebo viacero objektov. Keďže sú navyše splnené všetky predpoklady vety o ekvivalencii výnosov, vyplýva z toho, že očakávaná cena bude rovnaká ako v prípade FPSB aukcie, kde sa draží jediný objekt. Preto nám pri skúmaní formovania ceny stačí jednoducho analyzovať prípad FPSB aukcie s jediným objektom. Očakávaný zisk  $i$ -teho účastníka môžeme zapísať nasledovne

$$E\pi_i(c_i) = (1 - F(c_i))(b(c_i) - c_i)$$

Prvý činiteľ je pravdepodobnosť, že  $i$ -ty účastník aukciu vyhrá t.j. že ponúkne najnižšiu cenu, druhý činiteľ označuje jeho zisk v takom prípade. Uvažujeme teraz ponukovú stratégiu  $b(c)$  pre ľubovoľné pevné  $c$ . Potom takáto stratégia je optimálna pre  $i$ -teho predajcu, ak  $c = c_i$ . Toto možno zapísať ako

$$E\pi_i(c) = (1 - F(c))(b(c) - c_i)$$

Použijúc nutné podmienky prvého rádu, dostaneme

$$\frac{dE\pi_i(c)}{dc} = 0 \Leftrightarrow -f(c)(b(c) - c_i) + (1 - F(c))\frac{db(c)}{dc} = 0$$

Odtiaľ následne vyjadríme  $\frac{db(c)}{dc}$ , uvedomiac si, že v rovnováhe platí  $c = c_i$ . Dostaneme teda

$$\left[ \frac{db(c)}{dc} \right]_{FQ} = \frac{f(c_i)(b(c_i) - c_i)}{1 - F(c_i)}, \quad (2.5)$$

kde index FQ znamená, že tento výsledok je platný pre FPSB aukciu v prípade draženia jedného objektu (fixed quantity).

Pozrime sa teraz na prípad FPSB aukcie pri dopytovej krivke  $q(p)$ . Jednoduchou úvahou zistíme, že očakávaný zisk  $i$ -teho predajcu má v tomto prípade tvar

$$E\pi_i(c_i) = (1 - F(c_i))(b(c) - c_i)q(b(c_i))$$

Analogickým postupom ako v prípade SPSB aukcie, pre ľubovoľné pevné  $c$  dostaneme

$$E\pi_i(c) = (1 - F(c))(b(c) - c_i)q(b(c))$$

A opäť aplikujúc podmienky prvého rádu máme

$$\begin{aligned} \frac{dE\pi_i(c)}{dc} &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ (1 - F(c))q(b(c))\frac{db(c)}{dc} + (b(c) - c_i) \left( -f(c)q(b(c)) + (1 - F(c))\frac{dq(b(c))}{db} \frac{db(c)}{dc} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Na záver vyjadríme  $\frac{db(c)}{dc}$  s tým, že v rovnováhe opäť platí  $c = c_i$ .

$$\left[ \frac{db(c)}{dc} \right]_{VQ} = \frac{f(c_i)(b(c_i) - c_i)q(b(c_i))}{(1 - F(c_i)) \left( q(b(c_i)) + (b(c_i) - c_i)\frac{dq(b(c_i))}{db} \right)} \quad (2.6)$$

Index VQ znamená, že tento výsledok bol dosiahnutý pre FPSB aukciu s endogénnym množstvom (variable quantity).

Lahko možno vidieť, že pokiaľ platí  $\frac{dq(b(c))}{db} < 0$ , potom platí aj

$$\left[ \frac{db(c)}{dc} \right]_{VQ} < \left[ \frac{db(c)}{dc} \right]_{FQ} \quad (2.7)$$

Na druhej strane, pri oboch typoch aukcií musí byť splnená podmienka, že výrobca s najvyššími hraničnými nákladmi má nulový očakávaný zisk t.j.  $b(\bar{c}) = \bar{c}$ . Z tohto a z (2.7) potom ale vyplýva, že pre každé  $c \in (\underline{c}, \bar{c})$  platí

$$b(c)_{VQ} < b(c)_{FQ} \quad (2.8)$$

To znamená, že v prípade FPSB aukcie s endogénnym množstvom je očakávaná cena nižšia ako v prípade FPSB aukcie, kde sa draží jeden objekt. Tento výsledok sa intuitívne dá vysvetliť tým, že v prípade klesajúcej dopytovej funkcie má predajca záujem znížiť požadovanú cenu, pretože v prípade, že aukciu vyhrá, bude môcť predať väčšie množstvo. Taktiež, ako sme to na začiatku našej analýzy zdôraznili, toto znamená tiež, že FPSB aukcia v prípade endogénneho množstva má za výsledok nižšiu očakávanú cenu ako FPSB s endogénnym množstvom. Čo sa týka očakávaného predaného množstva, dá sa ukázať, že ak je dopytová funkcia navyše i konkávna, potom očakávané predané množstvo je väčšie v prípade FPSB aukcie (v porovnaní so FPSB aukciou).

Na záver sa ešte pozrime ako je to s očakávaným ziskom pre predajcov resp. kupca. Celý výsledok sa dá zhrnúť do nasledovnej vety.

#### **VETA 6**

*Za predpokladu, že dopytová krivka je klesajúca a konkávna, pri FPSB aukcii je očakávaný zisk predajcov i kupca vyšší ako pri FPSB aukciou.*

## DÔKAZ

Dôkaz uvidíme len pre zisky predajcov a možno ho nájsť i v Milgrom [12]. Porovnanie ziskov kupca je zdĺhavejšie a čitateľov preto odkazujeme na Hansen [5].

Nech  $Q$  označuje očakávané predané množstvo ľubovoľného predávajúceho,  $E$  očakávanú predajnú cenu a  $c$  hraničné náklady. Ak zadá ponuku zodpovedajúcu nejakej dvojici  $(Q, E)$ , potom jeho očakávaný zisk bude

$$U(Q, E; c) = Q(E - c) \quad (2.9)$$

Označme ďalej  $(Q^*, E^*)$  optimálnu dvojicu t.j. takú, ktorá maximalizuje očakávaný zisk:

$$U^*(c) = U(Q^*, E^*; c) \quad (2.10)$$

Použijúc obáľkovú vetu na (2.9), dostaneme

$$U^{*'}(c) = \frac{\partial U}{\partial c}(Q^*(c), E^*(c); c) = -Q^*(c) \quad (2.11)$$

Ako sme už boli spomenuli dávnejšie,  $U^*(\bar{c}) = 0$ . Potom integrovaním (2.11) dostaneme

$$U^*(c) = \int_c^{\bar{c}} Q^*(s) ds \quad (2.12)$$

Keďže sme už načrtli, že pre  $s \in \langle c, \bar{c} \rangle$  máme  $Q_{FPSB}^*(s) > Q_{SPSB}^*(s)$ , potom zrejme platí i  $U_{FPSB}^*(s) > U_{SPSB}^*(s)$ , čím je veta dokázaná.  $\square$

Táto veta ukazuje, že pre obe strany je v takomto prostredí výhodnejšie použiť FPSB aukciu ako SPSB aukciu. Model použitý v tejto časti teda presne objasňuje, prečo sa vo verejnom obstarávaní používajú takmer výhradne FPSB aukcie.

## Kapitola 3

# Experimentálne výsledky

V prvých dvoch kapitolách tejto práce sme sa venovali teoretickej analýze základných aukčných mechanizmov, ich vzájomných ekvivalencií a optimálneho formovania stratégií. Táto kapitola bude mať za cieľ konfrontovať teoretické závery s experimentálne dosiahnutými výsledkami, pričom prípadné rozdielnosti sa budeme snažiť interpretovať a bližšie analyzovať. V prvých dvoch častiach sa budeme venovať problémom ekvivalencií FPSB a holandskej aukcie resp. SPSB a anglickej aukcie, v poslednej načrtneme isté rozdielnosti medzi klasickými aukčnými mechanizmami a online aukciami.

### 3.1 Ekvivalencia holandskej a FPSB aukcie

Veta 1 z Kapitoly 2 spolu s jej dôsedkom nám dávajú jasnú predstavu o ekvivalencii týchto dvoch aukčných mechanizmov. Jednoducho povedané - nech použijeme hociktorý z nich, predajná cena bude podľa teórie vždy rovnaká (pre danú množinu účastníkov a ten istý objekt). Na druhej strane, existuje množstvo experimentálnych štúdií, ktoré sa venujú analýze tejto ekvivalencie, a štatisticky ju vyvracajú. My sa v tejto časti obmedzíme na štúdium troch z nich, ktoré považujeme z hľadiska ich prínosu za zásadné. Okrem toho sa pokúsime k analýze tejto problematiky prispieť i vlastným experimentom a skúmaním jeho výsledkov.

Cox, Roberson, Smith [1] skúmajú ekvivalenciu týchto dvoch aukčných formátov na veľkom množstve experimentov. Ich objektmi sú dobrovoľníci rozdelení do skupínok o veľkosti 3, 4, 5 alebo 9 ľudí. Každá skupinka sa zúčastní série 30 aukcií. Tieto série sa pritom líšia v poradí jednotlivých aukcií. Série *fdf* pozostávajú z 10 FPSB aukcií, po ktorých nasleduje 10 holandských aukcií a nakoniec opäť 10 FPSB aukcií. Na druhej strane, série *dfd* pozostávajú z 10 holandských aukcií, nasledovaných 10 FPSB aukciami a zakončených 10 holandskými aukciami. Celý experiment prebieha na počítačoch s vopred pripraveným softwarom. Prostredie, ktoré je takto nasimulované, zodpovedá predpokladom independent private values modelu. Každému zo subjektov je pred začatím experimentu priradené jeho osobné ohodnotenie. Tieto sú náhodne a nezávislo vygenerované z rovnomerného rozdelenia na nejakom intervale  $\langle \underline{v}, \bar{v} \rangle$ . Šírky týchto intervalov sa menia v závislosti od veľkosti skupinky - čím väčšia skupinka, tým vyššie je stanovená horná hranica  $\bar{v}$ . Je tomu tak preto, aby každý z účastníkov mal rovnaké možnosti z pohľadu očakávaného zisku. Treba si totiž uvedomiť, že nechávajúc rozsah  $\langle \underline{v}, \bar{v} \rangle$  konštantný, pri rastúcom počte účastníkov sa prostredie aukcie stáva čoraz viac konkurenčné, a z toho dôvodu sa automaticky stráca priestor na vyšší zisk. A hlavnou motiváciou pre zúčastnených bola práve finančná odmena, ktorú každý dostal po skončení experimentu. Táto zahŕňala 3 americké doláre za samotnú účasť, a navyše peňažný ekvivalent zisku nadobudnutého počas jednej série. Parametre každého experimentu boli nastavené tak, aby celková očakávaná vyplatená suma bola 15 amerických dolárov na účastníka za sériu. Čo sa týka holandských aukcií, cena sa znižovala každé 2 sekundy v priemere o 4% z počiatočnej hodnoty. Pri FPSB aukcii bola ponúkaná cena zaokrúhľovaná na desiatky centov. Výsledné porovnanie „spárovaných“ sérií (*fdf* a *dfd*) reprodukuje v Tabuľke 3.1. Pre zvedavého čitateľa dodávame, že  $x$  pri mene série znamená prítomnosť „skúsených účastníkov“ t.j. takých, ktorí sa už predtým podobného experimentu zúčastnili. Je evidentné, že priemerné ceny v holandských aukciách sú



Tabuľka 3.1: Porovnanie priemerných cien FPSB aukcie a holandskej aukcie

Séria	Veľkosť skupiny	$m_{FPSB}$	$m_{hol}$	$m_{FPSB} - m_{hol}$
dfd3, fdf3'	3	2,36	1,98	0,38
fdf10,dfd10'	3	2,60	2,57	0,03
dfd8, fdf8'	4	5,42	4,98	0,44
dfd8x, fdf8'x	4	5,86	5,68	0,18
dfd9, fdf9'	5	9,15	8,72	0,43
fdf9x, dfd9'x	5	9,13	8,84	0,29
dfd2, fdf2'	6	13,35	13,25	0,10
dfd4, fdf4'	6	13,09	12,89	0,20
dfd5, fdf5'	9	31,02	30,32	0,70

nižšie ako tie v zodpovedajúcich FPSB aukciách. Rozdiel bol testovaný neparametrickým znamienkovým testom a výsledkom bolo zamietnutie nulovej hypotézy, že tento rozdiel je kladný resp. záporný s rovnakou pravdepodobnosťou. Prijatá bola hypotéza o jeho kladnosti, čo znamená, že ceny v holandských aukciách sú signifikantne nižšie ako tie v FPSB aukciách. Táto skutočnosť je však v zrejmom rozpore s ekvivalenciou týchto dvoch mechanizmov. Autori v tomto smere podávajú dve možné vysvetlenia.

Prvým je, že mnohé spätné väzby od zúčastnených poukazovali na veľké napätie spojené s čakaním pri holandskej aukcii, ktoré sa im veľmi páčilo. Cenový rozdiel by sa teda dal odôvodniť tým, že zúčastnení mali pri holandskej aukcii motiváciu čakať dlhšie s ponukou, aby si viac „užili“ napätie. Toto sa následne premietlo do nižších realizačných cien. Druhým dôvodom, ktorý uvádzajú, je klamlivý pocit získavania informácií počas čakania v holandskej aukcii. V praxi by to mohlo vyzerať asi tak, že účastník by v istej chvíli mal pocit, že skutočnosť, že žiaden z jeho súperov ešte danú cenu neakceptoval zvyšuje jeho šancu na získanie objektu (aposteriórnu pravdepodobnosť). V takomto prípade by bol prirodzene náchylnejší čakať dlhšie ako mal v pláne pred začatím aukcie kvôli podceňovaniu rizika vyplývajúceho z nezastavenia hodiniiek hneď. V skutočnosti si však treba uvedomiť, že pozorovanie

ostatných účastníkov pri holandskej aukcii neprináša žiadnu dodatočnú informáciu - autori doslovne uvádzajú, že:

Všetky očakávania o vývoji aukcie sú stanovené na základe apriórnej pravdepodobnosti, že tá-ktorá ponuka vyhrá. Samotný „hodinkový“ proces v prípade holandskej aukcie neposkytuje žiadnu informáciu. (str. 32)

Z tohoto dôvodu autori druhé vysvetlenie nazývajú aj *porušovanie Bayesovho pravidla*.

Experiment s rovnakým zameraním, ale v inom prevedení popisuje i Lucking-Reiley [11]. Jeho pokus sa na rozdiel od predchádzajúceho neuskutočňuje v laboratórnych podmienkach, ale v reálnom živote - prostredníctvom internetu, kde účastníci nie sú dobrovoľníci, ale reálni záujemcovia o dražený tovar. V tomto konkrétnom prípade sa jednalo o draženie kariet pre populárnu hru *Magic the Gathering*. Okrem priameho využitia v hre bývajú tieto karty i žiadaným zberateľským artiklom, a taktiež veľakrát objektom špekulatívnych transakcií, čo len zvyšuje počet potencionálnych záujemcov. Autor uskutočnil dve série experimentov - FD a DF<sup>1</sup>. Série FD začali holandskými aukciami a následne po ich skončení boli vypísané FPSB aukcie. Pre série DF bolo poradie opačné. FPSB aukcie sa riadili štandardnými pravidlami, s tým, že každý účastník mal týždeň na zadanie svojej ponuky. V holandskej aukcii bolo účastníkom vopred oznámené, že cena objektu bude každý deň klesať o malé množstvo. Nebolo teda presne špecifikované o koľko. V skutočnosti bola rýchlosť klesania ceny približne 5% denne. V každej z jednotlivých sérií bolo dražených 87 párov rovnakých kariet - jedna z párovaných bola dražená prostredníctvom holandskej aukcie, druhá prostredníctvom FPSB aukcie. Realizačné ceny boli v oboch prípadoch zaznamenané a následne porovnané. Dvojstranný t-test na 5-percentnej hladine významnosti zamietla hypotézu rovnosti

---

<sup>1</sup>D v tomto prípade znamená stratku pre *Dutch* t.j. pre holandskú aukciu, F označuje zase FPSB aukciu.

stredných hodnôt iba v prípade série FD. Po logaritmickej transformácii cien však tento ako i Wilcoxonov test v oboch prípadoch zamietajú hypotézu o ekvivalencii uvedených dvoch aukčných formátov. Ukazuje sa, že holandské aukcie majú za výsledok o 30% vyššie realizačné ceny ako FPSB aukcie. Detailnejšia analýza dezagregovaných údajov potvrdzuje, že jednotliví záujemcovia ponúkali za rovnaký tovar v holandskej aukcii systematicky viac ako pri FPSB aukcii. Z 38 ponúk v holandskej aukcii, ktoré mali svoj ekvivalent<sup>2</sup> aj pri zodpovedajúcej FPSB aukcii, bola v 30 z nich zaznamenaná vyššia ponúkaná cena v prípade holandskej aukcie ako v prípade FPSB aukcie. Na druhej strane, z 889 ponúk vo FPSB aukcii (od ľudí, ktorí sa zúčastnili oboch aukcií), iba v 24 prípadoch bolo zistené, že účastník nevyužil možnosť akceptovať cenu v holandskej aukcii, ktorá bola nižšia ako cena, ktorú ponúkol vo FPSB aukcii. Tieto výsledky sú v protiklade nielen s teoretickou ekvivalenciou týchto dvoch formátov, ale i s výsledkami predchádzajúcej štúdie.

Autor ponúka dve možné vysvetlenia. Prvým je rozdiel v počte účastníkov. Zatiaľ čo Cox, Roberson, Smith [1] pracujú so skupinkami konštantnej veľkosti, v internetovom experimente je počet účastníkov endogénnou premennou. Pravidelne aktualizované informácie o aukcii sú zverejnené na portáli a každý, komu sa zdá zaujímavá, sa môže zúčastniť. Zatiaľ čo pri FPSB aukcii sa dá počet účastníkov ľahko zistiť podľa počtu zaslaných ponúk, pri holandskej aukcii zistenie presného počtu účastníkov možné nie je. Vychádzajúc z množstva spätných väzieb, ktoré holandskú aukciu opisovali ako veľmi zaujímavú a originálnu, autor sa domnieva, že počet jej účastníkov mohol ďaleko prevyšovať počet účastníkov zodpovedajúcej FPSB aukcie. Táto skutočnosť by mohla vysvetľovať pozorovaný rozdiel v ponukách v prospech holandskej aukcie. Druhým možným vysvetlením je netrpezlivosť

---

<sup>2</sup>Pod ekvivalentom rozumieme ponuku tej istej osoby, ktorá sa zúčastnila i druhého aukčného formátu (pre tú istú kartu). Znamená to, že ak osoba XY ponúkla za kartu „Mana Drain“ v holandskej aukcii 5 dolárov, a zúčastnila sa i FPSB aukcie o kartu „Mana Drain“ ponúkajúc 4 doláre, potom ekvivalent k ponuke 5 dolárov v holandskej aukcii sú ponúknuté 4 doláre vo FPSB aukcii.

účastníkov. Ako už bolo povedané, pri holandskej aukcii sa cena karty znižovala denne asi o 5%. Z toho dôvodu mohla aukcia teoreticky trvať i vyše týždňa. Toto je spojené s istými nákladmi zo strany každého účastníka<sup>3</sup>. V prípade „netrzeplivých účastníkov“ sa potom javí ako výhodnejšie ponúknuť vyššiu cenu a aukciu ukončiť, než byť konfrontovaný s týmito dodatočnými nákladmi.

Efekt rýchlosti hodín pri holandskej aukcii bližšie analyzujú Katok, Kwasnica [10]. Autori uvádzajú jednoduchý model, kde zahŕňajú efekt „radosti z napätia“ uvádzaný už v Cox, Roberson, Smith [1], a tiež monitorovacie náklady. Prvý efekt je rastúcou funkciou času t.j. čím dlhšie sa účastník môže podieľať na aukcii, tým vyšší nepeňažný zisk mu z toho plynie. Monitorovacie náklady tiež rastú z časom. Netrzepliví účastníci sa dajú charakterizovať predpokladom, že monitorovacie náklady u nich rastú rýchlejšie ako radosť z účasti. Potom sa dá ľahko ukázať, že optimálna ponuka netrzeplivého účastníka bude vyššia ako pri FPSB aukcii, kde čas nezohráva veľkú úlohu. Rozšírením tohoto modelu navyše ukazujú, že holandské aukcie s pomalými hodinami by mali produkovať vyššie predajné ceny ako holandské aukcie s rýchlymi hodinami. Na otestovanie týchto záverov uskutočnili i porovnávací experiment. Celkovo sa jednalo o sériu 3 holandských aukcií a jednej FPSB aukcie. Pri holandských aukciách sa menila rýchlosť klesania ceny - táto bola znižovaná vždy o 5% za sekundu v prvej sérii, o 5% každých 10 sekúnd v druhej sérii a v záverečnej o 5% každých 30 sekúnd. Osobné ohodnotenia účastníkov boli generované náhodne z intervalu  $\langle 0, 100 \rangle$  a výsledné ceny všetkých aukcií zaznamenané a spriemerované. Sumárny výsledok uvádzame v Tabuľke 3.2. Tieto rozdiely sa v ukazujú ako štatisticky signifikantné. Berúc do úvahy rozdielnosti rýchlosti hodínok v pokusoch Cox, Roberson, Smith [1] a Lucking-Reiley [11], tento model plne vysvetľuje zdanlivo protichodné

---

<sup>3</sup>Napr. overovanie dostupnosti objektu resp. výšky aktuálnej ceny musí uskutočňovať minimálne raz denne. Tento čas by však mohol byť strávený i výhodnejšie (práca a pod.), čo má za následok náklady zo stratenej príležitosti.

Tabuľka 3.2: Priemerné ceny v holandských aukciách s rôznou rýchlosťou hodiniek a vo FPSB aukcii

	holandská aukcia			FPSB aukcia
	1 sekunda	10 sekúnd	30 sekúnd	
Priemerná cena	58,89	62,92	66,61	64,88

výsledky, ktoré jednotlivé štúdie dosiahli. Môžeme ho teda považovať za zovšeobecnenie týchto analýz. Navyše, tento model poukazuje i na limitujúce predpoklady klasickej teórie, ktorá nie je schopná uvedené rozdiely uspokojivo vysvetliť.

Na záver tohoto odseku si dovoľíme v krátkosti priblížiť výsledky nášho vlastného malého experimentu. Zúčastnilo sa ho 8 študentov FMFI UK. Experiment pozostával zo sérií 4 aukcií - anglickej, holandskej, FPSB a SPSB. V každej sérii bolo po 10 kôl. Účastníkom boli v každom kole náhodne a nezávislo vygenerované osobné ohodnotenia z intervalu  $\langle 0, 1000 \rangle$  - táto skutočnosť bola všetkým ohlásená vopred. FPSB aukcia sa riadila štandardnými pravidlami - každý z účastníkov napísal svoju ponuku na papier a odovzdal organizátorovi. Tento ponuky vyhodnotil, pričom najvyššia bola zverejnená aj s identitou víťaza. V holandskej aukcii sa začínalo od vyvolávacej ceny 1010, pričom táto každú sekundu klesla o náhodne vygenerovanú celočíselnú hodnotu v rozsahu 1 až 6 jednotiek. Každé z týchto čísel nastávalo s rovnakou pravdepodobnosťou. Prvý záujemca, ktorý sa ohlásil, vyhral aukciu a zaplatil cenu, ktorá bola v tom čase na hodinkách. Priemerné ceny uvádzame v Tabuľke 3.3.

Tabuľka 3.3: Priemerné ceny v experimente na FMFI UK

	holandská aukcia	FPSB aukcia
Priemerná cena	869,4	877,5

Wilcoxonov neparametrický test prehlásil tento rozdiel za štatisticky nesignifikantný ( $p$ -hodnota = 0.34). Takýto výsledok je v zhode s teoretickými predpokladmi. Treba ho však brať s rezervou vzhľadom

na malý počet dát. Dodávame, že štyria študenti (50%) prehlásili holandskú aukciu za najzaujímavejšiu. Tento fakt intuitívne podporuje hypotézu o dodatočnom nemajetkovom úžitku z účasti na tejto aukcii, na ktorú sa odvolávajú Cox, Roberson, Smith [1]. Ponuky vo FPSB aukcii boli relatívne agresívne - v priemere o 11% prevyšovali hodnotu Nashovho ekvilibría. Každý z účastníkov si však racionálne nechával „maržu na zisk“ a iba v dvoch prípadoch sme boli svedkami ponuky, ktorá bola vyššia ako osobné ohodnotenie<sup>4</sup>. V oboch prípadoch sa jednalo o toho istého účastníka. Poznamenajme, že iróniou osudu to bol práve on, kto zaznamenal na konci experimentu najvyšší zisk zo všetkých.

### 3.2 Ekvivalencia anglickej a SPSB aukcie

Na rozdiel od predchádzajúcich experimentov, štúdie skúmajúce ekvivalenciu SPSB a anglickej aukcie sú v praxi oveľa zriedkavejšie. Je tomu tak sčasti aj preto, že samotné SPSB aukcie sú v porovnaní s inými mechanizmami pomerne zriedkavé, a z toho dôvodu nie sú pre takýto výskum veľmi zaujímavé. Vychádzať budeme opäť zo štúdie Lucking-Reiley [11], spomenutej už v predchádzajúcom odseku.

I v tomto prípade autor dražil zberateľské karty na internete. K dispozícii mal 2 kusy z každého exemplára, pričom jeden dražil pomocou anglickej aukcie, druhý zase pomocou SPSB aukcie. Tento postup sa opakoval vo dvoch sériách - ES a SE<sup>5</sup>. V sérii ES bola prvou vypísanou aukciou anglická a po jej skončení bola uskutočnená SPSB aukcia. V sérii SE tomu bolo presne naopak. SPSB aukcia sa riadila tými istými pravidlami (až na určenie ceny) ako v predchádzajúcom odseku spomenutá FPSB aukcia, pričom účastníci mali opäť týždeň na zadanie

---

<sup>4</sup>Takúto stratégiu môžeme bez zábran označiť za iracionálnu a nemá dôvod hľadať jej príčiny. Toto je v protiklade s prípadom ponuky presahujúcej osobné ohodnotenie pri SPSB aukcii, ktorý analyzujeme na konci nasledujúceho odseku.

<sup>5</sup>E v tomto prípade znamená strátku pre *English* t.j. pre anglickú aukciu, S označuje zase SPSB aukciu.

svojej ponuky. Počas anglickej aukcie autor denne rozposielal zainteresovaným účastníkom výšku najvyššej aktuálnej ponuky prostredníctvom elektronickej pošty. Pokiaľ autor nezaznamenal navýšenie ceny počas plných 3 dní od poslednej ponuky, aukcia bola ukončená. V jednotlivých sériách bolo dražených spolu 85 (v prípade ES) resp. 99 (v prípade SE) párov rovnakých kariet. Realizačné ceny boli v oboch prípadoch zaznamenané a následne porovnané. Dvojstranný t-test na 5-percentnej hladine významnosti zamieta rovnosť cien v oboch prípadoch - v každom ale v opačnom smere. Zatiaľ čo rozdiel cien anglickej aukcie a SPSB aukcie je signifikantne kladný v sérii SE, v sérii ES je signifikantne záporný. Wilcoxonov neparametrický test ponúka kvalitatívne rovnaké výsledky. Dezagregované ponuky účastníkov oboch aukcií ponúkajú väčší priestor na analýzu v porovnaní s predchádzajúcim odsekom, keďže v anglickej i SPSB aukcii môžeme explicitne pozorovať ponuku každého účastníka, ktorý má reálny záujem o dražený objekt<sup>6</sup>. Kým však tendencia toho-ktorého účastníka ponúkať viac v anglickej aukcii ako v SPSB aukcii je pomerne ľahko pozorovateľná, v prípade tendencie ponúkať viac v SPSB aukcii tomu tak nie je. Toto tvrdenie uvádza autor na jednoduchom príklade. Predstavme si, že istý účastník má záujem ponúknuť v oboch aukciách za tú istú kartu rovnakú cenu 5 amerických dolárov. V dátach pochádzajúcich z priebehu SPSB aukcie budeme teda zrejme vidieť od neho ponuku presne 5 amerických dolárov. V anglickej aukcii neponúkne pravdepodobne 5 dolárov hneď na začiatku, ale sa bude snažiť získať objekt za nižšiu cenu - napríklad za 4 americké doláre. Ak však takáto cena bude hneď navýšená niekým iným na 6 amerických dolárov, potom spomenutý účastník už žiadnu ďalšiu ponuku nezadá, čo by sme mohli chybné interpretovať ako fakt, že mal v úmysle zadať v anglickej aukcii nižšiu ponuku ako v SPSB aukcii. S prihliadnutím na tento fakt konštatujeme, že z 231 dvojíc ponúk pozorujeme v 39 prípadoch vyššiu ponuku v SPSB aukcii - v priemere o 2,59 amerického dolára. Naopak, v 81 prípadoch má ten istý užívateľ

---

<sup>6</sup>Len pripomeňme, že napr. u holandskej aukcie tomu tak nebolo.

tendenciu ponúkať viac v anglickej aukcii ako v SPSB aukcii. V tomto prípade je priemerný rozdiel 1,69 amerického dolára. Vo zvyšných 129 prípadoch nebolo možné jednoznačne rozhodnúť. Vidíme, že k porušeniu ekvivalencie v prospech anglickej aukcie dochádza s dvojnásobnou frekvenciou avšak s nižšou amplitúdou ako tomu je v prípade porušenia ekvivalencie v prospech SPSB aukcie. Zisťujeme teda, že správanie jednotlivých účastníkov je značne heterogénne - niektorí majú tendenciu ponúkať viac v anglickej, niektorí naopak v SPSB aukcii. Berúc do úvahy všetky pozorovania naraz, priemerná cena je v anglických aukciách o 3% vyššia ako v SPSB aukciách. Tento rozdiel však nie je štatisticky signifikantný. Môžeme teda uzavrieť, že ekvivalencia týchto dvoch aukčných mechanizmov sa potvrdila i experimentálne.

Na záver si dovoľíme opäť pridať výsledky nášho vlastného experimentu, ktorý je bližšie popísaný na konci odseku 3.1. SPSB aukcia sa riadila štandardnými pravidlami - každý z účastníkov napísal svoju ponuku na papier a odovzdal organizátorovi. Tento následne ponuky vyhodnotil a verejne vyhlásil identitu víťaza i cenu, ktorú mal zaplatiť (druhú najvyššiu z ponúkaných). Anglická aukcia prebiehala tiež štandardným spôsobom - začínalo sa od vyvolávacej ceny vo výške 0 jednotiek. Navýšenie predchádzajúcej ceny bolo možné iba o 5 a viac jednotiek. Ak nejaká cena nebola navýšená ani po treťom upozornení organizátora, aukcia skončila a víťaz zaplatil ním ponúkanú cenu. Priemerné ceny v jednotlivých aukciách uvádzame v Tabuľke 3.4.

Tabuľka 3.4: Priemerné ceny v experimente na FMFI UK

	anglická aukcia	SPSB aukcia
Priemerná cena	840,0	847,1

Rozdiel nie je štatisticky signifikantný - pri Wilcoxonovom neparametrickom teste je výsledná p-hodnota 0,85. Toto je opäť v zhode s teóriou. V anglickej aukcii sme mohli pozorovať racionálnosť účastníkov v tom zmysle, že opúšťajú aukciu pri cene rovnej alebo tesne pod ich osobným



ohodnotením. Zaznamenali sme iba jedinú „martýrsku“ ponuku prevyšujúcu osobné ohodnotenie. Pri SPSB aukcii si účastníci až prekvapivo rýchlo<sup>7</sup> osvojili dominantnú stratégiu - zadávať ponuky vo výške svojho osobného ohodnotenia, prípadne ponuky líšiace sa od tejto o  $\pm 1$  jednotku. Mnohí tento fakt v spätnej väzbe presne zdôvodňujú poznáním, že v tomto prípade svojou ponukou eventuálnu predajnú cenu pre seba neovplyvňujú<sup>8</sup>. Napriek tomu, v 15 prípadoch sme pozorovali ponuku, ktorá prevyšovala osobné ohodnotenie o viac ako 3 jednotky. Pre tento jav ponúkame dve možné vysvetlenia. Prvým je, že ponúkanie nad osobné ohodnotenie môže vzbudzovať mylnú predstavu zvýšenia šance výhry v aukcii bez akýchkoľvek dodatočných nákladov, keďže v prípade výhry sa platí až druhá najvyššia cena. Tento efekt bližšie analyzujú Kagel, Harstad, Levin [8], avšak v odlišnom prostredí. Druhým možným vysvetlením je snaha o zníženie zisku konkurencie v prípadoch, keď je daný účastník presvedčený o tom, že nemôže aukciu vyhrať s kladným ziskom<sup>9</sup>. Z klasického pohľadu sa prirodzene jedná o neracionálne správanie. Navyše je v absolútnom protiklade s možnou spolupracou medzi jednotlivými účastníkmi aukcie v záujme zneužitia jej pravidiel. Existenciu a využitie takejto spolupráce analyzujú napríklad Graham, Marshall [4]<sup>10</sup>. Našou hypotézou je, že takéto správanie by sa predsa len dalo označiť za racionálne, ak by sme škodeniu ostatným vedeli vhodne nájsť peňažný ekvivalent alebo užitočnosť<sup>11</sup>, ktorú by takáto činnosť poskytovala danému „škodcovi“. Samotná formulácia

<sup>7</sup>Konkrétne siedmi hneď od prvého kola, jeden od druhého kola.

<sup>8</sup>Napr. „Ako najvyššiu ponuku som dal moje osobné ohodnotenie. Je to preto, lebo ja som neovplyvňoval moje zisky, ale ten, čo dal najbližšiu nižšiu cenu“.

<sup>9</sup>Nasledujúca spätná väzba je v zhode s oboma týmito vysvetleniami: „Z predchádzajúcich predajných cien odhadnem priemer. Pokiaľ je moje osobné ohodnotenie vyššie ako tento priemer, budem ponúkať o niečo viac... Pokiaľ je nižšie, ponúknem odhadnutý priemer s úmyslom minimalizovať zisk konkurencie“.

<sup>10</sup>Za pomerne všeobecných predpokladov v prípade independent private values modelu ukazujú, že kooperácia účastníkov aukcie vo forme koalícií je dominantnou stratégiou, pričom zisk každého účastníka rastie spolu s veľkosťou koalície. Autori taktiež podčiarkujú zdokumentovanú existenciu takýchto koalícií v praxi.

<sup>11</sup>Napríklad nejakú časť z rozdielu medzi jeho ponukou a treťou najvyššou cenou t.j. tou, ktorú by víťaz zaplatil pri neúčasti „škodcu“. Prirodzene, táto tretia cena nemusí byť vždy zverejnená, čo komplikuje situáciu.

a analýza takéhoto modelu však presahuje rámec tejto práce.

### 3.3 Online aukcie

V modernom svete sa čoraz viac finančných transakcií uskutočňuje elektronicky prostredníctvom internetu. V tomto smere nezaostávajú ani aukcie a na rozličných portáloch ich môžeme každý deň nájsť nespočetné množstvo. Niektoré sú vernou kópiou svojich klasických predchodcov, iné využívajú nové pravidlá najmä kvôli zrýchleniu a zjednodušeniu ich priebehu. V tejto časti sa pozrieme na dve rozličné modifikácie SPSB aukcie a budeme analyzovať, či predpovede klasickej teórie možno aplikovať i v takýchto prípadoch.

Budeme sa opierať o analýzu dvoch najväčších internetových aukčných portálov Amazon a eBay podanú v Roth, Ockenfels [18]. Tieto používajú rôzne modifikácie klasickej SPSB aukcie - ponuky účastníkov sú v tomto prípade po zadaní viditeľné a je možnosť na ne reagovať. Navyše, jeden účastník môže zadať v priebehu aukcie ľubovoľné množstvo ponúk. Ich vzájomný rozdiel spočíva v dĺžke trvania jednotlivých aukcií. Aukcie na eBay majú vopred presne zadaný čas ukončenia. U aukcií na portáli Amazon je tento čas tiež daný vopred, avšak v prípade potreby je predĺžený tak, aby aukcia skončila iba vtedy, ak v posledných 10 minútach nebola zadaná žiadna nová ponuka. Aukcie na portáli Amazon teda ponúkajú vždy dostatočný priestor na reakciu na eventuálne ponuky súperov. Naopak, na portáli eBay tomu tak nie je. Samozrejme, možnosť reagovať na ponuky súperov je vylepšená zadávaním tzv. *proxy ponúk* - užívateľ vopred zadá najvyššiu cenu, ktorú je ochotný akceptovať a systém automaticky navyšuje aktuálne ponuky súperov o najmenšiu možnú jednotku, až kým výsledná cena nie je nad úrovňou proxy ponuky<sup>12</sup>. Pripomeňme, že v klasickej SPSB

<sup>12</sup>Keďže sa jedná o SPSB aukcie, možnosť proxy ponuky využíva v tomto prípade i predajca. Je tomu tak preto, aby pomocou nej stanovil minimálnu cenu, za ktorú je objekt ochotný predať. Ak druhá najvyššia ponúkaná cena po skončení aukcie neprevyší proxy ponuku predávajúceho, objekt nie je predaný.

aukcii je dominantnou stratégiou zadať ponuku vo výške svojho osobného ohodnotenia. Z toho dôvodu by sa používanie proxy ponúk práve vo výške svojho osobného ohodnotenia hneď na začiatku aukcie mohlo zdať nanaajvyš racionálne, ako zo strategického, tak i z časového hľadiska. Navyše, takáto stratégia je vrelo odporúčaná samotnými aukčnými portálmi i množstvom predajcov. Zatiaľ čo na portáli Amazon je táto stratégia využívaná, na portáli eBay môžeme sledovať fenomén známy pod anglickým menom *sniping* - zadávanie ponúk v posledných sekundách aukcie. Tento fenomén je veľmi výrazný napriek pravidelným varovaniam, že ponuky zadávané tesne pred skončením aukcie nemusia byť spracované. V poslednej dobe bolo dokonca vyvinutých množstvo softwarov schopných zadávať automaticky ponuky želanej výšky v posledných sekundách eBay aukcie.

Bližšou analýzou tejto formy zadávania ponúk možno zistiť, že sniping je najlepšou odpoveďou na množstvo rozdielnych a často sa vyskytujúcich stratégií súperov. Uvedme príklad neskúsených účastníkov aukcie, ktorí majú potrebu za každých okolností figurovať v aukcii s najvyššou ponukou, navyšujúc okamžite každú konkurenčnú ponuku. V tomto smere je sniping veľmi užitočné z dvoch hľadísk - na začiatku takéhoto účastníka „upokojí“ zdaním, že nikto nemá v pláne jeho ponuku navýšiť, a po druhé, keď príde konečne k navýšeniu jeho ponuky, tento nebude mať dostatočný čas reagovať. Výsledkom bude, že sniper získa objekt za relatívne nízku cenu. Použitie sniping je výhodné taktiež v situácii, keď máme podozrenie, že zo strany predajcu dochádza k nekalému navyšovaniu ceny objektu pomocou vymyslených ponúk. Najväčšie výhody stratégie sniping sa ukazujú v prípade, ak prostredie aukcie spadá pod predpoklady common values modelu t.j. ak hodnota objektu nie je pre nikoho zo zúčastnených presne známa. V takomto prostredí je informácia o jeho kvalite nesmierne cenná, pričom niektorí účastníci sú v tomto smere lepšie informovaní ako iní. Dynamický priebeh modifikovanej SPSB aukcie však dáva možnosť profitovať z tejto

informácie aj tým, ktorí ňou na začiatku aukcie nedisponovali - jednoducho pozorovaním ponúk súperov. V takomto kontexte je teda z pohľadu účastníka disponujúceho dodatočnou informáciou optimálne zadať ponuku čo najneskôr. Je zrejmé, že výhoda snipingu sa stráca pri aukciách v štýle Amazon, práve kvôli automatickému predĺžovaniu trvania aukcie. Verbálnym záverom teda je, že pri online aukciách na portáli eBay, *nie je* dominantnou stratégiou zadať ponuku vo výške svojho osobného ohodnotenia skoro. Naopak, pri online aukciách na portáli Amazon neplynie zo zadania ponuky neskoro žiadna výhoda - iba sa zvyšuje pravdepodobnosť, že táto ponuka nebude spracovaná. Roth, Ockenfels [18] sa snažia tieto závery potvrdiť i analýzou dát zozbieraných z eBay a Amazon aukcií. V nasledujúcom odstavci si experiment bližšie predstavíme.

Autori zozbierali dostupné dáta z celkového počtu 480 aukcií. Sústredili sa na 2 kategórie: počítače a starožitnosti. Ceny počítačov sú bežne dostupné v množstve obchodov, preto bolo predpokladané, že ochota kúpiť daný počítač vychádza výsostne z osobných preferencií a potrieb. Takéto aukcie by sa teda mali správať v zhode s predpokladmi private values modelu. Naopak, ceny starožitností nie sú dostupné a vo väčšine prípadov ich určenie vyžaduje experta. Za takýchto okolností majú menej informovaní účastníci aukcie možnosť získať dodatočné informácie pozorovaním jej priebehu. Na druhej strane, účastníci disponujúci dôležitými informáciami majú v úmysle túto informáciu zatajiť, pokiaľ to len bude možné. Na základe takejto úvahy by sme mali pozorovať najvyššiu mieru ponúk v posledných minútach na portáli eBay v kategórii starožitnosti.

Pozorovanými premennými boli: celkový počet ponúk v danej aukcii, načasovanie poslednej ponuky každého účastníka<sup>13</sup> a rating účastní-

---

<sup>13</sup>V prípade eBay aukcií sa zrejme jedná o čas pred skončením aukcie. V prípade Amazon aukcií sa jedná o čas pred „hypotetickým“ koncom aukcie t.j. bez uvažovania možného predĺženia.

kov<sup>14</sup>. Analýzou dát autori zisťujú, že v posledných piatich minútach zaznamenalo aspoň jednu ponuku 40% eBay aukcií dražiacich počítače. Toto percento je ešte vyššie u eBay aukcií so starožitnosťami - až 59%. Čo sa týka Amazon aukcií, v oboch kategóriach sú to približne 3%. Takmer tie isté čísla dostaneme, ak namiesto posledných 5 minút budeme uvažovať iba poslednú minútu, prípadne posledných 10 sekúnd aukcie. Je teda zrejmé, že sniping je populárny na portáli eBay, no pri aukciách s možnosťou predĺženia sa k tejto praktike účastníci uchylujú veľmi zriedka. Toto potvrdzuje naše prvotné hypotézy. Navyše, dáta ukazujú taktiež viac sniperov pri aukciách na starožitnosti ako pri tých dražiacich počítače. Tento výsledok dopĺňa regresná analýza, ktorá ukazuje veľmi silnú štatisticky signifikantnú koreláciu medzi ratingom účastníka a časom do konca aukcie, kedy zadal svoju poslednú ponuku. V prípade eBay aukcií je táto korelácia pozitívna, v prípade Amazon aukcií zase negatívna. Tento výsledok podporuje hypotézu, že skúsení účastníci majú tendenciu praktizovať sniping v prípade eBay aukcií, zatiaľ čo pri Amazon aukciách, viediac, že sniping stráca na svojej užitočnosti, zadávajú svoje ponuky hneď na začiatku aukcie. Táto tendencia je silnejšia pri aukciách dražiacich starožitnosti, ako pri tých zaoberajúcich sa počítačmi. Za jedno z vysvetlení môžeme považovať snahu skúsených účastníkov o zatajenie každej dodatočnej informácie o draženom objekte<sup>15</sup>.

Videli sme teda, že i malá zmena pravidiel môže mať veľký dopad na správanie jednotlivých účastníkov. V našom konkrétnom prípade sa

---

<sup>14</sup>Ratingy meriame pomocou spätných väzieb v profile daného účastníka. Autori pritom vychádzajú z predpokladu, že z veľkého počtu spätných väzieb vyplýva, že daný účastník sa zúčastňuje veľkého množstva transakcií, a teda sa jedná o skúseného špecialistu v danom obore.

<sup>15</sup>Toto vysvetlenie podporujú i mnohé spätné väzby od užívateľov s vysokým ratingom. Dovolíme si citovať niektoré z nich z kategórie starožitnosti: „Robím tak čiastočne na základe zistenia, že keď som zadal ponuku (i značne vysokú) na začiatku aukcie, takmer vždy sa našiel niekto, kto ju prevýšil. Je to možno i preto, že mám povest' znalca.“; „Najzložitejším na celej veci je zistiť, či je daný objekt pravý alebo sa jedná len o falzifikát. A presne v takomto prípade je dôležité nezadať ponuku skoro. Ak ste známym expertom a zadáte ponuku skoro, potom vlastne ostatným potvrdíte pravosť objektu zadarmo.“

jednalo o skúmanie modifikácie SPSB aukcie s možnosťou reagovania na ponuky súperov a časovým obmedzením dĺžky jej trvania. V prípade aukcií na portáli eBay sa ukázalo, že nebolo možné vybudovať analógiu medzi takto modifikovanou a pôvodnou SPSB aukciou. Jedinečnou a veľmi poučnou bola v tomto smere najmä možnosť pozorovať nové behaviorálne sklony vznikajúce ako dôsledok postupnej interakcie medzi rozličnými skupinami účastníkov na individuálnej úrovni. Klasická teória toto neberie do úvahy, čím jej závery nutne strácajú istú časť svojej výpovednej hodnoty. Autori preto pre lepšie pochopenie samotného mechanizmu a jeho relevantných črt odporúčajú skúmať okrem rovnovážnych stratégií i tieto interakcie.

# Záver

Cieľom diplomovej práce bolo podať výstižnou a zároveň vysoko zrozumiteľnou formou najdôležitejšie objavy a poznatky teórie aukcií. Objektom nášho skúmania pri tom boli najmä aukcie spadajúce do tzv. *private values modelu*. Jednotlivé aukčné mechanizmy sme najprv bližšie skúmali z pohľadu stratégií jednotlivých účastníkov. Následne sme ich medzi sebou porovnávali v rozličných prostrediach a z rôznych hľadísk. Závěry týchto analýz sme nakoniec konfrontovali s výsledkami experimentov a nájdené zhody resp. rozdiely sa snažili interpretovať.

Pri experimentálnom skúmaní bolo našou prioritou zamerať sa na behaviorálne sklony účastníkov ako individualít. Snažili sme sa analyzovať nimi použité stratégie a hodnotiť ich z hľadiska dostupných teoretických záverov. Okrem iného nám z toho vyplynulo, že zdanlivá iracionalita niektorých účastníkov je v skutočnosti podmienená iba mierou abstrakcie jednotlivých modelov. Na prvý pohľad chybné rozhodovanie sa tak pri vhodnom rozšírení modelu javí ako úplne legitímne.

Tieto závery nabádajú k prehodnoteniu klasických modelov, okrem iného, zahrnutím rôznych nemajetkových pohnútok do rozhodovacieho procesu jednotlivých účastníkov. Náš vlastný experiment identifikuje ako jednu z takýchto pohnútok „škodenie ostatným“ v prípade SPSB aukcie. Miera jej relevancie pri samotnom rozhodovaní a hľadanie jej finančného ekvivalentu by mohli byť predmetom ďalšieho skúmania.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] Cox, James C.; Roberson, Bruce; Smith, Vernon L.: *“Theory and Behavior of Single Object Auctions”*, Research in Experimental Economics, Greenwich, CT: JAI Press, 1982, 1-43
- [2] Dastidar, Krishendu G.: *“Auctions with Endogenous Quantity Revisited”*, Contemporary Issues and Ideas in Social Sciences (Mar., 2006), 44-58
- [3] Friedman, Lawrence: *“A Competitive Bidding Strategy”*, Operations Research, 1956, 4, 104-112
- [4] Graham, Daniel A.; Marshall, Robert C.: *“Collusive Bidder Behavior at Single-Object Second-Price and English Auctions”*, The Journal of Political Economy, Vol. 95, No. 6. (Dec., 1987), 1217-1239
- [5] Hansen, Robert G.: *“Auctions with Endogenous Quantity”*, The RAND Journal of Economics, Vol. 19, No. 1. (Spring, 1988), 44-58
- [6] Harris, Milton; Raviv, Arthur: *“Allocation Mechanisms and the Design of Auctions”*, Econometrica, Vol. 49, No. 6. (Nov., 1981), 1477-1499
- [7] Holt, Charles A., Jr.: *“Competitive Bidding for Contracts under Alternative Auction Procedures”*, The Journal of Political Economy, Vol. 88, No. 3. (Jun., 1980), 433-445



- [8] Kagel, John H.; Harstad, Ronald M.; Levin, Dan: *“Information Impact and Allocation Rules in Auctions with Affiliated Private Values: A Laboratory Study”*, *Econometrica*, Vol. 55, No. 6. (Nov., 1987), 1275-1304
- [9] Kamecke, Ulrich: *“Dominance or Maximin? How to Solve an English Auction”*, *International Journal of Game Theory*, Vol. 27, No. 3. (Nov., 1998), 407-426
- [10] Katok, Elena; Kwasnica, Anthony M.: *“Time is Money: The Effect of Clock Speed on Seller’s Revenue in Dutch Auctions”*, *Experimental Economics*, Vol. 11, No. 4. (Dec., 2008), 344-357
- [11] Lucking-Reiley, David: *“Using Field Experiments to Test Equivalence between Auction Formats: Magic on the Internet”*, *The American Economic Review*, Vol. 89, No. 5. (Dec., 1999), 1063-1080
- [12] Milgrom, Paul R.: *“Auctions and Bidding: A Primer”*, *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 3, No. 3. (Summer, 1989), 3-22
- [13] Milgrom, Paul R.; Weber, Robert J.: *“A Theory of Auctions and Competitive Bidding”*, *Econometrica*, Vol. 50, No. 5. (Sep., 1982), 1089-1122
- [14] Myerson, Roger B.: *“Optimal Auction Design”*, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 6, No. 1. (Feb., 1981), 58-73
- [15] Orlovský, Michal: *“Aukcie a aukčný mechanizmus”*, Diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2002
- [16] Perry, Motty; Reny, Philip J.: *“An Efficient Auction”*, *Econometrica*, Vol. 70, No. 3. (May, 2002), 1199-1212
- [17] Riley, John G.; Samuelson, William F.: *“Optimal Auctions”*, *The American Economic Review*, Vol. 71, No. 3. (Jun., 1981), 381-392

- [18] Roth, Alvin E.; Ockenfels, Axel: *“Last-Minute Bidding and the Rules for Ending Second-Price Auctions: Evidence from eBay and Amazon Auctions on the Internet”*, The American Economic Review, Vol. 92, No. 4. (Sep., 2002), 1093-1103
- [19] Rothkopf, Michael H.; Teisberg, Thomas J.; Kahn, Edward P.: *“Why Are Vickrey Auctions Rare?”*, The Journal of Political Economy, Vol. 98, No. 1. (Feb., 1990), 94-109
- [20] Vickrey, William: *“Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders”*, The Journal of Finance, Vol. 16, No. 1. (Mar., 1961), 8-37