FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Analýza Black-Littermanovho modelu optimalizácie portfólia

Diplomová práca

Bratislava 2009 Samuel Opršal

Analýza Black-Littermanovho modelu optimalizácie portfólia

Diplomová práca

Diplomant: Samuel Opršal

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce: Mgr.Marek Prokopec

Bratislava 2009

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne, iba s pomocou literatúry uvedenej v zozname, konzultácií s vedúcim diplomovej práce a vedomostí získaných počas štúdia.

....

Samuel Opršal

V Bratislave dňa 27.4.2009

Rád by som sa poďakoval môjmu vedúcemu diplomovej práce Mgr. Marekovi Prokopcovi, za odbornú pomoc, pripomienky, návrhy a čas, ktorý mi venoval pri vypracovávaní diplomovej práce.

Abstrakt

Táto diplomová práca sa zaoberá teóriou tvorby portfólia. V úvodnej časti predstavíme niekoľko klasických a dobre známych postupov používaných pri optimalizácii portfólia. Ďalej rozoberieme Black-Littermanov model, ktorý upravuje vstupné parametre do optimalizácie, konkrétne očakávaných výnosov aktív, podľa predpokladu investora. V poslednej časti budeme analyzovať Black-Littermanov model pri aplikácii na naše konkrétne portfólio.

Kľúčové slová: aktívum, očakávaný výnos, Black-Littermanov model, portfólio, pohľad investora, obrátená optimalizácia

Abstract

This diploma thesis is dealing with portfolio optimization. In the first part we have introduced some of the classical and well known portfolio optimization methods. Further we have described the Black-Litterman model that edits the input parameters to the optimization, specifically the expected return of the assets according to the investor's view. In the last part we have analyzed the Black-Litterman model applied on our portfolio.

Key words: asset, expected return, Black-Litterman model, portfolio, investor's view, reverse optimization

Obsah

Úvod

Jednou z možností, kde investovať peňažné prostriedky je finančný trh. Finančný trh je miestom, kde sa stretáva ponuka s dopytom po cenných papieroch ako napríklad akcie, opcie, dlhopisy, forwardy atď.

Cieľom každého subjektu pôsobiaceho na finančnom trhu je dosiahnuť zisk. Je prakticky nemožné, alebo len veľmi málo pravdepodobné, že by investor našiel príležitosť na bezrizikový zisk(väčší ako risk free rate). Vzhľadom na veľkosť dnešných trhov a rýchlosť reakcie dopytu a ponuky trvajú takéto príležitosti iba zlomky sekúnd. S každým investovaním je teda spojené aj riziko. To predstavuje neistotu výnosu, alebo vôbec návratnosti investície. Na meranie tohto rizika sa používajú rôzne spôsoby. V metódach, ktoré budeme popisovať je riziko kvantifikované volatilitou výnosu.

Veľkosť výnosu a rizika spolu samozrejme veľmi úzko súvisia. Pri vyššom požadovanom výnose musí investor podstúpiť aj vyššie riziko. Preto nikto nekupuje iba jeden cenný papier, ale nakúpi viacero cenných papierov s rôznym zameraním. Vytvorí tým súbor akcií, ktorý nazývame portfólio.

Finančné trhy podliehajú rôznym výkyvom a trendom, na ktoré rôzne cenné papiere reagujú odlišne. Ak jedno aktívum klesá na cene, iné aktívum môže na ten istý podnet naopak stúpať.

Preto sa každý investor snaží zostaviť také portfólio, ktoré bude v každej situácií reagovať čo najlepšie. Vytvoriť takéto portfólio zahŕňa dva hlavné problémy. Prvým je výber aktív do portfólia. Druhým problémom, ktorým sa budem zaoberať v tejto práci, je vhodný pomer týchto aktív v rámci portfólia, teda určiť pomerné zastúpenie každého aktíva na celkovom portfóliu.

1. Akcie

Akcia je jedným z najrozšírenejších cenných papierov. Každá akcia je viazaná na konkrétny podnik a vyjadruje pre svojho majiteľa podiel na majetku tohto podniku. S akciou je spojené aj právo podieľať sa na riadení, zisku vo forme dividendy alebo likvidačnom zostatku spoločnosti, ktorá akciu emitovala. Tieto práva sú bližšie špecifikované v obchodnom zákonníku a stanovách spoločnosti. Cena akcie sa spravidla tvorí na finančnom trhu. Vzhľadom k tomu, že tento sa do značnej miery približuje dokonale konkurenčnému prostrediu, môžeme tu vytvorenú cenu vnímať ako skutočnú hodnotu akcie. Cena je samozrejme určovaná ponukou a dopytom, tieto sú však ovplyvnené mnohými faktormi ako hospodárske výsledky spoločnosti, ktorá akciu emitovala, ale aj ostatných spoločností v danom odvetví, ekonomickým prostredím krajiny, v ktorej firma pôsobí, očakávaniami investorov a mnohými inými. Keďže informácie o týchto jednotlivých faktoroch sa neustále menia, mení sa neustále aj cena akcie.

1.1. Výnos akcie

Cieľom obchodníka s akciami je vytvoriť zisk, teda kúpiť akciu a o nejaký časový úsek ju predať za vyššiu cenu. Ak označíme S_{t-1} cenu akcie, za ktorú akciu kúpim a S_t cenu za ktorú ju predám tak môj zisk vypočítam ako:

$$S_t - S_{t-1} \tag{1}$$

V prípade, že výraz je záporný hovoríme o strate.

Tento vzťah mi hovorí o absolútnom výnose. Ten má však malú výpovednú hodnotu. Je totiž obrovský rozdiel či zarobím 1$ pri investovaní 100$ alebo pri investovaní 10000$. Preto sa výnos počíta ako podiel zisku na vstupnej investícii teda:

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \tag{2}$$

Keďže platí $\ln(x+1) \approx x$ ak $x \approx 0$. Teda Výraz x môžeme v okolí nuly aproximovať výrazom $\ln(x+1)$ a teda (2) môžeme prepísať ako:

$$\ln\left(\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} + 1\right) = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = v_t \tag{3}$$

Pod časovým úsekom [t-1,t] si môžeme predstaviť deň, týždeň, mesiac alebo rok. Štandardný obchodovací rok má 250 dní 52 týždňov a 12 mesiacov. Pri ďalšom počítaní budeme vždy uvažovať ročný výnos, ktorý dostaneme ako:

$$v_t = (1+v_n)^N - 1 \tag{4}$$

kde v_n je výnos za časovú jednotku a N je počet týchto časových jednotiek v 1 roku.

1.2. Volatilita výnosu akcie

Druhou základnou vlastnosťou akcie je jej volatilita. Vyjadruje vlastne nestálosť výnosov akcie, teda ich vychyľovanie na jednu či druhú stranu. To je spôsobené jednak neustále novými vplyvmi na trhu, ale aj rozdielom medzi ponukou a dopytom (bid, ask). Na kvantifikáciu volatility výnosov akcie sa najčastejšie používa štatistická veličina disperzia. Tá je definovaná nasledovne:

Nech X je náhodná veličina so strednou hodnotou $E(X)$. Disperzia náhodnej veličiny X je číslo

$$D(X) = E(X - E(X))^2 \tag{5}$$

Ak za odhad strednej hodnoty použijeme aritmetický priemer, ktorý je nevychýleným odhadom, výnosov akcie

$$E(X) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} v_i \tag{6}$$

Tak potom nevychýlený odhad disperzie môžeme vyjadriť ako

$$\sigma(v) = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\left(v_i - E(v)\right)^2 \tag{7}$$

1.3. Akciový index

Jednou z foriem finančného aktíva je akciový index. Pri počítaní konkrétneho príkladu budeme tvoriť portfólio práve z akciových indexov, preto si skúsime priblížiť čo to je. Akciový index môžeme brať ako fiktívny cenný papier, ktorý obsahuje viacero akcií istého druhu (jednej burzy, jedného výrobného odvetvia, jednej krajiny,...). Väčšinou nie je možné, aby index zahŕňal všetky akcie daného druhu a preto obsahuje iba väčšie, reprezentatívne akcie. Zmyslom akciového indexu je ukázať vývoj daného odvetvia alebo krajiny a poskytnúť porovnávaciu bázu (tzv. „benchmark“) pre posudzovanie výkonnosti jednotlivých akcií , ktoré patria do indexu alebo daného odvetvia. Tak isto zjednodušujú investorom proces tvorby portfólia. Keď sa rozhodne že chce investovať v nejakej oblasti, nemusí skúmať všetky akcie ale jednoducho kúpi akciový index a tým pádom portfólio zložené z akcií spadajúcich pod danú oblasť záujmu.

2. Klasické metódy optimalizácie portfólia

Pod pojmom optimalizácie portfólia rozumieme nájsť taký pomer, dopredu vybraných aktív, že pri danom očakávanom výnose portfólia podstupujeme najmenšie možné riziko. Aby sme mohli takéto portfólio vybrať, potrebujeme poznať niektoré vlastnosti jednotlivých, zastúpených aktív. O každom cennom papieri musíme mať predpoklad očakávaného výnosu a volatility, teda rizika. Taktiež musíme poznať vzťah medzi jednotlivými aktívami, teda predpoklad o tom ako súvisia pohyby cien jednotlivých cenných papierov medzi sebou. A nakoniec treba poznať aj váhy každého aktíva v portfólio. Týmito informáciami je jednoznačne dané portfólio. Rôzne modely na tvorbu portfólio predpokladajú rôzne počiatočné informácia a dávajú návod na dopočítanie tých ostatných. Ukážeme si niektoré základné a najznámejšie modely, ktoré nám takéto návody dávajú.

2.1. Markowitzov model

Vstupnými parametrami pre markowitzov model tvorby portfólio sú očakávané výnosy každého z cenných papierov, ich volatilita a vzťah medzi výnosmi jednotlivých aktív. Výstupom tohto modelu sú váhy jednotlivých aktív v portfóliu Výnos cenného papieru sa najčastejšie počíta z historických dát. Majme aktívum i. Ak máme o cene tohto aktíva n

pozorovaní v pravidelných intervaloch dokážeme podľa(2) vypočítať výnosy r_i^t pre $t = \{1,2,\ldots,n-1\}$ teda vektor výnosov $r_i = \left(r_i^1, r_i^2, \ldots, r_i^{n-1}\right)$. Ako nevychýlený odhad výnosu aktíva použijeme aritmetický priemer

$$\overline{r_i} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} r_i^j \tag{8}$$

a nazveme ho očakávaný výnos. Očakávaný výnos portfólia potom vypočítame ako vážený priemer jednotlivých cenných papierov podľa ich váh v portfóliu:

$$\overline{r_p} = w^T \overline{r_i} \tag{9}$$

kde $w^T = (w_1, w_2, ..., w_n)$ je vektor váh, ktorý musí spĺňať

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{10}$$

Volatilitu aktíva vypočítame ako disperziu jeho výnosov podľa vzorca (7).

Na kvantifikovanie vzťahov medzi výnosmi jednotlivých aktív portfóliu použijeme kovariančnú maticu Q, ktorá má tvar

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

Kde q_{ij} je pre $i \neq j$ kovariancia medzi výnosmi i-teho a j-teho aktíva a pre $i = j$ je to očakávaná dsiperzia výnosu aktíva *i*. Na odhad kovariancie medzi aktívami *i* a *j* môžeme použiť štatistiku:

$$q_{ij} = \frac{1}{k-1}\sum_{m=1}^{k}(r_j^m - \overline{r_j})(r_i^m - \overline{r_i}) \quad \text{pre } \forall i, j = \{1,2,\ldots,n\} \tag{11}$$

Kde prvok r_i^m je *m*-tý prvok vektoru výnosov *i*-teho aktíva a $\overline{r_i}$ je očakávaný výnos *i*-teho aktíva. Hľadáme teda taký vektor váh $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ pri ktorom

$\overline{r_p} \to \max$ a $\overline{\sigma_p} \to \min$. Keďže maximalizácia $\overline{r_p}$ a minimalizácia $\overline{\sigma_p}$ idú proti sebe nemáme problém s jednoznačným riešením. Riešenie bude závisieť od zvoleného $\overline{r_p}$. Riziko obľubujúci investor si zvolí $\overline{r_p}$ vyššie aj za cenu vyššieho rizika, riziko averzný investor bude naopak požadovať nižšie $\overline{r_p}$ výmenou za väčšiu istotu. $\overline{r_p}$ teda budeme považovať za parameter Takýto markowitzov problém môžeme matematicky zapísať nasledovne:

$$\min \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{r_i} = \overline{r_p}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Aby bol výpočet korektný a pre každé $\overline{r_p}$ mala úloha práve jedno riešenie, je potrebné, aby boli splnené nasledovné predpoklady:

1.) Výnosy r_i sú lineárne nezávislé. Ak by bol niektorý vektor výnosov lineárne závislý, znamená to, že ho môžeme vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov výnosov a teda danú akciu z portfólia vylúčiť, lebo nám neprináša nič nové.

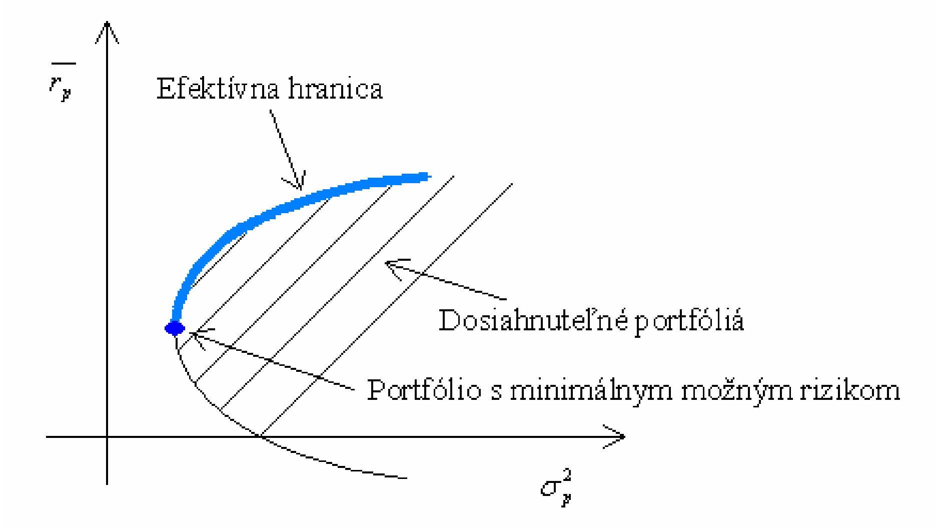
Z toho vyplýva druhý predpoklad:

2.) Kovariančná matica Q je regulárna a pozitívne definitná a teda aj matica Q^{-1} je regulárna a pozitívne definitná

3.) Existujú dve aktíva pre ktoré platí $\overline{r_i} \neq \overline{r_j}$, $1 < i, j < n$

Ak by mali všetky akcie rovnaký očakávaný výnos, muselo by mať portfólio opäť len ten istý očakávaný výnos a problém by nemal riešenie pre žiadne $\overline{r_p}$ okrem $\overline{r_p} = \overline{r}$.

Ako výsledok nám vyjde, že disperzia optimálneho portfólia je kvadratickou funkciu očakávaného výnosu, čo môžeme graficky znázorniť nasledovne



Dosiahnuteľné sú všetky portfólia vnútri paraboly. Optimálne sú portfólia ležiace na parabole avšak iba na jej hornej časti, keďže oproti tým z dolnej časti poskytujú väčší výnos pri tej istej volatilite. Túto časť paraboly nazývame efektívna hranica. Minimálne možné riziko má portfólio na vrchole paraboly.

Reálne investor často drží časť kapitálu v bezrizikových aktívach. Za také môžeme považovať napríklad bezkupónové štátne dlhopisy. Výnos takéhoto aktíva, r_f, je vopred jasný, teda jeho disperzia rovnako ako kovariancia s ostatnými aktívami je nulová. Ak by sme takéto aktívum zahrnuli do pôvodného výpočtu, bol by porušený predpoklad o regulárnosti kovariančnej matice. Bezrizikové aktívum teda zahrnieme iným spôsobom. Predpokladajme, že investor rozdelí svoje prostriedky medzi portfólio vypočítané markowitzovim modelom(rizikové aktívum) a bezrizikové aktívum. Váha bezrizikového aktíva je α potom váha rizikového aktíva je $1-\alpha$. Očakávaný výnos portfólia bude potom:

$$\overline{r_p} = \alpha r_f + (1-\alpha)\bar{r} \qquad (12)$$

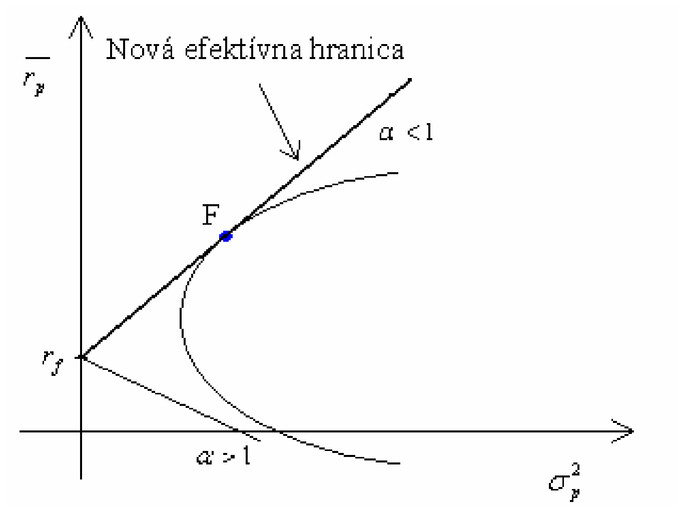
A jeho disperzia:

$$\sigma_p^2 = (1-\alpha)^2 \sigma^2 \qquad (13)$$

A teda smerodajná odchýlka:

$$\sigma_p = \lfloor 1-\alpha \rfloor \sigma \qquad (14)$$

Takéto kombinácie môžeme zobraziť ako polpriamky vychádzajúce z bodu (0, r_f) a to nastáva v prípade $\alpha = 1$. Portfólia vytvorené $\alpha > 1$ sú neefektívne, lebo dokážeme vytvoriť portfólio s väčším očakávaným výnosom pri zachovaní volatility. Sú to prípady keď ide investor do krátkej pozície v rizikovom aktíve a za takto získané prostriedky nakupuje bezrizikové aktívum. Opačný prípad nastáva ak $\alpha < 0$. Vtedy si investor požičiava(ide do krátkej pozície v bezrizikovom aktíve) a nakupuje za takto získané prostriedky rizikové aktívum.



Z obrázku je zrejmé, že po pridaní bezrizikového aktíva sa efektívnou hranicou stáva dotyčnica k pôvodnej efektívnej hranici prechádzajúca bodom (0, r_f), to znamená kombinácia bezrizikového aktíva a fondu F .

Teoretická podstata tohto modelu je všeobecne uznávaná ako správna, no napriek tomu sa v praxi prakticky nepoužíva. Má to dva dôvody. Prvým je, že takto vypočítané váhy aktív v portfóliu nezvyknú byť intuitívne. Naopak bývajú pomerne extrémne, keď obrovské krátke pozície(záporná váha aktíva) aj cez -100% nie sú výnimočné. Toto by sa dalo ošetriť keby sme okrem obmedzenia

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

Pridali ešte ďalšie obmedzenie

$$w_i > 0 \quad \text{pre} \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$$

Prípadne, aby sme nemali priveľkú časť portfólia v jednom aktívu obmedziť váhy aj zhora

$$w_i < a \quad \text{pre} \quad \forall i = 1,2,\ldots,n$$

Druhým problémom Markowitzovho modelu je príliš veľká senzitivita na vstupné dáta. Už pri malej zmene niektorého z očakávaných výnosov sú výsledky radikálne odlišné.

2.2. Capital Asset Pricing Model

Ďalším z modelov z oblasti teórie portfólia je Capital Asset Pricing Model známy pod skratkou CAPM. Hneď na úvod si zadefinujme niektoré predpoklady, za ktorých CAPM platí.

1.)Všetci investori sa snažia držať portfólio, ktoré je na efektívnej hranici Markowitztovho problému s bezrizikovým aktívom.

2.) Každému investorovi sú voľne a okamžite dostupné tie isté informácie o aktívach

3.)Na trhu existuje jedno bezrizikové aktívum, ktoré môže každý požičať alebo si požičať v ľubovoľnom množstve za rovnakú cenu.

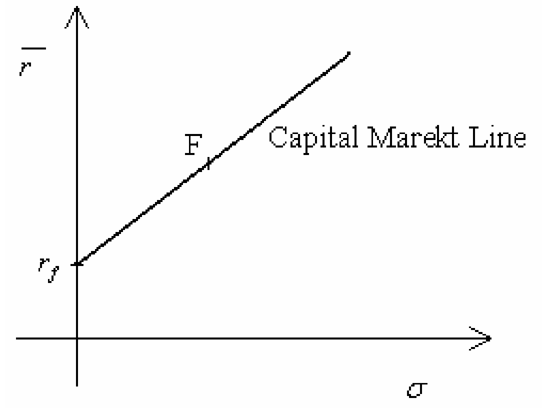
4.)Transakčné náklady na trhu sú nulové a trh je v rovnováhe

CAPM sa nesnaží určiť optimálne váhy aktív v portfóliu, ale nájsť ich rovnovážne ceny. Z predpokladov je zrejmé, že každý investor delí svoju investíciu medzi bezrizikové aktívum a fond F z markowitzovho problému. Rozdiel je iba v ich pomere podľa averzie k riziku každého z nich. Je zrejmé, že fond F je súhrnom celého trhu(trhové portfólio), kde váha aktíva *i* je podiel na celkovej kapitalizácii trhu.

$$w_i = \frac{\text{súhrnná hodnota aktíva i na trhu}}{\text{kapitalizácia celého trhu}}. \tag{15}$$

Trh sa v tomto prípade často nahrádza indexom obsahujúcim najdôležitejšie aktíva trhu. Napríklad NASDAQ-100 ktorý zahŕňa 100 najlikvidnejších akcií emitovaných na americkom akciovom trhu NASDAQ, alebo SAX pre slovenskú burzu.

Polpriamka zobrazujúca optimálne portfólia sa nazýva Capital Market Line(CML) a vyzerá nasledovne:



Jej rovnica má tvar

$$\overline{r} = r_f + \sigma \frac{\overline{r_M} - r_f}{\sigma_M} \tag{16}$$

Kde jej smernica

$$\lambda = \frac{\overline{r_m} - r_f}{\sigma_M} \tag{17}$$

sa nazýva Trhová cena rizika. Táto veličina určuje, o koľko sa mi zmení očakávaný výnos pri zmene rizika o jednotku.

Všetci investori v CAPM riešia markowitzov problém a zároveň predpoklady modelu implikujú riešenie. Pôsobením trhových síl dopytu a ponuky sa preto vstupné dáta ustália na takých hodnotách, aby portfólia z CML boli skutočne optimálne. Teda ak je trhové portfólio M efektívne, potom $\overline{r_i}$ pre každé aktívum spĺňa rovnicu:

$$\overline{r_i} = r_f + \beta_i (\overline{r_M} - r_f) \tag{18}$$

kde

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{\operatorname{cov}(r_i, r_M)}{\sigma_M^2} \tag{19}$$

β vyjadruje prepojenie daného aktíva s trhom. Pre $\beta > 0$ akcia rastie, ak rastie aj trh, pre $\beta < 0$, naopak akcia pri raste trhu klesá. Keďže pre očakávaný výnos portfólia platí, že je váženým priemerom jednotlivých výnosov aktív, pre kovarianciu celého portfólia s trhom musí platiť:

$$\operatorname{cov}(r, r_M) = \sum_{i=1}^{n} w_i \operatorname{cov}(r_i, r_M) \tag{20}$$

a teda β portfólia môžeme vypočítať:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \tag{21}$$

čiže je opäť váženým priemerom β každého z aktív.

CAPM neurčuje priamo cenu aktíva. Určuje však jeho očakávaný výnos a trhové sily dopytu a ponuky už upravia podľa neho cenu aktíva, aby boli splnené podmienky arbitráže. Cenu aktíva môžeme teda vyjadriť z:

$$\frac{\overline{P}_E - P_B}{P_B} = r_f + \beta(\overline{r}_M - r_f) \tag{22}$$

teda

$$P_B = \frac{\overline{P}_E}{1 + r_f + \beta(\overline{r}_M - r_f)} \tag{23}$$

kde $\overline{P}_E$ je očakávaná hodnota aktíva na konci periódy a P_B je hodnota na začiatku periódy.

CAPM je vlastne jednofaktorový model, ktorého jediným faktorom je výnos trhu. Oproti Markowitzovemu modelu dáva intuitívnejšie výsledky a v rôznych svojich variáciach je aj výrazne používanejší v praxi. Jeho nevýhodou sú veľmi silné predpoklady, ktoré v realite nie sú splnené.

2.3. Obrátená optimalizácia

Základom metódy obrátenej optimalizácie(reverse optimization) je predpoklad že investor maximalizuje svoju funkciu užitočnosti ktorá má tvar:

$$U = w^T \Pi - (\frac{\delta}{2}) w^T \Sigma w \tag{24}$$

kde

U vyjadruje investorovu užitočnosť, ktorá je účelovou funkciou pri optimalizácii portfólia

w je vektor váh jednotlivých aktív v portfóliu

Π je vektor očakávaných výnosov všetkých aktív

δ je trhový parameter averzie k riziku

Σ kovariančná matica aktív

U je konkávna funkcia a teda nadobúda jediné globálne maximum.

Ak ju maximalizujeme bez obmedzení riešenie je pomerne jednoduché. Funkciu užitočnosti (24) zderivujeme podľa w a položíme rovnú 0

$$\frac{dU}{dw} = \Pi - \delta \Sigma w = 0 \tag{25}$$

teda

$$\Pi = \delta \Sigma w \tag{26}$$

Aby sme mohli počítať s rovnicou(26) musíme poznať hodnotu δ. Trhový parameter averzie k riziku vlastne vyjadruje aký veľký musí byť nárast očakávaného výnosu pri zvýšení rizika, aby investorova užitočnosť neklesla. Niektorí autori si určia hodnotu parametra averzie k riziku. Najčastejšie ju nakalibrujú podľa svojich skúseností.

Vo väčšine prác, s ktorými som sa stretol však autori parameter δ vypočítavajú. Ak obe strany rovnice(26) vynásobíme w^T a zmeníme vektorový zápis za skalárny

$$E(r) = \delta \sigma^2 \tag{27}$$

teda

$$\delta = \frac{E(r)}{\sigma^2} \qquad (28)$$

$E(r)$ je celkový očakávaný výnos trhového portfólia $(E(r) = w^T \Pi)$

σ^2 je disperziou trhového portfólia $\sigma^2 = w^T \Sigma w$

Disperzia trhu je samozrejme nenulová preto na parametre rovnice (28) nemáme ďalšie nároky. Po dosadení δ, Σ, w do rovnice (26) teda dostaneme vektor očakávaných výnosov. Keďže o kovariančnej matici Σ predpokladáme, že je kladne definitná a symetrická, môžeme rovnicu (26) tiež prepísať ako:

$$w = (\delta\Sigma)^{-1}\Pi \qquad (29)$$

kde tento krát dosadíme δ, Σ, Π a dostaneme optimálne váhy jednotlivých aktív v portfóliu.

Ak do rovnice (26) dosadíme ako váhy aktív kapitalizáciu na trhu, riešime vlastne rovnaký problém ako CAPM teda hľadáme rovnovážnu cenu(vyjadrenú výnosom) aktív.

Ak naopak počítame rovnicu (29) riešime podobný problém ako Markowitzov model.

Kým markowitzov model a CAPM počítajú buď váhy v portfóliu alebo rovnovážne ceny aktív(vyjadrené očakávaným výnosom), model obrátenej optimalizácie dokáže počítať oboje. Ak budeme počítať s očakávaným výnosom odhadnutým z historických dát, výsledok bude veľmi citlivý na zmeny v týchto odhadoch. Dobrá stabilita výsledkov je jednou z najväčších výhod Black-Littermanovho modelu.

3. Black-Litermanov model

Väčšina modelov z oblasti teórie portfólia vychádza z predpokladu, že všetci účastníci trhu majú rovnaké informácie. V skutočnosti má však každý investor svoje vlastné analýzy a predikcie pre vývoj trhu a jednotlivých jeho zložiek. Klasický markowitzov mean-variance model je však veľmi citlivý na vstupné údaje. Už pri malej zmene odhadu výnosu jedného aktíva, sa môžu váhy všetkých aktív radikálne zmeniť. Spôsob ako tieto svoje analýzy, svoje pohľady na trh, preniesť do procesu tvorby portfólia priniesli páni Fisher Black a Robert Litterman vo svojej práci ktorá bola prvý krát publikovaná v roku 1990 v internom dokumente firmy Goldman Sachs a v roku 1991 zverejnená. V roku 1992 bol uverejnený dlhší článok od týchto autorov. V tomto článku je popísaná použitá formula, avšak nie je odvodená a ani výpočet nie je krok po kroku popísaný. Preto sa niektoré postupy v neskorších článkoch iných autorov mierne líšia. Na začiatku vstupuje do Black-Littemanovho prvotný vektor očakávaných výnosov. Väčšina autorov ho počíta jednou z klasických metód a to buď CAPM alebo metódou obrátenej optimalizácie. Potom si musí investor určiť a vyjadriť svoj pohľad na aktíva v portfóliu a mieru, s akou tomuto svojmu pohľadu dôveruje. Pri vyjadrení tejto dôvery používajú rôzni autori, rôzne postupy. Následne tieto dva vstupy skombinuje vzorcom, ktorý je odvodený z Theilovho modelu pre zmiešané odhady. Takto dostane investor nový vektor očakávaných výnosov, v ktorom je už zahrnutý aj jeho pohľad.

3.1. Vyjadrenie pohľadu investora

Táto práca sa nezaoberá analýzou jednotlivých aktív a teda ani spôsobom ako určiť pohľad na niektoré aktívum. Ten predpokladáme, že dostaneme. Našou úlohou na tomto mieste je vyjadriť ho takým spôsobom aby sme s ním mohli ďalej počítať.

Investor môže vyjadrovať dva typy pohľadov. Prvý, absolútny, hovorí o tom, že podľa investora dosiahne dané aktívum výnos x %. Druhý typ pohľadu je relatívny, teda investor je presvedčený, že aktívum B bude mať vyšší výnos ako aktívum C a to o y%. Jedinou požiadavkou na pohľady je aby boli navzájom nezávislé. Investor môže vyjadriť pohľad na jedno, dve, alebo ľubovoľný počet aktív z portfólia.

Investorov pohľad je vyjadrený v nasledovných maticiach:

P - je matica ktorá identifikuje, na ktoré aktíva sa daný pohľad vzťahuje. Matica má rozmer $k \times n$ kde k je počet všetkých pohľadov investora a n je počet aktív v portfóliu. Pre absolútny pohľad je 1 v stĺpci reprezentujúcom aktívum, na ktoré sa pohľad vzťahuje a na ostatných miestach je 0. Pri relatívnom pohľade je na mieste nadhodnoteného aktíva +1 a na mieste podhodnoteného -1 teda suma v riadku musí byť pri relatívnom pohľade vždy 0.

Q – je matica $k \times 1$ očakávaných výnosov pre každý pohľad

Ω - je $k \times k$ matica vyjadrujúca kovarianciu medzi jednotlivými pohľadmi. Keďže sme požadovali, aby pohľady boli nezávislé, je matica Ω diagonálna. Diagonálne prvky ω_i vyjadrujú disperziu. Teda ak je $\omega_i = 0$ pre niektorý pohľad, investor si je týmto pohľadom úplne istý. Aby sme však mohli pracovať aj s maticou Ω^{-1}, budeme požadovať $\omega_i > 0$ pre $\forall i = 1,2,\ldots,k$. Spôsoby na určenie prvkov matice Ω sú rôzne, predstavíme si len niektoré.

Prvý spôsob predpokladá, že disperzia pohľadov je proporčná k disperzii prvotných výnosov aktív. V tomto prípade počítame s

$$\omega_i = p(\tau\Sigma)p^T \qquad (30)$$

alebo pre priamy výpočet matice

$$\Omega = diag(P(\tau\Sigma)P^T) \qquad (31)$$

τ je konštanta, ktorá sa častejšie kalibruje alebo určuje ako počíta. Pri tomto spôsobe výpočtu si investor neurčuje sám mieru s akou verí svojim pohľadom, ale rovnakou mierou sa prihliada na svoj pohľad aj na trhové ekvilibrium.

V druhom spôsobe si už môže investor určiť, ako veľmi verí svojmu pohľadu vyjadrené v percentách, čiže 100% znamená že mu verí úplne. Investor naviac môže mieru dôvery vyjadriť pre každý pohľad zvlášť. Jeho vysvetlenie bude jednoduchšie po lepšom priblížení Black-Littermanovho modelu.

3.2. Theilov model pre zmiešané odhady

Theilov model pre zmiešané odhady slúži na odhad parametrov ak máme dve sady dát. Jednu kompletnú a druhú len čiastočnú. Teda je ideálny pre prípad, ak chce investor vyjadriť svoj pohľad iba na niektoré parametre(aktíva), ale takisto môže hovoriť o nejakých kombinácie aktív. Investor si svojimi pohľadmi nemusí byť ani úplne istý, keďže môže vyjadriť dôveru vo svoj pohľad.

Začneme prvotnými dátami teda očakávanými výnosmi aktív na základe trhu. Tie odhadneme jednoduchým lineárnym modelom

$$\pi = x\beta + u \qquad (32)$$

kde

π je $n \times 1$ vektor očakávaných trhových výnosov aktív

x je $n \times n$ matica I_n

β je $n \times 1$ vektor priemerných výnosov aktív

u je $n \times n$ matica odchyliek z regresie kde $E(u) = 0$; $V(u) = E(u'u) = \Phi$ a

Φ je regulárna matica

Za predpokladu, že β a u sú nezávislé a x je konštanta môžeme disperziu π vyjadriť ako:

$$V(\pi) = x'V(\beta)x + V(u) \qquad (33)$$

čo môžeme zjednodušene zapísať ako:

$$V(\pi) = \Sigma + \Phi \qquad (34)$$

Kde Σ je kovariančná matica výnosov odhadnutá z historických dát

Black s Littermanom spravili pri kovariančnej matici odhadov, Φ, zjednodušujúci predpoklad. Podľa neho je Φ proporčná ku kovariančnej matici výnosov Σ. Vytvorili preto parameter τ ako konštantu proporčnosti a teda platí:

$$\Phi = \tau\Sigma \qquad (35)$$

Parameter τ je jednou z najabstraktnejších vecí v celom modeli. Keďže nebol jednoznačne definovaný majú na neho rôzny autori rôzne názory a pozrieme sa na neho bližšie v ďalších častiach.

Ďalej majme nejaké dodatočné informácie, ktoré chceme skombinovať s tými prvotnými. Toto budú práve pohľady investora. Nepožadujeme kompletnosť týchto pohľadov, takže investor môže mať dodatočné informácie iba o niektorých aktívach. Nech má investor k pohľadov, model zapíšeme nasledovne:

$$q = p\beta + v \qquad (36)$$

kde

q je $k \times 1$ vektor výnosov v jednotlivých pohľadoch

p je $k \times n$ matica identifikujúca aktíva na ktoré sa pohľady vzťahujú

β je $n \times 1$ vektor priemerných výnosov aktív

v je $k \times k$ matica odchyliek z regresie kde $E(v) = 0$; $V(v) = E(v'v) = \Omega$ a

Ω je regulárna matica

Zápis kombinácie primárnej a dodatočnej informácie vyzerá takto:

$$\begin{bmatrix} \pi \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix} \hat{\beta} + \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \qquad (37)$$

Kde očakávaná hodnota odchyliek je 0, a očakávaná hodnota variancie odchýlky je:

$$V\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = E\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u' & v' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix} \qquad (38)$$

Teraz môžeme odhadnúť parameter β zovšeobecnenou metódou najmenších štvorcov čím dostaneme:

$$\hat{\beta} = \left[\begin{bmatrix} x' & p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} x' & p' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \pi \\ q \end{bmatrix} \qquad (39)$$

Berúc do úvahy, že *x* je jednotková matica, môžeme tento odhad prepísať bez maticového zápisu ako:

$$\hat{\beta} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + p'\Omega^{-1}p\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + p'\Omega^{-1}q\right] \qquad (40)$$

Táto vypočítaná $\hat{\beta}$ je akýmsi váženým priemerom medzi trhovými výnosmi(π) a výnosmi podľa investorových pohľadov (q). Keďže parameter τ je v modeli nemenný a kovariančná matica výnosov Σ je vypočítaná z historických dát, určuje rozloženie váh inverzná matica Ω^{-1}, ktorá nám vlastne vyjadruje mieru s akou investor verí svojim pohľadom. Teda čím väčšia dôvera vo svoje pohľady, tým väčšia váha práve na ne.

Takisto ako očakávaný výnos sa zmení aj variancia .

Vychádzať budeme zo vzorca (40) kde π a q vyjadríme rovnicami (32) respektíve (36).

$$\hat{\beta} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + p'\Omega^{-1}p\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}(x\beta + u) + p'\Omega^{-1}(p\beta + v)\right]$$

$$\hat{\beta} = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + p'\Omega^{-1}p\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}x\beta + p'\Omega^{-1}p\beta\right] + \left[(\tau\Sigma)^{-1} + p'\Omega^{-1}p\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}u + p'\Omega^{-1}p\right]$$

Keďže *x* je jednotka, po vyňatí β z prvého sčítanca sa nám zátvorky vykrátia a ostane:

$$\hat{\beta} = \beta + \left[(\tau\Sigma)^{-1} + p'\Omega^{-1}p\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}u + p'\Omega^{-1}v\right]$$

$$\hat{\beta} - \beta = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + p'\Omega^{-1}p\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}u + p'\Omega^{-1}v\right]$$

čo prepíšeme, aby sme na ľavej starne mali definíciu disperzie

$$E\left(\left(\hat{\beta} - \beta\right)^2\right) = \left(\left[(\tau\Sigma)^{-1} + p'\Omega^{-1}p\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}u + p'\Omega^{-1}v\right]\right)^2$$

$$E\left(\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2\right)=\left[(\tau\Sigma)^{-1}+p'\Omega^{-1}p\right]^{-2} *$$
$$\left[(\tau\Sigma)^{-1}uu'(\tau\Sigma)^{-1}+p'\Omega^{-1}vv'\Omega^{-1}p+(\tau\Sigma)^{-1}uv'\Omega^{-1}p+p'\Omega^{-1}vu'(\tau\Sigma)^{-1}\right]$$

Keď zahrnieme do tejto rovnice predpoklady $E(uu')=\tau\Sigma$ a $E(vv')=\Omega$ a pridáme ďalší pomerne samozrejmý $E(uv')=E(vu')=0$ keďže *u* a *v* sú nezávislé tak nám vyjde:

$$E\left(\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2\right)=\left[(\tau\Sigma)^{-1}+p'\Omega^{-1}p\right]^{-2}\left[(\tau\Sigma)^{-1}+p'\Omega^{-1}p\right]$$

$$E\left(\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2\right)=\left[(\tau\Sigma)^{-1}+p'\Omega^{-1}p\right]^{-1} \quad (41)$$

čo je variancia očakávaného výnosu vytvoreného Black-Littermanovym modelom.

3.3. Black-Littermanova formula

V predchádzajúcej časti sme odvodili vzorec na zmiešanie trhového portfólia s pohľadmi investora a teda vlastne Black-Littemanovu formulu ktorý vyzerá nasledovne:

$$E(r)=\left[(\tau\Sigma)^{-1}+P^T\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi+P^T\Omega^{-1}Q\right] \quad (42)$$

kde:

E(r) je nový kombinovaný vektor očakávaných výnosov, rozmer $n\times 1$

τ je skalár

Σ kovariančná matica výnosov, rozmer $n\times n$

P identifikuje, ktoré aktíva sú zahrnuté v jednotlivých pohľadoch, rozmer $k\times n$

Ω je diagonálna kovariančná matica matica odchýliek vo vyjadrených pohľadoch a určuje váhu aká bude kladená na investorove pohľady, rozmer $k\times k$

Π je vektor očakávaných trhových výnosov aktív, rozmer $n\times 1$

Q je vektor vyjadrujúci výnos v jednotlivých pohľadoch investora, rozmer $k\times 1$

n počet aktív v portfóliu

k počet pohľadov, vyjadrených investorom

Toto bol hlavný Black-Littemanov vzorec. Často sa však pri niektorých výpočtoch používa iný vzorec, ktorý si teraz odvodíme

$$E(r) = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q\right]$$

$$E(r) = \left[\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P\right]^{-1}(\tau\Sigma)^{-1}\Pi\right] + \left[\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left(P^T\Omega^{-1}Q\right)\right]$$

$$E(r) = \left[\left[\tau\Sigma + \tau\Sigma P^T\left[P\tau\Sigma P^T + \Omega\right]^{-1}P\tau\Sigma\right]\left(\tau\Sigma^{-1}\Pi\right)\right] + \left[\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left(P^T\Omega^{-1}Q\right)\right]$$

$$E(r) = \left[\Pi + \left[\tau\Sigma P^T\left[P\tau\Sigma P^T + \Omega\right]^{-1}P\Pi\right]\right] + \left[\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left(P^T\Omega^{-1}Q\right)\right]$$

$$E(r) = \left[\Pi + \left[\tau\Sigma P^T\left[P\tau\Sigma P^T + \Omega\right]^{-1}P\Pi\right]\right] + \left[(\tau\Sigma)(\tau\Sigma)^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left(P^T\Omega^{-1}Q\right)\right]$$

$$E(r) = \left[\Pi + \left[\tau\Sigma P^T\left[P\tau\Sigma P^T + \Omega\right]^{-1}P\Pi\right]\right] + \left[(\tau\Sigma)\left[I_n + P^T\Omega^{-1}P\tau\Sigma\right]^{-1}\left(P^T\Omega^{-1}Q\right)\right]$$

$$E(r) = \left[\Pi + \left[\tau\Sigma P^T\left[P\tau\Sigma P^T + \Omega\right]^{-1}P\Pi\right]\right] + \left[\tau\Sigma\left[I_n + P^T\Omega^{-1}P\tau\Sigma\right]^{-1}\left(P^T\Omega^{-1}\right)Q\right]$$

$$E(r) = \left[\Pi + \left[\tau\Sigma P^T\left[P\tau\Sigma P^T + \Omega\right]^{-1}P\Pi\right]\right] + \left[\tau\Sigma\left[I_n + P^T\Omega^{-1}P\tau\Sigma\right]^{-1}\left(\Omega\left(P^T\right)^{-1}\right)^{-1}Q\right]$$

$$E(r) = \left[\Pi + \left[\tau\Sigma P^T\left[P\tau\Sigma P^T + \Omega\right]^{-1}P\Pi\right]\right] + \left[\tau\Sigma\left[\Omega\left(P^T\right)^{-1} + P\tau\Sigma\right]^{-1}Q\right]$$

$$E(r) = \left[\Pi + \left[\tau\Sigma P^T\left[P\tau\Sigma P^T + \Omega\right]^{-1}P\Pi\right]\right] + \left[\tau\Sigma P^T\left(P^T\right)^{-1}\left[\Omega\left(P^T\right)^{-1} + P\tau\Sigma\right]^{-1}Q\right]$$

$$E(r) = \left[\Pi + \left[\tau\Sigma P^T\left[P\tau\Sigma P^T + \Omega\right]^{-1}P\Pi\right]\right] + \left[\tau\Sigma P^T\left[\Omega + P\tau\Sigma P^T\right]^{-1}Q\right]$$

A takto sme sa dostali k alternatívnej verzii Balck-Litermanovho vzorca pre očakávaný výnos, ktorý vyzerá nasledovne:

$$E(r) = \Pi + \left[\tau\Sigma P^T\left[P\tau\Sigma P^T + \Omega\right]^{-1}\right]\left[Q - P\Pi\right] \tag{43}$$

Táto formulácia Black-Littemanovho vzorca je výborná pre analýzu hraničných prípadov dôvery v investorove pohľady. Keďže vo vzorci viac nevystupuje inverzná matica Ω^{-1}, odpadá požiadavka na maticu Ω, aby bola regulárna. To znamená, že môžeme vyjadriť 100% dôveru v niektorý alebo vo všetky pohľady.

Ak by sme teda vyjadrili 100% istotu pre všetky naše pohľady, znamenalo by to, že $\Omega \to 0$ a teda vzorec by vyzeral:

$$E(r) = \Pi + \left[\tau\Sigma P^T\left[P\tau\Sigma P^T\right]^{-1}\right]\left[Q - P\Pi\right]$$

kde sa naviac vykráti parameter τ, teda vzorec bude vyzerať

$$E(r) = \Pi + \left[\Sigma P^T \left[P \Sigma P^T\right]^{-1}\right]\left[Q - P\Pi\right] \qquad (44)$$

a nový kombinovaný vektor očakávaných výnosov nebude viac závislý od hodnoty parametra τ.

Naviac, ak matica P je regulárna, čo znamená, že na každé aktívum je vyjadrený nejaký pohľad tak zo vzorca sa zjednoduší iba na:

$$E(r) = P^{-1}Q \qquad (45)$$

Čo je intuitívne, keďže som vyjadril 100% istotu o všetkých aktívach, to vlastne znamená, že viem presne ako sa budú správať.

Naopak, ak si investor vôbec nie je istý svojimi odhadmi to znamená, že $\Omega \to \infty$, vzorec sa nám zjednoduší na:

$$E(r) = \Pi \qquad (46)$$

Čo zodpovedá prípadu, ako keby investor nemal žiadne pohľady a teda výsledok opäť súhlasí s intuíciou.

3.4. Výpočet matice Ω pri určení miery dôvery v pohľad investora

Ako sme už uviedli matica Ω vyjadruje disperziu pohľadov investora a teda ich neistotu. Prvou možnosťou bolo počítať diagonálne prvky matice Ω ako

$$\omega_i = p(\tau\Sigma)p^T \qquad (47)$$

kde je však dôvera investorovi nanútená. Preto pridáme k výpočtu ešte parameter α, ktorý hovorí o miere dôvery investora v daný pohľad. A teda

$$\omega_i = \alpha_i p(\tau\Sigma)p^T \qquad (48)$$

Dôvera sa môže pohybovať v rozmedzí 0-100%. Ako počítať tieto hraničné hodnoty sme si ukázali v predchádzajúcej časti. Predpokladáme jednoduchú lineárnu závislosť a teda:

$$\mathrm{LC} = \left(\mathrm{w}^* - w_{mkt}\right) / \left(w_{100\%} - w_{mkt}\right) \tag{49}$$

kde

LC je miera dôvery investora vo svoj pohľad (level of confidence). Je vyjadrené v percentách teda napríklad pri 50%, *dôvera* = 0,5

w^* je váha aktíva pri danom pohľade a danej dôvere

w_{mkt} je trhová váha aktíva, teda váha pri 0% dôvere vo svoj odhad

$w_{100\%}$ je váha aktíva pri 100% istote pohľadu

Počítať budeme parameter α pre každý pohľad zvlášť, aby si investor mohol určiť pre každý pohľad rôznu mieru dôvery. Maticu Ω teda budeme mať iba pre jeden pohľad, takže bude rozmeru 1×1. Teda ju môžeme zapísať ako $\Omega = \alpha P \tau \Sigma P^T$.

Čo môžeme dosadiť do rovnice (43) a dostaneme

$$E(r) = \Pi - \tau\Sigma P^T \left[P \tau\Sigma P^T + \alpha P \tau\Sigma P^T\right]^{-1} \left[Q - P\Pi\right] \tag{50}$$

čo môžeme ďalej upravovať

$$E(r) = \Pi - \tau\Sigma P^T \left[(1+\alpha) P \tau\Sigma P^T\right]^{-1} \left[Q - P\Pi\right]$$

$$E(r) = \Pi - \frac{1}{1+\alpha} \tau\Sigma P^T \left(P^T\right)^{-1} (\tau\Sigma)^{-1} P^{-1} \left[Q - P\Pi\right]$$

$$E(r) = \Pi - \frac{1}{1+\alpha} P^{-1} \left[Q - P\Pi\right]$$

$$E(r) = \Pi - \frac{1}{1+\alpha} \left[P^{-1} Q - \Pi\right] \tag{51}$$

Pre výpočet optimálnych váh v portfóliu použijeme metódu obrátenej optimalizácie teda

$$w^* = E(r)(\delta\Sigma)^{-1}$$

a pre hraničné podmienky

$$w_{mkt} = \Pi(\delta\Sigma)^{-1}$$

$$w_{100\%} = P^{-1} Q (\delta\Sigma)^{-1}$$

Po dosadení dostávame

$$w^* = \left[\Pi - \frac{1}{1+\alpha}\left[P^{-1}Q - \Pi\right]\right](\delta\Sigma)^{-1}$$

a roznásobením

$$w^* = \Pi(\delta\Sigma)^{-1} - \frac{1}{1+\alpha}\left[P^{-1}Q(\delta\Sigma)^{-1} - \Pi(\delta\Sigma)^{-1}\right]$$

čo môžeme prepísať ako:

$$w^* = w_{mkt} - \frac{1}{1+\alpha}\left[w_{100\%} - w_{mkt}\right]$$

po úprave

$$\frac{1}{1+\alpha} = \frac{w^* - w_{mkt}}{w_{100} - w_{mkt}} = LC$$

a teda

$$\alpha = \frac{1-LC}{LC} \qquad (52)$$

Takýmto spôsobom môžeme vypočítať α pre každý pohľad a teda dostaneme nakoniec diagonálnu maticu:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \alpha_1 p(\tau\Sigma)p^T & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_k p(\tau\Sigma)p^T \end{pmatrix}$$

ktorá je vstupom do Black-Littermanovho vzorca.

3.5. Parameter τ

Parameter τ je jedným z najabstraktnejších aspektov celého Black-Littermanovho modelu. Vo svojom pôvodnom článku nedali Black s Littermanom jasný návod ako tento parameter počítať, preto ho v neskorších prácach o tomto modeli rôzny autori určovali rôzne.

Jeden zo spôsobov vychádza z toho, že rozptyl očakávaných výnosov je závislý od počtu pozorovaní. A teda

$$\tau = \frac{1}{T},$$

v našom prípade by to bolo $\frac{1}{676} = 0{,}00148 = \tau$. Keďže väčšinou sa nepočíta až s toľkými pozorovaniami, tento spôsob vysvetľuje častú voľbu parametra τ v rozmedzí $\langle 0.01\ ;\ 0.05 \rangle$

My sme však problém kalibrácie parametru τ obišli vhodnou voľbou matice Ω, ktorá je proporčná kovariančnej matici Σ. Obidva spôsoby výpočtu matice Ω, ktoré sme si ukázali, eliminujú parameter τ z Black-Littermanovej rovnice, ktorá sa tým pádom stáva necitlivá na tento parameter.

4. Výpočet Black-Littermanovho modelu

V tejto časti sa pozrieme, ako Black-Littermanov model reálne počíta a pozrieme sa, čo nám povedia výsledky výpočtu o fungovaní tohto modelu. Za aktíva vybrané do portfólia sme zvolili päť akciových indexov. Počítať budeme z týždenných údajov z rokov 1993 až 2005 to znamená 676 pozorovaní pre každý index.

Pracovať budeme s regionálnymi MSCI indexmi(Morgan Stanley Capital International). Tieto indexy patria k najrozšírenejším medzi investormi. Sú počítané už od roku 1969 a zahŕňajú akcie o celkovej kapitalizácii vyše 3 bilióny dolárov(údaj z času pred finančnou krízou).

Konkrétne budeme počítať s nasledovnými indexmi:

- MSCI US – zahŕňa najväčšie akcie zo Spojených štátov amerických. Kapitalizácia tohto indexu, to znamená súčet kapitalizácií všetkých akcií, ktoré index zahŕňa, ku koncu roku 2005 predstavovala 9 794,58 miliárd amerických dolárov.
- MSCI Pacific Local - zahŕňa akcie z Austrálie, Hong Kongu, Japonska, Nového Zélandu a Singapuru so celkovou kapitalizáciou 2 858,60 mld USD
- MSCI Europe Local zahŕňa akcie zo štátov "starej", rozvinutej Európy ako Nemecko, Francúzsko, Británia, Nórsko, Grécko, … s celkovou kapitalizáciou 5 096,73 mld USD
- MSCI Emerging Markets Local zahŕňa akcie z rozvíjajúcich sa krajín Južnej Ameriky a Ázie ako Brazília, Mexiko, Čína, Kórea, Taiwan, … s celkovou kapitalizáciou 3 058,03 mld USD

- MSCI Emerging Markets Europe Local zahŕňa akcie z rozvíjajúcich sa krajín Európy ako Česko, Maďarsko, Rusko, Turecko, (Slovensko tu nie je kvôli malému akciovému trhu) s celkovou kapitalizáciou 1351,74 mld USD

Spoločná kapitalizácia použitých indexov predstavuje 2 2160 miliárd amerických dolárov. Teda váhy jednotlivých indexov v našom portfóliu podľa kapitalizácie sú

MSCI US	44,2%
MSCI Pacific Local	12,9%
MSCI Europe Local	23,0%
MSCI Emerging Markets Local	13,8%
MSCI Emerg. Mark. Europe	6,1%

4.1. Primárny vektor očakávaných výnosov

Pri počítaní Black-Littermanovho modelu potrebujeme na začiatku vždy prvotný odhad očakávaných výnosov. Takýto odhad spočítame tromi rôznymi spôsobmi. Budú to spôsoby opísané v teoretickej časti práce teda:

- Na základe historických výnosov
- Podľa Capital Asset Pricing Model (CAPM)
- Podľa modelu obrátenej optimalizácie

Pri výpočte podľa historických dát sa vlastne pozrieme ako sa daný index správal v sledovanej histórii a budeme predpokladať, že rovnako sa bude správať aj v najbližšom období. Keďže máme hodnoty indexov po týždňoch, tak každý týždeň spočítame výnos podľa vzorca (2). Takto dostaneme 675 týždenných výnosov, z ktorých podľa vzorca (8) vypočítame očakávaný týždenný výnos, na základe posledných 13 rokov. Ten podľa vzorca (4) a hodnotu N=52 prepočítame na ročný výnos.

Index	týždenný výnos	ročný výnos
MSCI US	0,34%	19,00%
MSCI Emerging Markets Local	0,08%	4,05%
MSCI Pacific Local	0,57%	34,33%
MSCI Emerging Markets Europe Local	0,18%	10,08%
MSCI Europe Local	0,31%	17,76%

Druhým spôsobom ako určiť očakávaný výnos indexu je CAPM. Tento model predpokladá, že poznáme váhy jednotlivých indexov v portfóliu zloženom z týchto indexov. Tieto vypočítame cez vzorec (15) ako podiel kapitalizácie indexu ku celkovej kapitalizácii portfólia. Teda jednotlivé očakávané výnosy indexov vypočítame podľa rovnice (18) a jednotlivé β_i podľa rovnice (19), kde za trh berieme portfólio zložené z našich indexov na základe kapitalizácie. K týždenným historickým výnosom indexov teda ešte dopočítame týždenné výnosy portfólia(trhu) ako $r_p = w_i r_i$ a opäť cez rovnicu (8) dostaneme očakávaný týždenný výnos a cez rovnicu (4) vypočítame očakávaný ročný výnos portfólia $\overline{r_M}$. Disperziu vypočítame podľa vzorca (7) kde za v_i dáme týždňové výnosy portfólia a dostaneme σ_M^2 . Následne vypočítame σ_{iM} ako kovarianciu výnosov indexu a portfólia. Keďže do vzorca vstupuje pomer $\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}$, nie je dôležitá na akej časovej báze(týždeň, mesiac, rok) sú počítané, ak sú počítané na rovnakej báze.

Počítame s bezrizikovým výnosom na úrovni 4% p.a.

Tým pádom máme všetky potrebné parametre pre výpočet CAPM a vyšlo nám:

Index	β	ročný výnos
MSCI US	1,1180	19,36%
MSCI Emerging Markets	1,0187	18,08%
MSCI Pacific	1,6225	26,42%
MSCI Emerg. Mark. Europe	0,9935	17,75%
MSCI Europe	1,0363	18,32%

Posledným zmieňovaným spôsobom je metóda obrátenej optimalizácie, do ktorej vstupujú váhy indexov v portfóliu, kovariančná matica a parameter averzie k riziku.

Váhy použijem opäť ako pomer kapitalizácie indexu na celkovej kapitalizácii portfólia.

Koavariančnú maticu odhadnem z historických výnosov. Keďže tieto sú týždenné, aj kovariancie ako jednotlivé prvky matice budú týždenné. Preto treba celú maticu prenásobiť číslom 52(počet týždňov v roku), aby sme dostali ročné kovariancie.

Parameter averzie k riziku sme si zadefinovali ako pomer výnosu trhu k disperzii trhu. Teda v našom prípade podiel očakávaného výnosu portfólia a disperzie portfólia. Vyšlo nám $\delta = 6.87$. Pri tomto spôsobe nám teda očakávané výnosy vyšli:

Index	ročný výnos
MSCI US	19,19%
MSCI Emerging Markets	11,72%
MSCI Pacific	21,30%
MSCI Emerg. Mark. Europe	12,45%
MSCI Europe	18,26%

Optimálne váhy indexov v portfóliu pre jednotlivé vektory očakávaných výnosov sme počítali podľa rovnice (29). Následne podľa týchto váh a rovnice (9) sme spočítali aj očakávaný výnos portfólia pre jednotlivé spôsoby výpočtu očakávaných výnosov.

Ako najvhodnejšie pre Black-Litterman model je zvoliť si za primárny odhad, ten vypočítaný metódou obrátenej optimalizácie. Je to pre jeho jednoduchosť výpočtu. Aj keď poznám váhy a potrebujem vypočítať očakávaný výnos, ale aj naopak keď poznám očakávaný výnos a potrebujem spočítať váhy v portfóliu.

4.2. Špecifikácia pohľadov investora

Táto práca sa nezaoberá analýzou trhu a ani predikciami, a preto nebudeme rozoberať spôsoby, ako odhadnúť budúci vývoj aktív. Predpokladáme, že tieto informácie dostanem od ľudí, ktorý sa tým zaoberajú a našou úlohou je implementovať tieto informácie do tvorby portfólia.

Ako sme už spomínali investor môže vyjadriť 2 typy pohľadov: absolútny alebo relatívny. My sme dostali z každého typu jeden pohľad a tieto budeme implementovať.

Pohľad 1: Index MSCI US bude v najbližšom roku rásť tempom 15%.

Dôvera v tento pohľad je 25%

Pohľad 2: Index MSCI Europe Local bude v najbližšom roku rásť o 4 percentuálne body rýchlejšie ako indexy rozvíjajúcich sa krajín MSCI Emerging Markets Local a MSCI Emerging Markets Europe Local.

Dôvera v pohľad je 85%

Prvý pohľadom je príkladom absolútneho pohľadu, keď vyjadríme konkrétnu výšku výnosu aktíva. V tomto prípade je to 15% namiesto 19,19%, ktoré predpokladá primárny očakávaný výnos.

Druhý pohľad je príkladom relatívneho, keď vyjadrujeme predpoklad o rozdiele vo výkonnosti medzi jednotlivými aktívami. Nemusíme porovnávať iba jedno aktívum s iným jedným, ale ľubovoľné množstvá medzi sebou

Matica *P* má za úlohu identifikovať aktíva, na ktoré sa pohľady vzťahujú. Každý riadok matice predstavuje jeden pohľad.

Pri absolútnom pohľade je to jednoduché. Na pozícii aktíva, ktorého sa pohľad týka je 1 a na ostatných miestach 0, teda v našom prípade

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pri relatívnom pohľade je súčet prvkov v riadku 0, pričom aktíva ktoré majú predpokladaný vyšší rast sú kladné, a tie u ktorých očakávame nižší rast budú záporné Teda:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}5 & 0 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$$

Z hľadiska presnosti identifikácie zmieňovaných aktív je však lepšie ak súčet, v našom prípade záporných prvkov, nie je rozložený rovnomerne ale podľa váh v portfóliu. Takže spravíme akési miniportfólio zložené iba z indexov MSCI Emerging Markets Local a MSCI Emerging Markets Europe Local a pozrieme sa na ich váhy v tomto miniportfóliu. Teda:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}693 & 0 & -0{,}307 & 1 \end{pmatrix}$$

Čiže výsledná matica *P*, identifikujúca aktíva v našich pohľadoch bude mať rozmer 2×5 kvôli 2 pohľadom a piatim aktívam v portfóliu a tvar:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}6577 & 0 & 0 & 1 & -0{,}3422 \end{pmatrix}$$

Tvorba matice Q je jednoduchá. Má rozmer 2×1 a jej prvky sú očakávané výnosy vyjadrené v pohľadoch:

$$Q = \begin{pmatrix} 0,15 \\ 0,04 \end{pmatrix}$$

Poslednou maticou, ktorá kvantifikuje pohľady, je matica Ω, ktorá vyjadruje varianciu jednotlivých pohľadov. Tie investor môže, ale nemusí vyjadriť. Je to štvorcová, diagonálna matica rozmeru $k \times k$ kde k je počet vyjadrených pohľadov. Keďže sme si ukázali, že Black-Littermanova formula ktorú použijeme je necitlivá na parameter τ, nemusíme jeho hodnotu veľmi rozoberať a zvolíme ho podobne ako iný autori na úrovni $\tau = 0,1$ Naša matica má teda tvar:

$$\Omega = \begin{pmatrix} p_1(\tau\Sigma)p_1^T & 0 \\ 0 & p_2(\tau\Sigma)p_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00321 & 0 \\ 0 & 0,001503 \end{pmatrix}$$

Pri konštruovaní tejto matice sme nijakým spôsobom nevyjadrovali mieru, s akou veríme našim jednotlivým pohľadom.

Ak chceme v matici Ω vyjadriť našu mieru dôvery, vypočítame diagonálne prvky matice vzorcom (48). Keďže mieru s akou veríme v naše pohľady(LC) sme už vyjadrili v percentách, nie je problém spočítať jednotlivé α_i podľa odvodeného vzorca (52).

Tie sú: $\alpha_1 = 3$ a $\alpha_2 = 0,176$ a teda matica Ω s vyjadrenou mierou dôvery má tvar:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0,00963 & 0 \\ 0 & 0,000265 \end{pmatrix}$$

Pri väčšej miere dôvery je α menšia a teda aj prvok v matici Ω prislúchajúci danému je menší, čo súhlasí s predchádzajúcim tvrdením, že pre mieru dôvery blížiacu sa k 100% Ω teda $\alpha_i p(\tau\Sigma)p^T \to 0$. Takisto naopak keď je miera dôvery nižšia α je väčšia a opäť to potvrdzuje, že pre malú mieru dôvery $\alpha_i p(\tau\Sigma)p^T \to \infty$.

Akú mieru dôvery vlastne nanúti investorovi formula $\Omega = P(\tau\Sigma)P^T$?

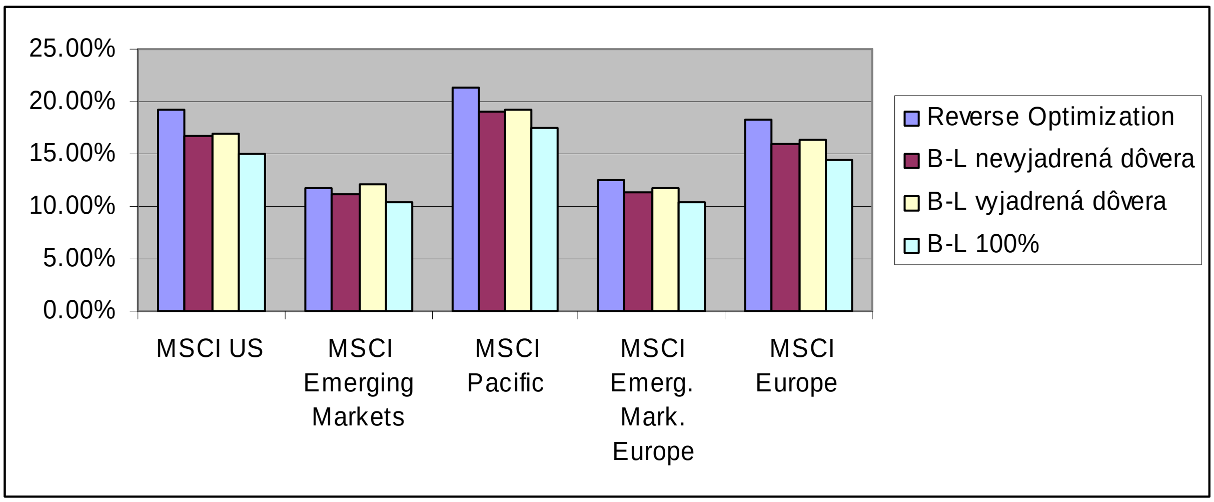
Je to dôvera pri ktorej sa $\alpha_i = 1$ pre $\forall i = 1,2,\dots k$. Zo vzorca (52) ľahko vypočítame, že to je pre $LC = 0,5$. Teda ak investor nevyjadrí mieru dôvery, je mu táto “nanútená“ na úrovni 50%.

4.3. Výsledky

Všetky premenné, ktoré vstupujú do Black-Littermanoveho modelu sme si pre náš konkrétny prípad vyčíslili a teda sa môžeme pozrieť na výsledky.

Očakávané výnosy:

Index	Reverse Optimization	B-L nevyjadrená dôvera	B-L vyjadrená dôvera	B-L 100%
MSCI US	19.20%	16.74%	17.01%	15.00%
MSCI Emerging Markets	11.72%	11.20%	12.14%	10.47%
MSCI Pacific	21.30%	19.11%	19.26%	17.58%
MSCI Emerg. Mark. Europe	12.44%	11.35%	11.82%	10.42%
MSCI Europe	18.27%	16.04%	16.34%	14.44%



Posun pri indexe MSCI US je jasný. Keďže očakávaný výnos v primárnom odhade je 19,2%, ale pohľad investora hovorí už iba o 15%. Očakávaný výnos vypočítaný Black-Littermanovým modelom klesol. Ak sme nezadefinovali dôveru tak klesol výraznejšie oproti prípadu keď sme dôveru zadefinovali. To spĺňa naše očakávania keďže v prvom prípade nám bola "nanútená" dôvera na úrovni 50% kým v druhom bola vyjadrená ako 25% teda výsledok je bližšie k primárnemu odhadu. B-L 100% je vektor očakávaných výnosov ak by sme zadefinovali mieru dôvery vo všetky pohľady na úrovni 100%. Pochopiteľne v takomto prípade vychádza očakávaný výnos MSCI US 15% keďže sme vyjadrili že sme si tým úplne istý

Pozrime sa na index MSCI Pacific: Napriek tomu, že ani v jednom z pohľadov nefigurovalo toto aktívum, jeho očakávaný výnos sa pohol. Je to z jednoduchého dôvodu. Vývoj akcií je medzi sebou previazaný, čo vyjadruje kovariančná matica. Čiže ak zmeníme očakávaný výnos pre jedno aktívum, cez kovariancie sa táto zmena prenesie aj do očakávaných výnosov iných aktív.

Druhý pohľad nám hovorí o akomsi miniportfóliu, ktoré je zložené z indexov MSCI Emerging Markets, MSCI Emerging Market Europe a MSCI Europe. Celkový výnos toho miniporfólia by sa kvôli tomuto pohľadu meniť nemal, avšak kvôli prvému pohľadu a kovariancii medzi aktívami mierne klesá.

Sledujme tu vývoj medzi aktívami ktoré sú v tomto pohľade označené ako menej rastúce oproti aktívu, ktoré je označené ako viac rastúce. Indexy MSCI Emerging Markets, MSCI Emerging Market Europe sme spojili to spoločného aktíva MSCI Emerging all, podľa ich kapitalizácie

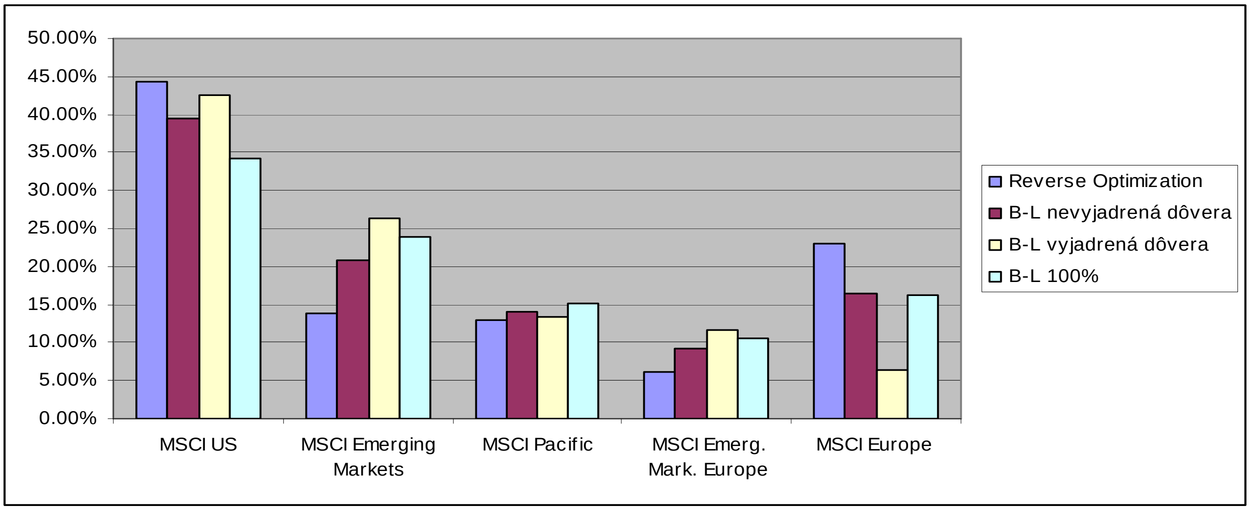
Index	Reverse Optimization	B-L nevyjadrená dôvera	B-L vyjadrená dôvera	B-L 100%
MSCI Emerging all	11.94%	11.25%	12.04%	10.45%
MSCI Europe	18.27%	16.04%	16.34%	14.44%
rozdiel	6.33%	4.80%	4.30%	3.99%

Tu môžeme sledovať ako sa podľa vyjadrenej miery dôvery približujeme k presne vyjadrenému pohľadu. Pre nevyjadrenú mieru dôvery(“nanútených“ 50%) je ten rozdiel bližšie k primárnemu a naopak pre vyjadrenú 85% mieru dôvery je to zas bližšie k opačnému extrému, kedy sme si úplne istý a ten je prakticky presne ten, ktorý sme vyjadrili.

Pozrime sa, čo nové očakávané výnosy spravia z váhami jednotlivých indexov v portfóliu.

Váhy v portfóliu vypočítané vzorcom (29):

Index	Reverse Optimization	B-L nevyjadrená dôvera	B-L Vyjadrená dôvera	B-L 100%
MSCI US	44.20%	39.41%	42.46%	34.20%
MSCI Emerging Markets	13.80%	20.88%	26.33%	23.90%
MSCI Pacific	12.90%	14.01%	13.31%	15.22%
MSCI Emerg. Mark. Europe	6.10%	9.23%	11.63%	10.56%
MSCI Europe	23.00%	16.47%	6.27%	16.12%



Pohyb vo váhe indexu MSCI US je pomerne jasný. Keďže tomuto aktívu predpovedáme nižší rast ako v primárnom odhade, jeho váha automaticky so zvyšujúcou sa dôverou v tento pohľad stúpa.

Pohyby váh indexov MSCI Emerging Markets, MSCI Emerging Market Europe sú rovnaké a zároveň presne opačné ako pohyb indexu MSCI Europe, čo je pochopiteľné keďže stoja v druhom pohľade proti sebe. Tento pohľad opäť predpovedá indexom rozvíjajúcich sa krajín väčší rast ako v primárnom odhade a európskemu indexu nižší. Preto je pochopiteľné, že pri vyjadrení investorovej dôvery sa váhy prvých dvoch indexov zvyšujú, zatiaľ čo váha tretieho indexu klesá. To spôsobuje jednak vyššia miera dôvery v daný pohľad ale zároveň aj nižšia dôvera v prvý pohľad. Ten totiž opäť cez kovarianciu ovplyvňuje aj ostatné indexy.

Index MSCI Pacific zaznamenáva len malé zmeny váhy, ktoré môžu byť spôsobené tým, že keď váha jedného z indexov klesne, tento kapitál sa prerozdelí medzi ostatné aktíva v portfóliu

5. Záver

Táto práca z oblasti teórie portfólia mala za cieľ rozanalyzovať jednu z alternatívnych a nie veľmi známych metód a to Black-Littermanov model.

Keďže teória portfólia pojednáva o nákupe cenných papierov najprv sme si predstavili čo to je akcia ako najreprezentatívnejší cenný papier. Zadefinovali sme jej charakteristiky ako výnos a volatilitu a predstavili sme, čo je to akciový index.

Ďalej sme sa oboznámili s klasickými a všeobecne známymi modelmi pre optimalizáciu portfólia. Konkrétne Markowitzov mean-variance model, Capital asset pricing model, a model obrátenej optimalizácie. Posledný spomenutý sme použili aj ako primárny vstup do Black-Littermanovho modelu.

Následne sme sa venovali samotnému Black-Littermanovmu modelu. Najprv sme si predstavili jeho podstatu a potom odvodili cez Theilov model zmiešaných odhadov samotnú Black-Littermanovu formulu. Posledným vstupom do tohto modelu boli pohľady investora. Ukázali sme si ako ich kvantifikovať aby bolo možné s nimi počítať.

V praktickej časti sme ukázali ako sa s Black-Littermanovym modelom reálne počíta. Vybrali sme si päť akciových indexov MSCI, pre ktoré sme spočítali primárne očakávané výnosy, vyjadrili pohľady investora a nakoniec vypočítali nové očakávané výnosy. Na tomto príklade sme ukázali, že výpočty Black-Littermanovym modelom presne spĺňajú intuitívne očakávania pre zmenu očakávaných výnosov, rovnako ako pre zmenu váh jednotlivých aktív v portfóliu

Referencie

[1] Cibulka V., *Optimalizácia portfólia vzhľadom na miery rizika a jej implementácia vo webovej aplikácii*, *Diplomová práca*, FMFI UK Bratislava 2008

[2] Black F., Litterman R., *Global Portfolio Optimization*, Financial Analysts Journal; Sept/Oct 1992 28-43

[3] He G., Litterman R., *The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios*, 1999 Goldman, Sachs & Co

[4] Bevan A., Winkelmann K., *Using the Black-Litterman Global Asset Allocation Model: Three Years of Practical Experience*, 1998 by Goldman, Sachs & Co.

[5] Walters J., *The Black-Litterman Model In Detail*, [http://www.blacklitterman.org/Black-Litterman.pdf]

[6] Idzorek T., *A step-by-step guide to the Black-Litterman model*, Zephyr Associates, Inc.

[7] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V., *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, Bratislava 2005