

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Modely časových radov s premenlivými režimami

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2009

Anna Petričková

Modely časových radov s premenlivými režimami

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Anna Petričková

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

9.1.9 Aplikovaná matematika

Vedúci diplomovej práce: prof. RNDr. Magda Komorníková, CSc.

Bratislava 2009

Čestné vyhlásenie

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne, len s pomocou nadobudnutých teoretických vedomostí, konzultácií a použitej literatúry uvedenej v zozname.

V Bratislave, 27.4.2009

Pod'akovanie

Úprimne ďakujem svojej diplomovej vedúcej prof. RNDr. Magde Komorníkovej, CSc. za cenné návrhy a pripomienky, odbornú pomoc, ochotu, trpezlivosť a čas venovaný a strávený pri riešení problémov. Práca vznikla s čiastočnou podporou grantu APVV-0375-06.

Abstrakt

PETRIČKOVÁ Anna: *Modely časových radov s premenlivými režimami*. [Diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Ekonomická a finančná matematika.

Vedúci diplomovej práce: Prof. RNDr. Magda Komorníková, CSc. Bratislava: FMFI UK, 2009. 74 s.

V diplomovej práci sa budeme zaoberať predovšetkým triedou viacrežimových modelov s režimami určenými nepozorovateľnými veličinami – Markovovými modelmi (MSW). Tieto modely majú nelineárny charakter. Cieľom práce je poskytnúť ucelenejší pohľad na problematiku a podrobne popísať túto triedu modelov. Ťažiskom práce je výpočet momentov 3-režimových MSW modelov a aplikácia dosiahnutých výsledkov na reálnych dátach z ekonómie a finančnictva. Pre každý zo skúmaných 20 reálnych časových radov odhadneme optimálne hodnoty parametrov pre viaceré typy modelov s premenlivými režimami, a na základe niekoľkých kritérií ich budeme navzájom porovnávať.

Kľúčové slová: časové rady, MSW model, diagnostický test, centrálny moment, odhad parametrov

Abstract

PETRIČKOVÁ Anna: *Time series models with switching regimes* [Master thesis]. Comenius University. Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics, Mathematics of Economics and Finance; Supervisor: Prof. RNDr. Magda Komorníková, CSc. Bratislava: FMFI UK, 2009. 74 p.

In this work we will discuss mainly the class of regime-switching models with regimes determined by unobservable variables – Markov-switching models. These models have a nonlinear character. The goal of this work is to provide a complete overview of the problem and to describe this class of models. The focus of the work is evaluating the moments of 3-regime MSW models and the applications of the obtained results. We estimate all the examined real time series with more types of switching models and compare them using certain goodness-of-fit criteria.

Key words: time series, MSW model, diagnostic test, central moment, estimation of the parameters

Obsah

Obsah	5
1 Úvod	7
1.1 Stochastický proces a stacionarita	8
1.2 Dekompozícia časového radu	10
1.3 Lineárny proces	11
2 Prehľad modelov	12
2.1 Lineárne stochastické modely	12
2.1.1 Modely stacionárnych časových radov	12
2.1.1.1 Autoregresný proces rádu p [AR(p)]	12
2.1.1.2 Proces kľzavých priemerov rádu q [MA(q)]	13
2.1.1.3 Zmiešané procesy [ARMA(p,q)]	14
2.2 Nelineárne modely	14
2.2.1 Modely s režimami určenými pozorovateľnými veličinami	15
2.2.1.1 Modely SETAR (Self-Exciting Threshold Autoregressive)	15
2.2.1.2 Modely STAR (Smooth Transition Autoregressive)	16
2.2.2 Modely s režimami určenými nepozorovateľnými veličinami	19
3 Markovovské modely s premenlivými režimami (MSW modely)	21
3.1 Diskrétné Markovovské procesy –základný popis	21
3.2 Tvorba MSW modelov	23
3.2.1 Odhad parametrov modelu MSW	24
3.2.2 Identifikácia modelu	29
3.2.3 Testovanie premenlivosti režimov modelu – testovanie lineariry oproti. nelinearite typu MSW	30

3.2.4	Diagnostické testy	30
3.2.5	Konštrukcia bodových predpovedí na základe MSW modelov	33
4	<i>Momenty MSW modelu</i>	34
4.1	Jednoduchý autoregresný MSW	35
4.2	Autoregresný stavovo závislý MSW	42
5	<i>Praktická časť</i>	48
5.1	SETAR	51
5.2	LSTAR	52
5.3	ESTAR	54
5.4	MSW modely.....	56
5.5	Najlepšie modely	61
5.6	Predikcie	65
6	<i>Záver</i>	71
7	<i>Zoznam použitej literatúry</i>	73

Prílohy

1 Úvod

Jednou z vlastností mnohých reálnych časových radov je ich premenlivý rozptyl. V priebehu časových radov sa striedajú fázy s vyšším a nižším rozptylom, niekedy sú tieto obdobia krátke, inokedy dlhšie. Z praktických analýz finančných časových radov vyplýva, že autokorelácia v časových radoch výnosov cien akcií je závislá od ich volatility. Autokorelácia má tendenciu rásť v obdobiach s nižšou volatilitou a tendenciu klesať v obdobiach s vyššou volatilitou. Tento charakter vzťahu je logický, pretože vyššia volatilita indikuje prítomnosť relatívne silnejšej nesystematickej zložky, t.j. relatívne slabšiu systematickú zložku. Zmenu volatility, resp. autokorelácie časového radu môžeme chápať ako zmenu režimu v správaní časového radu. Táto zmena môže byť spôsobená viacerými faktormi. Niektoré z nich sú dobre identifikovateľné, iné len ťažko alebo dokonca vôbec.

V posledných rokoch bolo navrhnutých množstvo modelov časových radov, ktoré formalizujú myšlienku existencie rôznych režimov správania časových radov. Patria sem napr. modely, ktoré sa dajú použiť pre modelovanie výnosov finančných časových radov, hydrologických a geodetických časových radov a pod. Tieto modely majú nelineárny charakter. K nim zaraďujeme napríklad viacrežimové modely s režimami určenými pozorovateľnými veličinami a modely s režimami určenými nepozorovateľnými veličinami.

V práci sa budeme zaoberať triedou viacrežimových modelov s režimami určenými nepozorovateľnými veličinami - modelmi MSW¹. V úvode však urobíme prehľad od jednoduchších modelov k tým zložitejším.

Prvá kapitola obsahuje úvod do problematiky a základné pojmy, druhá kapitola je venovaná prehľadu modelov – lineárnym stochastickým modelom a nelineárnym stochastickým modelom. Tretia kapitola obsahuje podrobný popis MSW modelov. Ťažiskom práce je štvrtá kapitola, ktorá obsahuje výpočet momentov 3-režimových MSW modelov a piata kapitola s aplikáciami dosiahnutých výsledkov.

¹ Markov switching – modely s premenlivými režimami

1.1 Stochastický proces a stacionarita

Množinu náhodných premenných

$$\{X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}$$

kde Ω je výberový priestor a $T \subset \mathbb{R}$ je indexová množina nazývame *stochastický proces*.

Pre každé $t \in T$ je $X(\cdot, t)$ náhodná premenná definovaná na výberovom priestore Ω . Pre každé $\omega \in \Omega$ je $X(\omega, \cdot)$ jedna realizácia stochastického procesu definovaná na indexovej množine T , t. j. usporiadaná postupnosť čísiel, z ktorých každé odpovedá jednej hodnote indexovej množiny. Časový rad môžeme teda považovať za jednu realizáciu stochastického procesu.

V prípade, že T obsahuje len konečne, resp. spočítateľne veľa hodnôt, hovoríme o *stochastickom procese s diskrétnym časom*. V tejto práci budeme predpokladať, že indexová množina pozostáva z celých čísiel, t. j., $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ a uvažované stochastické procesy majú nespojitý charakter. Pre zjednodušenie a sprehládnenie budeme stochastické procesy označovať ako $\{X_t\}$ a ich realizáciu (t. j. časový rad) ako X_t . Počet pozorovaní v časovom rade sa nazýva dĺžka časového radu a budeme ju označovať n .

Stochastický proces sa nazýva *striktne stacionárny*, ak pre akúkoľvek konečnú indexovú časť (t_1, t_2, \dots, t_n) z indexovej množiny $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ a akékoľvek reálne číslo k , pre ktoré $t_i + k \in T, i = 1, 2, \dots, n$ platí

$$F(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) = F(X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k}) \quad (1.1.1)$$

kde $F(\cdot)$ je združená distribučná funkcia. Striktne stacionarita teda hovorí, že pravdepodobnostné správanie daného stochastického procesu je časovo invariantné.

Pre stochastický proces $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, je vhodné definovať funkciu stredných hodnôt

$$\mu_t = E(X_t), \quad (1.1.2)$$

variačnú funkciu

$$\sigma_t^2 = D(X_t) = E(X_t - \mu_t)^2, \quad (1.1.3)$$

kovariačnú funkciu medzi X_{t_i} a X_{t_j} , $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$

$$\gamma(t_i, t_j) = E(X_{t_i} - \mu_{t_i})(X_{t_j} - \mu_{t_j}) \quad (1.1.4)$$

a korelačnú funkciu medzi X_{t_i} a X_{t_j} , $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$

$$\rho(t_i, t_j) = \frac{\gamma(t_i, t_j)}{\sigma_{t_i} \sigma_{t_j}}. \quad (1.1.5)$$

Ak platí pre všetky $t \in T$, že $\mu_t = \mu$, $\sigma_t^2 = \sigma^2$ a kovariančná a korelačná matica závisia len od časovej vzdialenosti náhodných veličín, t.j. pre $t_i = t - k$ a $t_j = t$

$$\gamma(t_i, t_j) = \gamma(t - k, t) = \gamma(t, t + k) = \gamma_k \quad (1.1.6)$$

a

$$\rho(t_i, t_j) = \rho(t - k, t) = \rho(t, t + k) = \rho_k, \quad (1.1.7)$$

potom sa daný proces nazýva *slabo (kovariančne) stacionárny*.

V praktickej analýze časových radov sa pod pojmom stacionarita rozumie výhradne slabá stacionarita, pretože je relatívne ľahko overiteľná.

Stochastický proces sa nazýva *normálny (gaussovský)*, ak jeho združené rozdelenie pravdepodobnosti je normálne. V tomto prípade sú striktná a slabá stacionarita ekvivalentnými pojmami (normálne rozdelenie je jednoznačne charakterizované prvými dvoma momentami).

Parciálna autokorelačná funkcia:

Koreláciu premenných X_t a X_{t-k} očistenú o vplyv premenných medzi nimi $X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1}$ nazývame *parciálna autokorelačná funkcia*. Počítame ju ako podmienenú strednú hodnotu:

$$\Phi_{k,k} = E[(X_t - \mu_t)(X_{t-k} - \mu_{t-k}) | X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1}]. \quad (1.1.8)$$

Proces bieleho šumu:

Pokiaľ je stochastický proces $\{a_t\}$ radom nekorelovaných náhodných veličín rovnakého pravdepodobnostného rozdelenia s konštantnou strednou hodnotou $E(a_t) = \mu_a$ (obvykle nulovou), konštantným rozptylom $D(a_t) = \sigma_a^2$ a $Cov(a_t, a_{t+k}) = 0$ pre $k \neq 0$, potom sa označuje ako *proces bieleho šumu*. Základným rysom procesu bieleho šumu je, že autokorelačná a parciálna autokorelačná funkcia sú pre $k > 0$ identicky nulové. Ak je jeho združené pravdepodobnostné rozdelenie normálne, označuje sa ako *gaussovský*. V nasledujúcom texte budeme uvažovať stále len gaussovský biely šum (pokiaľ explicitne neuvedieme, že tento predpoklad neplatí). V práci budeme používať aj proces tvorený *nezávislými* rovnako rozdelenými náhodnými premennými (proces typu i.i.d.).

1.2 Dekompozícia časového radu

Časové rady môžu byť rozložené na niekoľko zložiek. Sú to trend, sezónna zložka, cyklická zložka a reziduálna (náhodná) zložka.

Rozklad (**dekompozícia**) časového radu na tieto zložky je motivované nádejou, že v jednotlivých zložkách rozkladu sa ľahšie podarí identifikovať pravidelné správanie radu ako v pôvodnom nerozloženom rade.

Trend zachycuje dlhodobé zmeny v priemernom správaní sa časového radu (napr. dlhodobý rast alebo dlhodobý pokles). Trendová zložka obvykle vzniká ako dôsledok pôsobenia síl, ktoré systematicky pôsobia v rovnakom smere.

Sezónna zložka opisuje periodické zmeny v časovom rade, ktorých perióda sa rovná určitej štandardnej jednotke času (týždeň, mesiac, rok a pod.) alebo jej konštantnému násobku. Sezónna zložka teda zachycuje zmeny, ktoré sa pravidelne opakujú rok čo rok. Rozbor eliminovanej sezónnej zložky môže podstatne rozšíriť naše vedomosti o zákonitostiach správania určitého javu a prispieť ku konštrukcii dokonalejších predpovedí u uvažovaného časového radu. Ďalším dôležitým cieľom je tiež získanie *sezónne očisteného časového radu*, z ktorého bola sezónna zložka odstránená alebo aspoň potlačená na maximálne možnú mieru. Sezónne očistený časový rad zbavený sezónnych a náhodných fluktuácií umožňuje efektívnejšie štúdium dlhodobých tendencií, ktorým je priebeh časového radu podriadený. Napr. pre mesačné časové rady sezónna zložka vyjadruje zmeny radu, ktoré sa pravidelne opakujú v jednotlivých mesiacoch. Sezónna zložka môže zachycovať aj mnohé nepravidelnosti, napr. sviatky, rôznu dĺžku mesiacov a pod.

Cyklická zložka je periodická zložka, ktorej perióda nezodpovedá kalendárnym jednotkám. Odhad jej periódy môže byť niekedy veľmi ťažký (používajú sa pri tom napr. metódy spektrálnej analýzy). Ide vlastne o fluktuáciu okolo trendu, v ktorej sa strieda fáza rastu s fázou poklesu. Typickým príkladom cyklickej zložky je *ekonomický cyklus* (business cycle), ktorý charakterizuje rast a potom pokles ekonomickej aktivity. Jeho perióda sa pohybuje v rozmedzí od 5 do 7 rokov. Cyklická zložka môže mať svoje príčiny aj mimo ekonomickú oblasť. Napr. cyklické zmeny v klíme spôsobujú cyklické výkyvy v poľnohospodárskej produkcii, cyklické zmeny v móde zase vyvolávajú cyklické zmeny v odbyte rôznych odvetví odevného priemyslu. Eliminácia cyklickej zložky je zložitá jednak z vecných dôvodov, pretože je niekedy ťažké nájsť príčiny vedúce k jej vzniku, ale aj z výpočtových dôvodov, pretože charakter tejto veličiny sa môže v čase výrazne meniť.

Reziduálna zložka je zložka, ktorá ostane v časovom rade po odstránení trendu, sezónnej a cyklickej zložky. Je tvorená náhodnými pohybmi (fluktuáciami) v priebehu časového radu, ktoré nemajú (*rozpoznatel'ny*) systematický charakter. Preto sa už nepočíta medzi predchádzajúce tzv. systematické zložky časového radu. Pokrýva tiež chyby v meraní údajov, ktoré tvoria časový rad.

Časový rad si na základe predchádzajúceho výkladu môžeme predstaviť ako trend, na ktorý sú “nabalené” periodické zložky (sezónna a cyklická) a náhodná zložka.

Časové rady spravidla obsahujú reziduálnu zložku. Okrem nej môžu (ale nemusia) obsahovať aj jednu, dve alebo všetky tri ostatné zložky.

1.3 Lineárny proces

Každý stacionárny stochastický proces $\{X_t\}$, ktorý neobsahuje žiadnu systematickú zložku, môže byť vyjadrený ako lineárna kombinácia nekorelovaných rovnako rozdelených náhodných premenných Z_t s nulovou strednou hodnotou a konštantným rozptylom σ^2 , tzv. Woldova reprezentácia (lineárny proces).

Lineárny proces môžeme teda vyjadriť v tvare:

$$X_t - \mu = Z_t + \psi_1 Z_{t-1} + \psi_2 Z_{t-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i Z_{t-i},$$

kde $\psi_0 = 1$.

Lineárny proces je stacionárny, ak $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$. Lineárne stacionárne procesy môžeme modelovať triedou lineárnych modelov známych ako ARMA(p, q) modely. Aparát, ktorý sa pritom používa je známy ako *Box - Jenkinsova metodológia* (popísaná prvý raz v roku 1976) [6].

2 Prehľad modelov

2.1 Lineárne stochastické modely

Vo všeobecnosti môžeme ľubovoľný časový rad X_t napísať ako súčet dvoch častí: čo môže a čo nemôže byť predpovedané s použitím vedomostí z minulosti, ktoré sú sústredené v množine Ω_{t-1} . Teda X_t môže byť vyjadrené:

$$X_t = E[X_t / \Omega_{t-1}] + \varepsilon_t \quad (2.1.1)$$

kde ε_t sa nazýva *nepredikovateľná (chybová) časť* s $E[\varepsilon_t / \Omega_{t-1}] = 0$.

2.1.1 Modely stacionárnych časových radov

Na modelovanie stacionárnych časových radov sa v praxi najčastejšie používa Box – Jenkinsova metodológia [6], ktorá berie za základný prvok analýzy reziduálnu zložku, tvorenú korelovanými alebo závislými náhodnými veličinami.

Základný predpoklad:

1. hodnota náhodnej premennej X_t v čase t závisí len na predchádzajúcich náhodných premenných (deterministická časť) a na náhodných fluktuáciách (stochastická časť);
2. závislosť X_t na predchádzajúcich p náhodných premenných X_{t-1}, \dots, X_{t-p} je lineárna.

Modely stacionárnych časových radov triedy AR, MA a ARMA sú charakteristické špecifickou formou autokorelačnej funkcie (ACF) a parciálnej autokorelačnej funkcie (PACF), takže ich odhady je možné použiť pri identifikácii modelu konkrétnych analyzovaných časových radov.

Pri popise modelov budeme používať tzv. *operátor spätného posunutia* B , ktorý predstavuje oneskorenie, všeobecne $B^s X_t = X_{t-s}$.

2.1.1.1 Autoregresný proces rádu p [AR(p)]

Často používaný model pre predpovedateľnú časť X_t je založený na predpoklade, že je lineárnou kombináciou p hodnôt X_{t-1}, \dots, X_{t-p} .

Autoregresný proces rádu p je možné zapísať v tvare

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t, \quad (2.1.2)$$

kde $\{a_t\}$ je striktný proces bieleho šumu s nulovou strednou hodnotou $E(a_t) = 0$, rozptylom $D(a_t) = \sigma_a^2$ a ϕ_1, \dots, ϕ_p sú tzv. AR-koeficienty.

Pomocou operátora spätného posunutia môžeme proces AR(p) vyjadriť:

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) X_t = a_t \quad (2.1.3)$$

t.j.

$$\phi_p(B) X_t = a_t \quad (2.1.3a)$$

kde $\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$ je tzv. AR-polynóm. Za podmienky stacionarity sa dá proces AR(p) vyjadriť v tvare lineárneho procesu, t.j. platí vzťah

$$\psi(B) = \phi_p(B)^{-1}.$$

Táto podmienka je splnená, ak všetky korene rovnice $\phi_p(x) = 0$ ležia mimo jednotkového kruhu v komplexnej rovine.

Autokorelačná funkcia (ACF) má rekurzívnu formu :

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad \text{pre } k > 0 \quad (2.1.4)$$

Hodnoty parciálnej autokorelačnej funkcie (PACF) pre oneskorenia $k = 1, 2, \dots, p$ sú rôzne od nuly, pre ďalšie oneskorenia sa potom rovnajú nule.

2.1.1.2 Proces kľzavých priemerov rádu q [MA(q)]

Model MA(q) je daný vzťahom

$$X_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q} \quad (2.1.5)$$

alebo pomocou operátora spätného posunutia ako

$$X_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q) a_t = \theta_q(B) a_t \quad (2.1.6)$$

kde

$$\theta_q(B) = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q)$$

je tzv. MA-polynóm.

Proces MA(q) je vždy stacionárny.

ACF je nulová pre $k > q$ a hodnoty PACF sa exponenciálne znižujú alebo tvoria sínusoidy s exponenciálne klesajúcimi amplitúdami.

2.1.1.3 Zmiešané procesy [ARMA(p,q)]

Ak predpokladáme, že predpovedateľná časť X_t je lineárnou kombináciou p hodnôt X_{t-1}, \dots, X_{t-p} a q hodnôt procesu $\{a_t\}$ typu i.i.d. s nulovou strednou hodnotou posunutých v čase, dostávame model ARMA(p, q), ktorý je kombináciou AR(p) a MA(q) modelu. Všeobecný tvar pre ARMA(p, q) proces $\{X_t\}$ je nasledovný:

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i \cdot X_{t-i} + \sum_{i=0}^q \theta_i \cdot a_{t-i}, \quad \theta_0 = 1 \quad (2.1.7)$$

alebo aj

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q}. \quad (2.1.8)$$

Pomocou operátora spätného posunutia môžeme model ARMA(p, q) vyjadriť ako

$$\phi_p(B)X_t = \theta_q(B)a_t. \quad (2.1.9)$$

Proces ARMA(p, q) je stacionárny, ak všetky korene rovnice $\phi_p(x) = 0$ ležia mimo jednotkového kruhu v komplexnej rovine.

2.2 Nelineárne modely

V reálnom živote sa často stretávame s časovými radmi, ktoré vykazujú silné nelineárne črty, preto lineárne modely vo všeobecnosti nie sú vždy vhodné na použitie. Do pozornosti sa preto stále viac dostávajú nelineárne modely, ako sú napr. bilineárne modely, neurónové siete a viacrežimové modely. Pritom je dôležité dodržiavať prirodzený predpoklad, že dané modely musia byť okrem schopnosti dobre fitovať dáta aj ľahko interpretovateľné. To sa však ukazuje v prípade neurónových sietí mnohokrát veľmi zložité.

My sa v práci zameriame na triedu viacrežimových modelov, ktoré sú dobre interpretovateľné a ako neskôr ukážeme v aplikáciách, sú aj veľmi vhodné na modelovanie mnohých reálnych dát. Základnou črtou týchto modelov je ich „riadenie“ pomocou jednej alebo viacerých premenných.

Modely s premenlivými režimami

Mnohé finančné, hydrologické a iné časové rady sú charakteristické premenlivým rozptylom. V priebehu časových radov sa striedajú fázy s vyšším a nižším rozptylom, čo má za následok pokles, resp. nárast autokorelácie (autokorelácia má tendenciu rásť v obdobiach s menším rozptylom a klesať v obdobiach s väčším rozptylom). Zmenu rozptylu, resp. zmenu autokorelačnej funkcie môžeme chápať ako zmenu režimu v chovaní daného časového radu.

Efektívnym prístupom pri modelovaní takýchto časových radov sa ukázala idea uvažovať *rozdielne stavy systému* alebo *režimy*. To umožnilo popísať dynamiku správania sa premennej v závislosti na režime, ktorý môže nastať v každom časovom bode.

2.2.1 Modely s režimami určenými pozorovateľnými veličinami

Táto trieda modelov predpokladá, že režimy, ktoré sa objavili v minulosti a súčasnosti, sú známe, resp. ich je možné identifikovať štatistickými technikami. V tejto práci sa (pre zjednodušenie) sústreďme na modely, ktoré predpokladajú, že dynamické správanie časového radu v každom režime môže byť dostatočne popísané lineárnym modelom typu AR, v ktorom autoregresné parametre závisia na danom režime.

Typickými modelmi, ktoré patria do tejto triedy, sú modely TAR („**T**hreshold **A**uto**R**egressive“). Sú základom viacrežimových modelov určených pozorovateľnými premennými. Navrhol ich v 80-tych rokoch Tong ([20], [21]). Tieto modely predpokladajú, že režim, ktorý nastane v čase t , môže byť určený nejakou pozorovateľnou premennou q_t . Hodnoty tejto premennej (tzv. *indikačnej premennej*) sú porovnávané s tzv. *prahovou hodnotou* c . V prípade dvojrežimového modelu jeden režim nastane v prípade, ak je $q_t \leq c$, druhý v prípade $q_t > c$.

2.2.1.1 Modely SETAR (Self-Exciting Threshold Autoregressive)

Ak premenná q_t nadobúda oneskorené hodnoty analyzovaného časového radu, t. j. X_{t-d} , kde $d > 0$ je celé číslo udávajúce oneskorenie, hovoríme o modeli SETAR.

Dvojrežimový model SETAR, s modelom AR(1) v oboch režimoch a oneskorením $d = 1$ má tvar

$$X_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \phi_{1,1}X_{t-1} + a_t & \text{ak } X_{t-1} \leq c \\ \phi_{0,2} + \phi_{1,2}X_{t-1} + a_t & \text{ak } X_{t-1} > c \end{cases} \quad (2.2.1)$$

kde $\{a_t\}$ je proces *striktného bieleho šumu* s nulovou strednou hodnotou a s rozptylom σ_a^2 .

Môžeme ho prepísať do tvaru

$$X_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}X_{t-1})[1 - I(X_{t-1} > c)] + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}X_{t-1})I(X_{t-1} > c) + a_t \quad (2.2.2)$$

kde $I[A]$ je indikačná funkcia s hodnotami $I[A] = 1$ (ak udalosť A nastane), $I[A] = 0$ (inak).

Všeobecný tvar dvojrežimového SETAR modelu s $AR(p_1)$ a $AR(p_2)$ v jednotlivých režimoch a oneskorením $d = 1$ má tvar

$$X_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \phi_{1,1}X_{t-1} + \dots + \phi_{p_1,1}X_{t-p_1} + a_t & \text{ak } X_{t-1} \leq c \\ \phi_{0,2} + \phi_{1,2}X_{t-1} + \dots + \phi_{p_2,2}X_{t-p_2} + a_t & \text{ak } X_{t-1} > c \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Niekedy je potrebné uvažovať viac ako 2 režimy. V tomto prípade rozlišujeme situácie, kedy sú režimy charakterizované jednou premennou alebo kombináciou viacerých premenných. V prvom prípade za predpokladu existencie m režimov treba ešte definovať $m+1$ konštant c_0, c_1, \dots, c_m , pre ktoré platí $-\infty = c_0 < c_1 < \dots < c_m = \infty$. Model SETAR s $AR(1)$ vo všetkých režimoch má potom tvar

$$X_t = \phi_{0,j} + \phi_{1,j}X_{t-1} + a_t \quad \text{ak } c_{j-1} < X_{t-d} \leq c_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.2.4)$$

Model, v ktorom sú režimy (popísané $AR(1)$) určené dvomi premennými, napr. X_{t-1} a X_{t-2} , má za predpokladu prahových hodnôt c_1 a c_2 ($c_1 < c_2$) tvar

$$X_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \phi_{1,1}X_{t-1} + a_t & \text{ak } X_{t-1} \leq c_1 & a & X_{t-2} \leq c_2 \\ \phi_{0,2} + \phi_{1,2}X_{t-1} + a_t & \text{ak } X_{t-1} \leq c_1 & a & X_{t-2} > c_2 \\ \phi_{0,3} + \phi_{1,3}X_{t-1} + a_t & \text{ak } X_{t-1} > c_1 & a & X_{t-2} \leq c_2 \\ \phi_{0,4} + \phi_{1,4}X_{t-1} + a_t & \text{ak } X_{t-1} > c_1 & a & X_{t-2} > c_2 \end{cases} \quad (2.2.5)$$

2.2.1.2 Modely STAR (Smooth Transition Autoregressive)

Pri modeli SETAR daného vzťahmi (2.2.1) a (2.2.2) predpokladáme, že hranica medzi dvomi režimami je daná určitou hodnotou premennej q_t . Pretože je indikačná funkcia $I(q_t > c)$ v modeli (2.2.2) nespojitá, je prechod z jedného režimu do druhého okamžitý (skokový). Nahradením tejto funkcie spojitou funkciou $F(q_t; \delta, c)$, ktorá

s rastúcim q_t hladko prechádza od 0 do 1 sa docieli to, že prechod z jedného režimu do druhého je plynulý. Funkciu $F(q_t; \delta, c)$ nazývame *prechodová funkcia* (funkcia prechodu). Dvojrežimový model STAR s AR(1) v obidvoch režimoch a indikačnou premennou $q_t = X_{t-1}$ sa dá vyjadriť v tvare

$$X_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1} X_{t-1}) [1 - F(X_{t-1}; \delta, c)] + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2} X_{t-1}) F(X_{t-1}; \delta, c) + a_t \quad (2.2.6)$$

Ako funkcia prechodu $F(q_t; \delta, c)$ sa často používa logistická funkcia

$$F(q_t; \delta, c) = \frac{1}{1 + \exp(-\delta(q_t - c))}, \quad \delta > 0 \quad (2.2.7)$$

Model sa potom označuje ako *LSTAR*. Parameter c je tu interpretovaný ako *prah* medzi dvomi režimami zodpovedajúcimi hodnotám funkcie prechodu $F(q_t; \delta, c) = 0$ a $F(q_t; \delta, c) = 1$. Parameter δ sa nazýva *parameter vyhladzovania (smoothness parameter)* a určuje *rýchlosť prechodu* z jedného režimu do druhého. Ak je hodnota δ veľmi veľká ($\delta \rightarrow \infty$), prechod je takmer okamžitý a logistická funkcia sa správa veľmi podobne ako indikačná funkcia $I[A]$. Ak hodnota parametra $\delta \rightarrow 0$, hodnota logistickej funkcie nadobúda konštantnú hodnotu $1/2$, $F(q_t; 0, c) = 1/2$ a model sa redukuje na lineárny model. Limitné stavy logistickej funkcie sú $\lim_{q_t \rightarrow -\infty} F(q_t, \delta, c) = 0$ a $\lim_{q_t \rightarrow +\infty} F(q_t, \delta, c) = 1$, pričom $F(c; \delta, c) = 1/2$.

Ako funkcia prechodu $F(q_t; \delta, c)$ sa používa aj exponenciálna funkcia

$$F(q_t; \delta, c) = \left(1 - \exp(-\delta(q_t - c)^2)\right), \quad \delta > 0. \quad (2.2.8)$$

Model sa potom označuje ako *ESTAR*. Limitné stavy logistickej funkcie sú $\lim_{q_t \rightarrow -\infty} F(q_t, \delta, c) = 0$ a $\lim_{q_t \rightarrow +\infty} F(q_t, \delta, c) = 1$. Platí $F(q_t, \delta, c) = 0$ pre $q_t = c$ a exponenciálna funkcia je symetrická pre $q_t - c$. Podstatnou vlastnosťou exponenciálnej funkcie je, že je rovná 0 pre $\delta \rightarrow 0$ aj $\delta \rightarrow \infty$, teda v obidvoch prípadoch sa ESTAR model redukuje na lineárny model.

Podobne ako model SETAR, aj model STAR sa dá zovšeobecniť tak, že sa predpokladajú v jednotlivých režimoch modely $AR(p_1)$ a $AR(p_2)$. Pri oneskorení $d = 1$ má tento model tvar

$$X_t = (\phi_{0,1} + \phi_{1,1}X_{t-1} + \dots + \phi_{p_1,1}X_{t-p_1})[1 - F(X_{t-1}; \delta, c)] + (\phi_{0,2} + \phi_{1,2}X_{t-1} + \dots + \phi_{p_2,2}X_{t-p_2})F(X_{t-1}; \delta, c) + a_t \quad (2.2.9)$$

Ďalším zovšeobecnením modelov z triedy STAR je N-režimový STAR model pre $N > 2$. Ak označíme $p = \max(p_1, \dots, p_N)$, $Y_t = (1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})'$ a $\Phi_j = (\phi_{0,j}, \phi_{1,j}, \dots, \phi_{p,j})'$ pre $j = 1, 2, \dots, N-1$; c_1, \dots, c_{N-1} prahové hodnoty medzi režimami a $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-1}$ parametre určujúce rýchlosť prechodu, model má tvar:

$$X_t = \Phi_1' \mathbf{x}_t + (\Phi_2 - \Phi_1)' Y_t F_1(X_{t-d}; \delta_1, c_1) + (\Phi_3 - \Phi_2)' Y_t F_2(X_{t-d}; \delta_2, c_2) + \dots + (\Phi_N - \Phi_{N-1})' Y_t F_{N-1}(X_{t-d}; \delta_{N-1}, c_{N-1}) + a_t,$$

Pri konštrukcii modelov SETAR a STAR vzniká otázka, ako určiť rády modelov a prahové premenné. Pri odpovedi na tieto otázky nám pomôžu modifikované informačné kritériá AIC a BIC.

SETAR

Tong v [21] navrhol informačné kritériá na určenie rádov p_j modelov $AR(p_j)$ jednotlivých režimov, $j = 1, \dots, N$ a prahovej premennej (resp. premenných) pre SETAR modely s N režimami. Prvým kritériom je AIC (z angl. Akaike's information criterion) v tvare:

$$AIC(p_1, \dots, p_N) = \sum_{j=1}^N (T_j \ln \hat{\sigma}_j^2 + 2(p_j + 1)),$$

kde $T_j, j = 1, 2, \dots, N$, je počet pozorovaní v j -tom režime, pričom $\sum_{j=1}^N T_j = n$, kde n je

počet pozorovaní a $\hat{\sigma}_j^2, j = 1, 2, \dots, N$, je reziduálny rozptyl v j -tom režime. Druhé informačné kritérium je uvedené napr. v [2] a označuje sa BIC (z angl. Bayesian information criterion):

$$BIC(p_1, \dots, p_N) = \sum_{j=1}^N (T_j \ln \hat{\sigma}_j^2 + (p_j + 1) \ln T_j).$$

Je zrejmé, že vhodný model bude zodpovedať najnižším hodnotám informačných kritérií.

STAR

Pre modely STAR má AIC tvar:

$$AIC(p_1, \dots, p_N) = \sum_{j=1}^N (T_j \ln \hat{\sigma}_j^2 + 2(p_j + 1)),$$

kde podľa [3] $T_j = \sum_{t=1}^n (F_{j-1,t} - F_{j,t})$, pričom $F_{j,t}$ je prechodová funkcia z $(j-1)$ -ho do j -teho režimu, pričom $F_{0,t} = 1$ a $F_{N,t} = 0$. Druhé kritérium má tvar:

$$BIC(p_1, \dots, p_N) = \sum_{j=1}^N (T_j \ln \hat{\sigma}_j^2 + (p_j + 1) \ln T_j).$$

Tvorba SETAR a STAR modelov je detailne popísaná napr. v knihe [2]. Nebudeme sa ňou teda teoreticky zaoberať, nakoľko hlavnou náplňou tejto práce sú MSW modely.

2.2.2 Modely s režimami určenými nepozorovateľnými veličinami

Modely MSW - základný popis a využitie

Použitie:

- Tieto modely neposkytujú len zmysluplnú cestu na modelovanie časových radov podmienených zmenami v režime, ale tiež, pomocou vhodných filtrujúcich a vyhladzujúcich algoritmov, vytvárajú optimálne závery o nepozorovateľných stavoch v každom bode v rámci vzorky.
- Modely s premenlivými režimami sú stále značne využívané na modelovanie agregovaných makroekonomických časových radov, napríklad agregovaný výstup a priemyselná produkcia, kde ukazujú radikálne odlišné správanie počas období expanzie a recesie.
- MSW modely boli úspešne použité na fitovanie množstva ekonomických a finančných časových radov, napríklad úrokovej miery, výmenných kurzov, výdavkov na spotrebu a iných.
- Je ešte množstvo iných neekonomických aplikácií, spomenieme aspoň jednu – využívajú sa pri rozpoznávaní reči [16].

Táto trieda modelov vychádza z predpokladu, že daný režim je určený nejakým nepozorovateľným stochastickým procesom, ktorý môžeme označiť ako $\{S_t\}$. Z toho vyplýva, že jednotlivé režimy nie je možné identifikovať presne, ale len s určitou pravdepodobnosťou. V prípade dvoch režimov môže proces $\{S_t\}$ nadobúdať len hodnoty 1

a 2. Ak budeme vychádzať z modelu AR(1), potom je model s režimami určenými nepozorovateľnými veličinami

$$X_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \phi_{1,1}X_{t-1} + a_t & ak \quad S_t = 1 \\ \phi_{0,2} + \phi_{1,2}X_{t-1} + a_t & ak \quad S_t = 2 \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Model sa dá zapísať aj zjednodušene

$$X_t = \phi_{0,S_t} + \phi_{1,S_t}X_{t-1} + a_t \quad pre \quad S_t = 1,2 \quad (2.2.11)$$

Aby bol model (2.2.10), resp. (2.2.11) kompletný, musí byť špecifikovaný proces $\{S_t\}$. Hamilton [12] prišiel s predstavou, že tento proces je Markovov proces prvého rádu, alebo MSW model. Predpokladá sa tu, že režim S_t závisí len na režime S_{t-1} . Model (2.2.10), resp. (2.2.11) je kompletný, ak sú definované pravdepodobnosti prechodu z jedného stavu do druhého

$$P(S_t = 1 | S_{t-1} = 1) = p_{11}$$

$$P(S_t = 2 | S_{t-1} = 1) = p_{12}$$

$$P(S_t = 1 | S_{t-1} = 2) = p_{21}$$

$$P(S_t = 2 | S_{t-1} = 2) = p_{22}$$

Pravdepodobnosť prechodu zo stavu i v čase $t-1$ do stavu j v čase t v Markovovom reťazci, resp. pravdepodobnosť prechodu z režimu i v čase $t-1$ do režimu j v čase t v modeli časového radu je rovná p_{ij} . Platia rovnice $p_{11} + p_{12} = 1$ a $p_{21} + p_{22} = 1$. Nepodmienené pravdepodobnosti, že model je v čase t v danom režime, odvodil Hamilton ([11], [12]) ako vlastný vektor odpovedajúci vlastnému číslu $\lambda = 1$ matice

$$\begin{pmatrix} p_{11} & 1 - p_{22} \\ 1 - p_{11} & p_{22} \end{pmatrix}:$$

$$P(S_t = 1) = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}} \quad (2.2.12)$$

$$P(S_t = 2) = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{22}} \quad (2.2.13)$$

Pretože modelovanie časových radov pomocou MSW modelov je hlavnou náplňou tejto práce, budeme sa im podrobne venovať v nasledujúcej kapitole.

3 Markovovské modely s premenlivými režimami (MSW modely)

3.1 Diskrétné Markovovské procesy –základný popis

Uvažujme systém, ktorý môže byť opísaný v ľubovoľnom čase, a nachádzajúci sa v každom čase v jednom z N rozličných stavov, S_1, S_2, \dots, S_N , tvoriacich množinu M , ako je ilustrované na obrázku (kde $N = 5$ pre zjednodušenie)

V pravidelne rozložených diskretných časoch systém prekoná zmenu stavu (alebo sa vráti späť do rovnakého stavu) podľa množiny pravdepodobností spojenými s daným stavom. Označíme časové okamihy spojené so zmenami stavu ako $t = 1, 2, \dots$, a aktuálny stav v čase t ako q_t . V špeciálnom prípade diskretných Markovovských procesov 1. rádu je dôležitý len súčasný a predchádzajúci stav, a teda opis pravdepodobnosti je skrátenej na

$$P(q_t = S_j | q_{t-1} = S_i) = p_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (3.1.1)$$

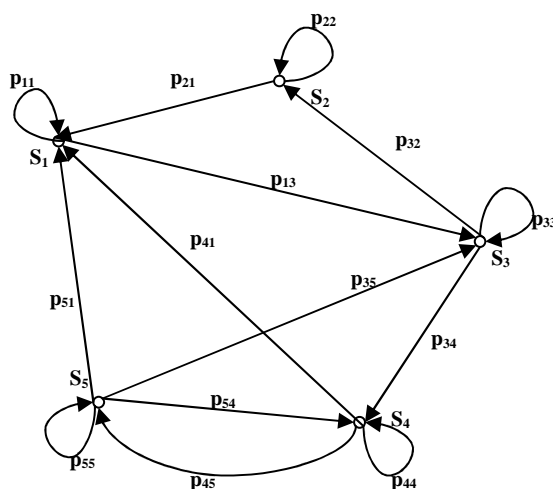
pričom platí, že

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^N p_{ij} = 1. \quad (3.1.2)$$

Tento stochastický proces nazývame aj *pozorovateľný Markovovský proces*, pretože výstup procesu je v každom časovom okamihu množina stavov, kde každý stav korešponduje s fyzikálnou (pozorovateľnou) udalosťou.

Príklad

Uvažujme jednoduchý 3-stavový Markovovský model počasia. Predpokladajme, že raz za deň (napr. na poludnie) je sledované počasia, ktoré sa môže nachádzať v jednom z nasledujúcich 3 stavov



Stav 1: dážď (alebo sneh) – S_1

Stav 2: zamračené bez zrážok – S_2

Stav 3: slnečno – S_3

Predpokladajme, že počasie v deň t je charakterizované pomocou jedného z týchto 3 stavov a že matica \mathbf{P} pravdepodobností prechodov (tzv. *prechodová matica*) medzi stavmi je

$$\mathbf{P} = \{p_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Nech počasie v prvý deň ($t = 1$) je v stave 3 (slnečno). Môžeme si položiť otázku: Aká je pravdepodobnosť (podľa nami definovaného modelu), že počas nasledujúcich 7 dní bude počasie slnečno-slnečno-dážď-dážď-slnečno-zamračené-slnečno? Formálnejšie, definujeme postupnosť pozorovaní O ako $O = \{S_3, S_3, S_3, S_1, S_1, S_3, S_2, S_3\}$ zodpovedajúce $t = 1, 2, \dots, 8$ a chceme zistiť pravdepodobnosť O , danú modelom. Táto pravdepodobnosť môže byť vyjadrená (a odhadnutá) ako

$$\begin{aligned} P(O|Model) &= P[S_3, S_3, S_3, S_1, S_1, S_3, S_2, S_3|Model] = \\ &= P[S_3] \cdot P[S_3|S_3] \cdot P[S_3|S_3] \cdot P[S_1|S_3] \cdot P[S_1|S_1] \cdot P[S_3|S_1] \cdot P[S_2|S_3] \cdot P[S_3|S_2] = \\ &= \pi_3 \cdot p_{33} \cdot p_{33} \cdot p_{31} \cdot p_{11} \cdot p_{13} \cdot p_{32} \cdot p_{23} = \\ &= 1 \cdot (0.8) \cdot (0.8) \cdot (0.1) \cdot (0.4) \cdot (0.3) \cdot (0.1) \cdot (0.2) = \\ &= 1.536 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

kde používame zápis

$$\pi_i = P[q_1 = S_i], \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.1.3)$$

na označenie počiatkových (nepodmienených) pravdepodobností stavov.

Iný zaujímavý problém, na ktorý sa môžeme spýtať (a odpovedať pomocou modelu) je: Predpokladajme, že model je v známom stave S_i . Aká je pravdepodobnosť, že zostane v tomto stave najbližších presne d dní? Táto pravdepodobnosť môže byť odhadnutá ako pravdepodobnosť postupnosti pozorovaní

$$O = \left\{ S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_3}, \dots, S_{i_d}, S_{j_{d+1}} \neq S_{i_d} \right\}$$

daná modelom, čo je

$$P(O|Model, q_1 = S_i) = (p_{ii})^{d-1} (1 - p_{ii}) = p_i(d) \quad (3.1.4)$$

Miera $p_i(d)$ je (diskrétna) funkcia hustoty pravdepodobnosti zotrvania systému d časových okamihov po sebe v stave S_i . Táto exponenciálna hustota zotrvania je charakteristická pre trvanie stavu v Markovovskom reťazci. Vychádzajúc z $p_i(d)$, môžeme ľahko vypočítať očakávaný počet pozorovaní (zotrvanie v stave), podmienený začatím v tomto stave, ako

$$\bar{d}_i = \sum_{d=1}^{\infty} d \cdot p_i(d) = \sum_{d=1}^{\infty} d \cdot (p_{ii})^{d-1} (1 - p_{ii}) = \frac{1 - p_{ii}}{(p_{ii} - 1)^2} = \frac{1}{1 - p_{ii}} \quad (3.1.5)$$

Teda očakávaný počet dní, kedy bude nepretržité slnečné počasie, je podľa modelu $1/0.2 = 5$, pre zamračené počasie to je 2.5 dní a pre dážď 1.67 dňa.

3.2 Tvorba MSW modelov

Pri tvorbe nelineárnych modelov sa vo všeobecnosti prijíma zásada “od špeciálneho ku všeobecnému”. Vhodné je začínať jednoduchšími lineárnymi modelmi a potom, keď nie sú splnené podmienky pre ich použitie, prejsť k modelom všeobecnejším a tiež komplexnejším, akými sú modely nelineárne. Odporúčajú sa nasledovné kroky (pozri napr. [2]):

1. Pre daný časový rad určiť vhodný lineárny model typu AR(p).
2. Otestovať nulovú hypotézu linearity modelu oproti alternatívnej hypotéze nelinearity modelu.
3. Odhadnúť parametre zvoleného nelineárneho modelu.
4. Overiť vhodnosť modelu diagnostickými testami.
5. Ak je potrebné, modifikovať model.
6. Použiť model na popisné účely a predikciu.

Čo potrebujeme odhadnúť pri MSW?

- počet stavov N , t.j. $M = \{1, 2, \dots, N\}$, (my budeme uvažovať **$N = 2$, resp. 3**)
- rozdelenie pravdepodobnosti prechodu z jedného stavu do druhého

$$p_{ij} = P(q_t = j | q_{t-1} = i) \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Pretože predpokladáme *ergodický proces*, t.j. z každého stavu i môže nastať ľubovoľný stav j (vrátane stavu i), $j = 1, 2, \dots, N$, predpokladáme $p_{ij} > 0$

- počiatkové stavové pravdepodobnosti

$$\boldsymbol{\pi} = \{\pi_i\} \quad \pi_i = P(q_1 = i) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- autoregresné parametre a rozptyly reziduálnej zložky v jednotlivých režimoch, t.j.

$$\Phi_i = (\phi_{i0}, \phi_{i1}, \dots, \phi_{ip_i})', \quad \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- odhad postupnosti stavov pre daný časový rad, t.j. q_1, q_2, \dots, q_n . Tu budeme odhadovať pravdepodobnosť, s ktorou nastane stav j v čase t . Nakoniec sa v každom čase t vyberie stav s najväčšou pravdepodobnosťou.

Pri testovaní linearity oproti nelinearite typu MSW je potrebné poznať odhad parametrov MSW modelu. Preto v tomto prípade začíname tvorbu modelu odhadom parametrov.

3.2.1 Odhad parametrov modelu MSW

Parametre MSW modelu môžeme odhadnúť pomocou metódy maximálnej vierohodnosti. Vzhľadom na to, že Markovovský proces q_t je nepozorovateľný, problém odhadu je veľmi neštandardný. Cieľom tejto odhadovacej procedúry nie je len získať odhady autoregresných parametrov, rozptylov nesystematickej zložky v rôznych režimoch a odhady pravdepodobností prechodu z jedného režimu do druhého, ale aj odhady pravdepodobností, s ktorými nastane istý stav v jednotlivých časoch.

Uvažujme dvojrežimový model MSW v tvare

$$X_t = \begin{cases} \phi_{0,1} + \phi_{1,1}X_{t-1} + \dots + \phi_{p,1}X_{t-p} + a_t & \text{ak } q_t = 1 \\ \phi_{0,2} + \phi_{1,2}X_{t-1} + \dots + \phi_{p,2}X_{t-p} + a_t & \text{ak } q_t = 2 \end{cases} \quad (3.2.1.1)$$

ktorý sa dá zapísať aj ako

$$X_t = \phi_{0,q_t} + \phi_{1,q_t}X_{t-1} + \dots + \phi_{p,q_t}X_{t-p} + a_t \quad \text{ak } q_t = 1, 2 \quad (3.2.1.2)$$

kde $\{a_t\}$ je proces striktného bieleho šumu, kde jednotlivé náhodné veličiny a_t majú normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a s rozptylom σ_a^2 , t.j. $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$. Potom pravdepodobnostné rozdelenie veličiny X_t za podmienky režimu q_t a minulej

informácie obsiahnutej v množine Ω_{t-1} je normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\phi_{0,q_t} + \phi_{1,q_t} X_{t-1} + \dots + \phi_{p,q_t} X_{t-p}$ a rozptylom σ^2 s hustotou pravdepodobnosti:

$$f(X_t / q_t = j, \Omega_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(X_t - \mathbf{Y}_t' \boldsymbol{\Phi}_j)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.2.1.3)$$

kde

$$\boldsymbol{\Phi}_j = (\phi_{0,j}, \phi_{1,j}, \dots, \phi_{p,j})' \text{ pre } j = 1, 2$$

$$\mathbf{Y}_t = (1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})' \text{ a } \boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\Phi}'_1, \boldsymbol{\Phi}'_2, p_{11}, p_{22}, \sigma^2)'$$

Poznamenajme, že parametre p_{11} a p_{22} kompletne definujú všetky prechodové pravdepodobnosti, pretože $p_{12} = 1 - p_{11}$ a $p_{21} = 1 - p_{22}$.

Pretože stav q_t nie je pozorovateľný, logaritmus podmienenej vierohodnostnej funkcie pre t -te pozorovanie $l_t(\boldsymbol{\theta})$ je daný ako logaritmus hustoty náhodnej premennej X_t podmienenej len históriou Ω_{t-1} :

$$l_t(\boldsymbol{\theta}) = \ln f(X_t / \Omega_{t-1}; \boldsymbol{\theta}). \quad (3.2.1.4)$$

Hustotu $f(X_t / \Omega_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$ získame ako združenú hustotu X_t a q_t , teda:

$$f(X_t / \Omega_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^2 f(X_t / q_t = j, \Omega_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \cdot P(q_t = j / \Omega_{t-1}; \boldsymbol{\theta}) \quad (3.2.1.5)$$

Vzťah (3.2.1.5) vyplýva zo známeho vzťahu pre pravdepodobnosť prieniku 2 javov

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B).$$

Aby sme vypočítali hustotu $f(X_t / \Omega_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$, potrebujeme najprv vypočítať podmienené pravdepodobnosti $P(q_t = j / \Omega_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$, t.j. pravdepodobnosť, že t -tá hodnota časového radu bola generovaná režimom j za podmienky minulej informácie Ω_{t-1} a znalosti parametrov $\boldsymbol{\theta}$. Najjednoduchšie odhady sú tzv. *predikované pravdepodobnosti*. Predpokladáme pri nich, že ak je známy režim, ktorý bol v čase $t-1$ a je známa história Ω_{t-1} , potom optimálna predpoveď pravdepodobnosti režimu, ktorý nastane v čase t je rovná prechodovým pravdepodobnostiam Markovovského procesu $\{q_t\}$. Odhady pravdepodobností

$P(q_t = j / \Omega_{t-1}; \boldsymbol{\theta})$ pre $j = 1, 2$ tvoria vektor rozmeru 2×1 , ktorý sa dá zapísať ako (pozri [12])

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1} = \begin{pmatrix} P(q_t = 1 | \Omega_{t-1}, \boldsymbol{\theta}) \\ P(q_t = 2 | \Omega_{t-1}, \boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix}. \quad (3.2.1.6)$$

Označme

$$\boldsymbol{\xi}_{t-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{ak } q_{t-1} = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{ak } q_{t-1} = 2 \end{cases} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} P_{11} & 1 - P_{22} \\ 1 - P_{11} & P_{22} \end{pmatrix}$$

Potom
$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1} = \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_{t-1}. \quad (3.2.1.7)$$

V praxi je režim, ktorý nastal v čase $t-1$, neznámy (q_t je nepozorovateľná premenná). Preto predikovanú pravdepodobnosť $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1}$ nahradíme pravdepodobnosťou, že každý režim nastane v čase t na základe informácií obsiahnutých v Ω_t a hodnote pozorovania v čase t :

$$P(q_t = j / \Omega_t; \boldsymbol{\theta}).$$

Tieto pravdepodobnosti (pre $j = 1, 2$) sa nazývajú *filtrované pravdepodobnosti* a vektorovo sa označujú ako $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t}$. Počítame ich iteračne:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t} = \begin{pmatrix} P(q_t = 1 | \Omega_t, \boldsymbol{\theta}) \\ P(q_t = 2 | \Omega_t, \boldsymbol{\theta}) \end{pmatrix} = \frac{\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1} \otimes \mathbf{f}_t}{\mathbf{1}'(\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1} \otimes \mathbf{f}_t)} \quad (3.2.1.8)$$

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t+1|t} = \mathbf{P}' \hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t} \quad (3.2.1.9)$$

pre $t = 1, \dots, n-1$, kde \mathbf{f}_t je vektor typu 2×1 , ktorý obsahuje podmienené hustoty dané vzťahom (3.2.1.3), $\mathbf{1}$ je vektor jednotiek typu 2×1 , \otimes označuje násobenie každého prvku prvého vektora odpovedajúcim prvkom druhého vektora a \mathbf{P} označuje maticu obsahujúcu pravdepodobnosti prechodu. K iteračnému výpočtu potrebujeme počiatočnú (štartovaciu) hodnotu $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{1|0}$. Môže to byť konštantný vektor, ktorého prvky majú súčet 1, alebo ho môžeme dať medzi parametre, ktoré musíme odhadnúť.

Na základe odhadov pravdepodobností $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t-1}$ a $\hat{\boldsymbol{\xi}}_{t|t}$ sa tiež dajú odhadnúť pravdepodobnosti (tzv. *vyhladené pravdepodobnosti*), že v čase t nastanú režimy $j = 1$ alebo $j = 2$ za predpokladu všetkých informácií, ktoré sú k dispozícii, t.j. $P(q_t = j / \Omega_n; \boldsymbol{\theta})$

pre $j = 1, 2$ a znalosti parametrov θ . Vektor týchto odhadov pravdepodobností, t.j. $\hat{\xi}_{t|n}$, sa dá vypočítať ako

$$\hat{\xi}_{t|n} = \hat{\xi}_{t|t} \otimes (\mathbf{P}' [\hat{\xi}_{t+1|n} \div \hat{\xi}_{t+1|t}]) \quad (3.2.1.10)$$

kde \div znamená delenie každého prvku prvého vektora odpovedajúcim prvkom druhého vektora.

Algoritmus pracuje spätne, t.j. ako prvé počítame $\hat{\xi}_{n|n}$ podľa (3.2.1.8), (3.2.1.9) a (3.2.1.10) pre $t = n-1, n-2, \dots$

Potrebuje ešte odhadnúť pravdepodobnosti prechodu systému zo stavu i v čase $t-1$ do stavu j v čase t . Hamilton v [12] ukázal, že maximálne vierohodné odhady pravdepodobností prechodu sú dané vzťahom

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=2}^n P(q_t = j, q_{t-1} = i / \Omega_n; \hat{\theta})}{\sum_{t=2}^n P(q_{t-1} = i / \Omega_n; \hat{\theta})} \quad (3.2.1.11)$$

kde $\hat{\theta}$ je maximálne vierohodný odhad θ . Na výpočet zdefinujeme dve pomocné funkcie

$$\delta(t, i, j) = P(q_t = j, q_{t-1} = i | \Omega_n, \hat{\theta}) = \frac{\hat{\xi}_{t|n} \cdot \hat{p}_{ij}}{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \hat{\xi}_{t|n} \hat{p}_{ij}} \quad (3.2.1.12)$$

$$\gamma_t(j) = \sum_{i=1}^2 \delta(t, i, j) \quad (3.2.1.13)$$

Funkcia (3.2.1.13) počíta pravdepodobnosť, že systém bude v čase t v stave j (pri danom modeli). Keď spočítame $\gamma_t(j)$ cez t od 1 po $n-1$, dostaneme očakávaný počet prechodov zo stavu j . Ekvivalentne keď spočítame $\delta(t, i, j)$ cez t od 1 po $n-1$ dostaneme, koľkokrát bude systém v stave j , ak v predchádzajúcom čase $t-1$ bol v stave i :

$$\sum_{t=1}^{n-1} \gamma_t(j) = \text{očakávaný počet prechodov zo stavu } j$$

$$\sum_{t=1}^{n-1} \delta(t, i, j) = \text{očakávaný počet prechodov zo stavu } i \text{ do } j$$

Potom

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} \delta(t, i, j)}{\sum_{t=1}^{n-1} \gamma_t(j)}.$$

Pomocou funkcie $\gamma_t(j)$ môžeme odhadnúť aj očakávanú frekvenciu výskytu stavu j v čase

$$t = 1: \quad \hat{\pi}_j = \gamma_1(j).$$

Hamilton ([12]) tiež ukázal, že pre tieto odhady platí:

$$\sum_{t=1}^n (X_t - \mathbf{Y}_t' \hat{\Phi}_t) \mathbf{Y}_t P(q_t = j / \Omega_n; \hat{\theta}) = 0 \quad j = 1, 2 \quad (3.2.1.14)$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^2 (X_t - \mathbf{Y}_t' \hat{\Phi}_j)^2 P(q_t = j / \Omega_n; \hat{\theta}) \quad (3.2.1.15)$$

Zo vzťahu (3.2.1.14) vyplýva, že $\hat{\Phi}_j$ je odhad odpovedajúci metóde vážených najmenších štvorcov regresie pozorovania X_t na vektor \mathbf{Y}_t , kde váhou je druhá odmocnina pravdepodobnosti, že pozorovanie v čase t je generované režimom j :

$$\sqrt{P(q_t = j | \Omega_n, \hat{\theta})}$$

Odhad $\hat{\Phi}_j$ sa získa ako

$$\hat{\Phi}_j = \left(\sum_{t=1}^n \mathbf{Y}_t(j) \mathbf{Y}_t(j)' \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^n \mathbf{Y}_t(j) X_t(j) \right) \quad (3.2.1.16)$$

kde $X_t(j) = X_t \sqrt{P(q_t = j / \Omega_n; \hat{\theta})}$

$$\mathbf{Y}_t(j) = \mathbf{Y}_t \sqrt{P(q_t = j / \Omega_n; \hat{\theta})}$$

Maximálne vierohodný odhad rozptylu reziduálnej zložky (3.2.1.15) je priemerom štvorcov rezíduí z *dvoch* regresíí odhadnutých váženou metódou najmenších štvorcov.

Iteračná procedúra odhadu parametrov modelu MSW spočíva v nasledujúcich krokoch. Pre dané štartovacie hodnoty vektora $\hat{\theta}^{(0)}$ sa ako prvé vypočítajú vyhladené pravdepodobnosti $\hat{\xi}_{t|n}$ pomocou vzťahov (3.2.1.8), (3.2.1.9) a (3.2.1.10). Tieto sa potom kombinujú s počiatočnými odhadmi prechodových pravdepodobností $\hat{p}_{ij}^{(0)}$, aby sme dostali nové odhady prechodových pravdepodobností $\hat{p}_{ij}^{(1)}$ zo vzťahu (3.2.1.11). Napokon sa

použijú vzťahy (3.2.1.14) a (3.2.1.15) na získanie odhadov autoregresných parametrov a reziduálneho rozptylu. Spoločne s novými odhadmi pravdepodobností prechodu sa tak získa nový odhad celého vektoru parametrov $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(1)}$, ktorý použijeme na odhad $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(2)}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(3)}$, Procedúru ukončíme, keď sa jednotlivé odhady líšia od seba už len minimálne, takže ich môžeme považovať za rovnaké. Je dokázané ([7]), že každá iterácia vedie k zvýšeniu hodnoty vierohodnostnej funkcie, čím je zaručené, že výsledné odhady sú maximálne vierohodné. Celý postup môžeme zovšeobecniť aj pre N režimov pre $N > 2$.

3.2.2 Identifikácia modelu

V predchádzajúcej časti sme predpokladali, že poznáme rád p v jednotlivých režimoch, čo však nemusí byť vždy pravda. Optimálny počet režimov obyčajne tiež nie je známy *a priori* a musí byť určený pomocou nejakého objektívneho kritéria. Pri výbere rádu p môžeme použiť PACF². Ako objektívne kritérium budeme používať Bayesovo informačné kritérium BIC modifikované pre N -stavový MSW model ([1]):

$$BIC_N = 2 \ln L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} | \Omega_n) + d_N \ln(n) \quad (3.2.2.1)$$

kde $L(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} | \Omega_n)$ je vierohodnostná funkcia pre časový rad Ω_n , počítaná pre maximálne vierohodné odhady vektora parametrov $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}$, d_N je počet nezávislých parametrov N -režimového MSW modelu a n je dĺžka časového radu. Hodnota $d_N = N^2 + N$.

Označme

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \pi_1 f(X_1 | q_1 = 1) \\ \vdots \\ \pi_N f(X_1 | q_1 = N) \end{pmatrix} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{N \times 1}$$

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} p_{11} f(X_t | q_t = 1) & \dots & p_{1N} f(X_t | q_t = N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} f(X_t | q_t = 1) & \dots & p_{NN} f(X_t | q_t = N) \end{pmatrix}_{N \times N}$$

² Parciálna autokorelačná funkcia

Potom $L(\hat{\theta}_{ML}|\Omega_n) = \mathbf{A}_1' \cdot \left(\prod_{t=2}^n \mathbf{A}_t \right) \cdot \mathbf{1}_N$

Vyberáme model s menším BIC.

3.2.3 Testovanie premenlivosti režimov modelu - testovanie linearity oproti nelinearite typu MSW.

Pre testovanie linearity oproti alternatíve nelinearity typu MSW sa používa *test vierohodnostným pomerom*, v ktorom sa testuje nulová hypotéza linearity, t.j.

$$H_0 : \Phi_1 = \Phi_2 \quad H_1 : \phi_{i,1} \neq \phi_{i,2}, i \in \{0,1,\dots,p\}, \text{ kde } p = \max(p_1, p_2).$$

Testovacie kritérium je

$$LR = L_{MSW} - L_{AR} \tag{3.2.3.1}$$

kde L_{MSW} a L_{AR} sú hodnoty logaritmov vierohodnostných funkcií zodpovedajúcich modelom MSW a AR. Za predpokladu platnosti nulovej hypotézy sú pravdepodobnosti prechodu p_{11} a p_{22} prebytočnými parametrami. Hansen ukázal ([14]), že štatistika (3.2.3.1) nemá štandardné pravdepodobnostné rozdelenie. Toto rozdelenie dokonca ani nemôže byť vyjadrené analyticky, ale jedine simulačne.

Pri simulačnom určovaní kritických hodnôt sa postupuje tak, že sa pomocou modelu AR(p) vygeneruje veľké množstvo umelých časových radov (minimálne 5000). Ďalej sa pre každý vygenerovaný časový rad odhadnú parametre modelov AR a MSW a určí sa hodnota testovacieho kritéria (3.2.3.1). Týmto spôsobom sa odhadne jeho rozdelenie a určia sa potrebné kritické hodnoty.

3.2.4 Diagnostické testy

Uvedieme si testy, ktoré odvodil Hamilton ([13][11]) . Sú to testy typu LM (Lagrange multiplier), ktorých výhodou je, že k ich konštrukcii je potrebný len odhad modelu za predpokladu platnosti nulovej hypotézy.

Testy sú založené na tzv. *skórovej* funkcii

$$h_t(\boldsymbol{\theta}) \equiv \frac{\partial \ln f(X_t | \Omega_{t-1}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad (3.2.4.1)$$

Hamilton ukázal, že pre dvojrežimový MSW model s AR(p) v oboch režimoch je skórová funkcia nasledovná:

$$h_t(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ln f(X_t | \Omega_{t-1}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \sum_{j=1}^2 \boldsymbol{\psi}_{j,t} \cdot P(q_t = j | \Omega_t) + \sum_{\tau=1}^{t-1} \sum_{j=1}^2 \boldsymbol{\psi}_{j,\tau} [P(q_t = j | \Omega_t) - P(q_t = j | \Omega_{t-1})] \quad (3.2.4.2)$$

kde $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\Phi}'_1, \boldsymbol{\Phi}'_2, \sigma^2)$ (teda bez pravdepodobností p_{11}, p_{22})

$$\boldsymbol{\psi}_{j,t} = \frac{\partial \ln f(X_t | \mathbf{Y}_t, q_t = j, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \quad (3.2.4.3)$$

Ak sú dáta skutočne generované dvojrežimovým MSW modelom s AR(p) v oboch režimoch, potom platí, že podmienená stredná hodnota (3.2.4.1) je nulová, t.j.

$$E[h_t(\boldsymbol{\theta}) | \Omega_{t-1}] = 0.$$

Dokázal to Hamilton v článku ([13]). V rovnakom článku je dokázané aj to, že $\{h_t(\boldsymbol{\theta})\}$ tvorí nepredikovateľný časový rad v tom zmysle, že $h_t(\boldsymbol{\theta})$ nemôžeme odhadnúť (predvídať) na základe informácie, ktorá je k dispozícii v čase $t-1$, napr. pomocou prvkov vektora $h_{t-1}(\boldsymbol{\theta})$. Dá sa dokázať, že rovnaké závery platia aj pre derivácie funkcie $\ln f(X_t | \Omega_{t-1}, \boldsymbol{\theta})$ podľa p_{11} a p_{22} . Z toho vyplýva, že funkciu (3.2.4.1) môžeme použiť pre konštrukciu rôznych diagnostických testov.

Autokorelácia rezíduí „naprieč“ režimami (vzájomná autokorelácia)

Vychádza sa z podmienenej hustoty pravdepodobnosti:

$$f(X_t | \mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, q_t = j, q_{t-1} = i, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[(X_t - \mathbf{Y}'_t \boldsymbol{\Phi}_j) - \rho(X_{t-1} - \mathbf{Y}'_{t-1} \boldsymbol{\Phi}_i)]^2}{2\sigma^2}}$$

Nulová hypotéza je, že rezíduá naprieč režimami nie sú korelované:

$$H_0: \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \quad \text{oproti} \quad H_1: \boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{0}$$

Dá sa dokázať, že platí

$$\begin{aligned}
h_t(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{\partial \ln f(X_t | \Omega_{t-1}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \\
&= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \psi_{t,j,i} P(q_t = j, q_{t-1} = i | \Omega_t) + \sum_{\tau=1}^{t-1} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \psi_{\tau,j,i} [P(q_\tau = j, q_{\tau-1} = i | \Omega_\tau) - P(q_\tau = j, q_{\tau-1} = i | \Omega_{\tau-1})]
\end{aligned} \tag{3.2.4.4}$$

kde

$$\psi_{t,j,i} = \left[\frac{\partial \ln f(X_t | \mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, q_t = j, q_{t-1} = i, \boldsymbol{\rho})}{\partial \boldsymbol{\rho}} \right]_{\boldsymbol{\rho}=\mathbf{0}} = \frac{(X_t - \mathbf{Y}_t' \boldsymbol{\Phi}_j)(X_{t-1} - \mathbf{Y}_{t-1}' \boldsymbol{\Phi}_i)}{2\sigma^2} \tag{3.2.4.5}$$

Testovacie kritérium má potom tvar

$$LM = \frac{\left(\sum_{t=1}^n h_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) \right)^2}{\sum_{t=1}^n h_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*)^2} \tag{3.2.4.6}$$

kde $\hat{\boldsymbol{\theta}}^*$ je maximálne virohodný odhad parametrov $\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = (\boldsymbol{\Phi}'_1, \boldsymbol{\Phi}'_2, p_{11}, p_{22}, \sigma^2, \boldsymbol{\rho})'$ za predpokladu platnosti nulovej hypotézy, t.j. $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$. Toto testovacie kritérium má za platnosti H_0 asymptoticky rozdelenie $\chi^2(1)$.

Autokorelácia rezíduí vo vnútri i-teho režimu

V tomto prípade vychádzame z podmienenej hustoty pravdepodobnosti v tvare

$$f(X_t | \mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, q_t = i, q_{t-1} = i, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[(X_t - \mathbf{Y}_t' \boldsymbol{\Phi}_i) - \rho(X_{t-1} - \mathbf{Y}_{t-1}' \boldsymbol{\Phi}_i)]^2}{2\sigma^2}}$$

pre $i = 1, 2$.

Testovacie kritérium je opäť

$$LM = \frac{\left(\sum_{t=1}^n h_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*) \right)^2}{\sum_{t=1}^n h_t(\hat{\boldsymbol{\theta}}^*)^2} \tag{3.2.4.7}$$

a za predpokladu platnosti nulovej hypotézy, t.j. $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ má asymptoticky rozdelenie $\chi^2(1)$.

Test ostávajúcej nelinearity

Dvojurežimový model je v prípade, že $\Phi_1 \neq \Phi_2$. Trojrežimový model získame pridaním tretieho režimu. Budeme teda testovať

$$H_0 : \Phi_2 = \Phi_3 \quad \text{oproti} \quad H_1 : \phi_{i,2} \neq \phi_{i,3}, \quad i \in \{0,1,\dots,p\}$$

Testovacie kritérium je

$$LR = L_{MSW_{3r}} - L_{MSW_{2r}} \quad (3.2.4.8)$$

kde $L_{MSW_{3r}}$ a $L_{MSW_{2r}}$ sú hodnoty logaritmov vierohodnostných funkcií odpovedajúcich dvojurežimovému a trojrežimovému MSW modelu.

Kritické hodnoty testovacej štatistiky opäť musíme určiť simuláciou. Pomocou modelov AR vygenerujeme veľké množstvo umelých časových radov. Pre každý vygenerovaný časový rad odhadneme parametre dvoj- a trojrežimových MSW modelov a určíme hodnoty testovacieho kritéria LR. Ďalej už postupujeme rovnako ako pri teste linearity.

3.2.5 Konštrukcia bodových predpovedí na základe MSW modelov

Konštrukcia bodových predpovedí modelov MSW sa skladá z predpovede X_{T+h} v závislosti od režimu, ktorý nastane v čase $T+h$, t.j. v závislosti na režime q_{T+h} a z predpovede pravdepodobnosti, s ktorou tento režim nastane. Pre predpoveď s horizontom *jedna* teda platí, že

$$X_T(1) = E(X_{T+1} / q_{T+1} = 1, \Omega_T) P(q_{T+1} = 1 / \Omega_T, \hat{\theta}) + E(X_{T+1} / q_{T+1} = 2, \Omega_T) P(q_{T+1} = 2 / \Omega_T, \hat{\theta}) \quad (3.2.5.1)$$

kde

$$E(X_{T+1} | q_{T+1} = j, \Omega_T) = \phi_{0,j} + \phi_{1,j} X_T + \dots + \phi_{p,j} X_{T-p+1}$$

a $P(q_{T+1} = j / \Omega_T, \hat{\theta})$, $j = 1, 2$ počítame pomocou predikovaných pravdepodobností daných vzťahmi (3.2.1.6) a (3.2.1.7).

4 Momenty MSW modelu

Jednoduchý autoregresný MSW model p -teho rádu s normálne rozloženými prírastkami je

$$X_t = \mu_{q_t} + \sum_{j=1}^p \phi_j (X_{t-j} - \mu_{q_{t-j}}) + \sigma_{q_t} a_t \quad (4.0.1)$$

kde X_t , $t = 1, \dots, n$ je skúmaný časový rad, $q_t = 1, 2, \dots, N$ označuje (nepozorovateľnú) stavovú premennú, generovanú ergodickým N -stavovým Markovovským procesom, $\mu_{q_t}, \sigma_{q_t}, q_t \in M = \{1, 2, \dots, N\}$ sú reálne konštanty a a_t je náhodná premenná s nulovou strednou hodnotou a jednotkovým rozptylom, ktorá je identicky a nezávisle rozložená v čase (proces typu i.i.d). Predpokladáme, že počet stavov N je konečné číslo, $\mu_{q_t} = \phi_{0,q_t}$ v (3.2.1.2) a koeficienty ϕ_j , $j = 1, \dots, p$ sú stavovo nezávislé. Aby sme mali v momentoch zahrnuté aj rozptyly pre jednotlivé režimy, prírastok a_t vynásobíme smerodajnou odchýlkou σ_{q_t} .

Postupom uvedeným v [19] odvodíme momenty pre prípad $N = 3$. Nech vektor $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)'$ je vektor pravdepodobností ustálených stavov (steady-state) typu 3×1 ,

pre ktorý platí rovnosť $\mathbf{P}'\pi = \pi$, kde $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ je prechodová matica typu,

(ale aj $\pi' \mathbf{P}^i = \pi'$, $i = 1, 2, \dots$). Vektor π predstavuje nepodmienené pravdepodobnosti, v akom režime sa proces nachádza v ľubovoľnom čase.

Autoregresný stavovo závislý MSW model p -teho rádu s normálne rozloženými prírastkami je

$$X_t = \mu_{q_t} + \sum_{j=1}^p \phi_{j,q_t} (X_{t-j} - \mu_{q_{t-j}}) + \sigma_{q_t} a_t, \quad (4.0.2)$$

t.j. koeficienty autoregresného modelu sú stavovo závislé.

4.1 Jednoduchý autoregresný MSW

Uvažujme autoregresný model prvého rádu s normálne rozloženými prírastkami. Zo (4.0.1) vidíme, že ak $p = 1$, potom

$$X_t = \mu_{q_t} + \phi_1 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}) + \sigma_{q_t} a_t. \quad (4.1.1)$$

Po spätnej substitúcii dostaneme

$$X_t - \mu_{q_t} = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \sigma_{q_{t-i}} a_{t-i}. \quad (4.1.2)$$

Z predpokladu, že $E[a_{t-i}|q_t] = E[a_{t-i}] = 0$ vyplýva, že $E[X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}|q_{t-1}] = 0$. Preto sa prvý moment X_t nemení a $E[X_t] = \boldsymbol{\pi}' E[\mathbf{X}_t | \mathbf{q}_t] = \boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{\mu}_q$, kde $E[\mathbf{X}_t | \mathbf{q}_t]$ je vektor typu 3×1 , ktorého i -ty prvok je $E[X_t | q_t = i]$ a $\boldsymbol{\mu}_q = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)'$ je vektor typu 3×1 stredných hodnôt pre jednotlivé stavy.

Označme \mathbf{I}_3 jednotkovú maticu typu 3×3 , \otimes nech je operátor násobenia dvoch vektorov člen po člene a \mathbf{B} nech je 3×3 matica pravdepodobností prechodov pre „časovo - obrátený“ Markovov reťazec, ktorý sa pohybuje v čase nazad:

$$P(q_t = j | q_{t+1} = i) = b_{ij}, \quad 0 \leq b_{ij} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^3 b_{ij} = 1 \quad (4.1.3)$$

Platí

$$\begin{aligned} P(q_t = j \cap q_{t+1} = i) &= P(q_{t+1} = i | q_t = j) P(q_t = j) = \\ &= P(q_t = j | q_{t+1} = i) P(q_{t+1} = i) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

potom je „spätňá“ matica pravdepodobností prechodov \mathbf{B} spojená s „doprednými“ pravdepodobnosťami prechodov nasledovne

$$b_{ij} = p_{ji} \left(\frac{\pi_j}{\pi_i} \right), \quad (4.1.5)$$

pri predpokladoch $\pi_i > 0$ a $b_{ij} = 0$, ak stav i môže nastať, ale j nie. Ak proces túto podmienku nespĺňa, môžeme analýzu urobiť na podmnožine ustálených stavov, pre ktoré sú pravdepodobnosti kladné.

V nasledujúcom tvrdení vyjadríme výrazy pre druhý až štvrtý centrálny moment autoregresného markovového procesu prvého rádu pre 3 stavy ($q_t = 1, 2, 3$).

Tvrdenie 4.1 (druhý, tretí a štvrtý centrálny moment)

Predpokladajme, že $\{X_t\}$ je jednoduchý stacionárny autoregresný Gaussov MSW proces prvého rádu, pre ktorý platí

$$X_t = \mu_{q_t} + \phi_1(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}) + \sigma_{q_t} a_t, \quad |\phi_1| < 1 \quad a_t \sim i.i.d \quad N(0,1),$$

kde ϕ_1 je autoregresný koeficient, ktorý je nezávislý od stavu (rovnaký pre všetky 3 stavy). Označme μ nepodmienujúcu strednú hodnotu procesu $\{X_t\}$. Predpokladajme ďalej, že proces začal zo svojho ustáleného rozdelenia charakterizovaného vektorom nepodmienujúcich pravdepodobností $\boldsymbol{\pi}$. Potom pre varianciu (2. centrálny moment), šikmost' (3. centrálny moment) a špicatosť (4. centrálny moment) procesu $\{X_t\}$ platí:

$$E[(X_t - \mu)^2] = (\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \boldsymbol{\pi}_3) \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{1 - \phi_1^2} \\ \frac{\sigma_2^2}{1 - \phi_1^2} \\ \frac{\sigma_3^2}{1 - \phi_1^2} \end{pmatrix} \end{bmatrix},$$

$$E[(X_t - \mu)^3] = \boldsymbol{\pi}' \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} + \\ + 3\phi_1^2 \boldsymbol{\pi}' \begin{bmatrix} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{I}_3 - \phi_1^2 \mathbf{B})^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} + \\ + 3\boldsymbol{\pi}' \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$E[(X_t - \mu)^4] = \boldsymbol{\pi}' \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} + \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + 6\phi_1^2 \boldsymbol{\pi}' \left(\mathbf{B} \cdot (\mathbf{I}_3 - \phi_1^2 \mathbf{B})^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} + \\
& + 6\boldsymbol{\pi}' \left[\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right] + \\
& + \phi_1^4 \boldsymbol{\pi}' (\mathbf{I}_3 - \phi_1^4 \mathbf{B})^{-1} \left[3 \begin{pmatrix} \sigma_1^4 \\ \sigma_2^4 \\ \sigma_3^4 \end{pmatrix} + 6\phi_1^2 \left(\mathbf{B} \cdot (\mathbf{I}_3 - \phi_1^2 \mathbf{B})^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right] + \\
& + 6\phi_1^2 \boldsymbol{\pi}' \left(\mathbf{B} \cdot (\mathbf{I}_3 - \phi_1^2 \mathbf{B})^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} + 3\boldsymbol{\pi}' \begin{pmatrix} \sigma_1^4 \\ \sigma_2^4 \\ \sigma_3^4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dôkaz

Druhý centrálny moment:

Platí:

$$\begin{aligned}
E[(X_t - \mu)^2] &= E[(\mu_{q_t} - \mu)^2 + \phi_1^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 + \sigma_{q_t}^2 a_t^2] + \\
&+ 2\phi_1 \text{Cov}(\mu_{q_t} - \mu, X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}) + 2\text{Cov}(\mu_{q_t} - \mu, \sigma_{q_t} a_t) + \quad (4.1.6) \\
&+ 2\phi_1 \text{Cov}(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}, \sigma_{q_t} a_t)
\end{aligned}$$

Zo vzťahu (4.1.2) platí $X_t - \mu_{q_t} = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \sigma_{q_{t-i}} a_{t-i}$. Z predpokladu, že $\{a_t\}$ je proces typu

i.i.d. $\approx N(0, 1)$ a nezávislosti medzi a_{t-i} a q_t pre $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ vyplýva, že všetky tri výrazy kovariancie sú rovné nule. Preto

$$\begin{aligned}
E[(X_t - \mu)^2] &= E[E[(X_t - \mu)^2] | q_t] = E[E[(\mu_{q_t} - \mu)^2 + \phi_1^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 + \sigma_{q_t}^2 a_t^2] | q_t] = \\
&= \boldsymbol{\pi}' \left(\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \right) + \boldsymbol{\pi}' \phi_1^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \mathbf{P}^i \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) + \boldsymbol{\pi}' \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} = \\
&= \boldsymbol{\pi}' \left(\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \right) + \phi_1^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \boldsymbol{\pi}' \mathbf{P}^i \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) + \boldsymbol{\pi}' \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \boldsymbol{\pi}' \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} + \phi_1^2 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} \boldsymbol{\pi}' \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) + \boldsymbol{\pi}' \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} = \\
&= \boldsymbol{\pi}' \left[\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} + \phi_1^2 (1 - \phi_1^2)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right] = \\
&= \boldsymbol{\pi}' \left[\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{(1 - \phi_1^2)} \\ \frac{\sigma_2^2}{(1 - \phi_1^2)} \\ \frac{\sigma_3^2}{(1 - \phi_1^2)} \end{pmatrix} \right]. \tag{4.1.7}
\end{aligned}$$

Poznámka: V dôkaze sme využili to, že $\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} = \frac{1}{1 - \phi_1^2}$ a $\boldsymbol{\pi}'$ je vektor ustálených pravdepodobností, pre ktorý platí $\boldsymbol{\pi}' \mathbf{P}^i = \boldsymbol{\pi}'$.

Tretí centrálny moment:

Pre tretiu mocninu platí:

$$\begin{aligned}
E[(X_t - \mu)^3] &= E[(\mu_{q_t} - \mu)^3 + \phi_1^3 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^3 + \sigma_{q_t}^3 a_t^3] + \\
&\quad + 3\phi_1 E[(\mu_{q_t} - \mu)^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})] + 3E[(\mu_{q_t} - \mu)^2 \sigma_{q_t} a_t] + \\
&\quad + 3\phi_1^2 E[(\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2] + 3\phi_1^2 E[(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 \sigma_{q_t} a_t] + \\
&\quad + 3E[(\mu_{q_t} - \mu) \sigma_{q_t}^2 a_t^2] + 3\phi_1 E[(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}) \sigma_{q_t}^2 a_t^2] + \\
&\quad + 6\phi_1 E[(\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}) \sigma_{q_t} a_t]
\end{aligned}$$

Opäť použijeme vzťah (4.1.2), predpoklad, že $\{a_t\}$ je proces typu i.i.d. $\approx N(0, 1)$ a nezávislosť medzi a_{t-i} a a_t pre $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Potom

$$E[(X_t - \mu)^3] = E[(\mu_{q_t} - \mu)^3] + 3\phi_1^2 E[(\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2] + 3E[(\mu_{q_t} - \mu) \sigma_{q_t}^2 a_t^2]. \tag{4.1.8}$$

Podobne ako pri vyjadrení rozptylu, aj pre šikmosť platí:

$$E[(X_t - \mu)^3] = E[E[(X_t - \mu)^3] | q_t].$$

Výraz (4.1.8) však obsahuje v druhom sčítanci $(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2$. Predpokladajme, že

$$E[(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 | q_{t-1} = j \cap q_t = i] P(q_{t-1} = j | q_t = i) = E[(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 | q_{t-1} = j] b_{ij}.$$

Potom platí:

$$\begin{aligned} E[(X_t - \mu_{q_t})^2 | q_t = i] &= \phi_1^2 \sum_{j=1}^3 E[(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 | q_{t-1} = j \cap q_t = i] \cdot P(q_{t-1} = j | q_t = i) + \sigma_i^2 = \\ &= \phi_1^2 \sum_{j=1}^3 E[(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 | q_{t-1} = j] \cdot b_{ij} + \sigma_i^2 \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Keď dáme dohromady rovnice pre $i = 1, 2, 3$, dostaneme

$$E \begin{bmatrix} (X_t - \mu_1)^2 | q_t = 1 \\ (X_t - \mu_2)^2 | q_t = 2 \\ (X_t - \mu_3)^2 | q_t = 3 \end{bmatrix} = E[(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_{q_t})^2 | \mathbf{q}_t] = \phi_1^2 \mathbf{B} E[(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{q_{t-1}})^2 | \mathbf{q}_{t-1}] + \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix}. \quad (4.1.10)$$

Pretože predpokladáme stacionaritu procesu $\{\mathbf{X}_t\}$ (t.j. $|\phi_1| < 1$), platí

$$E[(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{q_{t-1}})^2 | \mathbf{q}_{t-1}] = (\mathbf{I}_3 - \phi_1^2 \mathbf{B})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.1.11)$$

kde \mathbf{I}_3 je 3-dimenzionálna jednotková matica. Platí

$$E \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{q_{t-1}})^2 \\ \begin{bmatrix} q_t = 1 \\ q_t = 2 \\ q_t = 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \mathbf{B} E \begin{bmatrix} (\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{q_{t-1}})^2 \\ \begin{bmatrix} q_{t-1} = 1 \\ q_{t-1} = 2 \\ q_{t-1} = 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \mathbf{B} (\mathbf{I}_3 - \phi_1^2 \mathbf{B})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix}. \quad (4.1.12)$$

Ak dosadíme (4.1.11) a (4.1.12) do (4.1.8), dostávame

$$\begin{aligned} E[(X_t - \mu)^3] &= E[E[(X_t - \mu)^3] | q_t] = \boldsymbol{\pi}' \begin{bmatrix} (\mu_1 - \mu) \\ (\mu_2 - \mu) \\ (\mu_3 - \mu) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} (\mu_1 - \mu) \\ (\mu_2 - \mu) \\ (\mu_3 - \mu) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} (\mu_1 - \mu) \\ (\mu_2 - \mu) \\ (\mu_3 - \mu) \end{bmatrix} + \\ &+ 3\phi_1^2 \boldsymbol{\pi}' \begin{bmatrix} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{I}_3 - \phi_1^2 \mathbf{B})^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{bmatrix} (\mu_1 - \mu) \\ (\mu_2 - \mu) \\ (\mu_3 - \mu) \end{bmatrix} + \\ &+ 3\boldsymbol{\pi}' \begin{bmatrix} (\mu_1 - \mu) \\ (\mu_2 - \mu) \\ (\mu_3 - \mu) \end{bmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Štvrtý centrálny moment:

Pre štvrtú mocninu platí:

$$\begin{aligned}
 E[(X_t - \mu)^4] = & E[(\mu_{q_t} - \mu)^4 + \phi_1^4 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^4 + \sigma_{q_t}^4 a_t^4] + \\
 & + 4\{\phi_1 E[(\mu_{q_t} - \mu)^3 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})] + E[(\mu_{q_t} - \mu)^3 \sigma_{q_t} a_t]\} + \\
 & + \phi_1^3 E[(\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^3] + \phi_1^3 E[(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^3 \sigma_{q_t} a_t] + \\
 & + E[(\mu_{q_t} - \mu)\sigma_{q_t}^3 a_t^3] + \phi_1 E[(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})\sigma_{q_t}^3 a_t^3] + \\
 & + 6\{\phi_1^2 E[(\mu_{q_t} - \mu)^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2] + E[(\mu_{q_t} - \mu)^2 \sigma_{q_t}^2 a_t^2] + \\
 & + \phi_1^2 E[(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 \sigma_{q_t}^2 a_t^2]\} + \\
 & + 12\{\phi_1 E[(\mu_{q_t} - \mu)^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})\sigma_{q_t} a_t] + \phi_1^2 E[(\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 \sigma_{q_t} a_t] + \\
 & + \phi_1 E[(\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})\sigma_{q_t}^2 a_t^2]\}
 \end{aligned}$$

Opäť použijeme vzťah (4.1.2), predpoklad, že $\{a_t\}$ je proces typu i.i.d. $\approx N(0, 1)$ a nezávislosť medzi a_{t-i} a q_t pre $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Potom

$$\begin{aligned}
 E[(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})^4] = & E[(\boldsymbol{\mu}_{q_t} - \boldsymbol{\mu})^4] + 6\phi_1^2 E[(\boldsymbol{\mu}_{q_t} - \boldsymbol{\mu})^2 (\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{q_{t-1}})^2] + \\
 & + 6E[(\boldsymbol{\mu}_{q_t} - \boldsymbol{\mu})^2 \boldsymbol{\sigma}_{q_t}^2 a_t^2] + \phi_1^4 E[(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{q_{t-1}})^4] + \\
 & + 6\phi_1^2 E[(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{q_{t-1}})^2 \boldsymbol{\sigma}_{q_t}^2 \varepsilon_t^2] + E[\boldsymbol{\sigma}_{q_t}^4 a_t^4]
 \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Podobne, ako pri odvodení šikmosti by sme dokázali, že platí

$$\begin{aligned}
 E \begin{bmatrix} (X_t - \mu_1)^4 | q_t = 1 \\ (X_t - \mu_2)^4 | q_t = 2 \\ (X_t - \mu_3)^4 | q_t = 3 \end{bmatrix} = & \phi_1^4 \mathbf{B} E \begin{bmatrix} (X_{t-1} - \mu_1)^4 | q_{t-1} = 1 \\ (X_{t-1} - \mu_2)^4 | q_{t-1} = 2 \\ (X_{t-1} - \mu_3)^4 | q_{t-1} = 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \sigma_1^4 \\ \sigma_2^4 \\ \sigma_3^4 \end{pmatrix} + \\
 & + 6\phi_1^2 E \begin{bmatrix} (X_{t-1} - \mu_1)^2 \sigma_1^2 | q_t = 1 \\ (X_{t-1} - \mu_2)^2 \sigma_2^2 | q_t = 2 \\ (X_{t-1} - \mu_3)^2 \sigma_3^2 | q_t = 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

čo môžeme skrátene napísať:

$$E[(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_{q_t})^4 | \mathbf{q}_t] = \phi_1^4 \mathbf{B} \cdot E[(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{q_{t-1}})^4 | \mathbf{q}_{t-1}] + 3\boldsymbol{\sigma}_q^4 + 6\phi_1^2 E[(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{q_{t-1}})^2 \boldsymbol{\sigma}_{q_t}^2 | \mathbf{q}_t] \tag{4.1.15}$$

Ďalej zo vzťahu (4.1.12) vyplýva, že

$$E[(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{q_{t-1}})^2 \boldsymbol{\sigma}_q^2 | \mathbf{q}_t] = (\mathbf{B} \cdot E[(\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{q_{t-1}})^2 | \mathbf{q}_{t-1}]) \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\mathbf{B}(\mathbf{I}_3 - \phi_1^2 \mathbf{B})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix}$$

Preto, za predpokladu, že proces je stacionárny, dostaneme

$$E[(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_{q_t})^4 | \mathbf{q}_t] = (\mathbf{I}_3 - \phi_1^4 \mathbf{B})^{-1} (3\boldsymbol{\sigma}_q^4 + 6\phi_1^2 (\mathbf{B}(\mathbf{I}_3 - \phi_1^2 \mathbf{B})^{-1} \boldsymbol{\sigma}_q^2) \otimes \boldsymbol{\sigma}_q^2) \quad (4.1.16)$$

Použitím vzťahov (4.1.14), (4.1.16) a rovnosti $E[(X_t - \mu)^4] = \boldsymbol{\pi}' E \begin{bmatrix} (X_t - \mu_1)^4 & | & \mathbf{q}_t = 1 \\ (X_t - \mu_2)^4 & | & \mathbf{q}_t = 2 \\ (X_t - \mu_3)^4 & | & \mathbf{q}_t = 3 \end{bmatrix}$

dostaneme výraz pre špicatost':

$$\begin{aligned} E[(X_t - \mu)^4] &= \boldsymbol{\pi}' \left[\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \right] + \\ &+ 6\phi_1^2 \boldsymbol{\pi}' \left[\begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \right] + \\ &+ 6\boldsymbol{\pi}' \left[\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right] + \\ &+ \phi_1^4 \boldsymbol{\pi}' (\mathbf{I}_3 - \phi_1^4 \mathbf{B})^{-1} \left[3 \begin{pmatrix} \sigma_1^4 \\ \sigma_2^4 \\ \sigma_3^4 \end{pmatrix} + 6\phi_1^2 \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right] + \\ &+ 6\phi_1^2 \boldsymbol{\pi}' \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} + 3\boldsymbol{\pi}' \begin{pmatrix} \sigma_1^4 \\ \sigma_2^4 \\ \sigma_3^4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

QED

4.2 Autoregresný stavovo závislý MSW

Uvažujme autoregresný model prvého rádu s normálne rozloženými prírastkami. Zo (4.0.2) vidíme, že ak $p = 1$, potom

$$X_t = \mu_{q_t} + \phi_{1,q_{t-1}}(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}) + \sigma_{q_t} a_t \quad (4.2.1)$$

kde $\phi_{1,q_{t-1}}$ je autoregresný koeficient prvého rádu pre stav q_{t-1} . Spätnou substitúciou dostaneme

$$X_t - \mu_{q_t} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^l \phi_{1,q_{t-j}} \sigma_{q_{t-j}} \right) a_{t-j} + \sigma_{q_t} a_t \quad (4.2.2)$$

z čoho vyplýva, že $E[X_t - \mu_{q_t}] = 0$ a $E[X_t] = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{\mu}_q = \mu$. Aby sme čo

najjednoduchšie vyjadrili momenty tohto procesu, definujme 3×3 diagonálnu maticu prvých autoregresných koeficientov pre jednotlivé režimy

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{1,3} \end{pmatrix},$$

kde $\phi_{1,r}$ je autoregresný koeficient prvého rádu v stave r (v r -tom režime). V Tvrdení 4.2 uvádzame druhý až štvrtý centrálny moment tohto procesu.

Tvrdenie 4.2 (druhý, tretí a štvrtý centrálny moment)

Predpokladajme, že $\{X_t\}$ je stacionárny autoregresný Gaussov MSW proces prvého rádu so stavovo závislými autoregresnými koeficientami:

$$X_t = \mu_{q_t} + \phi_{1,q_{t-1}}(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}) + \sigma_{q_t} a_t, \quad |\phi_{1,q_{t-1}}| < 1, \quad a_t \sim i.i.d \quad N(0,1)$$

kde $\phi_{1,q_{t-1}}$ je autoregresný koeficient, ktorý je závislý od stavu. Označme μ nepodmienujúcu strednú hodnotu procesu $\{X_t\}$. Predpokladajme ďalej, že proces začal zo svojho ustáleného rozdelenia charakterizovaného vektorom nepodmienujúcej pravdepodobnosti $\boldsymbol{\pi}$. Potom pre varianciu (2. centrálny moment), šikmosť (3. centrálny moment) a špicatosť (4. centrálny moment) procesu $\{X_t\}$ platí:

$$E[(X_t - \mu)^2] = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} + \Phi^2 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

$$E[(X_t - \mu)^3] = \pi' \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} + \\ + 3\pi' \begin{bmatrix} \mathbf{B}\Phi^2 \cdot (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{bmatrix} \\ \otimes \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} \end{bmatrix} + 3\pi' \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{bmatrix}$$

$$E[(X_t - \mu)^4] = \pi' \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} + \\ + 6\pi' \begin{bmatrix} \mathbf{B}\Phi^2 \cdot (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{bmatrix} \\ \otimes \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \\ + 6\pi' \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{bmatrix} + \\ + \pi' \Phi^4 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^4)^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1^4 \\ \sigma_2^4 \\ \sigma_3^4 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} \mathbf{B}\Phi^2 \cdot (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{bmatrix} \\ \otimes \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \\ + 6\pi' \begin{bmatrix} \mathbf{B}\Phi^2 \cdot (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{bmatrix} \\ \otimes \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + 3\pi' \begin{bmatrix} \sigma_1^4 \\ \sigma_2^4 \\ \sigma_3^4 \end{bmatrix}$$

Dôkaz

Pri dôkaze tohto tvrdenia využijeme dôkaz tvrdenia 4.1.

Druhý centrálny moment

Pre nepodmienujúcu odchýlku stacionárneho procesu (4.2.1) platí:

$$\begin{aligned}
E[(X_t - \mu)^2] &= E[(\mu_{q_t} - \mu)^2 + \phi_{1,q_{t-1}}^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 + \sigma_{q_t}^2 a_t^2] + \\
&\quad + 2Cov(\mu_{q_t} - \mu, \sigma_{q_t} a_t) + 2Cov(\mu_{q_t} - \mu, \phi_{1,q_{t-1}} (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})) + \\
&\quad + 2Cov(\phi_{1,q_{t-1}} (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}), \sigma_{q_t} a_t)
\end{aligned}$$

Zo vzťahu (4.2.2) a predpokladu, že $\{a_t\}$ je proces typu i.i.d. $\approx N(0, 1)$ a a_{t-i} a q_t sú nezávislé pre $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ vyplýva, že kovariancie sú aj v tomto prípade nulové. Teda:

$$E[(X_t - \mu)^2] = E[(\mu_{q_t} - \mu)^2 + \phi_{1,q_{t-1}}^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 + \sigma_{q_t}^2 a_t^2]. \quad (4.2.3)$$

Zo vzťahu (4.2.2) ďalej vyplýva:

$$E[(X_t - \mu_{q_t})^2 | \mathbf{q}_t] = E[(\phi_{1,q_{t-1}}^2 (\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{q_{t-1}})^2 + 2\phi_{1,q_{t-1}} (\mathbf{X}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}_{q_{t-1}}) \sigma_{q_t} a_t + \sigma_{q_t}^2 a_t^2) | \mathbf{q}_t].$$

Potom

$$\begin{aligned}
E[(X_t - \mu_{q_t})^2 | q_t = i] &= \sum_{j=1}^3 E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 | q_{t-1} = j \cap q_t = i] \cdot P(q_{t-1} = j | q_t = i) + \sigma_i^2 = \\
&= \sum_{j=1}^3 E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 | q_{t-1} = j] \cdot b_{ij} + \sigma_i^2
\end{aligned}$$

Označme $\boldsymbol{\sigma}_q^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix}$, Φ nech je 3 x 3 diagonálna matica, ktorá bola definovaná pred

Tvrdením 4.2 a \mathbf{B} je „spätňá“ matica pravdepodobností prechodov. Potom môžeme písať:

$$E[(X_t - \mu_{q_t})^2 | q_t] = \mathbf{B} \cdot \Phi^2 E[(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 | q_{t-1}] + \boldsymbol{\sigma}_q^2 \quad (4.2.4)$$

Pretože predpokladáme stacionárny proces $\{X_t\}$, platí

$$E \begin{bmatrix} X_t \\ q_t = 1 \\ q_t = 2 \\ q_t = 3 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ q_{t-1} = 1 \\ q_{t-1} = 2 \\ q_{t-1} = 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Potom môžeme (4.2.4) prepísať do tvaru:

$$E[(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 | q_{t-1}] = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B} \cdot \Phi^2)^{-1} \boldsymbol{\sigma}_q^2 \quad (4.2.5)$$

Dosadením (4.2.5) do vzťahu (4.2.3) vypočítame druhý centrálny moment (varianciu):

$$\begin{aligned}
E[(X_t - \mu)^2] &= E[E[(X_t - \mu)^2 | q_t]] = E[E[(\mu_{q_t} - \mu)^2 + \phi_{1,q_{t-1}}^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 + \sigma_{q_t}^2 a_t^2] | q_t] = \\
&= \boldsymbol{\pi}' \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} + \boldsymbol{\pi}' \Phi^2 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B} \Phi^2)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\pi}' \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Tretí centrálny moment

Tretí centrálny moment odvodíme zo vzťahu:

$$\begin{aligned}
 E[(X_t - \mu)^3] &= E[(\mu_{q_t} - \mu)^3 + \phi_{1,q_{t-1}}^3 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^3 + \sigma_{q_t}^3 a_t^3] + \\
 &\quad + 3E[\phi_{1,q_{t-1}} (\mu_{q_t} - \mu)^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})] + 3E[(\mu_{q_t} - \mu)^2 \sigma_{q_t} a_t] + \\
 &\quad + 3E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2] + 3E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 \sigma_{q_t} a_t] + \\
 &\quad + 3E[(\mu_{q_t} - \mu)\sigma_{q_t}^2 a_t^2] + 3E[\phi_{1,q_{t-1}} (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})\sigma_{q_t}^2 a_t^2] + \\
 &\quad + 6E[\phi_{1,q_{t-1}} (\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})\sigma_{q_t} a_t]
 \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Opäť použijeme vzťah (4.2.2), predpoklad, že $\{a_t\}$ je proces typu i.i.d. $\approx N(0, 1)$ a nezávislosť medzi a_{t-i} a a_t pre $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Potom (4.2.6) prejde do tvaru

$$E[(X_t - \mu)^3] = E[(\mu_{q_t} - \mu)^3] + 3E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2] + 3E[(\mu_{q_t} - \mu)\sigma_{q_t}^2 a_t^2]. \tag{4.2.7}$$

Jediný nový výraz v porovnaní so vzťahom (4.1.8) je $3E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2]$. Ak použijeme vzťah (4.2.5), môžeme písať

$$\begin{aligned}
 E[(X_t - \mu)^3] &= E[E[(X_t - \mu)^3] | q_t] = \\
 &= E[E[(\mu_{q_t} - \mu)^3] + 3E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2] + 3E[(\mu_{q_t} - \mu)\sigma_{q_t}^2 a_t^2] | q_t] = \\
 &= \boldsymbol{\pi}' \left[\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \right] + \\
 &\quad + 3\boldsymbol{\pi}' \left[\left(\mathbf{B}\boldsymbol{\Phi}^2 \cdot (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\boldsymbol{\Phi}^2)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \right] + \\
 &\quad + 3\boldsymbol{\pi}' \left[\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right].
 \end{aligned}$$

Štvrtý centrálny moment

Štvrtý centrálny moment odvodíme zo štvrtej mocniny odchýlky:

$$\begin{aligned}
E[(X_t - \mu)^4] &= E[(\mu_{q_t} - \mu)^4 + \phi_{1,q_{t-1}}^4 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^4 + \sigma_{q_t}^4 a_t^4] + \\
&+ 4\{E[\phi_{1,q_{t-1}} (\mu_{q_t} - \mu)^3 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})] + E[(\mu_{q_t} - \mu)^3 \sigma_{q_t} a_t]\} + \\
&+ E[\phi_{1,q_{t-1}}^3 (\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^3] + E[\phi_{1,q_{t-1}}^3 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^3 \sigma_{q_t} a_t] + \\
&+ E[(\mu_{q_t} - \mu) \sigma_{q_t}^3 a_t^3] + E[\phi_{1,q_{t-1}} (\mu_{q_t} - \mu) \sigma_{q_t}^3 a_t^3] + \\
&+ 6\{E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (\mu_{q_t} - \mu)^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2] + E[(\mu_{q_t} - \mu)^2 \sigma_{q_t}^2 a_t^2]\} + \\
&+ E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 \sigma_{q_t}^2 a_t^2] + \\
&+ 12\{E[\phi_{1,q_{t-1}} (\mu_{q_t} - \mu)^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}) \sigma_{q_t} a_t] + E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 \sigma_{q_t} a_t]\} + \\
&+ E[\phi_{1,q_{t-1}} (\mu_{q_t} - \mu)(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}) \sigma_{q_t}^2 a_t^2]
\end{aligned}$$

ktorý za predpokladu, že $\{a_t\}$ je proces typu i.i.d. $\approx N(0, 1)$ a nezávislosti medzi a_{t-i} a q_t pre $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ prejde do tvaru

$$\begin{aligned}
E[(X_t - \mu)^4] &= E[(\mu_{q_t} - \mu)^4] + 6E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (\mu_{q_t} - \mu)^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2] + \\
&+ 6E[(\mu_{q_t} - \mu)^2 \sigma_{q_t}^2 a_t^2] + E[\phi_{1,q_{t-1}}^4 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^4] + \\
&+ 6E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 \sigma_{q_t}^2 \varepsilon_t^2] + E[\sigma_{q_t}^4 a_t^4]
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Keď porovnáme (4.2.8) s výrazom (4.1.14) vidíme, že sa zmenil druhý, štvrtý a piaty výraz z pravej strany tejto rovnosti. Odvodíme tieto výrazy, pričom využijeme vzťah (4.2.5) (za predpokladu stacionarity procesu). Platí:

$$E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (\mu_{q_t} - \mu)^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2] = \pi' \left(\left(\mathbf{B}\Phi^2 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 - \mu \\ \boldsymbol{\mu}_2 - \mu \\ \boldsymbol{\mu}_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 - \mu \\ \boldsymbol{\mu}_2 - \mu \\ \boldsymbol{\mu}_3 - \mu \end{pmatrix} \right) \tag{4.2.9}$$

$$E[\phi_{1,q_{t-1}}^2 (X_{q_{t-1}} - \mu_{q_{t-1}})^2 \sigma_{q_t}^2 a_t^2] = \pi' \left(\left(\mathbf{B}\Phi^2 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) \tag{4.2.10}$$

Počítajme teraz štvrtú mocninu odchýlky $(X_t - \mu_{q_t})^4$ podmienenú stavom q_t :

$$\begin{aligned}
E[(X_t - \mu_{q_t})^4 | q_t] &= E[(\phi_{1,q_{t-1}} (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}) + \sigma_{q_t} a_t)^4 | q_t] = \\
&= E[(\phi_{1,q_{t-1}}^4 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^4 + 4\phi_{1,q_{t-1}}^3 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^3 \sigma_{q_t} a_t + \\
&+ 6\phi_{1,q_{t-1}}^2 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^2 \sigma_{q_t}^2 a_t^2 + 4\phi_{1,q_{t-1}} (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}}) \sigma_{q_t}^3 a_t^3 + \sigma_{q_t}^4 a_t^4 | q_t] =
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{B}\Phi^4 \cdot E\left[(X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^4 | q_{t-1}\right] + 3 \begin{pmatrix} \sigma_1^4 \\ \sigma_2^4 \\ \sigma_3^4 \end{pmatrix} + 6 \left(\mathbf{B}\Phi^2 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) \quad (4.2.11)$$

Zo stacionarity procesu potom vyplýva:

$$E\left[(X_t - \mu_{q_t})^4 | q_t\right] = (\mathbf{I}_k - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \left[3 \begin{pmatrix} \sigma_1^4 \\ \sigma_2^4 \\ \sigma_3^4 \end{pmatrix} + 6 \left(\mathbf{B}\Phi^2 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right] \quad (4.2.12)$$

Vzťah (4.2.12) využijeme na výpočet štvrtého člena pravej strany rovnosti (4.2.8):

$$E\left[\phi_{1,q_{t-1}}^4 (X_{t-1} - \mu_{q_{t-1}})^4\right] = \boldsymbol{\pi}' \Phi^4 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^4)^{-1} \left[3 \begin{pmatrix} \sigma_1^4 \\ \sigma_2^4 \\ \sigma_3^4 \end{pmatrix} + 6 \left(\mathbf{B}\Phi^2 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right] \quad (4.2.13)$$

Dosadením (4.2.9), (4.2.10) a (4.2.13) do (4.2.8) dostaneme výraz pre špicatosť uvedený v tvrdení 4.2. :

$$\begin{aligned} E\left[(X_t - \mu)^4\right] &= \boldsymbol{\pi}' \left[\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \right] + \\ &+ 6\boldsymbol{\pi}' \left[\mathbf{B}\Phi^2 \cdot (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right] \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} + \\ &+ 6\boldsymbol{\pi}' \left[\begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu \\ \mu_2 - \mu \\ \mu_3 - \mu \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right] + \\ &+ \boldsymbol{\pi}' \Phi^4 (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^4)^{-1} \left[3 \begin{pmatrix} \sigma_1^4 \\ \sigma_2^4 \\ \sigma_3^4 \end{pmatrix} + 6 \left(\mathbf{B}\Phi^2 \cdot (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right] + \\ &+ 6\boldsymbol{\pi}' \left[\left(\mathbf{B}\Phi^2 \cdot (\mathbf{I}_3 - \mathbf{B}\Phi^2)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2^2 \\ \sigma_3^2 \end{pmatrix} \right] + 3\boldsymbol{\pi}' \begin{pmatrix} \sigma_1^4 \\ \sigma_2^4 \\ \sigma_3^4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

QED

5 Praktická časť

V tejto kapitole sa zameriame na aplikáciu doteraz spomenutých poznatkov na reálnych dátach. Modelovanie časových radov môžeme (vo všeobecnosti) použiť na akékoľvek reálne dáta. My sa v práci zameriame na makroekonomické ukazovatele, výmenné kurzy a ďalšie ekonomické časové rady.

Budeme pracovať najmä so slovenskými dátami, ale napríklad výmenné kurzy budeme porovnávať v rámci všetkých krajín V4, použijeme takisto aj dáta USA či Európskej únie.

Dáta pochádzajú zo stránok Národnej Banky Slovenska (www.nbs.sk) a Európskej centrálnej banky (www.ecb.int), ktorá preberá niektoré údaje priamo z Eurostatu (www.ec.europa.eu/eurostat). Konkrétne ide o tieto dáta:

- NEZAMESTNANOSŤ SR– mesačné dáta evidovanej miery nezamestnanosti (január 1999 – marec 2009) – označíme SVKNEZAM
- NEZAMESTNANOSŤ OČISTENÁ SR – mesačné dáta evidovanej miery nezamestnanosti SR, sezónne očistené (január 1998 – február 2008) – označíme UNEMPLOY očíst
- INFLÁCIA SR– medziročné dáta na mesačnej báze (január 1999 – marec 2009) - SVKINFLACIA
- VÝMENNÝ KURZ SKK/EUR – priemerný výmenný kurz NBS na mesačnej báze (roky 1999 - 2008)
- VÝMENNÝ KURZ HUF/EUR - priemerný výmenný kurz NBS na mesačnej báze (roky 1999 - 2008)
- VÝMENNÝ KURZ PLN/EUR - priemerný výmenný kurz NBS na mesačnej báze (roky 1999 - 2008)
- VÝMENNÝ KURZ CZK/EUR - priemerný výmenný kurz NBS na mesačnej báze (roky 1999 - 2008)
- ZAMESTNANOSŤ SR – štvrťročné hodnoty celkovej priemernej domácej zamestnanosti SR (v mil osôb, 1Q 1994 – 4Q 2008)

- DEFICIT (ALEBO ZISK) USA – štvrťročné percentuálne hodnoty deficitu (resp. zisku) vo všetkých sektoroch USA, nie sú sezónne očistené (1Q 1960 – 3Q 2008) - označíme DoS USA
- HDP MAĎARSKO - štvrťročné údaje hrubého domáceho produktu Maďarska v trhových cenách (v mld HUF), sezónne očistené (1Q 1995 – 4Q 2008)
- HDP SR – štvrťročné údaje hrubého domáceho produktu SR v trhových cenách (v mld SKK), sezónne očistené (1Q 1993 – 4Q 2008)
- HRUBÁ PRIDANÁ HODNOTA POĽNOHOSPODÁRSTVA SR (gross value-added) – štvrťročné dáta hrubej pridanej hodnoty poľnohospodárstva, rybolovu, lesníctva a lovu, v základných cenách (v mld €, 1Q 1993 - 4Q 2008) – označíme GVA agri
- HRUBÁ PRIDANÁ HODNOTA STAVEBNÍCTVA SR – štvrťročné dáta hrubej pridanej hodnoty v stavebníctve, v základných cenách (v mld €, 1Q 1993 - 4Q 2008) - označíme GVA constr
- HRUBÁ PRIDANÁ HODNOTA FINANČNÉHO SEKTORU SR – štvrťročné dáta hrubej pridanej hodnoty vo finančnom sektore, v základných cenách (v mld €, 1Q 1993 - 4Q 2008) -označíme GVA fin
- HRUBÁ PRIDANÁ HODNOTA PRIEMYSLU SR – štvrťročné dáta hrubej pridanej hodnoty celkového priemyslu, zahrňujúce energie, v základných cenách (v mld €, 1Q 1993 - 4Q 2008) -označíme GVA industry
- HRUBÁ PRIDANÁ HODNOTA OSTATNÉ SR – štvrťročné dáta hrubej pridanej hodnoty pre ostatné služby, v základných cenách (v mld €, 1Q 1993 - 4Q 2008) - označíme GVA other
- INVESTIČNÉ MAJETKY EU16 (CAPITAL GOODS) – mesačné hodnoty obchodu EÚ extra 16 (v mld €), sezónne očistené (január 1999 – december 2008)
- POČET BANKOVIEK V OBEHU V HODNOTE 100 SK – mesačné počty čistého obehu bankoviek nominálnej hodnoty 100 SK, v miliardách ks (január 2005 – december 2007) - označíme NofB100
- POČET MINCÍ V OBEHU V HODNOTE 10 SK – mesačné počty čistého obehu mincí nominálnej hodnoty 10 SK, v miliardách ks (január 2005 – december 2007) - označíme NofB10

- INDEX SPOTREBITEĽSKÝCH CIEN PRE DOPRAVU SR (ICP) – mesačné hodnoty indexu spotrebiteľských cien pre dopravu SR, nie sú sezónne očistené (január 1995 – február 2009) – označíme TRANSPORT

Táto kapitola je rozdelená na niekoľko podkapitol. Každá časť zahŕňa výsledky odhadov optimálnych hodnôt parametrov modelov s premenlivými režimami – konkrétne SETAR, LSTAR, ESTAR (modely s režimami určenými pozorovateľnými veličinami) a MSW (modely s režimami určenými nepozorovateľnými veličinami). Pri každom modeli budeme uvažovať ako 2, tak aj 3 režimy. Budeme testovať, či je pre dané dáta vhodnejší dvojrežimový alebo trojrežimový model časového radu. V piatej časti názorne na základe grafov uvidíme, „ako dobre“ modely popisujú naše reálne dáta. V poslednej kapitole sa budeme venovať predikcii hodnôt. Analýzu časového radu vykonávame len na časti dát. Posledných niekoľko údajov, v našom prípade 5, použijeme na porovnanie s predikciami danými modelmi, čím zistíme predikčné vlastnosti jednotlivých modelov.

Na modelovanie týchto časových radov využijeme výpočtový systém Mathematica, verzia 6, pričom na odhad parametrov modelov z triedy SETAR a MSW použijeme programy vytvorené Bc. Petrou Zacharovskou zo SvF STU.

Predposledný stĺpec v tabuľkách 5.1 – 5.3 a v tabuľke 5.4.3 vyjadruje relatívne zlepšenie daného dvoj-, resp. trojrežimového modelu v porovnaní s lineárnym modelom (teda o koľko je lepší viacrežimový model ako lineárny). Posledný stĺpec vyjadruje (v prípade, že bol vybraný trojrežimový model) relatívne zlepšenie odhadu pomocou modelu v prípade 3 režimov v porovnaní s dvomi režimami. Relatívne zlepšenie počítame v percentách podľa vzťahu $\frac{SSR_0 - SSR_1}{SSR_0} * 100$, kde SSR_0 je reziduálny súčet štvorcov pôvodného modelu (lineárneho, resp. dvojrežimového) a SSR_1 je reziduálny súčet štvorcov nového modelu (dvojrežimového, resp. trojrežimového).

Testovanie ostávajúcej nelinearity sa v prípade MSW modelov robí pomocou simulácií (neexistuje štandardné rozdelenie pravdepodobnosti pre testovaciu štatistiku), no vzhľadom na veľký počet časových radov a toho, že simulácie sú veľmi náročné na čas, sme od toho upustili. Relatívne zlepšenie to dostatočne vyjadruje.

5.1 SETAR

V tejto časti sa budeme venovať odhadu optimálnych hodnôt parametrov modelov z triedy SETAR pre uvažované reálne časové rady. To, či sú lepšie 2 alebo 3 režimy, zistíme pomocou testu ostávajúcej nelinearity dvoch oproti trom režimom. V celej aplikáčnej časti budeme uvažovať hodnotu $\alpha = 0.05$, resp. 0.01 .

V tabuľke 5.1 sú zhrnuté vybrané najlepšie odhadnuté modely z triedy SETAR pre naše dáta. Tabuľka obsahuje hodnoty informačných kritérií AIC a BIC, p-value pre test autokorelácie rezíduí, linearity, resp. ostávajúcej nelinearity a relatívne zlepšenie modelu oproti AR modelu, v prípade trojrežimového modelu aj relatívne zlepšenie oproti dvojurežimovému modelu.

Tab. 5.1

dáta	AIC	BIC			c1	c2	p-value pre test				relatívne zlepšenie (v %) oproti	
			d	p			linearity	autokorelácie rezíduí		ostávajúcej nelinearity	AR	2-režimové mu SETAR
								2 režimy	3 režimy			
HUF	341.469	315.764	3	4	253.404	260.992	0.0296	X	< 10 ⁻⁶	0.0021	24.15	17.55
SKK	133.63	123.119	2	2	41.828	X	<u>0.0861</u>	X	X	X	X	X
PLN	-431.829	-452.358	3	3	3.649	4.189	0.0473	X	0.00007	0.0198	17.94	10.44
CZK	235.124	228.358	1	1	27.397	X	<u>0.0655</u>	X	X	X	X	X
SVK nezam	190.894	176.066	2	2	17.856	18.976	0.0131	< 10 ⁻⁵	X	<u>0.0840</u>	11.13	X
SVK inflácia	-72.318	-82.554	1	1	3.292	6.268	0.0403	X	< 10 ⁻⁶	0.0026	27.53	20.61
DoS USA	-42.725	-63.584	3	3	-2.004	-0.042	0.0009	X	0.0105	0.0046	22.03	9.63
GDP HUF	-225.129	-234.231	4	1	1.58	2.169	< 10 ⁻⁵	X	< 10 ⁻⁶	0.0010	-11.61	-13.571
GDP SVK	-20.518	-44.839	3	4	7.461	7.759	0.0001	X	< 10 ⁻⁶	< 10 ⁻⁶	88.57	80.46
GVA agri	-384.07	-413.714	4	5	0.219	0.328	0.0015	X	< 10 ⁻⁶	0.0021	51.75	29.77
GVA constr	-270.743	-300.377	5	5	0.33	0.542	0.0262	X	< 10 ⁻⁶	< 10 ⁻⁶	79	75.16
GVA fin	155.169	-184.209	4	5	0.488	1.508	0.0052	X	< 10 ⁻⁶	0.0034	45.3	27.17
GVA industry	-110.569	-117.387	1	1	1.353	X	<u>0.1401</u>	X	X	X	X	X
GVA other	-187.367	-212.054	4	4	0.716	1.373	0.0021	X	< 10 ⁻⁶	0.0016	1.06	4.508
NofB10 SVK	-299.135	-317.76	3	3	0.852	0.874	< 10 ⁻⁵	X	< 10 ⁻⁶	0.0050	18.6	-1.617
NofB100 SVK	-191.446	-219.253	3	5	2.375	2.417	0.0016	X	< 10 ⁻⁶	0.0004	73.96	52.44
CAP. GOODS	-18.901	-34.425	2	2	14.258	17.126	0.004	< 10 ⁻⁶	X	<u>0.3020</u>	15.48	X
EMPLOY SVK	-394.318	-401.11	1	1	2.082	X	<u>0.0558</u>	X	X	X	X	X
UNEMPLOY očist	11.403	1.297	1	1	15.248	19.25	< 10 ⁻⁴	X	< 10 ⁻⁶	< 10 ⁻⁶	-5.38	-1.189
TRANSPORT SVK	570.987	555.471	2	2	77.414	85.246	0.0032	X	< 10 ⁻⁶	< 10 ⁻⁶	16.45	5.09

Z tabuľky 5.1 vidíme, že takmer pre všetky dáta je najlepším odhadom z triedy SETAR trojrežimový model. Test linearity (kde je nulovou hypotézou lineárny model) nám ako nevhodné na modelovanie pomocou SETAR (p-value je $> 5\%$) určil 4 časové rady: výmenné kurzy SKK/ EUR, CZK/ EUR, Gross Value-added pre priemysel a Zamestnanosť na Slovensku. Na ostatné sme použili test ostávajúcej nelinearity (kde hypotézou H_0 boli 2 režimy). V dvoch prípadoch (percentuálna neočistená nezamestnanosť na Slovensku a Capital Goods EÚ16) nezamietame hypotézu H_0 , a teda vhodný je dvojrežimový SETAR. Pre ostatné je vhodnejšie modelovanie pomocou trojrežimového SETAR.

Pozrime sa teraz na posledné 2 stĺpce tabuľky. V takmer všetkých (či už dvoj alebo trojrežimových) modeloch opisuje model SETAR daný časový rad lepšie ako lineárny AR model. Len v dvoch prípadoch je odhad pomocou SETAR na základe tohto kritéria horší (HDP Maďarska a očistená percentuálna nezamestnanosť na Slovensku).

Pri teste autokorelácie rezíduí je hypotézou H_0 to, že rezíduá pre dané odhadnuté modely SETAR (pre dva, resp. tri režimy) *nie sú* korelované. Pre všetky časové rady však túto nulovú hypotézu zamietame, teda rezíduá sú korelované.

5.2 LSTAR

V tejto časti sa budeme venovať modelovaniu uvažovaných reálnych časových radov pomocou modelu LSTAR. O vhodnosti modelovania pomocou LSTAR rozhodneme (rovnako ako v predchádzajúcej časti) na základe testu linearity, a o tom, či sú lepšie 2 alebo 3 režimy, pomocou testu ostávajúcej nelinearity dvoch režimov oproti trom.

V tabuľke 5.2 sú zhrnuté vybrané najlepšie odhadnuté LSTAR modely pre naše dáta, ktoré sme vybrali na základe minimálnej p-value z testu linearity (5 najlepších modelov) a hodnoty BIC. Tabuľka obsahuje hodnoty informačných kritérií AIC a BIC, p-value pre test autokorelácie rezíduí, linearity, resp. ostávajúcej nelinearity a relatívne zlepšenie oproti AR modelu, resp. v prípade trojrežimového modelu aj relatívne zlepšenie oproti dvojrežimovému modelu.

Tab. 5.2

dáta	AIC	BIC	d	p	γ_1	γ_2	c1	c2	p-value pre test				relatívne zlepšenie (v %) oproti	
									linearity	autokorelácie reziduí		ostávajúcej nelinearity	AR	2-režimovému LSTAR
										2 režimy	3 režimy			
HUF	381.79	389.11	1	1	1.5	8.5	246.03	247.54	< 10 ⁻⁵	0.0005	0.00287	< 10 ⁻⁵	6.19	3.63
SKK	71.8	94.96	4	5	4.5	8.5	35.8	37.79	< 10 ⁻⁵	0.3767	0.00001	< 10 ⁻⁶	12.97	5.85
PLN	-322.23	-307.1	1	3	8.5	X	3.724	X	0.0185	0.3833	X	<u>0.65</u>	1.46	X
CZK	259.22	272.44	4	5	8.5	X	26.05	X	0.0007	0.2637	X	<u>0.0721</u>	2.05	X
SVK nezam	256.66	265.17	1	2	8.5	X	19.2	X	0.0021	< 10 ⁻⁶	X	<u>0.1404</u>	16.22	X
SVK inflácia	40.03	60.46	5	5	8.5	X	6.95	X	<u>0.1584</u>	X	X	X	4.62	X
DoS USA	174.18	190.88	1	3	1.5	X	-5.35	X	0.0002	0.0327	X	<u>0.8401</u>	3.04	X
GDP HUF	-232.07	-228.06	1	1	0.5	0.5	1.76	2.18	< 10 ⁻⁵	0.0002	0.462	0.0001	59.59	32.43
GDP SVK	4.35	9.76	1	1	8.5	X	7.61	X	0.0105	0.3737	X	<u>0.8455</u>	2.95	X
GVA agri	-363.74	-358.51	3	3	8.5	X	0.16	X	0.0026	0.165	X	<u>0.9466</u>	23.54	X
GVA constr	-239.26	-237.44	1	1	8.5	0.5	0.13	0.78	0.0035	0.0203	0.973	0.0216	29.25	16.32
GVA fin	-133.58	-121.39	1	5	3.5	X	0.38	X	<u>0.0602</u>	X	X	X	3.69	X
GVA industry	-79.18	-66.17	1	4	8.5	X	1.35	X	<u>0.0814</u>	X	X	X	4.52	X
GVA other	-99.3	-94.72	4	4	8.5	X	1.62	X	0.0065	0.0049	X	<u>0.1623</u>	15.58	X
NofB10 SVK	-272.56	-267.2	2	3	8.5	X	0.89	X	0.0018	0.0012	X	<u>0.5001</u>	36.74	X
NofB100 SVK	-169.27	-166.68	1	1	8.5	X	2.46	X	<u>0.0944</u>	X	X	X	21.61	X
CAP. GOODS	71.96	83.64	2	2	8.5	X	17.198	X	0.0414	0.4031	X	<u>0.458</u>	1.42	X
EMPLOY SVK	-381.93	-375.07	2	3	3.5	8.5	2.02	2.12	0.0456	0.1746	0.4723	0.0478	9.53	4.04
UNEMPLOY očíst	177.47	188.73	2	2	7.5	X	18.82	X	< 10 ⁻⁵	0.1628	X	<u>0.7715</u>	2.35	X
TRANSPORT SVK	476.83	512.62	5	5	4.5	1.5	75.67	89.38	0.0021	0.0011	0.1595	< 10 ⁻⁴	19.8	12.2

Z tabuľky 5.2 vidíme, že test linearity (kde je nulovou hypotézou H_0 lineárny AR model oproti dvojrežimovému LSTAR modelu) nám ako nevhodné na modelovanie pomocou LSTAR (p-value je > 5%) určilo 4 z celkového počtu 20 časových radov (v tabuľke 5.2 sú hodnoty týchto p-value podčiarknuté) – priemerná inflácia na Slovensku, Gross Value-added pre finančný sektor a priemysel, a počet bankoviek v hodnote 100 SKK v obehu. Na ostatné sme použili test ostávajúcej nelinearity (kde hypotézou H_0 boli 2 režimy oproti 3 režimom). Na základe tohto testu sme zistili, že na modelovanie je vhodnejší dvojrežimový LSTAR (v porovnaní s trojrežimovým) v 10 prípadoch, pre ostatných 6 sme nulovú hypotézu zamietli.

Pozrime sa ešte na posledné 2 stĺpce tabuľky. Pre väčšinu uvažovaných časových radov modelovanie pomocou dvojrežimového LSTARu znamená len malé relatívne vylepšenie oproti lineárnemu AR modelu.

Z výsledných p-value testu autokorelácie rezíduí vyplýva, že hypotézu H_0 (že rezíduá daného dvoj- alebo trojrežimového modelu LSTAR *nie sú* korelované) test nezamieta v 10 prípadoch a zamieta v 6 prípadoch.

5.3 ESTAR

V tejto časti sa budeme venovať modelovaniu uvažovaných reálnych časových radov pomocou modelov z triedy ESTAR. O vhodnosti modelovania pomocou ESTAR rozhodneme (rovnako ako v predchádzajúcej časti) na základe testu linearity a o tom, či sú lepšie 2 alebo 3 režimy, pomocou testu ostávajúcej nelinearity dvoch režimov oproti trom.

V tabuľke 5.3 sú zhrnuté najlepšie odhadnuté ESTAR modely pre naše dáta, ktoré sme opäť vybrali na základe minimálnej p-value z testu linearity (5 najlepších modelov) a hodnoty BIC. Tabuľka obsahuje hodnoty informačných kritérií AIC a BIC, p-value pre test autokorelácie rezíduí, linearity, resp. ostávajúcej nelinearity a relatívne zlepšenie oproti AR modelu, resp. v prípade trojrežimového modelu aj relatívne zlepšenie oproti dvojrežimovému modelu.

Tab. 5.3

dáta	AIC	BIC	d	p	γ_1	γ_2	c1	c2	p-value pre test				relatívne zlepšenie (v %) oproti	
									linearity	autokorelácie reziduí		ostávajúcej nelinearity	AR	2-režimovém u ESTAR
										2 režimy	3 režimy			
HUF	342.539	351.545	1	1	8.5	5.5	246.038	262.046	0.0002	0.00059	0.0002	0.00003	7.25	-8.28
SKK	166.07	173.56	4	5	1.5	4.5	36.287	37.387	0.00001	0.00897	0.0430	0.0002	18.61	20.07
PLN	-365.91	-357.73	1	1	8.5	X	3.631	X	<u>0.1233</u>	X	X	X	14.19	X
CZK	85.6049	114.971	4	5	5.5	3.5	30.709	32.745	0.0133	0.88934	0.05	0.03399	32.68	11.61
SVK nezam	-317.87	-308.64	1	2	2.5	X	19.2	X	0.0007	0.00075	X	<u>0.74358</u>	11	X
SVK inflácia	-23.654	-13.43	4	4	8.5	X	6.764	X	<u>0.0742</u>	X	X	X	9.4	X
DoS USA	-59.346	-47.341	1	3	1.5	0.5	-1.888	-0.523	0.0006	0.24354	< 10 ⁻⁶	0.0016	11.00	-3.63
GDP HUF	-206.537	-204.099	1	1	0.5	0.5	2.042	2.192	0.00009	0.00002	0.431	0.0007	59.23	-2.54
GDP SVK	-33.167	-28.25	1	1	8.5	0.5	8.106	9.103	0.0134	0.62664	0.823	0.041	26.11	4.04
GVA agri	-481.75	-475.3	3	3	8.5	X	0.161	X	0.0006	0.00034	X	<u>0.6493</u>	31.62	X
GVA constr	-274.8	-274.6	1	4	0.5	X	0.343	X	0.0041	0.3506	X	<u>0.6418</u>	3.11	X
GVA fin	-211.5	-196.51	1	5	5.5	X	0.38	X	0.0213	0.17887	X	<u>0.2069</u>	4.89	X
GVA industry	-61.27	-51.63	1	3	7.5	X	1.723	X	<u>0.067</u>	X	X	X	16.67	X
GVA other	-158.87	-150.425	2	4	8.5	1.5	0.3996	1.230	0.0025	0.01448	0.3065	0.0266	48.19	10.36
NofB10 SVK	-243.05	-267.6	2	3	8.5	6.5	0.867	0.887	0.0308	0.01627	0.1579	< 10 ⁻⁶	3.86	20.01
NofB100 SVK	-172.64	-187.15	2	4	1.5	8.5	2.228	2.248	0.01803	0.58	0.4352	0.00004	78.06	35.8
CAP. GOODS	7.874	17.017	2	2	3.5	X	17.27	X	0.0131	0.6974	X	<u>0.651</u>	76.4	X
EMPLOY SVK	-334.5	-334.75	4	4	8.5	X	2.1057	X	0.0083	0.09166	X	<u>0.3117</u>	7.25	X
UNEMPLOY očist	-553.83	-543.3	2	2	8.5	X	19.25	X	< 10 ⁻⁵	0.07122	X	<u>0.0762</u>	3.42	X
TRANSPORT SVK	547.49	565.35	5	5	5.5	X	86.12	X	<u>0.06244</u>	X	X	X	14.54	X

Z tabuľky 5.3 vidíme, že test linearity (kde je nulovou hypotézou H_0 lineárny AR model oproti dvojurežimovému ESTAR modelu) nám ako nevhodné na modelovanie pomocou ESTAR (p-value je > 5%) určilo 4 z celkového počtu 20 časových radov (v tabuľke 5.3 sú hodnoty týchto p-value podčiarknuté) – výmenný kurz PLN/EUR, priemernú mesačnú infláciu, Gross Value-added priemyslu a index spotrebiteľských cien dopravy na Slovensku. Na ostatné sme použili test ostávajúcej nelinearity (kde hypotézou H_0 boli 2 režimy). Na základe tohto testu sme zistili, že na modelovanie je vhodnejší dvojurežimový ESTAR (v porovnaní s trojurežimovým) v 7 prípadoch, pre ostatných 9 sme nulovú hypotézu (na hladine významnosti $\alpha = 0.05$) zamietli.

Pozrime sa ešte na posledné 2 stĺpce tabuľky. Pre všetky naše časové rady modelovanie pomocou dvojurežimového ESTARu znamená relatívne vylepšenie oproti

lineárnemu AR modelu. V prípade trojrežimového ESTAR modelu je takisto vo väčšine prípadov vylepšenie modelu oproti 2 režimom. V troch prípadoch došlo k zhoršeniu, avšak len minimálnemu.

Z výsledných p-value testov autokorelácie rezíduí vyplýva, že hypotézu H_0 (že rezíduá daného dvoj- alebo trojrežimového modelu ESTAR *nie sú* korelované) nezamietame (na hladine významnosti $\alpha = 0.01$) v 12 prípadoch a zamietame v 4 prípadoch.

5.4 MSW modely

V tejto časti sa budeme venovať modelovaniu uvažovaných reálnych časových radov pomocou MSW modelov. Pretože odhadujeme parametre dvojrežimového aj trojrežimového modelu MSW pre viac rádov p (v prípade dvojrežimového modelu pre $p = 1, \dots, 5$, v prípade trojrežimového modelu pre $p = 1, 2, 3$), do súhrnných tabuliek dáme len ten najvhodnejší model, o ktorom rozhodneme podľa hodnoty BIC a odchýlky rezíduí σ_{rec} (viď tabuľky (5.4.1) a (5.4.2)) :

Tab. 5.4.1

dáta	2-režimový MSW									
	$p = 1$		$p = 2$		$p = 3$		$p = 4$		$p = 5$	
	BIC	σ_{rec}	BIC	σ_{rec}	BIC	σ_{rec}	BIC	σ_{rec}	BIC	σ_{rec}
HUF	-2453.99	2.5449	-2537.4	2.3963	-1429.14	2.666	-869.999	3.66008	-866.804	3.74967
SKK	<u>-1777.09</u>	<u>0.2045</u>	-357.22	0.39642	INDET	0.12256	-356.772	0.40271	-356.749	0.39377
PLN	-1955.61	0.0487	<u>-1947.95</u>	<u>0.04624</u>	1.4891	0.0796	-2.2227	0.07806	-4.37852	0.07678
CZK	-949.63	0.3015	-338.56	0.36543	-2108.98	0.2139	-898.975	0.26953	-997.18	0.26274
SVK_NEZAM	-1805.1	0.332	-2032.3	0.28771	-1463.96	0.28776	-372.72	0.42599	-373.185	0.41013
SVK_INFLACIA	-988.1	0.5134	-1002.25	0.49434	<u>-1148.5</u>	<u>0.39583</u>	-367.929	0.6539	-365.131	0.66011
DoS_USA	-2888.5	0.4491	-3394.9	0.42953	-3258.4	0.3904	INDET	0.42977	INDET	0.44019
GDP_HUF	240.69	0.0078	252.15	0.00599	255.81	0.0059	-201.042	0.00348	<u>-562.729</u>	<u>0.00339</u>
GDP_SVK	<u>-130.67</u>	<u>0.0827</u>	INDET	0.04274	INDET	0.04163	INDET	0.04157	INDET	0.03695
GVA_agri	-491.12	0.05324	<u>-2569.77</u>	<u>0.02694</u>	-1233.5	0.03438	109.766	0.02788	111.115	0.02793
GVA_constr	-323.67	0.06295	-683.34	0.05598	20.392	0.05751	34.588	0.0571	111.12	0.02793
GVA_fin	-963.54	0.06242	-838.14	0.05481	-381.91	0.0588	-633.09	0.04966	-1076.66	0.04574
GVA_industry	-503.33	0.07783	-531.83	0.07483	-689.11	0.06547	-633.09	0.09717	-13.921	0.08532
GVA_other	-1024.3	0.14007	-1402	0.08452	<u>-2001.5</u>	<u>0.07327</u>	5.2054	0.07151	-735.15	0.04336
NoB10_SVK	111.17	0.01736	102.87	0.01405	110.34	0.01245	107.79	0.01203	105.448	0.01006
NoB100_SVK	51.332	0.04547	45.198	0.04026	47.379	0.0378	41.821	0.0347	<u>-1035.9</u>	<u>0.01541</u>
CAP_GOODS_EU16	-1259.1	0.63486	-1181.8	0.57015	-1750.6	0.49378	-502.01	0.74268	-1026.8	0.61128
EMPLOY_SVK	130.46	0.02736	117.13	0.02569	135.25	0.0222	124.67	0.02133	132.27	0.01885
UNEMPLOYocist	-488.6	0.20757	-170.17	0.19079	-920.5	0.12499	<u>-1207.3</u>	<u>0.11426</u>	-214.2	0.18016
TRANSPORT_SVK	-2430.96	0.70385	-914.31	1.07061	-2058.7	0.69264	-846.29	1.05919	-843.75	1.1088

Tab. 5.4.2

dáta	3-režimový MSW					
	$p = 1$		$p = 2$		$p = 3$	
	BIC	σ_{rez}	BIC	σ_{rez}	BIC	σ_{rez}
HUF	-588.97	4.32203	-5120.74	1.7241	-4966.94	1.84661
SKK	-56.2366	0.429841	INDET	0.131671	INDET	0.147731
PLN	212.342	0.09237	-178.036	0.079015	-197.662	0.077491
CZK	-97.8696	0.353189	-4595.92	0.172545	-3416.91	0.204181
SVK_NEZAM	-137.48	0.566593	-3317.83	0.229316	INDET	0.202554
SVK_INFLACIA	-158.185	0.656172	INDET	0.23321	INDET	0.215372
DoS_USA	-5343.44	0.365027	INDET	0.317437	INDET	0.320424
GDP_HUF	184.823	0.008405	218.744	0.006111	223.945	0.005551
GDP_SVK	153.837	0.106537	INDET	0.036728	INDET	0.025667
GVA_agri	-1157.07	0.0238433	-2448.13	0.024674	-1188.36	0.035514
GVA_constr	-1037.73	0.037535	-943.12	0.036809	4.84093	0.058242
GVA_fin	-755.853	0.052716	-1888.55	0.034292	-1675.78	0.032178
GVA_industry	-1329.42	0.05688	-1709.77	0.048653	-38.889	0.111159
GVA_other	-999.57	0.110815	-1877.74	0.073398	INDET	0.044679
NofB10_SVK	87.0652	0.0153717	87.9864	0.013975	95.332	0.011564
NofB100_SVK	32.3242	0.044384	19.3353	0.041547	20.0797	0.03714
CAP_GOODS_EU16	-292.2	0.705012	-4095.29	0.31864	-5412.78	0.354114
EMPLOY_SVK	71.6867	0.02734	63.5884	0.025826	71.9772	0.02266
UNEMPLOYocist	59.0389	0.27257	INDET	0.085402	INDET	0.091269
TRANSPORT_SVK	-431.033	1.24807	-6885.15	0.506225	-1136.66	1.0746

V tabuľkách 5.4.1 a 5.4.2 sme vybrané najlepšie modely MSW (pre každý časový rad práve jeden model) označili podčiarknutím. Môžeme vidieť, že pomer dvojrežimových a trojrežimových modelov je 9:11, teda sme vybrali 9 dvojrežimových a 11 trojrežimových MSW modelov. Skratka *INDET* vyjadruje, že dané hodnoty BIC nie sú definované (ide o delenie číslom, ktoré je veľmi blízke nuly, čo je spôsobené tým, že jeden z dvoch, resp. troch režimov neobsahoval žiadne dáta a teda prakticky ide len o lineárny, resp. dvojrežimový model).

V tabuľke 5.4.3 zhrnieme vybrané najlepšie odhadnuté MSW modely pre naše dáta. Tabuľka obsahuje p-value pre test autokorelácie reziduí vo vnútri režimov aj naprieč režimami a relatívne zlepšenie oproti AR modelu, resp. v prípade trojrežimového modelu aj relatívne zlepšenie oproti dvojrežimovému modelu. Takisto tam sú aj hodnoty pre 2., 3. a 4. centrálny moment. V našom prípade ich z dôvodu, že máme nelineárne viacrežimové časové rady, nemôžeme vypočítať „klasickým“ spôsobom, ale počítame ich pomocou vzorcov, ktoré sme odvodili v predchádzajúcej kapitole. Pre zložitosť programu sme už nepočítali centrálny momenty pre vyšší ako druhý rád.

Tab 5.4.3

dáta	ergodické pravdepodobnosti			Momenty			p-value pre test autokorelácie rezíduí		relatívne zlepšenie (v %) oproti	
	p1	p2	p3	2.	3.	4.	vo vnútri režimov	naprieč režimami	AR	2-režimovému MSW
HUF	0.42	0.51	0.07	28.4	112.266	4387.8	< 10 ⁻⁶	< 10 ⁻⁶	77.67	48.24
SKK	0.062	0.938	X	234.019	0.104	160145	< 10 ⁻⁶	< 10 ⁻⁶	69.79	X
PLN	0.673	0.327	X	3.554	6.276	17.015	0.0003	0.00034	64.86	X
CZK	0.514	0.134	0.352	45.363	-5.697	304.89	< 10 ⁻⁶	< 10 ⁻⁵	75.37	77.7
SVK nezam	0.71	0.092	0.198	39.898	40.888	720.65	0.0011	< 10 ⁻⁶	74.81	36.4
SVK inflácia	0.94	0.06	X	X	X	X	< 10 ⁻⁵	< 10 ⁻⁵	62.07	X
DoS USA	0.491	0.373	0.136	18.429	1.191	1278.69	< 10 ⁻⁶	< 10 ⁻⁶	68.5	33.9
GDP HUF	0.804	0.196	X	X	X	X	0.00007	0.00007	63.44	X
GDP SVK	0.076	0.924	X	47.09	0.261	6628.85	0.0002	< 10 ⁻⁵	25.42	X
GVA agri	0.495	0.505	X	0.001	0.004	0.001	0.06759	0.0498	86.14	X
GVA constr	0.078	0.353	0.569	1.209	0.012	16.53	0.12814	< 10 ⁻⁵	79.34	64.2
GVA fin	0.411	0.14	0.448	0.605	-0.04	1.105	0.38252	0.00392	84.25	61
GVA industry	0.339	0.144	0.517	1.677	0.06	9.665	0.18372	0.00657	81.03	55.3
GVA other	0.627	0.373	X	X	X	X	0.04592	0.04844	80.59	X
NofB10 SVK	0.37	0.27	0.36	0.15	-0.06	0.046	0.29666	0.05087	02.64	21.5
NofB100 SVK	0.657	0.343	X	X	X	X	0.08731	0.0868	80.19	X
CAP. GOODS	0.33	0.517	0.152	18.918	-0.9	913.836	0.21252	0.00002	82.23	68.9
EMPLOY SVK	0.77	0.007	0.22	0.0334	-0.0643	0.13364	< 10 ⁻⁶	0.01803	-3.2	-01.06
UNEMPLOY očíst	0.896	0.104	X	X	X	X	< 10 ⁻⁶	< 10 ⁻⁶	59.04	X
TRANSPORT SVK	0.453	0.423	0.124	44.945	-146.68	6616.7	< 10 ⁻⁶	< 10 ⁻⁶	77.2	77.6

Predposledný stĺpec Tab. 5.4.3 vyjadruje relatívne zlepšenie daného dvoj-, resp. trojrežimového modelu v porovnaní s lineárnym AR modelom. V takmer všetkých (vybraných najlepších) modeloch opisuje MSW model daný časový rad výrazne lepšie ako lineárny AR model. Len v dvoch prípadoch je vylepšenie minimálne (2.64 % v prípade počtu 10-korunových mincí v obehú na Slovensku), alebo je MSW model dokonca horší (o 3.2 % v prípade Zamestnanosti na Slovensku). Je to i v dôsledku toho, že práve v týchto dvoch prípadoch nebol vybraný (na základe BIC a odchýlky rezíduí) ten najlepší (trojrežimový) model, pretože paradoxne do jedného z režimov sa nikdy model nedostal. Teda v týchto dvoch prípadoch by asi bol lepší dvojrežimový model.

Posledný stĺpec vyjadruje (v prípade, že bol vybraný trojrežimový model) relatívne zlepšenie odhadu pomocou MSW v prípade troch režimov v porovnaní s modelom s dvoma režimami. Z tabuľky jasne vidíme, že v 10 prípadoch nastalo po odhade

trojrežimovým MSW vylepšenie odhadu. Zhoršenie odhadu nastalo len v prípade Zamestnanosti na Slovensku.

Pri modeloch z triedy MSW testujeme autokoreláciu vo vnútri režimov aj naprieč režimami. Z výsledných p-value týchto testov vyplýva, že hypotézu H_{0a} (rezíduá daného dvoj-, resp. trojrežimového modelu MSW *nie sú* korelované vo vnútri režimov) nezamietame v 8 prípadoch a zamietame v 12 prípadoch a hypotézu H_{0b} (rezíduá daného dvoj-, resp. trojrežimového modelu MSW *nie sú* korelované naprieč režimami) nezamietame v 5 prípadoch a zamietame v 15 prípadoch (všetko na hladine významnosti $\alpha = 0.01$).

Výber 2-, resp. 3-režimového modelu by sa mal robiť testovaním ostávajúcej nelinearity u dvojrežimového modelu. Pretože však neexistuje analytické vyjadrenie rozdelenia pravdepodobnosti testovacej štatistiky a kritické hodnoty je potrebné počítať simuláciou pre každý časový rad (a pre každý rád p) zvlášť, pre krátkosť času sme od toho upustili. Relatívne zlepšenie dostatočne vyjadruje správnosť výberu 3-režimového modelu na základe menšieho BIC a σ_{rez} .

Do tabuľky 5.4.4 sme zhrnuli (pre zaujímavosť) základné charakteristiky vybraných najlepších MSW modelov pre naše dáta. V tabuľke môžeme vidieť frekvencie stavov pre vybrané MSW modely, a hodnoty μ_i a σ_i v každom z daných stavov. Jednotlivé stavy môžeme interpretovať ako obdobie recesie a expanzie (v prípade dvoch režimov), resp. ako obdobie recesie, stagnácie a expanzie (v prípade troch režimov).

Interpretácia stavov: **M1** – obdobie recesie

M2 – obdobie stagnácie

M3 – obdobie expanzie

Tab. 5.4.4

dáta							Frekvencie stavov		
	1. stav		2. stav		3. stav		M1	M2	M3
	μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	μ_3	σ_3			
HUF	249.726	7.53783	254.211	7.71296	261.98	8.19485	48	59	10
SKK	39.7269	2.68609	40.0525	3.53394	X	X	7	X	108
PLN	3.90091	0.310137	4.18896	0.310861	X	X	78	X	39
CZK	30.8064	3.61901	31.0613	2.61986	32.245	3.32024	60	16	41
SVK_NEZAM	13.6506	4.06731	14.26	2.71264	16.0625	3.16304	81	10	24
SVK_INFLACIA	5.1	2.37512	6.025	1.67537	X	X	83	X	8
DoS USA	-1.75855	1.69269	-3.1315	2.11602	-3.3712	1.10265	92	74	24
GDP HUF	1.81795	0.2398	1.702	0.320178	X	X	36	X	15
GDP SVK	9.00768	1.86383	8.07161	1.50767	X	X	4	X	55
GVA agri	0.221294	0.285416	0.05276	0.094437	X	X	26	X	33
GVA constr	0.611768	0.211186	0.3174	0.157489	0.392339	0.22371	4	19	36
GVA fin	0.928558	0.516701	1.17414	0.368486	0.962401	0.44223	24	8	31
GVA industry	1.80093	0.89801	1.64753	0.665435	1.64111	0.74441	20	8	31
GVA other	0.958305	0.395541	0.87005	0.477073	X	X	35	X	24
NofB10 SVK	0.868531	0.017047	INDET	INDET	0.867104	0.016992	20	0	12
NofB100 SVK	2.38052	0.082788	2.31737	0.065964	X	X	18	X	14
CAP. GOODS	15.3805	2.23882	15.6815	2.44026	16.1381	2.80805	37	58	20
EMPLOY SVK	2.08937	0.048927	INDET	INDET	2.09515	0.00915	53	0	2
UNEMPLOY ocist	15.8724	3.16545	15.0369	3.0446	X	X	113	X	16
TRANSPORT SVK	74.6399	15.4125	89.1707	13.3493	90.4923	14.0149	74	69	22

Z tabuľky 5.4.4 jasne vidíme (ak to nebolo z predchádzajúcich tabuliek v tejto kapitole dostatočne čitateľné), pre ktoré časové rady sme vybrali dvojrežimový a pre ktoré trojrežimový model. Takisto môžeme porovnať priemerné stredné hodnoty a odchýlky v rôznych stavoch (a presvedčiť sa o tom, že sa ani v jednom prípade nerovnajú).

Skratka *INDET* vyjadruje, že dané hodnoty nie sú definované (ide o delenie číslom, ktoré je veľmi blízke nuly, čo je spôsobené tým, že jeden z dvoch, resp. troch režimov neobsahoval žiadne dáta a teda prakticky ide len o lineárny, resp. dvojrežimový model).

5.5 Najlepšie modely

V tejto kapitole vyberieme pre každý časový rad model, ktorý ho najlepšie popisuje. Hlavným kritériom budú smerodajné odchýlky rezíduí σ_{rez} . Najlepšie modely pre jednotlivé časové rady z každej triedy (SETAR, LSTAR, ESTAR, MSW) sú v tabuľke 5.5, pričom minimálna σ_{rez} je tučným písmom. Hodnota σ_{rez} u modelov s korelovanými rezíduami je podčiarknutá.

Tab. 5.5

<i>dáta</i>	<i>SETAR</i> σ_{rez}	<i>LSTAR</i> σ_{rez}	<i>ESTAR</i> σ_{rez}	<i>MSW</i> σ_{rez}
HUF	<u>3.18992</u>	<u>3.73904</u>	<u>3.6476</u>	1.7241
SKK	<u>0.379069</u>	<u>0.3494</u>	<u>0.32066</u>	0.2045
PLN	<u>0.0714825</u>	<u>0.07561</u>	<u>0.0847207</u>	0.04624
CZK	<u>0.395944</u>	<u>0.31698</u>	<u>0.279932</u>	0.172545
SVK nezam	<u>0.389888</u>	<u>0.4016</u>	<u>0.408823</u>	0.229316
SVK inflácia	<u>0.577351</u>	<u>0.5898</u>	<u>0.564074</u>	0.39583
DoS USA	<u>0.560333</u>	<u>0.5764</u>	<u>0.593941</u>	0.365027
GDP HUF	<u>0.0056863</u>	<u>0.00495</u>	<u>0.0049641</u>	0.00339
GDP SVK	0.0331243	<u>0.08367</u>	<u>0.0816442</u>	<u>0.0827</u>
GVA agri	0.0224458	<u>0.05421</u>	<u>0.0541416</u>	<u>0.02694</u>
GVA constr	<u>0.0392516</u>	<u>0.06914</u>	<u>0.0455781</u>	0.037535
GVA fin	<u>0.05792</u>	<u>0.0627</u>	<u>0.0635908</u>	0.034292
GVA industry	<u>0.112423</u>	<u>0.07994</u>	<u>0.0899662</u>	0.048653
GVA other	<u>0.0520568</u>	<u>0.05924</u>	0.051921	<u>0.07327</u>
NofB10 SVK	0.0091872	<u>0.0113</u>	<u>0.0100063</u>	<u>0.0153717</u>
NofB100 SVK	<u>0.0198671</u>	<u>0.03611</u>	<u>0.018785</u>	0.01541
CAP. GOODS	<u>0.683058</u>	<u>0.69453</u>	<u>0.699761</u>	0.31864
EMPLOY SVK	<u>0.0242428</u>	<u>0.02059</u>	0.0181273	<u>0.025826</u>
UNEMPLOY očist	<u>0.219382</u>	<u>0.15396</u>	<u>0.149922</u>	0.11426
TRANSPORT SVK	<u>0.958404</u>	<u>0.933265</u>	<u>0.879461</u>	0.506225

Vidíme, že len 7 z celkového počtu 20 najlepších modelov (podľa minimálnej σ_{rez}) má nekorelované rezíduá. V prípade lineárnych modelov platí, že ak sú rezíduá korelované, daný model ešte nie je úplne popísaný a teda nemali by sme ho vybrať ako model s najlepšimi popisnými, resp. predikčnými vlastnosťami pre daný časový rad. My však pracujeme s modelmi, ktoré majú nelineárny charakter, preto autokoreláciu rezíduí nebudeme považovať za podstatnú pri výbere najlepšieho modelu. Na to, že autokorelačná funkcia nevystihuje dostatočne závislosť rezíduí u viacrežimových modelov poukázal

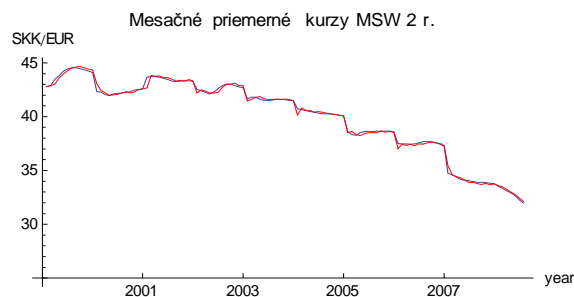
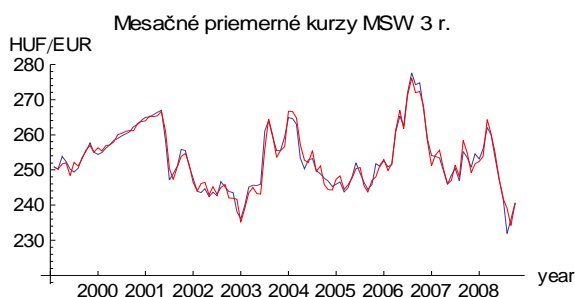
v roku 2008 Pál Rakonczai vo svojej prednáške „Goodness of Fit for Auto-Copulas in Testing the Adequacy of Time Series Models” na 7th World Congress of IMS and Bernoulli Society, Singapore, 2008, ktorý navrhol použiť tzv. auto-copulu namiesto autokorelačnej funkcie. Týmto by sme sa chceli zaoberať v ďalšom období.

Z tabuľky 5.5 vidíme, že až 15 z 20 uvažovaných časových radov najlepšie popisujú modely z triedy MSW (9 dvojrežimových, 6 trojrežimových). Model z triedy SETAR najlepšie popisuje 3 a ESTAR 2 časové rady. Tieto výsledky korešpondujú aj s relatívnym zlepšením popisov pomocou týchto modelov oproti lineárnemu AR modelu z tab. 5.1 – 5.3 a 5.4.3.

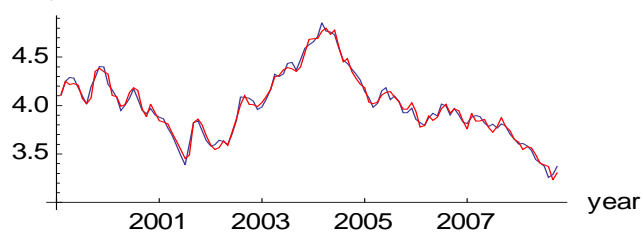
Pre nasledovné rady platí, že majú najmenšie smerodajné odchýlky rezíduí, ktoré zároveň *nie sú* korelované:

- hrubá pridaná hodnota (GVA) stavebníctva
- hrubá pridaná hodnota (GVA) finančného sektoru
- hrubá pridaná hodnota (GVA) priemyslu
- hrubá pridaná hodnota (GVA) ostatných služieb
- zamestnanosť na Slovensku
- Capital Goods EÚ
- počet bankoviek v obehu v hodnote 100 SKK

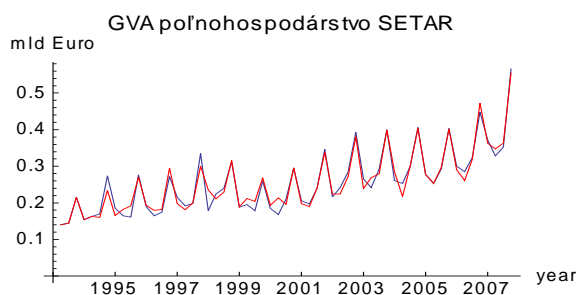
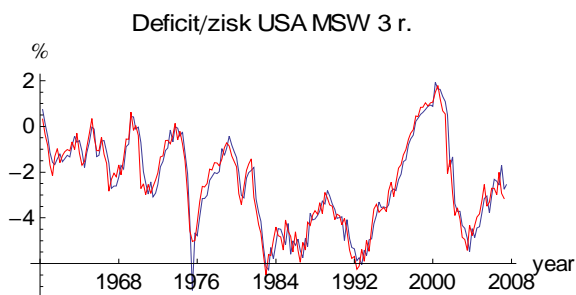
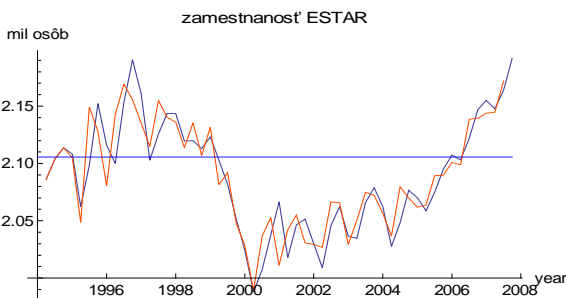
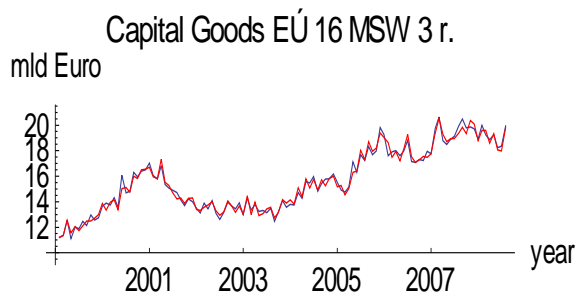
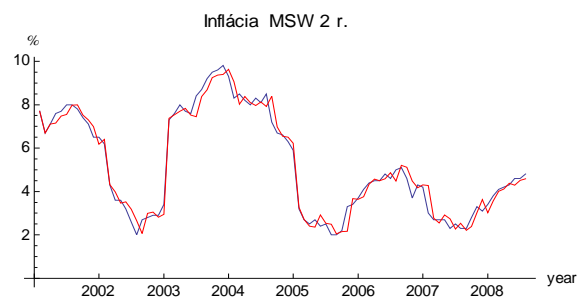
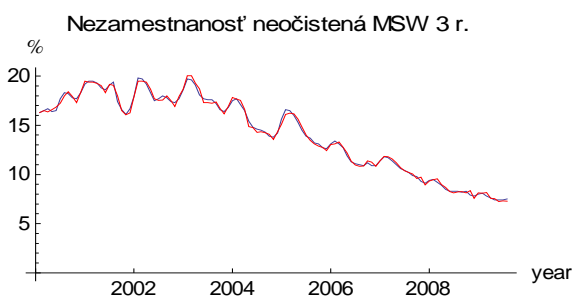
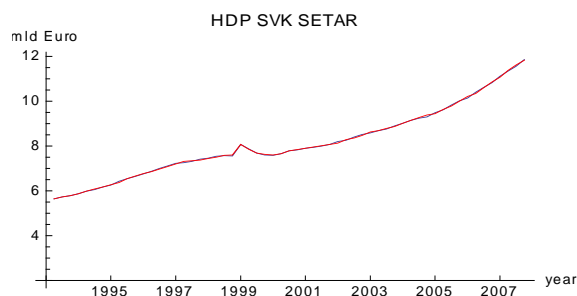
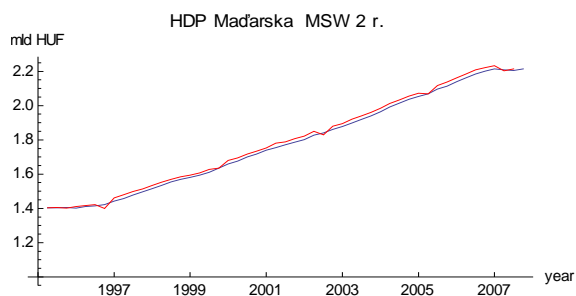
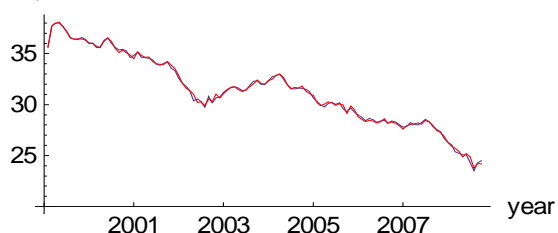
Na nasledujúcich obrázkoch sme zobrazili grafy modelov najlepšie popisujúcich naše časové rady (modrá farba - pôvodný časový rad, červená farba – odhadnutý model) :

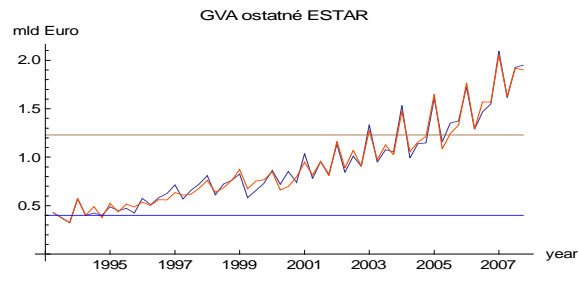
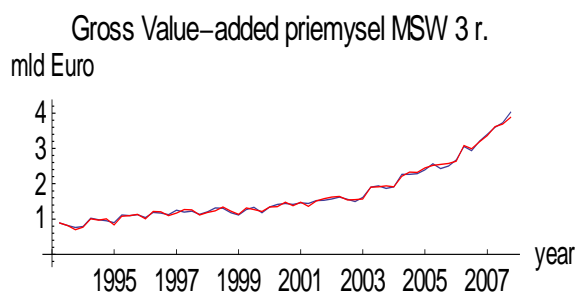
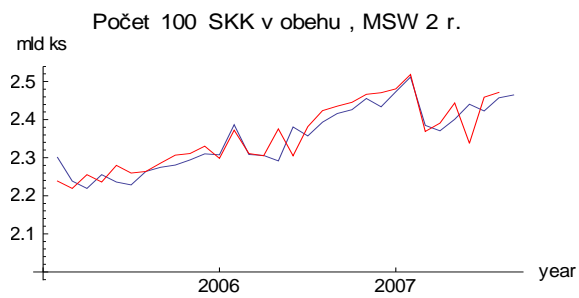
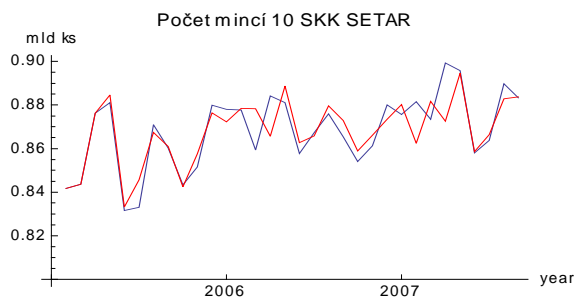
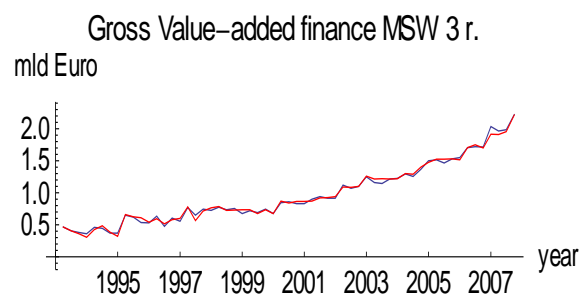
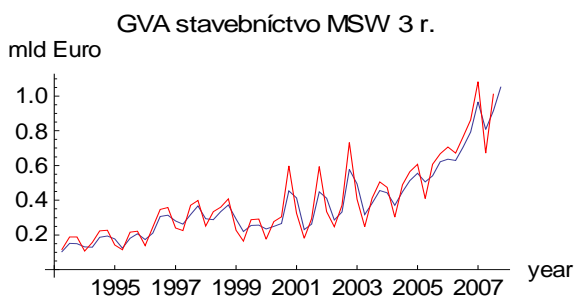
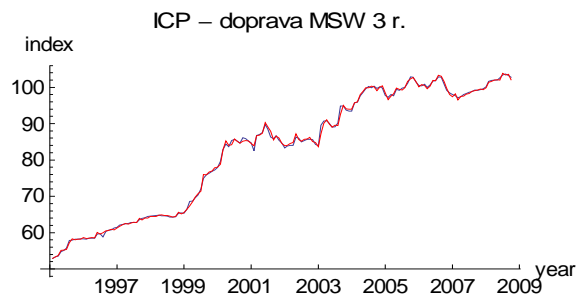
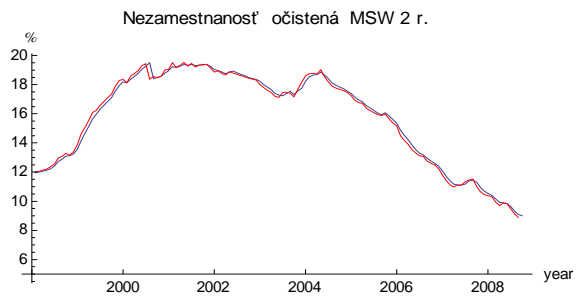


Mesačné priemerné kurzy MSW 2 r.
PLN/EUR



Mesačné priemerné kurzy MSW 3r.
CZK/EUR





5.6 Predikcie

V prvých štyroch kapitolách sme vybrali najlepšie modely pre reálne časové rady odhadované pomocou SETAR, LSTAR, ESTAR a MSW modelov. V tejto kapitole vyberieme z nich pre jednotlivé časové rady modely s najlepšimi predikčnými vlastnosťami na základe chýb predpovedí, konkrétne RMSE³ a MAE⁴.

Tab. 5.6

dáta	SETAR		LSTAR		ESTAR		MSW	
	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE	MAE	RMSE
HUF	27.0034	29.905	<u>32.2411</u>	<u>35.4209</u>	<u>28.866</u>	<u>31.9405</u>	<u>27.745</u>	<u>30.486</u>
SKK	<u>0.0237</u>	<u>0.02972</u>	<u>0.90024</u>	<u>1.10128</u>	0.0136	0.01739	<u>0.05384</u>	<u>0.0727</u>
PLN	<u>0.4945</u>	<u>0.59874</u>	<u>0.5321</u>	<u>0.6484</u>	<u>0.5757</u>	<u>0.66814</u>	0.3393	0.40842
CZK	<u>1.8767</u>	<u>2.30835</u>	<u>48.391</u>	<u>65.853</u>	<u>2.3097</u>	<u>2.76181</u>	1.0311	1.0706
SVK nezam	<u>0.2369</u>	<u>0.284</u>	<u>0.23438</u>	<u>0.26254</u>	0.14262	0.2208	<u>0.2187</u>	<u>0.27982</u>
SVK inflácia	<u>0.7871</u>	<u>0.82114</u>	0.14497	0.162	<u>0.2286</u>	<u>0.28468</u>	<u>0.25997</u>	<u>0.32995</u>
DoS USA	<u>1.8284</u>	<u>2.2414</u>	<u>1.2138</u>	<u>1.5594</u>	<u>2.08424</u>	<u>2.4987</u>	0.7826	1.28017
GDP HUF	<u>1.2025</u>	<u>2.01185</u>	<u>0.7033</u>	<u>0.8185</u>	0.007546	0.0092278	<u>0.025</u>	<u>0.03552</u>
GDP SVK	<u>0.36026</u>	<u>0.38431</u>	<u>0.4516</u>	<u>0.47464</u>	0.261984	0.304438	<u>3.1447</u>	<u>5.2265</u>
GVA agri	0.0783	0.11114	<u>0.20684</u>	<u>0.2386</u>	<u>98.913</u>	<u>197.79</u>	<u>0.15274</u>	<u>0.16877</u>
GVA constr	<u>0.1482</u>	<u>0.18596</u>	<u>1.3572</u>	<u>1.4275</u>	<u>881.62</u>	<u>1758.76</u>	0.1173	0.21465
GVA fin	0.1722	0.2511	<u>0.59942</u>	<u>0.8199</u>	<u>0.17376</u>	<u>0.25853</u>	<u>0.18711</u>	<u>0.26296</u>
GVA industry	<u>0.5387</u>	<u>0.75576</u>	<u>0.59942</u>	<u>0.8199</u>	0.49297	0.7033	<u>0.632</u>	<u>0.6811</u>
GVA other	0.15135	0.16403	<u>12.316</u>	<u>20.468</u>	<u>4.91322</u>	<u>5.65359</u>	<u>0.33511</u>	<u>0.54571</u>
NofB10 SVK	<u>0.01463</u>	<u>0.017079</u>	<u>0.01194</u>	<u>0.0152</u>	0.007287	0.0081769	<u>0.01084</u>	<u>0.01211</u>
NofB100 SVK	0.02479	0.02803	<u>0.027074</u>	<u>0.03348</u>	<u>0.064783</u>	<u>0.104212</u>	<u>0.04515</u>	<u>0.0539</u>
CAP. GOODS	<u>0.19626</u>	<u>0.2334</u>	<u>0.2421</u>	<u>0.28848</u>	0.1316	0.1462	<u>0.58255</u>	<u>0.68643</u>
EMPLOY SVK	<u>0.075154</u>	<u>0.08337</u>	<u>0.07903</u>	<u>0.0844</u>	0.0417	0.04595	<u>0.059</u>	<u>0.06821</u>
UNEMPLOY očist	<u>0.36349</u>	<u>0.29185</u>	0.2694	0.3286	<u>0.212</u>	<u>0.26771</u>	<u>0.40453</u>	<u>0.49664</u>
TRANSPORT SVK	2.167	2.3903	<u>2.7394</u>	<u>3.0264</u>	<u>4.12363</u>	<u>4.57536</u>	<u>3.8322</u>	<u>4.3276</u>

V tabuľke 5.6 sú tučným písmom vyznačené najlepšie predikcie pre dané časové rady. Tie hodnoty, pre ktoré sú rezíduá odhadnutých modelov korelované, sme podčiarkli.

Pokiaľ sa pozrieme aj na autokoreláciu rezíduí, vidíme, že len 7 z celkového počtu 20 vybraných najlepších časových radov (na základe chyby predikcie) má nekorelované rezíduá. Sú to:

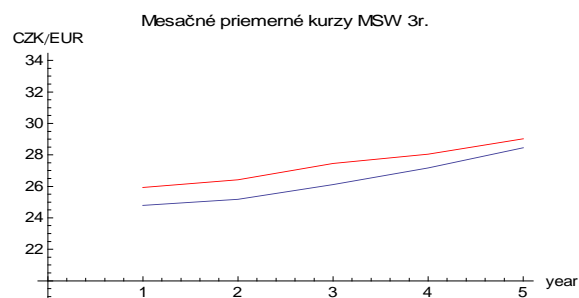
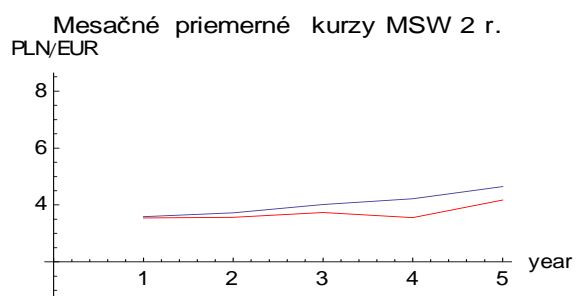
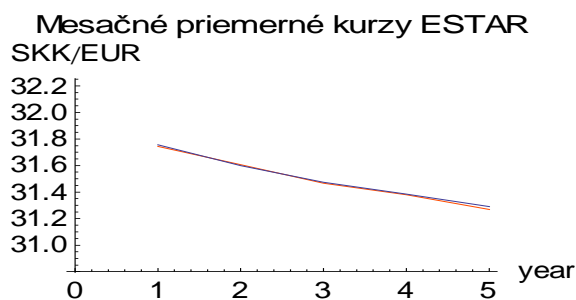
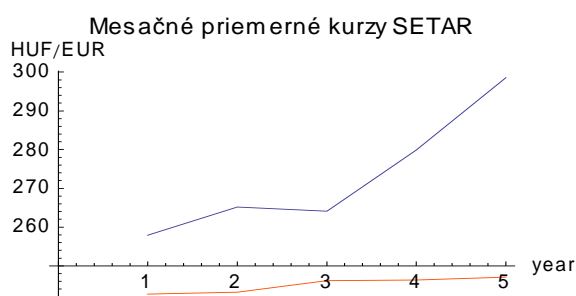
³ Stredná kvadratická odchýlka

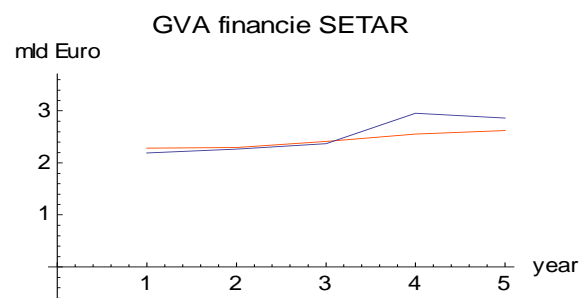
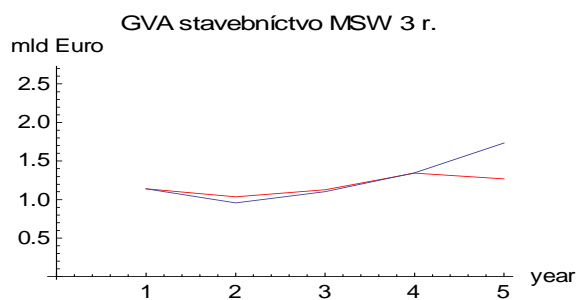
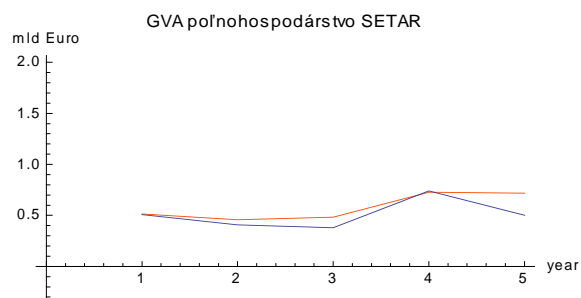
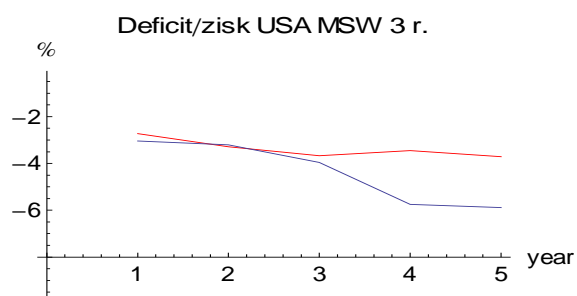
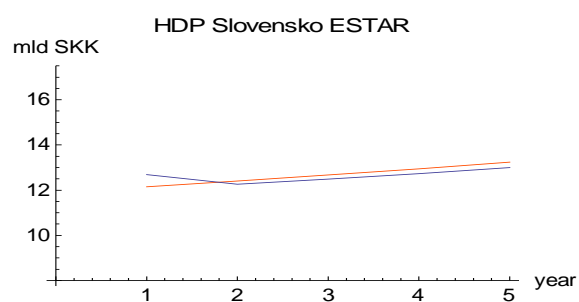
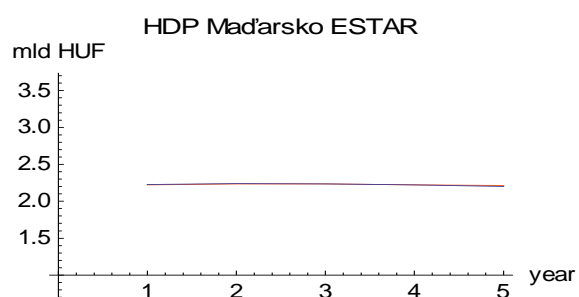
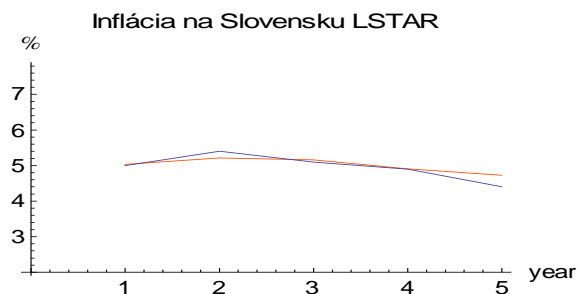
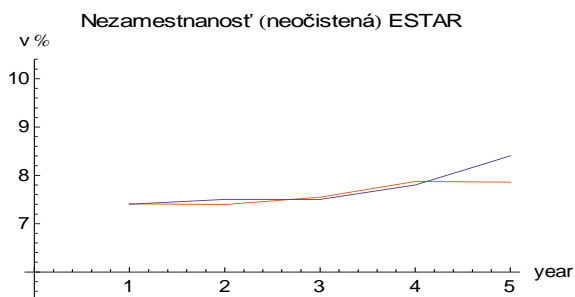
⁴ Stredná absolútna odchýlka

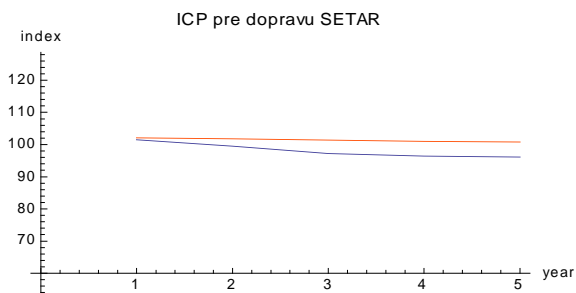
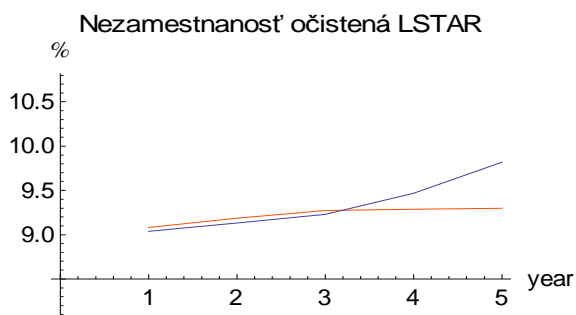
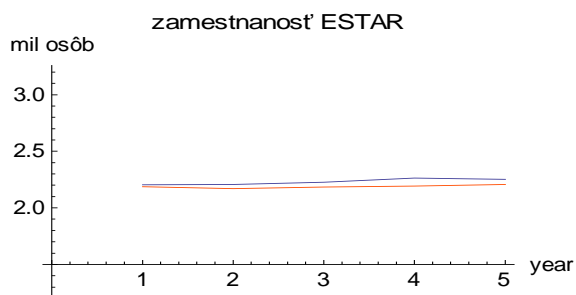
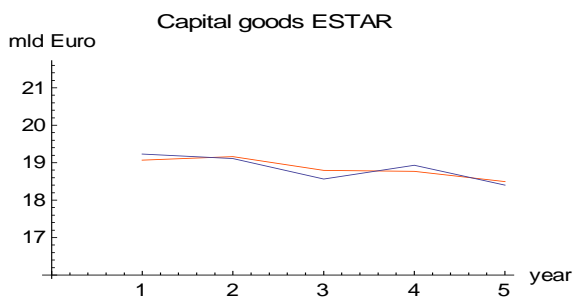
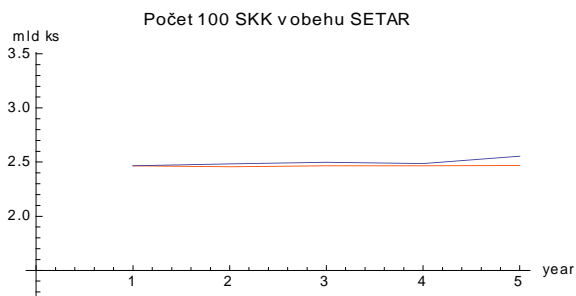
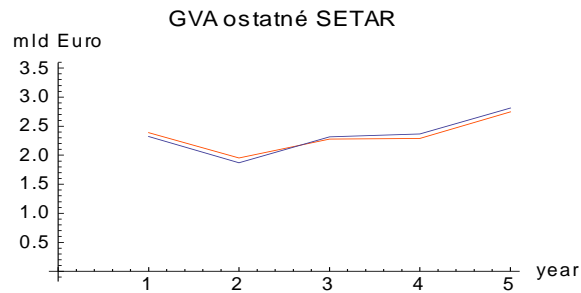
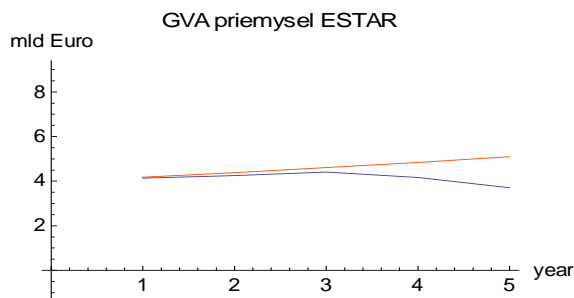
- inflácia na Slovensku
- HDP Slovenska
- hrubá pridaná hodnota (GVA) stavebníctva
- počet mincí v obehu v hodnote 10 SKK
- Capital Goods EÚ
- zamestnanosť na Slovensku
- nezamestnanosť na Slovensku – očistená.

Z tabuľky 5.6. vidíme, že najlepšie predikčné vlastnosti pre uvažované časové rady majú modely z triedy ESTAR (až 8 z 20 časových radov). Ďalšie poradie na základe predikčných vlastností je model z triedy: SETAR (6), MSW (4) a LSTAR (2).

V nasledujúcich obrázkoch sme zobrazili najlepšie predikcie pre všetky časové rady. Modrou farbou sú zobrazené reálne dáta, červenou predikcie :



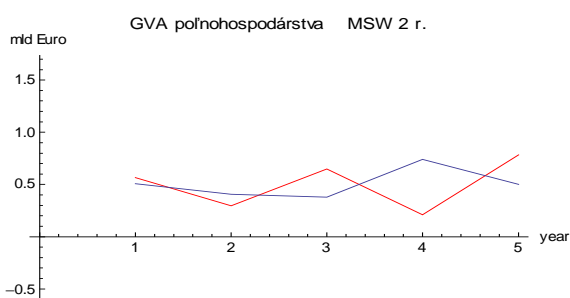




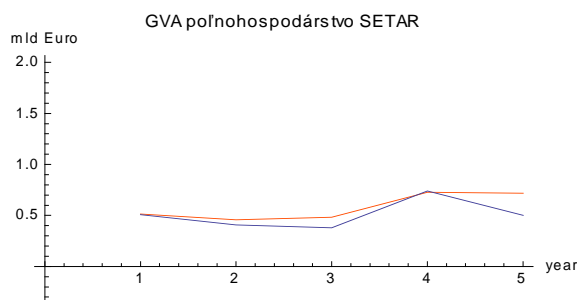
Z obrázkov môžeme pozorovať, že predikčné vlastnosti uvažovaných viacrežimových modelov sú pre väčšinu dát veľmi dobré, ale pre niektoré sú dosť podhodnotené. Dôvodom môže byť s najväčšou pravdepodobnosťou práve finančná kríza. V prípade mesačných dát sú to posledné mesiace (ktoré aj predikujeme), a v prípade

kvartálnych dát sa nám predikcia odchyľuje najviac pre 2. polrok roku 2008. Niektoré reálne údaje táto kríza veľmi neovplyvnila.

V nasledujúcich dvoch grafoch zobrazíme predikcie jedného vybraného časového radu pomocou dvoch rôznych modelov. Na obrázku č.1 je predikcia pre model, ktorý bol vybraný ako najlepší na základe chyby predpovedí, pokiaľ sme nebrali do úvahy tie, ktoré mali korelované rezíduá. Na obrázku č.2 je model s najlepšou predikciou bez ohľadu na koreláciu rezíduí.



Obr. 1



Obr.2

Vidíme, že druhý model (teda ak nezohľadňujeme autokoreláciu rezíduí) predikuje daný časový rad oveľa lepšie.

Zhrnutie:

Prvé 4 podkapitoly zhrňujú výsledky odhadov parametrov modelov s premenlivými režimami – konkrétne SETAR, LSTAR, ESTAR (modely s režimami určenými pozorovateľnými veličinami) a MSW (modely s režimami určenými nepozorovateľnými veličinami). Pri každom modeli sme uvažovali ako 2, tak aj 3 režimy. V prípade LSTAR, ESTAR a SETAR sme testovali, či je pre dané dáta vhodnejší 2-režimový alebo 3-režimový model časového radu. Najprv sme použili test linearity (kde hypotézou H_0 bol lineárny AR model oproti dvojrežimovému modelu). V prípade, že p-value bolo pre daný model a časový rad $> 5\%$, model z tejto triedy nie je vhodný. Pre všetky modely test nezamietol hypotézu linearity v 4 z celkového počtu 20 časových radov. Na ostatné sme použili test ostávajúcej nelinearity (kde hypotézou H_0 boli 2 režimy oproti 3 režimom). Na základe tohto testu sme zistili, že test hypotézu H_0 (na modelovanie je postačuje dvojrežimový model) vo viacerých prípadoch nezamietol (pre SETAR model 2x, pre LSTAR 9x a pre ESTAR 7x). Dôležitým kritériom pri výbere najlepšieho modelu z danej triedy (pre jednotlivé dáta zvlášť) bola aj hodnota BIC.

Výber MSW modelu najlepšie popisujúceho naše reálne dáta sme uskutočnili trochu iným spôsobom. Vyberali sme ho na základe najmenej hodnoty informačného kritéria BIC a smerodajnej odchýlky rezíduí.

V piatej časti sme z týchto modelov vybrali na základe minimálnej hodnoty smerodajnej odchýlky rezíduí tie, ktoré najlepšie popisujú reálne dáta (a zobrazili do grafov pôvodné dáta a ich modely). Pretože nejde o lineárne modely, uvažovali aj modely s korelovanými rezíduami. Z tabuľky 5.5 vidíme, že až 15 z 20 skúmaných časových radov najlepšie popisujú modely z triedy MSW (9 dvojrežimových, 6 trojrežimových). Model z triedy SETAR najlepšie popisuje 3 a ESTAR 2 časové rady.

V poslednej podkapitole sme sa venovali predikcii hodnôt a porovnali posledných 5 hodnôt časového radu s predikciami danými modelmi. Výber modelu najlepšie predikujúceho naše dáta sme uskutočnili na základe hodnôt chýb predpovedí (RMSE a MAE). Rovnako ako v predchádzajúcej kapitole ani tu sme nebrali do úvahy autokoreláciu rezíduí. Z tabuľky 5.6. vidíme, že najlepšie predikčné vlastnosti pre uvažované časové rady majú modely z triedy ESTAR (až 8 z 20 časových radov). Ďalšie poradie na základe predikčných vlastností je: model z triedy SETAR (6), MSW (4) a LSTAR (2).

6 Záver

V práci sme sa zaoberali najmä triedou viacrežimových modelov s režimami určenými nepozorovateľnými veličinami - modelmi MSW, ale v praktickej časti sme ich odhady porovnávali aj s modelmi určenými pozorovateľnými veličinami (SETAR, LSTAR a ESTAR).

V štvrtej kapitole sme podrobne odvodili 2., 3. a 4. centrálny moment pre 3-režimové autoregresné MSW modely.

V piatej (aplikačnej) kapitole sme odhadli optimálne hodnoty parametrov modelov z triedy viacrežimových modelov s režimami určenými pozorovateľnými premennými (SETAR, LSTAR a ESTAR) ako aj s režimami určenými nepozorovateľnými premennými (MSW) pre 20 finančných a ekonomických časových radov. Pri každom modeli sme uvažovali ako 2, tak aj 3 režimy. V prípade SETAR LSTAR a ESTAR sme zisťovali pomocou testov linearity a ostávajúcej nelinearity, či je pre dané dáta vhodnejší dvojrežimový alebo trojrežimový model časového radu. Výsledok v týchto triedach modelov je nasledovný: zhodne pre 4 z celkového počtu 20 časových radov je už dvojrežimový model nevhodný. V 2 (SETAR), 10 (LSTAR), resp. 7 prípadoch (ESTAR) vyberieme ako vhodnejší 2-režimový model. Pre zvyšné časové rady je na základe testu ostávajúcej nelinearity vhodnejší 3-režimový model. Výber MSW modelu najlepšie popisujúceho naše reálne dáta sme robili na základe najmenej hodnoty informačného kritéria BIC a smerodajnej odchýlky rezíduí. V 9 prípadoch sme vybrali 2-režimový a v 11 prípadoch 3-režimový model. Pre modely z tejto triedy (dvoj- aj trojrežimové) sme podľa výsledkov z kapitoly 4 vypočítali aj varianciu, šikmosť a špicatosť (kvôli vysokej náročnosti programu len pre rád $p \leq 2$). Programy na výpočet týchto centrálnych momentov v systéme Mathematica sú v prílohe 1 (pre dvojrežimový MSW) a v prílohe 2 (pre trojrežimový MSE).

Uskutočnili sme takisto aj výbery modelov s najlepšimi predikčnými vlastnosťami, resp. najlepšie popisujúcich dané časové rady.

Až 15 z 20 uvažovaných časových radov najlepšie popisujú modely z triedy MSW (9 dvojrežimových, 6 trojrežimových). Model z triedy SETAR najlepšie popisuje 3 a ESTAR 2 časové rady.

Najlepšie predikčné vlastnosti pre uvažované časové rady majú modely z triedy ESTAR (až 8 z 20 časových radov). Ďalšie poradie na základe predikčných vlastností je: model z triedy SETAR (6), MSW (4) a LSTAR (2).

V ďalšom období chceme v práci pokračovať, pričom náplňou výskumu bude odvodenie centrálnych momentov 2-ho až 4-ho rádu pre trojrežimový MSW model (pre $p > 2$) a ich využitie na odvodenie testu normality rezíduí pre MSW modely, ktorý podľa našich vedomostí doteraz neexistuje. Pretože sa ukázalo, že autokorelačná funkcia nie je vhodná na popis závislosti rezíduí viacrežimových modelov, chceme skúmať popis tejto závislosti pomocou tzv. auto-copule, t. j. združenej distribučnej funkcie časovo posunutých náhodných premenných generujúcich časový rad.

7 Zoznam použitej literatúry

- [1]. Akintug, B., Rasmussen, P. F. *A Markov switching model for annual hydrologic time series*. Water Resour. Res. **41**, 2005.
- [2]. Arlt Jozef, Arltová Markéta *Finanční časové řady*. Grada Publishing a.s., 2003.
- [3]. Bacigal, T.: *Advanced methods of time series modeling and their application in geodesy*. STU Bratislava, 2006.
- [4]. Bera, A. K., and Higgins, M. L. *ARCH Models: Properties, Estimation and Testing.*, Journal of Economic Surveys, Vol. **7**, No. 4, 1993. 307-366.
- [5]. Bollerslev Tim *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*. Journal of Econometrics **31**, 1986. 307-327 .
- [6]. Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden-Day, San Francisco, 1970.
- [7]. Dempster, A.P., Laird, N. M., Rubin. D. B., *Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm*. Journal of the Royal Statistical Society, B, **39**, 1977. 1 -38.
- [8]. Engle, R. F. *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of Variances of United Kingdom Inflation*, Econometrica **50**, 1982. 987 – 1008.
- [9]. González-Rivera, G. - University of California, Riverside and Jesús Gonzalo - U. Carlos III de Madrid *ARMA models*, prezentácia.
- [10]. Hamilton, J. D. *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series subject to change in regime*. Econometrica **57**, 1989. 357 – 384.
- [11]. Hamilton, J. D. *Analysis of time series subject to changes in regime*. Journal of Econometrics **45**, 1990. 39 – 70.
- [12]. Hamilton, J. D. *Time Series Analysis*. Princeton University Press. 1994.
- [13]. Hamilton, J. D. *Specification testing in Markow-Switching time series models*. Journal of Econometrics **70**, 1996. 127 – 157.
- [14]. Hansen, B. E. *The likelihood ratio test under nonstandard conditions: Testing the Markow-Switching model of GNP*. Journal of Applied Econometrics **7**, 1994. 61 – 82.

- [15]. Hylleberg Svend *Modelling Seasonality. Advanced Texts in Econometrics.* Oxford University Press, 1992.
- [16]. Lawrence R. Rabiner *A tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition.* IEEE, Vol 77, No. 2, February 1989.
- [17]. Psaradakis Zacharias, Sola Martin *Finite-sample properties of the maximum likelihood estimator in autoregressive models with Markov switching.* 1997.
- [18]. Sean D. Campbell *Specification Testing and Semiparametric Estimation of Regime Switching Models: An Examination of the US Short Term Interest Rate.* Department of Economics, Brown University, 2002.
- [19]. Timmermann, A. *Moments of Markov switching models.* Journal of Econometrics **96**, 2000. 75 – 111.
- [20]. Tong, H. *On a threshold model.* In: C. H. Chen (ed.), *Pattern recognition and Signal Processing.* Amsterdam, 1978, 101 – 141.
- [21]. Tong, H. *Non-linear time series: A dynamical systems approach.* Oxford University Press, Oxford. 1990.
- [22]. <http://www.statistics.com/resources/glossary/a/armamodel.php>
- [23]. <http://www.statistics.com/resources/glossary/a/arima.php>
- [24]. <http://www.duke.edu/~rnau/411arim.htm>

Príloha 1 - program pre výpočet momentov 2-režimového MSW modelu

Funkcie pre 2-režimový model

```

spc[a_, b_] := Table[a[[i]] * b[[i]], {i, Length[a]}]
yvek[t_, p_] := Prepend[Table[y[[t - i]], {i, 1, p}], 1];
phi[j_, p_] := Table[fiv[[j, i]], {i, 1, p + 1}];

hustota[j_, t_, p_, sigma_] :=  $\frac{1}{\sqrt{2 * \text{Pi}} * \text{sigma}} * \text{Exp}\left[-\frac{(y[[t]] - \text{yvek}[t, p] * \phi[1[j, p]])^2}{2 * \text{sigma}^2}\right]$ 

Yv[j_, t_, p_] := yvek[t, p] * Sqrt[vys[t, n][[j]]]
Xv[j_, t_, p_] := y[[t]] * Sqrt[vys[t, n][[j]]]
phiFun[j_, p_] := PseudoInverse[Sum[Outer[Times, Yv[j, h, p], Yv[j, h, p]], {h, kk + 1, n}].
(Sum[Yv[j, 1, p] * Xv[j, 1, p], {1, kk + 1, n}])

sigm[p_] := Sqrt[ $\frac{1}{n} * (\text{Sum}[\text{Sum}[(y[[t]] - \text{yvek}[t, p] * \phi[1[j]])^2] * \text{vys}[t, n][[j]], \{t, kk + 1, n\}], \{j, 1, M\})]$ ]

delta[i_, j_, t_, M_] :=
(vys[t - 1, n][[i]] * vys[t, n][[j]]) / (Sum[Sum[(vys[t - 1, n][[h]] * vys[t, n][[l]]), {l, M}], {h, M}])
gamma[i_, t_, M_] := Sum[delta[i, j, t, M], {j, M}]
pp[i_, j_, M_] :=  $\frac{\text{Sum}[\text{delta}[i, j, t, M], \{t, kk + 2, n\}]}{\text{Sum}[\text{gamma}[i, t, M], \{t, kk + 2, n\}]}$ 

xvektor[t_, p_] := {yvek[t, p].fiv[[1]], yvek[t, p].fiv[[2]]}

MSWModel[y_, n_] := Module[{},
Clear[ksi];
ksi[kk + 1, kk] = ksi0;
For[t = kk + 1, t ≤ n, t++,
ksi[t, t] = Table[(ksi[t, t - 1])[[1]] * hustota[1, t, p, sigma], {1, 1, M}] /
({1, 1}.Table[(ksi[t, t - 1])[[1]] * hustota[1, t, p, sigma], {1, 1, M}]);
ksi[t + 1, t] = pmat.ksi[t, t];
vys[n, n] = predch;
For[t = n - 1, t ≥ kk + 1, t--,
vys[t, n] =
Table[ksi[t, t][[1]], {1, M}] * (Transpose[pmat].Table[vys[t + 1, n][[1]] / ksi[t + 1, t][[1]], {1, M}]);
vysledok = Table[vys[t, n], {t, kk + 1, n}];
Table[If[vysledok[[t, 1]] > vysledok[[t, 2]], qp[t] = 1, qp[t] = 2], {t, 1, Length[vysledok]}];
Table[qp[t], {t, 1, Length[vysledok]}];
q = Join[Table[0, {kk}], Table[qp[t], {t, 1, Length[vysledok]}]];
fiv2 = Table[phiFun[i, p], {i, 1, M}];
s2 = sigm[p];
pmat = Table[Table[pp[i, j, M], {j, 1, M}], {i, 1, M}];
While[(((Abs[s2 - sigma] > 0.0001) &&
(Norm[(fiv2[[1]] - fiv[[1]])] > 0.001) && (Norm[(fiv2[[2]] - fiv[[2]])] > 0.001)), sigma = s2;
fiv = fiv2;
ksi[t, t - 1] = ksi0;
For[t = kk + 1, t ≤ n, t++,
ksi[t, t] = Table[(ksi[t, t - 1])[[1]] * hustota[1, t, p, sigma], {1, 1, M}] /
({1, 1}.Table[(ksi[t, t - 1])[[1]] * hustota[1, t, p, sigma], {1, 1, M}]);
ksi[t + 1, t] = pmat.ksi[t, t];
vys[n, n] = vys[kk + 1, n];
For[t = n - 1, t ≥ kk + 1, t--,
vys[t, n] =
Table[ksi[t, t][[1]], {1, M}] * (Transpose[pmat].Table[vys[t + 1, n][[1]] / ksi[t + 1, t][[1]], {1, M}]);
pmat = Table[pp[i, j, M], {i, M}, {j, M}];
fiv2 = Table[phiFun[i, p], {i, 1, M}]; s2 = sigm[p]];

ptmat = Transpose[pmat];

prvy = {};
druhy = {};
Do[If[q[[i]] == 1, prvy = Append[prvy, y[[i]]], druhy = Append[druhy, y[[i]]], {i, n}];
N1 = Length[prvy]; N2 = Length[druhy]; mu1 = Mean[prvy]; mu2 = Mean[druhy];
o1 = StandardDeviationMLE[prvy]; o2 = StandardDeviationMLE[druhy];

```

```

matica0 = {{1 - ptmat[[1, 1]], -ptmat[[1, 2]], {-ptmat[[2, 1]], 1 - ptmat[[2, 2]]}, {1, 1}};
matica1 = Inverse[Transpose[matica0].matica0].Transpose[matica0];
erg = Transpose[matical][[3]]

```

■ Výpočet momentov :

```

P[1] = (1 - ptmat[[2, 2]]) / (2 - ptmat[[1, 1]] - ptmat[[2, 2]]);
P[2] = (1 - ptmat[[1, 1]]) / (2 - ptmat[[1, 1]] - ptmat[[2, 2]]);
μvek = {μ1, μ2}; σvek = {σ1, σ2a}; φmat = Table[fiv[[i, j]], {i, 2}, {j, 2}];
πvek = {P[1], P[2]};
μsh = πvek.μvek; B = Table[pmat[[i, j]] * P[i] / P[j], {i, 2}, {j, 2}];

```

■ Variancia (druhý centrálny moment):

```

Abs[πvek.({(μvek[[1]] - μsh)^2, (μvek[[2]] - μsh)^2} +
(φmat^2).Inverse[IdentityMatrix[2] - B.(φmat^2)].(σvek^2) + (σvek^2))]

```

■ Šikmost' (tretí centrálny moment):

```

πvek.({(μvek[[1]] - μsh)^3, (μvek[[2]] - μsh)^3}) + 3 *
πvek.spc[B.(φmat^2).Inverse[IdentityMatrix[2] - B.(φmat^2)].(σvek^2), {(μvek[[1]] - μsh), (μvek[[2]] - μsh)}] +
3 * πvek.spc[{{(μvek[[1]] - μsh), (μvek[[2]] - μsh)}, (σvek^2)}]

```

■ Špicatost' (štvrtý centrálny moment):

```

πvek.({(μvek[[1]] - μsh)^4, (μvek[[2]] - μsh)^4}) +
6 * πvek.spc[B.(φmat^2).Inverse[IdentityMatrix[2] - B.(φmat^2)].(σvek^2),
{(μvek[[1]] - μsh)^2, (μvek[[2]] - μsh)^2}] +
6 * πvek.spc[{{(μvek[[1]] - μsh)^2, (μvek[[2]] - μsh)^2}, (σvek^2)}] +
πvek.(φmat^4).Inverse[IdentityMatrix[2] - B.(φmat^4)].
(3 * (σvek^4) + 6 * spc[B.(φmat^2).Inverse[IdentityMatrix[2] - B.(φmat^2)].(σvek^2), (σvek^2)]) +
6 * πvek.spc[B.(φmat^2).Inverse[IdentityMatrix[2] - B.(φmat^2)].(σvek^2), (σvek^2)] + 3 * πvek.(σvek^4)

```

Príloha 2 - program pre výpočet momentov 3-režimového MSW modelu

Funkcie pre 3-režimový model

```

spc[a_, b_] := Table[a[[i]] * b[[i]], {i, Length[a]}
yvek[t_, p_] := Prepend[Table[y[[t - i]], {i, 1, p}], 1];
phi[j_, p_] := Table[fiv[[j, i]], {i, 1, p + 1};

hustota[j_, t_, p_, sigma_] := 
$$\frac{1}{\sqrt{2 * \text{Pi}} * \text{sigma}} * \text{Exp}\left[-\frac{(y[[t]] - \text{yvek}[t, p] * \phi[1[j, p]])^2}{2 * \text{sigma}^2}\right]$$


Yv[j_, t_, p_] := yvek[t, p] * Sqrt[vys[t, n][[j]]]
Xv[j_, t_, p_] := y[[t]] * Sqrt[vys[t, n][[j]]]
phiFun[j_, p_] := PseudoInverse[Sum[Outer[Times, Yv[j, h, p], Yv[j, h, p]], {h, kk + 1, n}]] *
  (Sum[Yv[j, 1, p] * Xv[j, 1, p], {1, kk + 1, n}])

sigm[p_] := Sqrt[
$$\frac{1}{n} * (\text{Sum}[\text{Sum}[(y[[t]] - \text{yvek}[t, p] * \phi[1[j]])^2] * \text{vys}[t, n][[j]], \{t, \text{kk} + 1, n\}], \{j, 1, M\})]$$
]

delta[i_, j_, t_, M_] :=
  (vys[t - 1, n][[i]] * vys[t, n][[j]]) / (Sum[Sum[(vys[t - 1, n][[h]] * vys[t, n][[l]]), {1, M}], {h, M}])
gamma[i_, t_, M_] := Sum[delta[i, j, t, M], {j, M}]
pp[i_, j_, M_] := 
$$\frac{\text{Sum}[\text{delta}[i, j, t, M], \{t, \text{kk} + 2, n\}]}{\text{Sum}[\text{gamma}[i, t, M], \{t, \text{kk} + 2, n\}]}$$


xvektor[t_, p_] := {yvek[t, p].fiv[[1]], yvek[t, p].fiv[[2]], yvek[t, p].fiv[[3]]}

MSWModel3[y_, n_] := Module[{},
  Clear[ksi];
  ksi[kk + 1, kk] = ksi0;
  For[t = kk + 1, t <= n, t++,
    ksi[t, t] = Table[(ksi[t, t - 1][[1]] * hustota[1, t, p, sigma], {1, 1, M}] /
      ({1, 1, 1}.Table[(ksi[t, t - 1][[1]] * hustota[1, t, p, sigma], {1, 1, M}]);
    ksi[t + 1, t] = pmat.ksi[t, t];
  ];
  vys[n, n] = predch;
  For[t = n - 1, t >= kk + 1, t--,
    vys[t, n] = Table[ksi[t, t][[1]], {1, M}] * (pmat.Table[vys[t + 1, n][[1]] / ksi[t + 1, t][[1]], {1, M}]);
  vysledok = Table[vys[t, n], {t, kk + 1, n}];
  Table[If[vysledok[[t, 1]] > vysledok[[t, 2]] && vysledok[[t, 1]] > vysledok[[t, 3]],
    qp[t] = 1, If[vysledok[[t, 2]] > vysledok[[t, 1]] && vysledok[[t, 2]] > vysledok[[t, 3]],
    qp[t] = 2, qp[t] = 3]], {t, 1, Length[vysledok]};
  Table[qp[t], {t, 1, Length[vysledok]};
  q = Join[Table[0, {kk}], Table[qp[t], {t, 1, Length[vysledok]}]];
  fiv2 = Table[phiFun[i, p], {i, 1, M}];
  s2 = sigm[p];
  pmat = Table[Table[pp[i, j, M], {j, 1, M}], {i, 1, M}];
  While[(Abs[s2 - sigma] > 0.0001) && (Norm[(fiv2[[1]] - fiv[[1]])] > 0.001) &&
    (Norm[(fiv2[[2]] - fiv[[2]])] > 0.001) && (Norm[(fiv2[[3]] - fiv[[3]])] > 0.001)), sigma = s2;
  fiv = fiv2;
  ksi[kk + 1, kk] = ksi0;
  For[t = kk + 1, t <= n, t++,
    ksi[t, t] = Table[(ksi[t, t - 1][[1]] * hustota[1, t, p, sigma], {1, 1, M}] /
      ({1, 1, 1}.Table[(ksi[t, t - 1][[1]] * hustota[1, t, p, sigma], {1, 1, M}]);
    ksi[t + 1, t] = pmat.ksi[t, t];
  ];
  vys[n, n] = vys[kk + 1, n];
  For[t = n - 1, t >= kk + 1, t--,
    vys[t, n] = Table[ksi[t, t][[1]], {1, M}] *
      (Transpose[pmat].Table[vys[t + 1, n][[1]] / ksi[t + 1, t][[1]], {1, M}]);
  pmat = Table[pp[i, j, M], {i, M}, {j, M}];
  fiv2 = Table[phiFun[i, p], {i, 1, M}]; s2 = sigm[p];

ptmat = Transpose[pmat];

prvy = {};
druhy = {};
treti = {};
Do[If[q[[i]] == 1, prvy = Append[prvy, y[[i]]],
  If[q[[i]] == 2, druhy = Append[druhy, y[[i]]], tretí = Append[treti, y[[i]]]], {i, n}];
N1 = Length[prvy]; N2 = Length[druhy]; N3 = Length[treti]; mu1 = Mean[prvy]; mu2 = Mean[druhy]; mu3 = Mean[treti];
o1 = StandardDeviationMLE[prvy]; o2 = StandardDeviationMLE[druhy]; o3 = StandardDeviationMLE[treti];

```

```

matica0 = {{1 - ptmat[[1, 1]], -ptmat[[1, 2]], -ptmat[[1, 3]], {-ptmat[[2, 1]], 1 - ptmat[[2, 2]], -ptmat[[2, 3]]},
  {-ptmat[[3, 1]], -ptmat[[3, 2]], 1 - ptmat[[3, 3]]}, {1, 1, 1}};
matical = Inverse[Transpose[matica0].matica0].Transpose[matica0];
erg = Transpose[matical][[4]]

```

■ Výpočet momentov :

```

P[1] = erg[[1]]
P[2] = erg[[2]]
P[3] = erg[[3]]

μvek = {μ1, μ2, μ3};
σvek = {σ1, σ2, σ3};
φmat = Table[fiv[[i, j]], {i, 3}, {j, p + 1}];
πvek = {P[1], P[2], P[3]};
μsh = erg.μvek;
B = Table[pmat[[i, j]] * P[i] / P[j], {i, 3}, {j, 3}];

```

■ Variancia (druhý centrálny moment):

```

erg. ((μvek[[1]] - μsh)^2, (μvek[[2]] - μsh)^2, (μvek[[3]] - μsh)^2) +
  (φmat^2).PseudoInverse[IdentityMatrix[3] - B.(φmat^2)].(σvek^2) + (σvek^2)

```

■ Šikmost' (tretí centrálny moment):

```

erg. ((μvek[[1]] - μsh)^3, (μvek[[2]] - μsh)^3, (μvek[[3]] - μsh)^3) +
  3 * erg.spc[B.(φmat^2).PseudoInverse[IdentityMatrix[3] - B.(φmat^2)].(σvek^2),
  {(μvek[[1]] - μsh), (μvek[[2]] - μsh), (μvek[[3]] - μsh)}] +
  3 * erg.spc[{{(μvek[[1]] - μsh), (μvek[[2]] - μsh), (μvek[[3]] - μsh)}, (σvek^2)}]

```

■ Špicatost' (štvrtý centrálny moment):

```

erg. ((μvek[[1]] - μsh)^4, (μvek[[2]] - μsh)^4, (μvek[[3]] - μsh)^4) +
  6 * erg.spc[B.(φmat^2).PseudoInverse[IdentityMatrix[3] - B.(φmat^2)].(σvek^2),
  {(μvek[[1]] - μsh)^2, (μvek[[2]] - μsh)^2, (μvek[[3]] - μsh)^2}] +
  6 * erg.spc[{{(μvek[[1]] - μsh)^2, (μvek[[2]] - μsh)^2, (μvek[[3]] - μsh)^2}, (σvek^2)}] +
  erg.(φmat^4).PseudoInverse[IdentityMatrix[3] - B.(φmat^4)].
  (3 * (σvek^4) + 6 * spc[B.(φmat^2).PseudoInverse[IdentityMatrix[3] - B.(φmat^2)].(σvek^2), (σvek^2)]) +
  6 * erg.spc[B.(φmat^2).PseudoInverse[IdentityMatrix[3] - B.(φmat^2)].(σvek^2), (σvek^2)] + 3 * erg.(σvek^4)

```