

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A
INFORMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2009

LUCIA POTISKOVÁ

ODHAD VALUE-AT-RISK
POMOCOU COPULA FUNKCIÍ

DIPLOMOVÁ PRÁCA

LUCIA POTISKOVÁ

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

9.1.9 APLIKOVANÁ MATEMATIKA

EKONOMICKÁ A FINANČNÁ MATEMATIKA

VEDÚCI DIPLOMOVEJ PRÁCE: MGR. STACHO MUDRÁK

BRATISLAVA 2009

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s využitím teoretických vedomostí, konzultácií a s použitím uvedenej literatúry.

.....

Lucia Potisková

Podakovanie

Na tomto mieste sa chcem poďakovať predovšetkým svojim rodičom, že mi umožnili študovať a že ma v mojom štúdiu neustále podporovali. Veľká vďaka patrí hlavne mojej mamke, ktorá vždy verila v moje schopnosti a túžila sa dožiť úspešného dovŕšania môjho 5-ročného snaženia sa, avšak už jej to nebolo dopriate.

Vďaka tiež patrí môjmu priateľovi a taktiež všetkým tým, ktorí mi boli oporou a ktorí mi poskytli mnohé cenné rady. Touto cestou sa chcem poďakovať aj vedúcemu mojej diplomovej práce za jeho čas, ktorý mi pri práci venoval.

Abstrakt

POTISKOVÁ, Lucia: *Odhad Value-at-Risk pomocou copula funkcií*. [Diplomová práca] - Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. - Vedúci diplomovej práce: Mgr. Stacho Mudrák, - Bratislava: FMFI UK, 2009. /60 s./

Value-at-Risk (VaR) predstavuje štandardný nástroj na meranie trhového rizika a až do súčasnosti bol jedným z najrozšírenejších a najbežnejšie používaných nástrojov v bankovom sektore. Cieľom práce je poskytnúť prehľad metód odhadu VaR so zreteľom na jednu konkrétnu spomedzi parametrických metód.

V praxi sa stretávame s požiadavkou neposudzovať portfólio aktív alebo súbor viacerých rizikových faktorov ako celok, ale pristupovať ku každému faktoru osobitne. To so sebou prináša problém odhadnutia miery závislosti medzi faktormi. Diplomová práca oboznamuje čitateľa so základmi teórie copula funkcií, ktoré tento problém čiastočne riešia a snaží sa ponúknuť zreteľný a logicky konzistentný pohľad na postup pri odhadovaní Value-at-Risk v prípade dvoch rizikových faktorov.

Kľúčové slová

Value-at-Risk, copula funkcia, bivariačné rozdelenie, odhad

Obsah

Úvod	6
1 Value-at-Risk:	
Definície základných pojmov	8
1.1 Riziko	9
1.2 Odhad straty	11
1.3 Časový horizont	11
1.4 Hladina spoľahlivosti	12
2 Výpočet Value-at-Risk	13
2.1 Metóda historickej simulácie	16
2.2 Teória extrémnych hodnôt	18
2.3 Parametrické metódy	20
2.3.1 Variančno-kovariančná metóda	22
2.4 Monte Carlo simulácie	24
3 Copula funkcie ako nástroj pre odhad VaR	26
3.1 Teória copula funkcií	27
3.2 Miera vzájomnej závislosti	30
3.2.1 Chvostová závislosť	33
3.3 Parametrické copuly	34

3.3.1	Trieda eliptických copúl	34
3.3.2	Trieda archimedovských copúl	39
3.4	Dáta a voľba vhodnej copuly	47
3.4.1	Metóda maximálnej vierohodnosti	47
3.4.2	Procedúra podľa Genesta a Rivesta	50
3.5	Odhad Value-at-Risk	51
	Záver	56
	Literatúra	57

Úvod

Vývoj na finančnom trhu je nepredvídateľný a každý racionálne zmýšľajúci účastník trhových aktivít sa snaží dostatočne dobre zabezpečiť proti vysokým stratám. Ale skôr ako si je finančná spoločnosť schopná vypýtať cenu za zmiernenie rizika, resp. aby bola schopná manažovať riziko v únosnej miere, musí byť schopná odmerať, akému riziku v akej podobe čelí. Vo všeobecnosti sa dá povedať, že riziko má dva základné komponenty: v akej výške budeme čeliť v budúcnosti riziku t.j. aké budú straty z jednotlivých operácií na finančnom trhu = expozícia (exposure) a aká je miera istoty, že spomínaná strata nastane. Štandardný nástroj na meranie tohto rizika je Value-at-Risk.

V prvej kapitole si predstavíme práve aspekty rizika zahrnuté v nástroji na jeho meranie, definíciu VaR a všetky pojmy s ňou súvisiace. V poradí druhej kapitole sa oboznámime s metodológiou Value-at-Risk a možnosťami jeho výpočtu pomocou viacerých metód. Jednou z nich je aj parametrický odhad. Ak však chceme zohľadniť viacero faktorov rizika, musíme riešiť problém ich vzájomných závislostí, hľadať vhodné viacrozmerne pravdepodobnostné rozdelenie. Na to využijeme copula funkcie. Práve tie budú predmetom nášho záujmu v tretej kapitole. Rozoberieme si celú základnú teóriu copula funkcií a na záver si aj prakticky ukážeme odhad na príklade.

Cieľom tejto práce je poskytnúť čitateľovi komplexný pohľad na problematiku Value-at-Risk a predovšetkým, oboznámiť ho s pojmom copula funkcií a možnosťou odhadovania VaR nielen pre prípady jediného rizikového faktora, ale aj viacerých. Konkrétne, pre potreby tejto práce, dvoch faktorov a teda bivariačného rozdelenia.

Kapitola 1

Value-at-Risk:

Definície základných pojmov

VaR je metóda ohodnotenia rizika využívajúca štandardné štatistické techniky. **Meria najväčšiu očakávanú stratu v danom časovom horizonte za normálnych trhových podmienok na danom intervale spoľahlivosti.** Odpovedá na otázku: Koľko maximálne môže spoločnosť stratiť s určitou pravdepodobnosťou za vopred daný čas, ak investuje do množiny zadaných aktív? Pre lepšiu predstavu si uvedieme príklad: Ak banka povie, že 1-dňové VaR jej trhového portfólia je 1 mil.€ na 99% intervale spoľahlivosti, znamená to, že s pravdepodobnosťou 99% za normálnych trhových podmienok v priebehu nasledujúceho dňa nenastane strata väčšia ako 1 mil.€.

V rámci tejto kapitoly sa pokúsime rozobrať pár základných pojmov spomenutých v definícií uvedenej metódy.

1.1 Riziko

Riziko môže byť definované ako volatilita neočakávaných výsledkov, všeobecne hodnôt aktív a pasív. Pojem finančného rizika sa spája so stratami na finančných trhoch, s pohybmi úrokových mier, devízových kurzov, s nesplnením záväzkov ako je splácanie úverov a podobne. Jednou zo základných úloh finančných spoločností je teda koncentrácia na optimalizáciu manažmentu vystavenia sa rizikám. Pochopením rizík je možné pripraviť sa na prípadné straty a mať plán v prípade neočakávaných udalostí.

V literatúre sa stretne s nespočetným množstvom delení rizika - čo publikácia, to iné delenie. Zaujímavý prístup je možné nájsť v knihe profesora Joriona z *University of California*, ktorá v prvej edícii v roku 1996 podala finančníkom na celom svete ako prvá komplexný popis Value-at-Risk.¹ Autor vo všeobecnosti delí riziká na *business risk* a *nonbusiness risk*. Prvým termínom označuje také riziká, ktoré sú spoločnosti na seba ochotné brať, ktoré vlastníkom prinášajú navýšenie ich kapitálu. Zahŕňa možnosti, ktorými disponujú - technologické inovácie, zmeny v dizajne produktu, v marketingu. Možnosti prevádzky zahŕňajúce fixné a variabilné náklady, sú tiež voliteľnou zložkou. Vystavenie sa týmto rizikám je samozrejmom súčasťou správneho fungovania každej firmy, riziko je disperzia stochastických procesov, od ktorých závisí zisk finančnej spoločnosti. Súčasťou všetkých spomenutých aktivít je aj vystavenie sa makroekonomickým rizikám, ktoré sú výsledkom fluktuácií v príjmoch a monetárnej politike.

Ostatné riziká, nad ktorými firmy nemajú plnú kontrolu, zaraďujeme do druhej spomínanej skupiny. Patria sem riziká ako napr. strategické, voči ktorým je pomerne náročne zaistiť sa.

¹[12] Jorion: *Value At Risk: The New Benchmark For Managing Financial Risk*

Odhlíadnúc od spomínaného delenia, v literatúre, ale aj v praxi sa väčšinou stretávame s konkrétnejším rozdelením rizík na jednotlivé typy:

- *Trhové riziko* - Riziko straty hodnoty portfólia, nečakaných zmien cien akcií, výšky úrokových mier, devízových kurzov a cien komodít. Tento druh rizika má dve formy - absolútnu, ktorá je meraná v peňažných jednotkách a relatívnu, meranú vo vzťahu k trhovému priemeru.
- *Kreditné riziko* - Riziko vyplývajúce z možnej neochoty alebo neschopnosti protistrany plniť svoje záväzky. Riziko je v tomto prípade ohodnotené ako aktuálna expozícia protistrany znížená o *recovery rate* (výška splátok istiny a úrokov úveru znížená podľa miery schopnosti vymôcť pohľadávku od dlžnej protistrany). Kreditné a trhové riziko sa v istých prípadoch prekrývajú.
- *Riziko likvidity* - Riziko straty schopnosti speňažiť vlastnené aktíva, predať produkty vzhľadom na vysoké objemy prevyšujúce dopyt alebo riziko neschopnosti synchronizácie prichádzajúcich a odchádzajúcich platieb.
- *Operačné riziko* - Riziko možných strát v dôsledku nedokonalostí systému, jeho chýb a výpadkov, problémov na strane ľudských zdrojov, externých udalostí.
- *Legislatívne riziko* - Riziko vznikajúce v prípade, že protistrana sa snaží vyhnúť plneniu záväzkov (kreditné riziko) na základe chýb v zmluve, právnom systéme (je späté aj s operačným rizikom). Riziko vzniká aj v prípadoch ak existuje podozrenie, že protistrana nespĺňa predpoklady uzavretia zmluvy.

1.2 Odhad straty

Pre odhad možnej straty musíme poznať trhovú hodnotu portfólia. Hodnota portfólia je daná súčtom trhových hodnôt jednotlivých nástrojov tvoriacich portfólio, meria sa v peňažných jednotkách. Aj v prípade, že portfólio pozostáva z nástrojov v rôznych menách, jeho hodnota sa vyjadruje zásadne v jednej, často práve v domácej mene. Menu, v ktorej je hodnota vyjadrená, nazývame bázická. Hodnota portfólia je ovplyvňovaná mnohými trhovými faktormi a mení sa v čase. Ak je výsledkom zmeny hodnôt trhových faktorov pokles hodnoty portfólia oproti predchádzajúcemu časovému bodu, portfólio zaznamená stratu. Naopak, ak je výsledkom zmien nárast hodnoty portfólia oproti predchádzajúcemu časovému bodu, portfólio zaznamená zisk.

1.3 Časový horizont

Časový horizont je určený časovým obdobím, na aké odhadujeme Value-at-Risk. Obvykle sa hovorí o 1-dňovom VaR (ozn. $VaR_1(p)$), kedy sa odhadujú možné straty za istých podmienok v priebehu nasledujúceho dňa, alebo o 10-dňovom VaR (ozn. $VaR_{10}(p)$), kedy sa snažíme odhadnúť VaR o 10 dní. Nie sú však vylúčené ani iné časové obdobia, dokonca na základe 1-dňového VaR vieme za určitých predpokladov vypočítať aj VaR viacdňové a to pre násobením $VaR_1(p) \cdot \sqrt{t}$. Poznamenajme, že platí, že čím je časový horizont dlhší, tým je VaR vyššie. To je spôsobené tým, že čím je časový úsek dlhší, tým je predpoveď diania na trhu menej presná.

1.4 Hladina spoľahlivosti

Keď hovoríme o hladine spoľahlivosti, myslíme tým vopred danú pravdepodobnosť α , s akou určujeme odhadovanú stratu. Znamená to, že pravdepodobnosť, že reálna strata bude väčšia ako VaR je $(1 - \alpha) * 100\%$. Obvykle sa používa pravdepodobnosť $\alpha = 0.99$ a $\alpha = 0.95$, vtedy hovoríme o 99%-nom resp. 95%-nom VaR, označujeme ho VaR(0.99) resp. VaR(0.95). V literatúre sa dá stretnúť aj s označím VaR(0.01) resp. VaR(0.05) vyjadrujúcimi tie isté hodnoty ako predchádzajúce spomínané. Platí, že ak zvolíme vyššiu hladinu spoľahlivosti, tak aj odhadovaná maximálna strata bude vyššia - čím vyššia má byť spoľahlivosť predpovede, tým vyššia bude hodnota VaR, aby pravdepodobnosť podhodnotenia reálnej straty bola nižšia.

Kapitola 2

Výpočet Value-at-Risk

Ako už bolo spomínané, VaR meria najhoršiu očakávanú **stratu** v danom časovom horizonte za normálnych trhových podmienok na danom intervale spoľahlivosti. Meraním trhového rizika sa myslí priradenie určitej hodnoty portfóliu, ktorá charakterizuje, ako veľmi sa môže odchýliť od tej súčasnej a s akou pravdepodobnosťou takáto udalosť môže nastať. Stratou teda rozumieme pokles hodnoty rizikového faktora - napr. ceny akcie, či portfólia akcií vo viacrozmernom prípade. Na ňu sa z pohľadu hodnoty akcie môžeme pozrieť ako na aktuálnu cenu alebo ako na zmenu ceny. Z pohľadu stacionarity je jednoznačne výhodnejšie, aby sme či už akciu alebo celé portfólio akcií skúmali na základe zmien cien = výnosov a nie samotnej ceny a teda tá pre nás v tomto prípade predstavuje relevantný rizikový faktor.

Nech teda P_t je aktuálna trhová cena nášho portfólia v čase T a P_{T-t} je cena portfólia v čase $T - t$. Absolútnu zmenu D_T za obdobie t potom definujeme ako

$$D_T(t) = P_T - P_{T-t}, \quad (2.1)$$

relatívnu zmenu R_T ako

$$R_T(t) = \frac{P_T - P_{T-t}}{P_{T-t}} \quad (2.2)$$

a logaritmicku zmenu r_T za obdobie t ako prirodzený logaritmus hrubého výnosu

$$r_T(t) = \ln 1 + R_T(t) = \ln \frac{P_T}{P_{T-t}}. \quad (2.3)$$

Uvažujme teraz absolútny výnos D_T , ktorý je vzhľadom na finančné trhy náhodnou premennou v čase. Jej distribučnú funkciu označme $F(D_T)$. Ak tvrdíme, e pravdepodobnosť straty (tzn. absolútnej zmeny ceny) môže dosiahnuť nanajvýš hodnotu VaR (VaR vždy uvádzame ako absolútnu hodnotu, preto pre porovnanie straty ju prenásobíme -1)², je

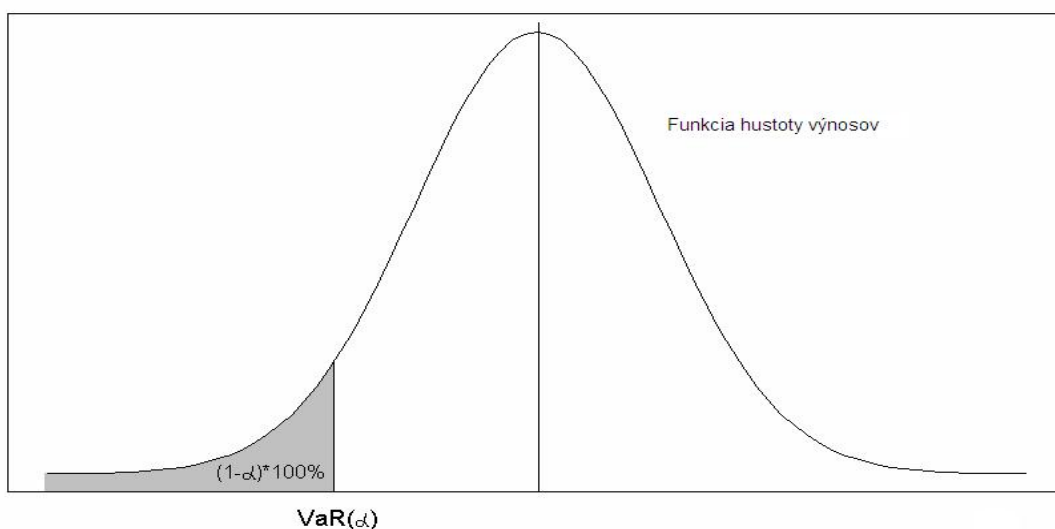
$$F(VaR) = P(D_T \leq -VaR) = 1 - \alpha \quad (2.4)$$

z čoho vyplýva, že VaR vieme vypoita ako

$$VaR = F^{-1}(1 - \alpha) \quad (2.5)$$

²v prípade relatívneho výnosu si treba uvedomiť, že pri poklese ceny akcie tiež dostávame zápornú hodnotu, v prípade logaritmickej zmeny je to prirodzený logaritmus isla z interalu (0, 1) a výsledkom je tiež záporné íslo

Hodnota VaR teda nie je nič iné ako $(1 - \alpha) * 100\%$ -ný kvantil funkcie hustoty absolútnych výnosov portfólia, v prípade relatívnych výnosov ešte upravený pomocou aktuálnej trhovej hodnoty akcie/portfólia. Tu sa stretávame s hlavným problémom doteraz relatívne jednoduchšej metodológie výpočtu VaR: odhad distribučnej funkcie a jej kvantilu.



Obr. 2.1: Funkcia hustoty výnosov portfólia a grafické znázornenie VaR

Aj keď sa môže zdať, že myšlienka Value-at-Risk je skutočne jasná a ide o pojem pomerne ľahko pochopiteľný, práve spomínaný problém odhadu empirického pravdepodobnostného rozdelenia výnosov spôsobuje, že táto téma je stále aktuálna a tento štatistický problém nie je stále absolútne uspokojivo vyriešený. Existuje niekoľko základných metód výpočtu VaR líšiacich sa v predpokladoch modelu a spôsobe odhadu distribučnej funkcie výnosov. V zásade by sa dali tiež rozdeliť na **parametrické, semiparametrické, neparametrické a Monte Carlo metódy** a týmto rozdelením sa budeme riadiť pri predstavovaní aspoň **základných myšlienok** jednotlivých metód v nasledujúcich častiach.

2.1 Metóda historickej simulácie

Ide o neparametrickú metódu založenú na empirickom rozdelení pravdepodobnosti získanú z historických dát. Vychádza z predpokladu, že výnosy blízkej budúcnosti sa budú vyvíjať podľa nedávnej minulosti. Tu sa však stretávame s problémom - čo je to „nedávna minulosť“? Ak vezmeme do úvahy príliš dlhé obdobie, náš odhad môže byť skreslený dávny vývojom aktíva, ktorý už vôbec nepopisuje jeho správanie na aktuálnom trhu a odhad môže byť nadhodnotený. Lepšie je však pripraviť sa na možné veľké straty, ako by nás mal blízky vývoj aktíva prekvapiť nečakanými poklesmi - to hrozí v prípade, že by sme do odhadu VaR vzali príliš krátke obdobie, ktoré nemusí zachytiť extrémne situácie. Preto ďalšou otázkou je: vyskytli sa v „nedávnej minulosti“ naozaj „extrémne situácie“? Keďže táto metóda berie do úvahy len tie situácie, ktoré už nastali a aj to len vo vymedzenom období, ktoré nesmie byť príliš krátke ani príliš dlhé, v prípade pokojného sledovaného obdobia môže dôjsť k podhodnoteniu odhadu VaR. Taktiež, to, že žiadna extrémna situácia v sledovanom období nenastala, ešte neznamená, že sa v budúcnosti stať nemôže. Preto je dobré kombinovať historickú simuláciu so stresovým testovaním.

Postup pri výpočte VaR metódou historickej simulácie je nasledovný:

1. Získanie časového radu historických cien aktíva. Je potrebné správne zvoliť dĺžku radu. Tá by mala byť konštantná, tzn. pri každom novom výpočte v nasledujúcich obdobiach sa použije vždy iný časový rad - posunutý od predošlého, bez najstarších hodnôt, obohatený o najnovšie. Dĺžka musí byť taká, aby bolo možné určiť podľa percentilu hodnotu v poradí. Všeobecne sa odporúča vyhladať si dáta za posledných 2-5 rokov.

2. Výpočet výnosov časového radu - voľba medzi absolútnymi, relatívnymi a logaritmickými výnosmi. Najčastejšie sa využívajú posledné dve spomínané.
3. Empirická distribučná funkcia výnosov. Zoradíme hodnoty výnosov podľa ich výšky od najnižšieho po najvyšší a zostrojíme histogram.
4. Určenie hodnoty VaR. Odhadneme príslušný $(1 - p) * 100$ %-ný kvantil podľa našej získanej empirickej distribučnej funkcie. Ak máme k dispozícii časový rad s 1000 hodnotami výnosov a hľadáme $\text{VaR}(0.99)$, tak hľadáme hodnotu výnosu, ktorý oddeľuje 1% najhorších od ostatných. Prislúchajúca je teda 11. najväčšia strata (11. najmenší výnos).

Možným vylepšením tejto metódy je váženie jednotlivých historických hodnôt:

- podľa časovej aktuálnosti
- podľa aktuálnej volatility
- podľa aktuálnej korelácie

Najväčším nedostatkom tejto metódy je logická nekonzistentnosť predpokladu o správaní sa aktíva (ak všetky výnosy sledovaného obdobia majú rovnaké rozdelenie, tak všetky výnosy časového radu musia mať rovnaké rozdelenie). Napriek tomu je hojne využívaná vďaka jej nenáročnosti, ľahkému pochopeniu, interpretovateľnosti a pomerne presným výsledkom v prípade voľby správnych parametrov metódy.

2.2 Teória extrémnych hodnôt

Zástupcom semiparametrických metód je metóda extrémnych hodnôt (*Extreme Value Theory* - EVT). Zaoberá sa štúdiom extrémnych zriedkavých udalostí, maxim a miním, ktoré sa vyskytujú v priebehu vývoja náhodných premenných odchyľujúcich sa od správania podľa normálneho rozdelenia. Tak ako centrálna limitná veta sa vzťahuje k limitnému rozdeleniu priemerov, EVT udáva limitné rozdelenie extrémov nezávislých identicky rozdelených náhodných premenných.

³Nech x_1, x_2, \dots, x_n je postupnosť nezávislých náhodných premenných (hodnoty rizikového faktora merané počas istého obdobia na dennej báze) s distribučnou funkciou F a M_n je maximum z týchto hodnôt za stanovené obdobie dĺžky n

$$M_n = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Potom rozdelenie M_n je dané vzťahom:

$$P(M_n < z) = P(x_1 < z, \dots, x_n < z) = P(x_1 < z)P(x_2 < z)\dots P(x_n < z) = (F(z))^n$$

Keďže distribučnú funkciu F nepoznáme a aj malé chyby v jej odhade by mohli spôsobiť veľké výchyľky v F^n , odhaduje sa priamo F^n z extrémnych dát pre $n \rightarrow \infty$. Pre μ , čo je parameter polohy, σ , čo je parameter rozsahu a ξ , čo je parameter tvaru alebo tiež chvostový index (čím vyššie ξ , tým ťažší chvost) platí:

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \geq z\right) \rightarrow G(z) \quad \text{pre } n \rightarrow \infty$$

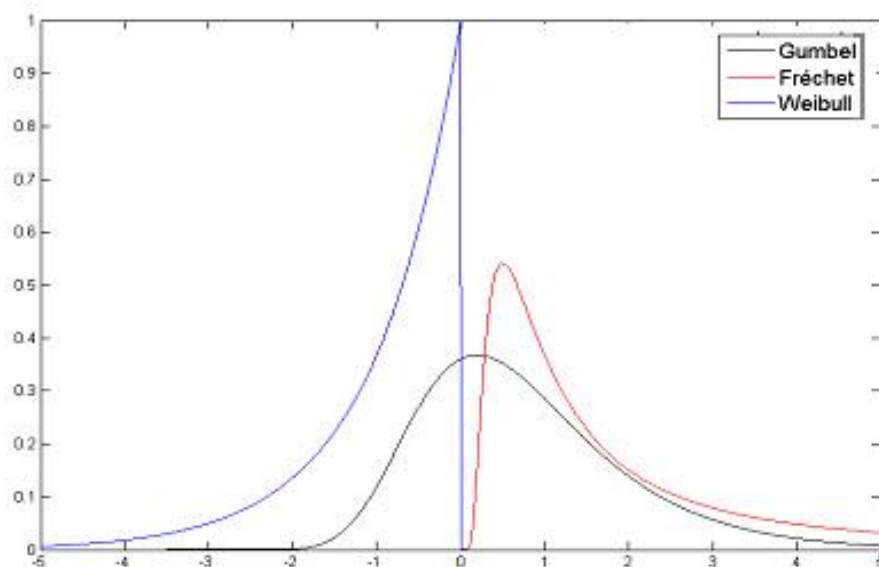
³Formulácia modelu na základe [4] COLES, S: *An introduction to statistical modeling of extreme values*

G je nedegenerovaná distribučná funkcia a patrí do triedy rozdelení zovšeobecnených extrémnych hodnôt:

$$G_{GEV}(z) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}$$

Funkcia je definovaná pre z spĺňajúce podmienku $1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) > 0$ a $\sigma > 0$. Pre rôzne hodnoty parametra ξ dostávame tri rozdelenia extrémnych hodnôt podľa tvarov chvostov:

- $\xi = 0$ Gumbelovo rozdelenie - hustota klesá exponenciálne
- $\xi > 0$ Fréchetovo rozdelenie - hustota klesá polynomiálne
- $\xi < 0$ Weibullovo rozdelenie - má konečný koncový bod



Obr. 2.2: Rozdelenia extrémnych hodnôt

Následne sa odhadnú parametre rozdelenia a aplikujeme na už nám známu formulu pre výpočet VaR.

Velkou výhodou tejto metódy je skutočnosť, že aj pri vysokých hladinách spoľahlivosti, dáva pomerne presné odhady VaR. Keďže EVT osobitne pracuje s maximami a minimami, teda narába s dolným a horným chvostom rozdelenia samostatne, zohľadňuje aj také vlastnosti rozdelenia náhodných premenných ako šikmosť. Avšak tak ako každá metóda, aj táto má niekoľko obmedzení, ktoré jej bránia v tom, aby sa práve EVT stala najvýhodnejšou v odhade VaR. Je to predovšetkým náročnosť kalibrácie modelu, požiadavka na objem dát (potrebné sú denné pozorovania z niekoľkých rokov), obmedzenosť počtu dimenzií - zohľadnených rizikových faktorov.

2.3 Parametrické metódy

Ako hovorí už názov, ide o metódy, v ktorých podstatnú úlohu zohrávajú parametre - parametre funkcií pravdepodobnostného rozdelenia rizikového faktora – náhodnej premennej. Záujem o ne je prejavovaný skôr na akademickej pôde ako v praxi. Ak predpokladáme, že parametrické rozdelenie sme určili správne, prináša to so sebou veľa výhod nielen pre výpočet VaR. Ďalšími výhodami sú informácie o správaní rizikových faktorov. Pozitívom v takom prípade je však predovšetkým to, že odhad je oveľa presnejší.

Prvým - základným - krokom je určenie rizikového faktora. Ak na portfólio hľadáme ako na celok, ide o jednorozmerné rozdelenie, portfóliový prístup. V prípade, že sa na portfólio pozeráme ako na súbor viacerých faktorov, bude sa jednať o viacrozmerné rozdelenie, pozičný prístup. Ďalším krokom je výber vhodnej parametrickej triedy, ktorá by dostatočne reflektovala správanie zvolenej náhodnej premennej.

Odborná literatúra delí parametrické triedy štandardne nasledovne:

- trieda normálnych rozdelení
- trieda rozdelení odvodených od normálnych (Studentovo, lognormálne, kombinácia normálnych)
- triedy rozdelení podľa iných prístupov

V prípade portfóliového prístupu nie je výpočet VaR veľmi zložitý. Pre normálne rozdelenie stačí vypočítať strednú hodnotu μ a výberovú disperziu σ^2 a s použitím týchto parametrov vypočítať kvantil normálneho rozdelenia príslušnej hladiny spoľahlivosti.

predpoklad: $r_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_n^{t=1} r_t \quad \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_n^{t=1} (r_t - \mu)^2$$

$$\frac{r_t - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$P(r_t < -VaR_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{r_t - \mu}{\sigma} < \frac{-VaR_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \alpha$$

$$\frac{-VaR_\alpha - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$$

$$VaR_\alpha = -\mu - \sigma \cdot \Phi^{-1}(1 - \alpha) = -\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(\alpha)$$

Čo však v prípade pozičného prístupu? Ako odhadnúť parametre viacrozmerneho rozdelenia? To už ide o problém značne náročnejší oproti jednorozmernému prístupu, jednak náročnosťou na počet dát, zároveň metodologicky.

Tu sa ponúkajú dve možnosti: *variančno - kovariančná metóda* a *copula funkcie*. Copula funkciám sa budeme podrobne venovať v tretej kapitole, spomeňme na tomto mieste teda druhú z metód.

2.3.1 Variančno-kovariančná metóda

Základy tejto metódy (v zahraničnej literatúre nazývaná aj „analytic method“) stoja na pomerne dosť silnom predpoklade, že správanie rizikových faktorov sa dá popísať multivariačným normálnym rozdelením. Tento predpoklad je stále veľkým otáznikom v mnohých diskusiách o relevantnosti tej ktorej metódy, nejedna práca už bola venovaná otázke, či trhové faktory ako vývoj cien akcií, úrokových mier či devízových kurzov majú normálne rozdelenie. Odpoveď bola negatívna.⁴ Preto sa časom začali objavovať možnosti odhadov s predpokladom viacrozmerného Studentovho rozdelenia, či Hull-Whitova transformácia na normálne rozdelenie⁵ a podobne.

Ako sme už spomenuli, predpokladajme, že rizikové faktory vplývajúce na vývoj portfólia majú multivariačné normálne rozdelenie

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \right)$$

Najdôležitejším prvkom tejto metódy je variančno-kovariančná matica. Okrem

⁴pozri napr. práce Erb, et al. (1994), Longin a Solnik (2001), Ang a Chen (2002), Ang a Bekaert (2002), Bae, et al. (2003)

⁵pozri HULL, J. - WHITE, A.: *Value-at-Risk When Daily Changes Are Not Normally Distributed*, Journal of Derivatives, 1998

rozptylov jednotlivých náhodných premenných (rizikových faktorov) totiž vyjadruje aj vzájomnú závislosť medzi nimi. Ak je kovariancia kladná, rast jednej z nich je sprevádzaný rastom druhej, taktiež pokles prebieha zároveň. V prípade zápornej kovariancie, ak jedna z náhodných premenných rastie, druhá klesá. Nezávislosť nastáva len v prípade, že kovariancia je rovná nule.

Tu sa ponúka otázka, ako túto maticu odhadnúť. Tradičnými dvoma spôsobmi sú využitie koncepcie rovnako vážených priemerov a exponenciálne vážených priemerov. Pri prvom spomenutom je kovariancia na začiatku t -ho dňa pri zahrnutí k dní do výpočtu daná vzťahom

$$(\sigma_{ij})_t = (Cov(r_i, r_j))_t = \frac{1}{k} \sum_{s=t-k}^{t-1} ((r_i)_s - \mu_i) ((r_j)_s - \mu_j)$$

Pre prípad exponenciálne vážených priemerov, kedy sú podľa časovej následnosti jednotlivým pozorovaniam priradené rozdielne váhy (najnovšie pozorovania majú najvyššiu váhu, najstaršie najnižšiu), je kovariancia počítaná nasledovným spôsobom:

$$(\sigma_{ij})_t = (Cov(r_i, r_j))_t = (1 - \lambda) \sum_{s=t-k}^{t-1} \lambda^{t-s-1} ((r_i)_s - \mu_i) ((r_j)_s - \mu_j)$$

kde $\lambda \in (0, 1)$ je akýsi parameter útlmu - "Decay factor" - na základe ktorého je určená rýchlosť klesania veľkosti váh pozorovaní od najaktuálnejších po najvzdialenejšie. Keďže súčet váh by mal byť rovný 1, v závislosti od veľkosti parametra λ vieme, aké množstvo pozorovaní je potrebných. Napríklad pre praxou využívaný parameter $\lambda = 0.94$ pre 1-dňové VaR je potrebných najmenej 75, pre $\lambda = 0.97$ pre 1-mesačné VaR je potrebných najmenej 150 údajov k tomu, aby sa súčet váh limitne blížil k jednej.

Ďalší postup má ešte niekoľko úskalí a nie je úplne triviálny, ale keďže táto metóda nie je predmetom diplomovej práce, záujemcov o detaily finálnych krokov odhadu odporúčame na [15].

2.4 Monte Carlo simulácie

Táto metóda je v niektorých krokoch podobná historickej simulácii. Metodika je rovnaká, základným rozdielom týchto dvoch metód je prístup k vývinu rizikového faktora (výnosov). Je rozhodnutím tvorcu modelu, aké rozdelenie si vyberie, ktoré sa bude zdať najvhodnejšie a najlepšie popisujúce - či už na základe historického vývoja rizikového faktora alebo expertného odhadu, podľa známych makroekonomických vzťahov a väzieb na ukazovatele.

V prvom kroku určíme rizikový faktor, v prípade viacerých faktorov znovu pracujeme s pozičným prístupom. V prípade portfóliového prístupu, a teda len jediného rizikového faktora, modelujeme len jeden proces. Avšak pri pozičnom prístupe sa situácia značne komplikuje, nestačí namodelovať viacero procesov, ale aj vzťahy medzi náhodnými premennými, častokrát aj nelineárne väzby. Tu už prichádza spomínané rozhodnutie, „kameň úrazu“, výber vhodného štatistického rozdelenia, či stochastického procesu, ktorý by dostatočne dobre opisoval správanie rizikového faktora, príp. faktorov. V prípade stochastických procesov, vo finančníctve najvyužívanejším je Brownov geometrický pohyb a procesy od neho odvodené. Stretnúť sa môžeme s *mean reversion process* (proces so snahou o rast v prípade podpriemeru a o pokles v prípade nadpriemerného aktuálneho stavu), s procesom so zakomponovanými prudkými skokmi (napr. Poissonov proces). Mnoho literatúry sa venuje známemu Vašíčkovmu procesu a CIR (Cox-Ingersoll-Ross) procesu. V prípade viacrozmerného náhodného procesu, najvyužívanejším je multivariačné normálne rozdelenie, ktoré sa vo väčšine situácií ukázalo vhodné. Následne vykonáme niekoľko tisíc až desiatok tisíc simulácií, bude sa generovať množstvo náhodných scenárov. Ak urobíme dostatočne veľa simulácií, nasimulovaná distribúcia rizikového faktora (napr. ceny alebo výnosu portfólia) sa bude približovať skutočnej, avšak neznámej distribúcii a z nej

už odvodíme empirické rozdelenie tak ako pri historickej simulácii, určíme príslušný $(1 - p) * 100$ %-ný kvantil a dopočítame VaR.

Výhodou Monte Carlo metód je ľahké použitie a implementácia, pomerne jednoduché, avšak sofistikovane sa dajú nimi popísať stochastické procesy a ich korelácie. Nevýhodou je však náročnosť na technické vybavenie - pamäť a strojový čas.

Kapitola 3

Copula funkcie ako nástroj pre odhad VaR

Pri konfrontácii s realitou, že aktíva na trhu sa nesprávajú podľa normálneho rozdelenia, narážame na dva základné problémy: Akým pravdepodobnostným rozdelením by sa dali popísať a aká je miera ich vzájomnej závislosti?

To, čo nás najviac odrádza od myšlienky použitia normálneho rozdelenia náhodných premenných (rizikových faktorov) sú ťažké chvosty, šikmosť a asymetrická závislosť. Ak by sme, napríklad, chceli skúmať rizikovosť dolárového dlhopisu, museli by sme sa zamerať hneď na tri rizikové faktory: cenu dlhopisu, úrok (vývoj výnosovej krivky) a devízový kurz USD/EUR. Je málo pravdepodobné, že všetky tri faktory by sa dali popísať multivariačným normálnym rozdelením. Alebo, majme dva devízové kurzy popísateľné Studentovým rozdelením, avšak každý s iným počtom stupňov voľnosti. Tu už narážame na problém, že v takomto prípade ani nie sme schopní analyticky popísať viacrozmerne Studentovo rozdelenia. Riešením týchto problémov sú copula funkcie, ktorých veľkou výhodou je schopnosť kombinácie viacerých parametrických tried rozdelení.

Pre potreby tejto práce budeme pracovať predovšetkým s bivariačnými rozdeleniami.

3.1 Teória copula funkcií

Definícia 3.1.1. Funkcia nazývaná n -rozmernou copulou je funkcia $C : I^n \rightarrow I$ s nasledovnými vlastnosťami⁶:

- C je n -rastúca (rastúca vo všetkých n zložkách)
- C má jednorozmerné marginálne funkcie C_k ($k = 1, 2, \dots, n$), pre ktoré platí $C_k(u) = u$ pre $\forall u \in I$
- pre každé $u \in I^n$ platí $C(u) = 0$ ak aspoň jedna zo zložiek vektora u je nulová a $C(u) = u_k$ ak všetky zložky okrem u_k sú rovné 1.
- pre každé $a, b \in I^n$, $a \leq b$ a n -rozmernú kocku $B = [a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$, ktorej vrcholy ležia v definičnom obore funkcie C , je objem tejto kocky

$$V_C(B) = V_C([a, b]) = \sum_i \text{sgn}(i)C(i) \geq 0$$

Poznámka 3.1.2. Nech F je jednorozmerná distribučná funkcia. Potom má nasledovné vlastnosti:

- $\text{Dom}(F) = \bar{\mathcal{R}}$
- F je rastúca: $F(x_2) - F(x_1) \geq 0$ pre $\forall x_1, x_2 \in \bar{\mathcal{R}}$ také, že $x_1 \leq x_2$
- $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

Poznámka 3.1.3. Nech H je združená bivariačná distribučná funkcia. Potom má nasledovné vlastnosti:

⁶ $I = [0, 1]$

- $Dom(H) = \bar{\mathcal{R}}^2$
- H je 2-rastúca: $H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) - H(x_2, y_1) + H(x_1, y_1) \geq 0^7$ pre $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \bar{\mathcal{R}}$ také, že $x_1 \leq x_2$ a $y_1 \leq y_2$
- $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ a $H(\infty, \infty) = 1$
- ak F, G sú marginálnymi distribučnými funkciami, potom $F(x) = H(x, \infty)$ a $G(y) = H(\infty, y)$

Vyššie uvedené poznámky spolu s definíciou 3.1.1 teda naznačujú, že copula je n -rozmernou distribučnou funkciou. Keby sme jednou vetou chceli zhrnúť laickejšie, čo je to copula, dalo by sa tiež povedať, že akákoľvek n -rozmerná distribučná funkcia je rozložiteľná na n marginálnych distribučných funkcií a copulu, ktorá popisuje závislosti medzi n náhodnými premennými. Aby sme sa ale vyjadrili korektne, použime známu Sklarovu vetu:

Veta 3.1.4. [Sklarova veta]

Nech H je n -rozmerná distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F_1, F_2, \dots, F_n . Potom existuje copula C taká, že pre $\forall x \in \bar{\mathcal{R}}^n$ platí

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (3.1)$$

Navyše, ak F_1, F_2, \dots, F_n sú spojité, potom C je jediná. V inom prípade, C je jednoznačne daná v priestore ohraničenom oborom hodnôt marginálnych distribučných funkcií ($Ran(F_1) \times Ran(F_2) \times \dots \times Ran(F_n)$).

Naopak, ak C je copula a F_1, F_2, \dots, F_n sú distribučné funkcie, potom funkcia H definovaná vzťahom (3.1) je n -rozmerná distribučná funkcia s marginálami F_1, F_2, \dots, F_n .

⁷daný predpis na ľavej strane nerovnice nie je nič iné ako $V_H([x_1, x_2] \times [y_1, y_2])$

Dôsledok 3.1.5. *Nech $H, C, F_1, F_2, \dots, F_n$ sú ako vo Vete 3.1.2 a nech $F_1^{-1}, F_2^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ sú kvázi-inverzné ku F_1, F_2, \dots, F_n . Potom pre $\forall u \in I^n$ platí*

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

Poznámka 3.1.6. *Nech F je distribučná funkcia. Potom kvázi-inverzná k F je funkcia F^{-1} s definičným oborom $\text{Dom}(F^{-1}) = I$ taká, že:*

- ak $t \in \text{Ran}(F)$, potom $F^{-1}(t)$ je rovné ľubovoľnému $x \in \bar{\mathcal{R}}$ takému, že $F(x) = t$ pre $\forall t \in \text{Ran}(F) \Leftrightarrow F(F^{-1}(t)) = t$.
- ak $t \notin \text{Ran}(F)$, potom $F^{-1}(t) = \inf \{x | F(x) \geq t\} = \sup \{x | F(x) \leq t\}$

Veta 3.1.7. [Fréchet-Hoeffding bounds inequality]

Nech C je copula dvojrozmerného rozdelenia a nech

- $M(u, v) = \min \{u, v\}$
- $\Pi(u, v) = uv$
- $W(u, v) = \max \{u + v - 1, 0\}$

Potom pre $\forall (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ platí nerovnosť

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$$

W a M sa prezývajú Fréchet-Hoeffdingova spodná a horná hranica. Reprezentujú hranicu úplnej pozitívnej či negatívnej závislosti. Naopak, ak by Π bolo rovné copule C , znamenalo by to, že náhodné premenné, ktoré sú popísané marginálnymi distribučnými funkciami u a v , sú úplne nezávislé.

Hustota bivariačného rozdelenia

Ak F a G sú diferencovateľné a C je dvakrát diferencovateľná, potom pre hustotu bivariačného rozdelenia platí:

$$h(x, y) \equiv \frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$h(x, y) \equiv \frac{\partial F(x)}{\partial x} \cdot \frac{\partial G(y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 C(F(x), G(y))}{(\partial F(x) \partial G(y))}$$

$$h(x, y) \equiv f(x) \cdot g(y) \cdot c(F(x), G(y))$$

Hustota multivariačného rozdelenia

Všeobecné vyjadrenie hustoty n -rozmerného podmieneného rozdelenia potom vyzera nasledovne (x je v tomto prípade vektor náhodných premenných):

$$f(x) \equiv \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F(x)$$

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \cdot c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$$

3.2 Miera vzájomnej závislosti

V tejto časti sa budeme venovať súvislostiam medzi závislosťou dvoch náhodných premenných a závislosťou vyjadrenou formou copula funkcií. Prvým pojmom, ktorý mnohých napadne v spojení s touto problematikou, je korelácia. Termín lineárnej

korelácie je veľmi známy vďaka svojej jednoduchej pochopiteľnosti, avšak nie vždy správne používaný. Je meradlom vzájomnej závislosti eliptických rozdelení⁸, ale ani tu nie je dostatočným meradlom⁹ a okrem toho množstvo náhodných premenných nemá eliptickú združenú distribúciu. Pearsonov korelačný koeficient by sa dal nazvať meradlom združenia a na druhej strane sú tu pojmy označiteľné ako meradlá súhlasnosti, či zhodnosti (*concordance*), dobrá alternatíva pre neeliptické rozdelenia - Kendallovo τ a Spearmanovo ρ .

Kendalovo τ čiastočne popisuje, či vysoké hodnoty vzorky X súvisia s vysokými hodnotami Y a rovnako, či nižšie hodnoty X súvisia s nižšími hodnotami Y . Presnejšie, zameriavame sa na poradie a veľkosti v rámci vzorky

- ak $x_i < x_j$ a $y_i < y_j$ alebo $x_i > x_j$ a zároveň $y_i > y_j$ ("jedným slovom" $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$), tak pár je súhlasný (*concordant*)
- ak ide o opačný prípad, ak rastú či klesajú opačne ($(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$), pár je nesúhlasný (*discordant*)

Požadovaná štatistika sa potom vypočíta ako $\tau = \frac{n_c - n_d}{n_c + n_d}$, kde n_c je počet súhlasných párov a n_d je počet nesúhlasných párov. Inými slovami by sa tiež dalo povedať, že ide o rozdiel pravdepodobností súhlasnosti a nesúhlasnosti páru:

$$\tau_{X,Y} = P \{(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0\} - P \{(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0\}$$

s predpokladom, že X, Y sú nezávislé rovnako rozdelené náhodné vektory.

Predtým, ako dáme do súvisu Kendallovo τ a copula funkcie, zdefinujme si funkciu Q vyjadrujúcu rozdiel pravdepodobnosti súhlasnosti a nesúhlasnosti pre spojité náhodné vektory.

⁸viac v nasledujúcej podkapitole, v krátkosti: do tejto skupiny patria rozdelenia ako napr. normálne a Studentovo

⁹pre porovnanie pozri Obr.3.1 a Obr.3.3 - u oboch je Pearsonov korelačný koeficient ρ rovný 0.5 avšak je zjavné, že závislosť náhodných premenných nie je rovnaká

Veta 3.2.1. ¹⁰ *Nech $(X, Y)^T$ a $(\tilde{X}, \tilde{Y})^T$ sú nezávislé vektory spojitých náhodných premenných so združenými distribučnými funkciami H a \tilde{H} , respektívne, s rovnakými marginálnymi distribučnými funkciami F (pre X aj \tilde{X}) a G (pre Y aj \tilde{Y}). Nech C je copula pre $(X, Y)^T$ a \tilde{C} je copula pre $(\tilde{X}, \tilde{Y})^T$, a teda $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ a $\tilde{H}(x, y) = \tilde{C}(F(x), G(y))$. Nech Q je rozdiel medzi pravdepodobnosťami súhlasnosti a nesúhlasnosti (X, Y) a $(\tilde{X}, \tilde{Y})^T$, t.j.*

$$Q = P \left\{ (X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0 \right\} - P \left\{ (X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0 \right\}.$$

Potom

$$Q = Q(C, \tilde{C}) = 4 \int \int_{[0,1]^2} \tilde{C}(u, v) dC(u, v) - 1$$

Ak teraz dáme do súvisu Kendallovo τ a zadanú funkciu Q , s tým, že uvažujeme jedinou copulu C , tak

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

kde spomenutý integrál je vlastne očakávanou hodnotou funkcie $C(U, V)$ náhodných premenných U, V z rovnako rozdelených na $(0, 1)$ s distribučnou funkciou C .

Druhým spomenutým meradlom závislosti je Spearmanovo ρ , ktoré je tiež postavené na súhlasnosti a nesúhlasnosti. Tentokrát si vezmeme tri nezávislé náhodné vektory $(X, Y)^T, (\tilde{X}, \tilde{Y})^T, (\hat{X}, \hat{Y})^T$ so združenou distribučnou funkciou H s marginálami F, G a copulou C . Tento koeficient je stavaný proporčne k predchádzajúcemu rozdielu pravdepodobností, avšak tentoraz pre vektory $(X, Y)^T$ a $(\tilde{X}, \tilde{Y})^T$. Ide o dva vektory s rovnakými marginálami, ale len jeden má distribučnú funkciu H . Zložky druhého sú nezávislé, z čoho vyplýva, že ich združenou distribučnou funkciou je súčin $F(x)G(x)$ a ich copula je teda Π ¹¹.

¹⁰veta aj s dôkazom: [8] Embrechts, Lindskog, McNeil: *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, str.11

¹¹pozri Vetu 3.1.7 a poznámku k nej

Ak chceme nájsť súvislosť medzi vyjadrením Spearmanovho koeficientu pre spojité náhodné premenné a copulu C , môžeme sa na to pozrieť nasledovne:

$$\rho_{X,Y} = \rho_C = 3Q(C, \Pi) = 12 \int \int_{[0,1]^2} uv \, dC(u, v) - 3 = 12 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) \, du \, dv - 3$$

Spomeňme tiež súvislosti s Fréchet-Hoeffdingovými medzami:

- ak $\tau_C = \rho_C = 1$ tak $C = M$
- ak $\tau_C = \rho_C = -1$ tak $C = W$

3.2.1 Chvostová závislosť

Práve pre potreby Value-at-Risk a výskytu extrémnych udalostí je potrebné venovať sa chvostovým vlastnostiam rozdelení v zmysle správania sa náhodných premenných z oblasti I. a III. kvadrantu. Teóriu z tejto časti využijeme predovšetkým v nasledujúcej podkapitole.

Definícia 3.2.2. *Nech $(X, Y)^T$ je vektor spojitých náhodných premenných s marginálnymi distribučnými funkciami F a G . Potom koeficient hornej chvostovej závislosti $\lambda_U \in [0, 1]$ a koeficient dolnej chvostovej závislosti $\lambda_L \in [0, 1]$ definujeme ako*

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \nearrow 1} P \{Y > G^{-1}(u) | X > F^{-1}(u)\} \\ \lambda_L &= \lim_{u \searrow 0} P \{Y \leq G^{-1}(u) | X \leq F^{-1}(u)\} \end{aligned}$$

za predpokladu, že limity existujú. Ak $\lambda_U \in (0, 1]$, resp. $\lambda_L \in (0, 1]$, hovoríme, že X a Y sú asymptoticky závislé na hornom, resp. dolnom chvoste. Ak $\lambda_U = 0$, resp. $\lambda_L = 0$, hovoríme, že X a Y sú asymptoticky nezávislé na hornom, resp. dolnom chvoste.

Poznamenajme, že pre bivariačnú copulu môžeme určiť λ_U a λ_L pomocou vzťahov

$$\lambda_U = \lim_{u \nearrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad \lambda_L = \lim_{u \searrow 0} \frac{C(u, u)}{u}$$

3.3 Parametrické copuly

Na základe Sklarovej vety boli odvodené parametrické triedy copúl. Vyberáme päť najznámejších, často využívaných v praxi. Vo všeobecnosti ich môžeme rozdeliť do triedy eliptických a archimedovských copúl. Pripomeňme ešte, že pre označenie, ktoré budeme používať, bude platiť $H(x, y) = C(F(x), G(y)) = C(u, v)$ pre distribučné funkcie a $h(x, y) = f(x).g(y).c(F(x), G(y))$ pre hustoty.

3.3.1 Trieda eliptických copúl

V prípade eliptických rozdelení sa môžeme stretnúť s mnohými definíciami. Veľmi zjednodušene povedané, sú to symetrické rozdelenia, ktorých izolínie sú elipsy, práve tie majú dôležitú úlohu v ekonómii. Definujme ich však presnejšie:

Definícia 3.3.1. *Nech X je n -rozmerný náhodný vektor. Ak pre $\mu \in \mathcal{R}^n$ a pre $n \times n$ nezáporne definitnú symetrickú maticu Σ je charakteristická funkcia $\varphi_{X-\mu}(t)$ funkciou kvadratickej formy $t^T \Sigma t$, tzn.: $\varphi_{X-\mu}(t) = \Phi(t^T \Sigma t)$, potom hovoríme, že X má eliptické rozdelenie s parametrami μ, Σ, Φ .*

Marginálne distribúcie viacrozmerného eliptického rozdelenia sú tiež eliptické, lineárna kombinácia eliptických rozdelení je eliptické rozdelenie, vzťah medzi lineárnou koreláciou a Kendallovým τ je vyjadriteľný ako $\rho = \sin(\frac{\pi}{2}\tau)$ - to sú len niektoré z vlastností. Najznámejšími zástupcami copula funkcií tejto triedy rozdelení sú Gaussova a Studentova copula.

Gaussova (Normálna) bivariačná copula

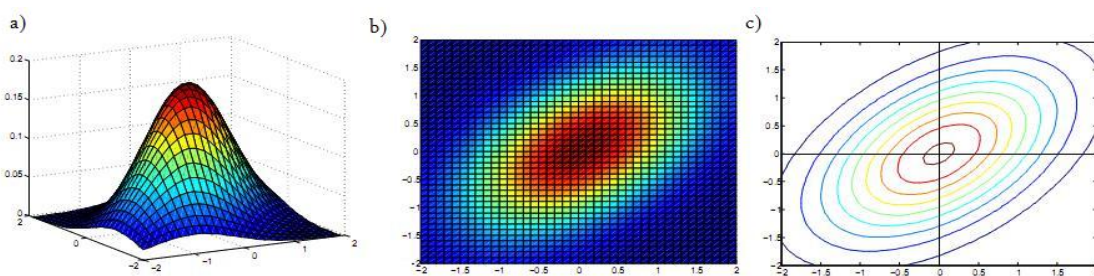
Svoje pomenovanie dostala vďaka tomu, že ak by sme ju aplikovali na náhodné vektory s marginálnym rozdelením $\mathcal{N}(0, 1)$, dostali by sme multivariačné normálne rozdelenie. Inak povedané, z dôsledku Sklárovej vety sa dostávame ku vzťahu

$$C_N(U, R) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \quad (3.2)$$

kde R je korelačná matica $n \times n$, Φ je funkcia hustoty multivariačného normálneho rozdelenia a Φ^{-1} je funkcia k nej inverzná.

Pre potreby tejto práce sa budeme venovať bivariačným rozdeleniam, na základe vzťahu (3.2) pre $u_1, u_2 \in (0, 1)$ ¹² a Pearsonov koeficient lineárnej korelácie $\rho \in (-1, 1)$ dostávame potom vyjadrenie predpisu pravdepodobnostného rozdelenia copuly C

$$C_N(u_1, u_2, \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{(r^2 - 2\rho rs + s^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} dr ds$$



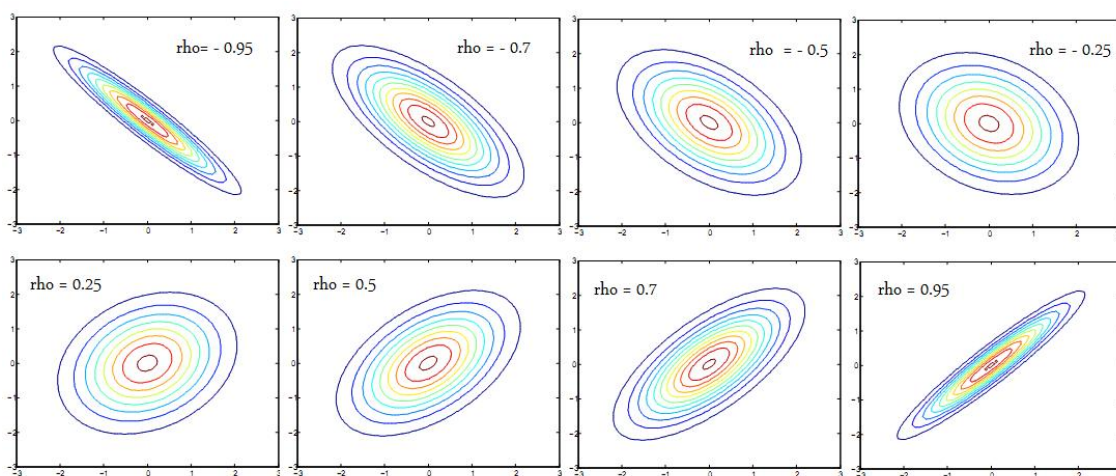
Obr. 3.1: Hustota bivariačného rozdelenia s použitím Gaussovej copuly
 Marginály sú z rozdelenia $\mathcal{N}(0, 1)$, korelačný koeficient $\rho = 0.5$. Na obrázku a) hustota v 3D b) pohľad na graf hustoty zhora c) izolínie grafu bivariačného rozdelenia

¹²nezabúdajme, že $u_1 = F(x)$, $u_2 = G(y)$

Z predpisu pravdepodobnostného rozdelenia vieme odvodiť predpis funkcie hustoty c

$$c_N(u_1, u_2, \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{\Phi^{-1}(u_1)^2 + \Phi^{-1}(u_2)^2 - 2\rho\Phi^{-1}(u_1)\Phi^{-1}(u_2)}{-2(1-\rho^2)} + \frac{\Phi^{-1}(u_1)^2 + \Phi^{-1}(u_2)^2}{2} \right\}$$

Pre hustotu bivariačného rozdelenia platí, že je súčinom marginálnych hustôt a hustoty copuly. Pre lepšiu predstavu vplyvu parametra ρ na finálne bivariačné rozdelenie, uvádzame grafy bivariačnej hustoty s normálne rozdelenými marginálami a Gaussovou copulou pre rôzne parametre ρ .



Obr. 3.2: Izolínie hustoty bivariačného rozdelenia s použitím Gaussovej copuly pre rôzne parametre ρ

Čo sa týka chvostových závislostí, tým, že je copula radiálne symetrická platí, že $\lambda_U = \lambda_L$ a zároveň pre prípad tejto copuly sú u a v asymptoticky nezávislé na dolnom aj hornom chvoste (tieto parametre nadobúdajú v limite hodnotu nula).

Studentova t-copula

Podobne ako predchádza copula, aj táto bola odvodená z multivariačného Studentovho rozdelenia. Patrí medzi eliptické copuly a tak ako Studentovo rozdelenie, aj copula v limitnom prípade pri vysokom počte stupňov voľnosti (rádovo už pri $v = 30$) konverguje ku Gaussovej. Pri nižších hodnotách má však osobitné vlastnosti, ktoré ju robia jedinečnou - ťažšie chvosty ako pri normálnom rozdelení.

Tak, ako aj v predošlom prípade, vychádzame z dôsledku Sklarovej vety. Združenu distribučnou funkciou bude multivariačné Studentovo rozdelenie a marginály budú pochádzať taktiež zo Studentovho rozdelenia:

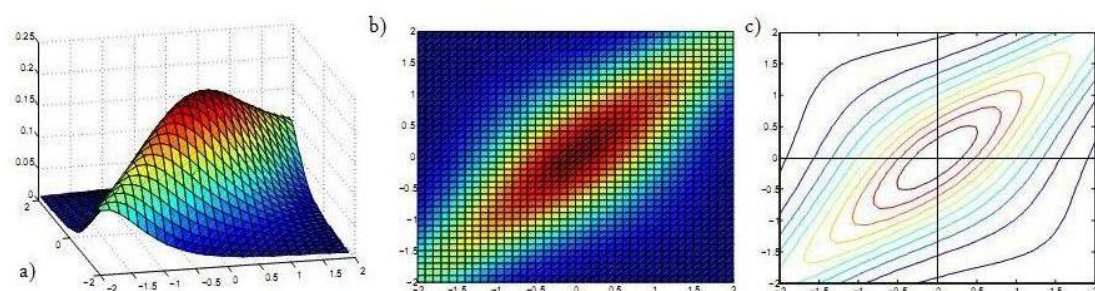
$$C_t(U, R, v) = t_{R,v}(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2), \dots, t_v^{-1}(u_n)) \quad (3.3)$$

kde R je znovu korelačná matica veľkosti $n \times n$, v je počet stupňov voľnosti (budeme označovať aj df - degrees of freedom). Potom bivariačná distribučná funkcia má predpis

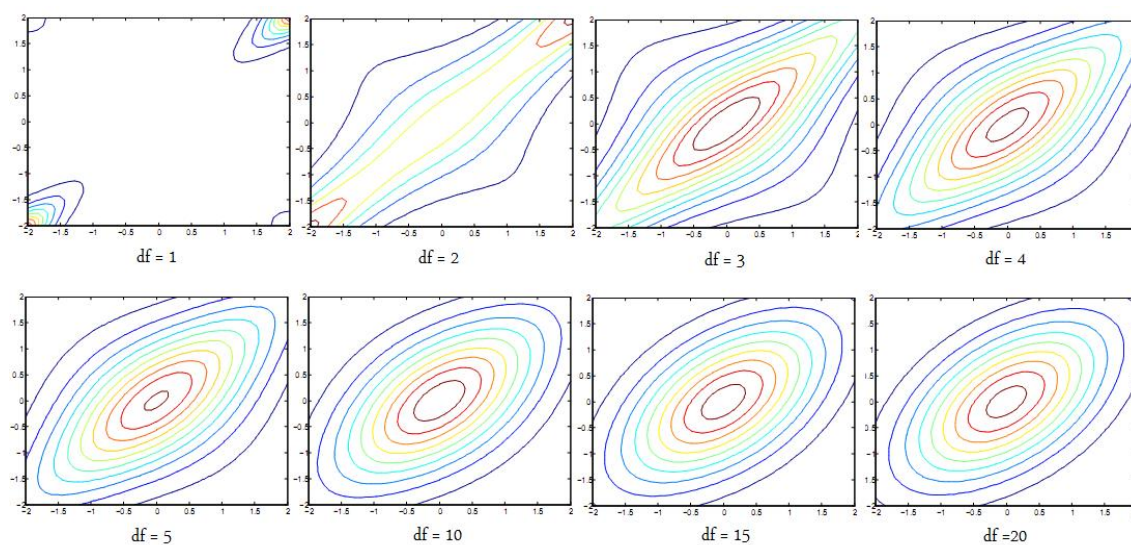
$$C_t(u_1, u_2, \rho, v) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \sqrt{(\pi v)^2(1-\rho^2)}} \left(1 + \frac{r^2 + s^2 - 2\rho rs}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} dr ds$$

Deriváciou predpisu distribučnej funkcie a úpravou by sme sa dostali k predpisu hustoty bivariačnej Studentovej copuly:

$$c_t(u_1, u_2, \rho, v) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)^2} \frac{\left(1 + \frac{t_v^{-1}(u_1)^2 + t_v^{-1}(u_2)^2 - 2\rho t_v^{-1}(u_1)t_v^{-1}(u_2)}{v(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}}}{\prod_{i=1}^2 \left(1 + \frac{t_v^{-1}(u_i)}{v}\right)^{-\frac{v+2}{2}}}$$



Obr. 3.3: Hustota bivariačného rozdelenia s použitím Studentovej t-copuly
Marginály sú z rozdelenia $\mathcal{N}(0, 1)$, korelačný koeficient $\rho = 0.5$, stupne voľnosti $df = 3$. Na obrázku a) hustota v 3D b) pohľad na graf hustoty zhora c) izolínie



Obr. 3.4: Izolínie hustoty bivariačného rozdelenia s použitím Studentovej copuly pre $\rho = 0.5$ a rôzne stupne voľnosti df

Kvôli symetrickosti eliptických copúl opäť platí, že koeficienty chvostových závislostí na dolnom a hornom chvoste sa rovnajú.

$$\lambda_U = \lambda_L = 2t_{v+1} \left(-\sqrt{v+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right)$$

Pre zafixované ρ je koeficient klesajúci s rastúcim počtom stupňov voľnosti v , pre fixné v je naopak s rastúcou koreláciou aj koeficient rastúci¹³. Istá chvostová závislosť tu teda je, len v limitnom prípade pre $v \rightarrow \infty$ koeficient konverguje k nule a závislosť na chvostoch teda nie je žiadna.

3.3.2 Trieda archimedovských copúl

Trieda eliptických copúl je síce často využívaná pre mnohé svoje „pekné“ vlastnosti, ale má aj pár v praxi nie vždy vhodných vlastností. Dobrým príkladom je už spomínaná závislosť vývoja dvoch finančných aktív, ktorá môže byť značne zvýšená hlavne v období poklesov, nejde teda o symetrické rozdelenie. Práve možnosť asymetrie je preto jednou z najprínosnejších vlastností archimedovských copúl. Táto trieda ponúka širokú variету kombinácií závislostí. Ďalšou ich príhodnou vlastnosťou je, že na rozdiel od eliptických majú archimedovské copuly explicitne vyjadrené vzťahy, sú o to ľahšie konštruovateľné. Definujme teraz copuly patriace do triedy archimedovských:

Definícia 3.3.2. *Nech φ je spojitá, rýdzo klesajúca funkcia $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ taká, že $\varphi(1) = 0$ a nech φ^{-1} je pseudoinverzná k φ . Nech $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ je funkcia daná vzťahom*

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (3.4)$$

Potom C je copula funkcia (prezývaná archimedovská) práve vtedy, ak φ je konvexná. Funkciu φ nazývame generátorom copuly.

¹³pre konkrétnejšie čísla odporúčame pozrieť [8] Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A.: *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*

Spomeňme ešte jeden dôležitý vzťah - medzi generátorom copuly a vzájomnou závislosťou náhodných vektorov vyjadrenou skrze Kendallovo τ :

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt$$

Poznamenajme tiež, že chvostové závislosti sa pre archimedovské copuly dajú vyjadriť aj vzťahmi¹⁴

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{u \searrow 0} \frac{\varphi^{-1'}(2u)}{\varphi^{-1'}(u)} \quad \lambda_L = 2 \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{-1'}(2u)}{\varphi^{-1'}(u)}$$

Spomedzi mnohých vyberáme troch najznámejších zástupcov: Claytonovu, Gumbelovu a Frankovu copulu.

Claytonova copula

Táto archimedovská copula má jednu vlastnosť zrejmu hneď pri prvom pohľade na vrstevnice (izolínie) grafu hustoty bivariačného rozdelenia. V 2-rozmernom (s normálne rozdelenými marginálami) prevedení je totiž špicatá v treťom kvadrante, čo znamená, že závislosť dvoch náhodných premenných je výrazne vyššia počas negatívnych udalostí ako počas pozitívnych. V ekonomickej interpretácii: použili by sme ju v prípade, že vzájomná závislosť dvoch faktorov je veľmi vysoká predovšetkým pri súčasne prebiehajúcich poklesoch.

Generátorom je funkcia $\varphi(t) = t^{-\theta} - 1$. Využitím vzťahu (3.4) by sme pre $uv \in [0, 1]$ a parameter $\theta \in [-1, \infty) - \{0\}$ odvodili pravdepodobnostné rozdelenie a hustotu pre túto parametrickú copulu:

¹⁴potrebné dôkazy v [8] Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A.: *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*

$$C_C(u, v, \theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$$

$$c_C(u, v, \theta) = (1 + \theta)(uv)^{-\theta-1} (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-2-1/\theta}$$

V literatúre sa nestretáme so žiadnou definíciou parametra θ , existuje však istá súvislosť s Kendallovým τ :

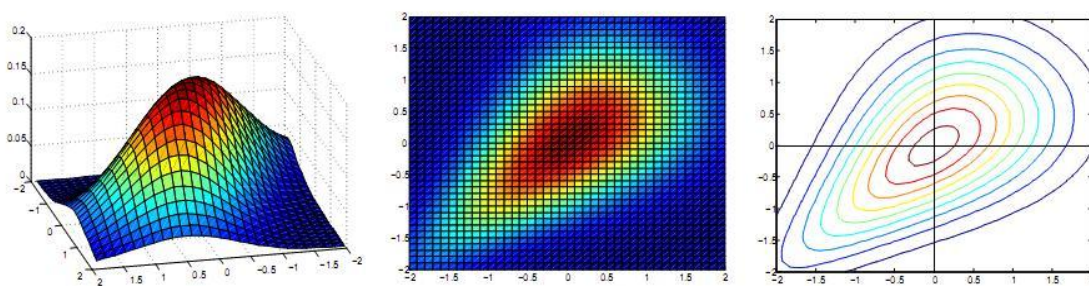
$$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}$$

V hraničných prípadoch pre $\theta = -1$ platí $C = W$ ¹⁵, pre θ konvergujúce k nule platí $\lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta = \Pi$ a pre vysoké hodnoty parametra $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta = M$.

Aplikáciou vzťahov pre chvostové závislosti sa dostávame k výsledku, že $\lambda_U = 0$ a teda, že x, y sú na hornom chvoste asymptoticky nezávislé, avšak pre dolný chvost platí:

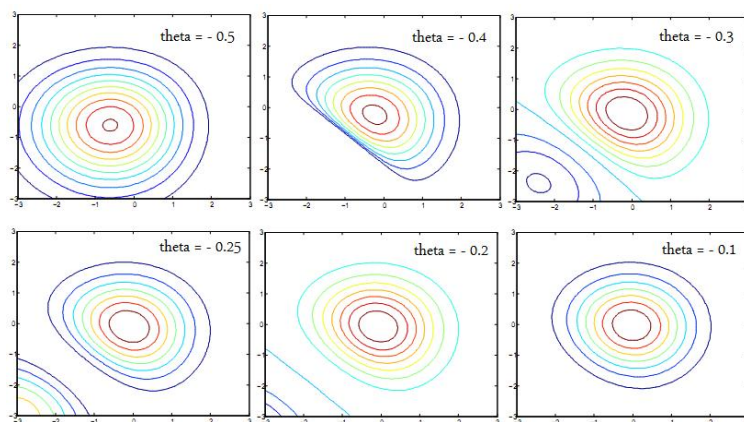
$$\lambda_L = 2 \lim \left[\frac{(1 + 2\theta u)^{-\frac{1}{\theta}-1}}{(1 + \theta u)^{-\frac{1}{\theta}-1}} \right] = 2^{-\frac{1}{\theta}}$$

Výsledkom teda je, že X, Y sú pri previazaní vzťahom Claytonovej copuly asymptoticky závislé na dolnom chvoste.

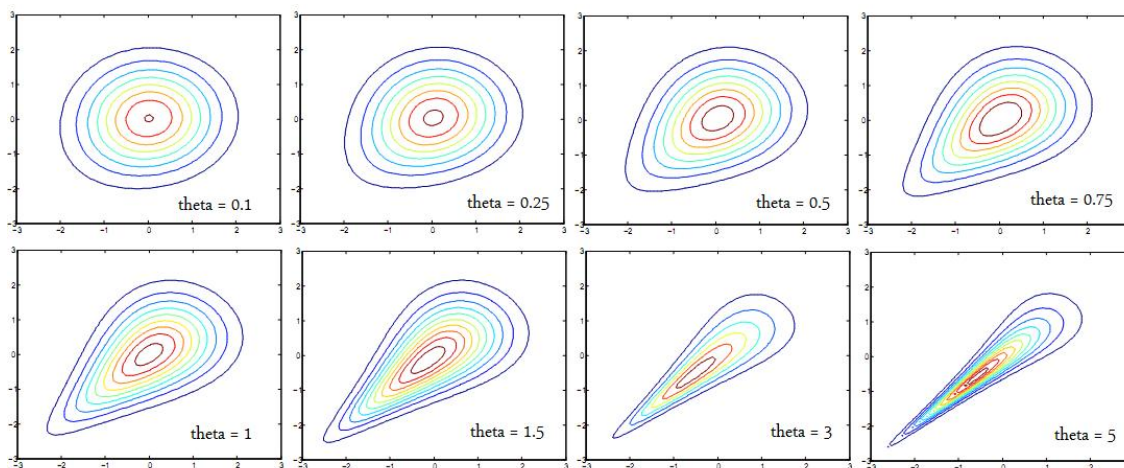


Obr. 3.5: Hustota bivariačného rozdelenia s použitím Claytonovej copuly
 Marginály sú z rozdelenia $\mathcal{N}(0, 1)$, parameter $\theta = 1$. Na obrázku a) hustota v 3D b) pohľad na graf hustoty zhora c) izolínie

¹⁵pozri časť o Fréchet-Hoeffdingovej spodnej a hornej hranici



Obr. 3.6: Izolínie hustoty bivariačného rozdelenia s použitím Claytonovej copuly pre rôzne hodnoty parametra $\theta \in (-1, 0)$



Obr. 3.7: Izolínie hustoty bivariačného rozdelenia s použitím Claytonovej copuly pre rôzne hodnoty parametra $\theta > 0$

Gumbelova copula

Copula s týmto pomenovaním sa správa opačne ako Claytonova, špicatosť sa prejavuje v prvom kvadrante. Závislosť je evidentne vyššia pri kladných hodnotách oboch náhodných premenných, ako pri akýchkoľvek iných.

Generátorom je funkcia $\varphi(t) = -\ln(t)^\theta$. Využitím vzťahu (3.4) by sme pre $uv \in [0, 1]$ a parameter $\theta \in [1, \infty)$ odvodili pravdepodobnostné rozdelenie a hustotu pre túto parametrickú copulu:

$$C_G(u, v, \theta) = \exp \left\{ - \left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right)^{1/\theta} \right\}$$

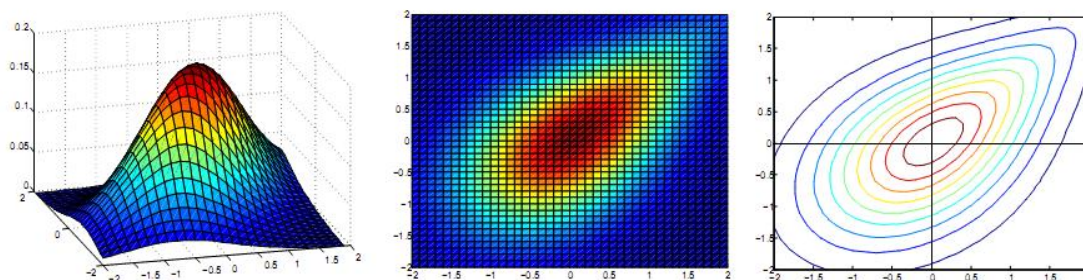
$$c_G(u, v, \theta) = \frac{C_G(u, v, \theta) (\ln u \cdot \ln v)^{\theta-1}}{uv (-\ln u - \ln v)^{2-1/\theta}} \cdot \left(\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta \right)^{1/\theta} + \theta - 1 \right)$$

V súvislosti s Kendallovým τ pre parameter θ platí $\tau = \frac{\theta - 1}{\theta}$

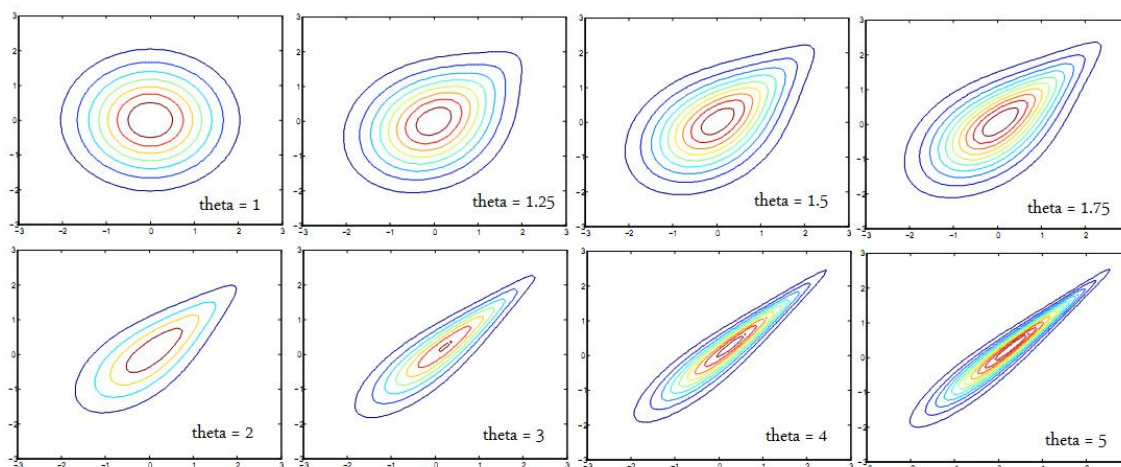
Tak ako v prípade Claytonovej copuly, aj Gumbelova je na jednom z chvostov asymptoticky nezávislá, na druhom asymptoticky závislá. Tentoraz $\lambda_L = 0$ a teda x, y sú na dolnom chvoste asymptoticky nezávislé, avšak pre horný chvost platí:

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim \left[\frac{\exp(-2u)^{\frac{1}{\theta}}}{\exp -u^{\frac{1}{\theta}}} \right] = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$$

Výsledkom teda je, že pri Gumbelovej copule sú X, Y asymptoticky závislé na hornom chvoste.



Obr. 3.8: Hustota bivariačného rozdelenia s použitím Gumbelovej copuly
Marginály sú z rozdelenia $\mathcal{N}(0, 1)$, parameter $\theta = 1.5$. Na obrázku a) hustota v 3D b) pohľad na graf hustoty zhora c) izolínie grafu bivariačného rozdelenia



Obr. 3.9: Izolínie hustoty bivariačného rozdelenia s použitím Gumbelovej copuly pre rôzne parametre θ

V hraničných prípadoch pre $\theta = 1$ platí $C = \Pi$ a pre vysoké hodnoty parametra $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta = M$.

Frankova copula

Poslednou z trojice najznámejších archimedovských copúl je Frankova copula. Jej charakteristikou je, že na rozdiel od Claytonovej a Gumbelovej copuly, táto modeluje aj iné ako iba pozitívne závislosti.

Generátorom je

$$\varphi(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

s parametrom definovanom ako $\theta \in (-\infty, \infty) - \{0\}$. Potom distribučná funkcia a hustota môžu byť vyjadrené ako:

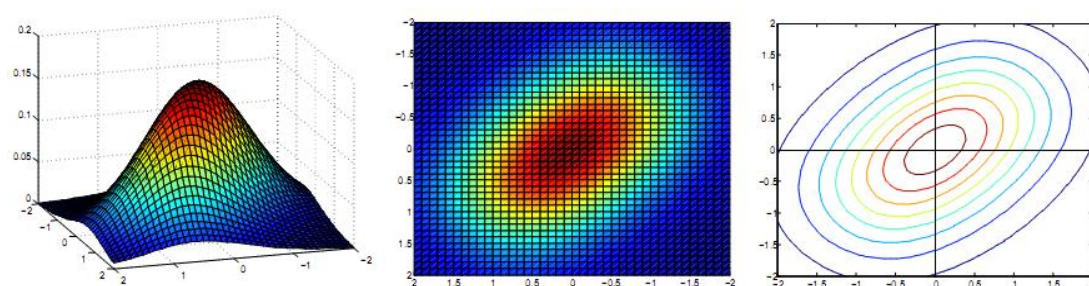
$$C_F(u, v, \theta) = \frac{-1}{\theta} \log\left(\frac{(1 - e^{-\theta}) - (1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v})}{1 - e^{-\theta}}\right)$$

$$c_F(u, v, \theta) = \frac{\theta(1 - e^{-\theta})e^{-\theta(u+v)}}{\left((1 - e^{-\theta}) - (1 - e^{-\theta u})(1 - e^{-\theta v})\right)^2}$$

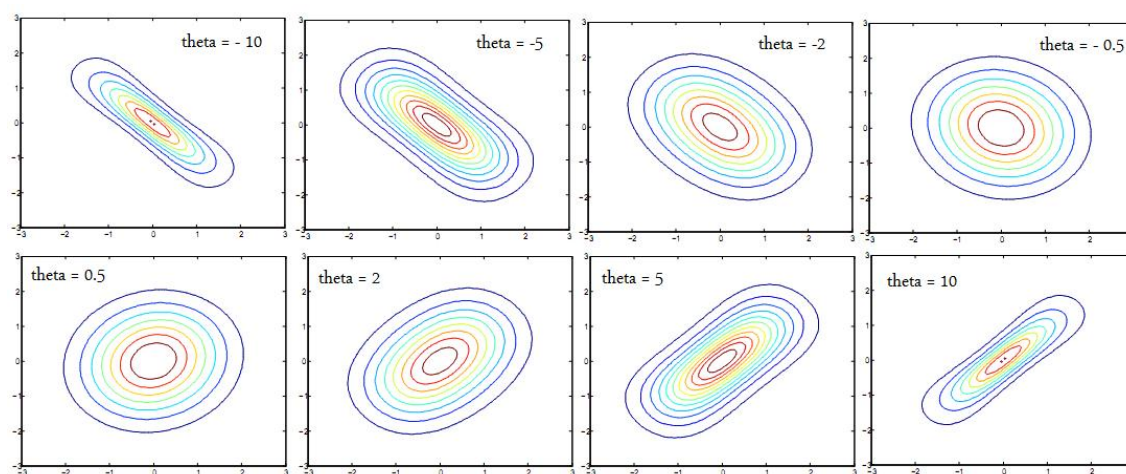
Vzťah s Kendallovým τ je tentoraz trošku komplikovanejší ako v predchádzajúcich prípadoch:

$$\tau = 1 - \frac{4}{\theta} \left(1 - \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt\right)$$

Pre Frankovu copulu sú náhodné vektory X, Y asymptoticky nezávislé na oboch chvostoch, je radiálne symetrická. V hraničných prípadoch, pre $\theta \rightarrow \infty$ platí $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta = M$ a pre $\theta \rightarrow -\infty$ platí $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} C_\theta = W$.



Obr. 3.10: Hustota bivariačného rozdelenia s použitím Frankovej copuly
Marginály sú z rozdelenia $\mathcal{N}(0, 1)$, parameter $\theta = 2$. Na obrázku a) hustota v 3D b) pohľad na graf hustoty zhora c) izolínie grafu bivariačného rozdelenia



Obr. 3.11: Izolínie hustoty bivariačného rozdelenia s použitím Frankovej copuly pre rôzne parametre θ

3.4 Dáta a voľba vhodnej copuly

V tejto časti budeme riešiť problém výberu správnej copula funkcie a jej parametre pre čo najlepšie pokrytie dát bivariačným rozdelením s využitím v empirických aplikáciách.

Predpokladajme, že máme k dispozícii vzorku n dvojíc náhodných pozorovaní $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ generovaných z neznámeho rozdelenia $H(x, y)$ so spojitými marginálnymi distribúciami $F(x), G(y)$ a copulou $C(F(x), G(y))$. Zo Sklarovej vety už vieme, že $H(x, y) = C(F(x), G(y))$, preto problém hľadania správneho bivariačného rozdelenia môžeme pretransformovať na problém nájdenia vhodného parametra copula funkcie popisujúcej dané dáta. Tu sa nám ponúka možnosť dvoch prístupov podľa parametrickej. Všeobecne je často využívaná metóda maximálnej vierohodnosti, predovšetkým ak máme k dispozícii veľké množstvo dát. Ak však dáta, s ktorými pracujeme, obsahujú outlierov alebo marginálne rozdelenia majú ťažšie chvosty, je vhodnejší prístup Genesta a Rivesta - je robustnejší a nestanovuje žiadne predpoklady o marginálnych rozdeleniach. Oba prístupy si predstavíme v nasledujúcich sekciách.

3.4.1 Metóda maximálnej vierohodnosti

Ľahko pochopiteľná a hojne využívaná metóda (z angl. Maximum Likelihood Method) s možnosťou parametrickej i semiparametrickej prístupu. Rieši sa v nej problém nájdenia maxima vierohodnostnej funkcie $L(\alpha, \theta, X, Y)$, kde α je vektor parametrov marginálnych rozdelení náhodných vektorov X a Y a θ je parameter copula funkcie. Keďže nie je úplne evidentné ako je θ ovplyvnená marginálami, musíme odhad urobiť dvojkrokovovo.

Prv, ako sa dostaneme k odhadu parametrov bivariačného rozdelenia, zdefinujme si najprv nástroj, ktorý na to použijeme - pojem funkcie maximálnej vierohodnosti.

Definícia 3.4.1. ¹⁶

Nech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)'$ je náhodný výber a $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ je jeho realizácia. Nech rozdelenie, z ktorého sme uskutočnili výber, má hustotu $f(x, \theta)$, kde θ je k -rozmerný vektorový parameter $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)'$, ktorý patrí do neprázdneho otvoreného priestoru Θ . Potom združenú funkciu rozdelenia výberu pri pevných výberových hodnotách $X_i = x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, ako funkciu vektorového parametra θ nazveme funkciou vierohodnosti a označíme $L(\mathbf{x}, \theta)$. Platí

$$L(\mathbf{x}, \theta) = L(\mathbf{x}, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k).$$

Metóda maximálnej vierohodnosti spočíva v tom, že za odhad neznámeho vektorového parametra θ sa zvolí vektor $\tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \dots, \tilde{\theta}_k)'$, ktorý pri daných realizovaných hodnotách premenných maximalizuje funkciu vierohodnosti.

Definícia 3.4.2. ¹⁷

Ak existuje taký vektor $\tilde{\theta} \in \Theta$, že pre všetky $\theta \in \Theta$ platí $L(\mathbf{x}, \theta) \leq L(\mathbf{x}, \tilde{\theta})$ tak $\tilde{\theta}$ budeme nazývať maximálne vierohodným odhadom neznámej hodnoty parametra θ (alebo odhadom maximálnej vierohodnosti). Spravidla namiesto funkcie vierohodnosti $L(\mathbf{x}, \theta)$ maximalizujeme jej prirodzený logaritmus, ktorý nazývame logaritmicou funkciou vierohodnosti $\ln L(\mathbf{x}, \theta)$.

V prípade čisto parametrického prístupu, dvojkrokovosť znamená odhadnúť najprv parametre rozdelení marginál a až na základe výsledkov pokračovať s odhadom parametra copuly. Tu sa však ihneď objavuje problém: možné nabaľovanie sa chýb. Nie veľmi presný odhad parametrov marginálnych rozdelení totiž môže spôsobiť väčšie odchýlky v odhade parametra copuly a teda aj bivariačného rozdelenia. Ak by sme sa však rozhodli pre tento prístup, postupovali by sme nasledovne:

¹⁶[14] Lamoš, Potocký: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*, Definícia (4.7.1), str.95

¹⁷[14] Lamoš, Potocký: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika*, Definícia (4.7.2), str.95

1. Odhad parametrov marginálnych rozdelení. Pre vektor X s n pozorovaniami a pre vektor Y , taktiež s n pozorovaniami, by sme sa snažili nájsť vhodné pravdepodobnostné rozdelenie a k nemu metódou maximálnej vierohodnosti odhad príslušného parametra (prípadne viacerých parametrov - záleží od voľby triedy rozdelenia), ktoré ho čo najlepšie popisuje. Aplikovali by sme tento postup na viacero tried a po spätnom dosadení do vierohodnostnej funkcie by sme vybrali tú s najvyššou hodnotou prirodzeného logaritmu funkcie L s parametrom $\hat{\alpha}_1$ pre X v argumente. Rovnako aj pre odhadnutý parameter $\hat{\alpha}_2$ pre Y .
2. V druhom kroku by sme použili rovnaký postup, do vierohodnostnej funkcie by ako funkcia hustoty rozdelenia vstupovala funkcia hustoty vybranej triedy copula funkcií, avšak odhad by sme nerobili s vektormi X, Y , ale s ich transformáciami na základe vybraného marginálneho rozdelenia.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \ln \left(c_{\theta}(\hat{F}(x), \hat{G}(y)) \right)$$

Existuje však aj semiparametrický prístup, v ktorom použijeme empirické marginálne distribučné funkcie. Práve nimi taktiež transformujeme pozorovania vo vektoroch X a Y :

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \prod_{i=1}^n I[X_i \leq x] \quad G_n(y) = \frac{1}{n+1} \prod_{i=1}^n I[Y_i \leq y]$$

Úlohou je teraz nájsť odhad parametra $\hat{\theta}$ maximalizujúci pseudo-vierohodnostnú funkciu

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \ln (c_{\theta}(F_n(x), G_n(y)))$$

pre viacero parametrických tried copula funkcií a vybrať tú, ktorá s parametrom $\hat{\theta}$ v argumente bude dosahovať najvyššiu hodnotu funkcie L .

Pre oba prístupy platí, že najvhodnejším meradlom kvality odhadu pre porovnanie parametrických tried je Akaikeho kritérium $AIC = -2L(\hat{\theta}) + k$, kde k je počet parametrov modelu.

3.4.2 Procedúra podľa Genesta a Rivesta

Ide o neparametrický prístup využívajúci sa na odhad parametra archimedovskej copuly. Postup je jednokrokový, táto metóda nepotrebuje poznať rozdelenia marginál, využíva predovšetkým informáciu obsiahnutú v Kendallovom tau.

Nech Z_i náhodná premenná, ktorá bude predstavovať prvok z hľadaného rozdelenia $H(X_i, Y_i)$ a tá má rozdelenie $K(z) = PZ_i \leq z$. Toto rozdelenie previazané s generátorom archimedovskej copuly φ s parametrom θ sa dá vyjadriť vzťahom¹⁸

$$K(z) = K_\varphi(z) = z - \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}. \quad (3.5)$$

K tomu je potrebné identifikovanie generátora φ , postup je nasledovný:

1. Odhad koeficientu závislosti, Kendallovho τ , z daných dát. Postup sme už vysvetlili v kapitole 3.2. Odhad nazvime $\hat{\tau}$.
2. Zadefinovanie pseudopozorovaní Z_i ako počet takých dvojíc (X_j, Y_j) , že $X_j < X_i$ a $Y_j < Y_i$ predelených $n - 1$ pre všetky $i = 1, \dots, n$.

$$Z_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n I[X_j < X_i \wedge Y_j < Y_i]$$

kde $I[*]$ je funkcia, ktorá dáva výstup 1 ak udalosť * nastane, 0 ak udalosť * nenastane.

3. Konštrukcia neparametrického odhadu rozdelenia K ako pomernej časti počtu Z_i menších ako z .

$$\hat{K}(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I[Z_i \leq z]$$

¹⁸veta aj s dôkazom [6] De Matteis, R.: *Fitting Copulas to Data*, s.29, 30 alebo celý postup v [11] Genest, C., Rivest, L. P.: *Statistical Inference procedures for bivariate Archimedean copulas*.

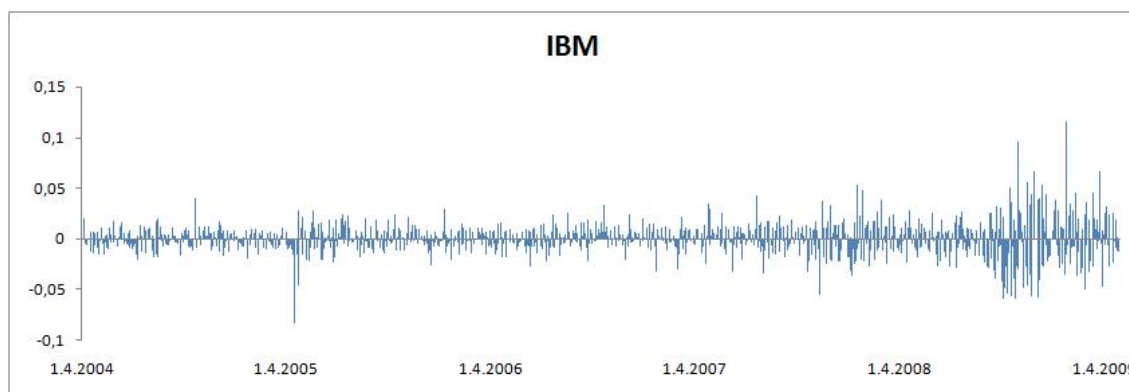
4. Konštrukcia parametrického odhadu K_φ , na základe vzťahu (3.5). Odhadnuté Kendallovo $\hat{\tau}$ z prvého kroku použijeme na výpočet parametra copuly (využijúc vzťahy medzi Kendallovým τ a parametrom θ pre jednotlivé copuly archimedovskej triedy z predchádzajúcej podkapitoly). Tým sa dostávame k odhadu $\hat{\theta}$ a na jeho základe k odhadu generátora $\hat{\varphi}(t)$. Tým získavame všetko potrebné k zostaveniu rozdelenia $K_{\hat{\varphi}}(z)$.
5. Predchádzajúci krok zopakujeme pre všetky vybrané typy archimedovských copúl, ktoré chceme porovnávať. Vyberieme najlepšiu možnosť v zmysle najmenšieho rozdielu¹⁹ medzi neparametrickým odhadom $\hat{K}(z)$ a parametrickým odhadom $K_{\hat{\varphi}}(z)$.

3.5 Odhad Value-at-Risk

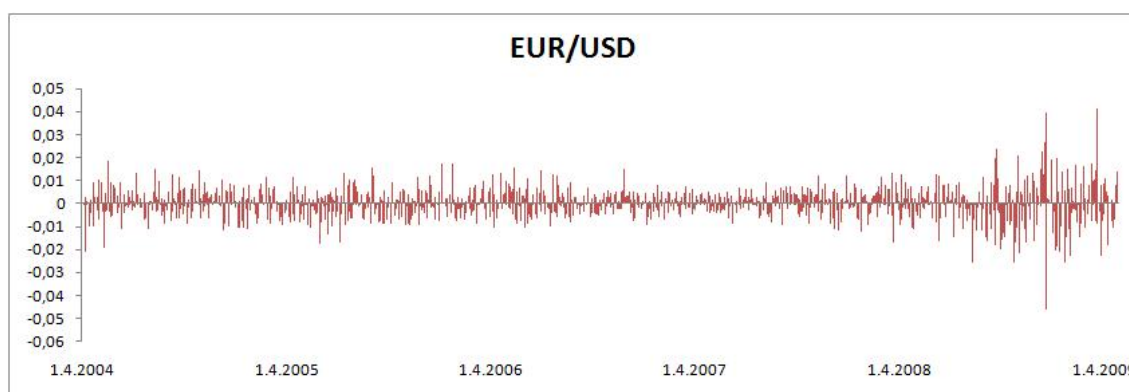
Dostávame sa ku aplikácii doteraz uvedených teoretických poznatkov v praxi. Kvôli dostatočnej názornosti uvedených postupov vyberáme jeden príklad. Zamerajme sa na rizikovosť v prípade, že máme v držbe akciu IBM v dolároch. Sme vystavení dvojakému riziku - riziku možného poklesu ceny a devízovému riziku vo forme vyvíjajúceho sa kurzu EUR/USD. Riešime teda problém zhodnotenia Value-at-Risk s dvoma rizikovými faktormi, v preklade do matematickej reči, budeme hľadať bivarijné pravdepodobnostné rozdelenie.

Obdobie, v ktorom budeme sledovať vývoj oboch faktorov, sme zvolili 5-ročné: v rozmedzí od 1.4.2004 do 1.4.2009. Samozrejme, nesmieme zabudnúť vyrovnať sa s problémom rôznych dĺžok časových radov, keďže dni štátnych sviatkov počas ktorých sa neobchoduje, sú pre Európu a USA rozdielne.

¹⁹rozdiel je možné merať ako $\int_0^1 [K_{\hat{\varphi}}(z) - \hat{K}(z)]^2 dz$



Obr. 3.12: Denné relatívne zmeny v cene akcie IBM v sledovanom období 1.4.2004 - 1.4.2009

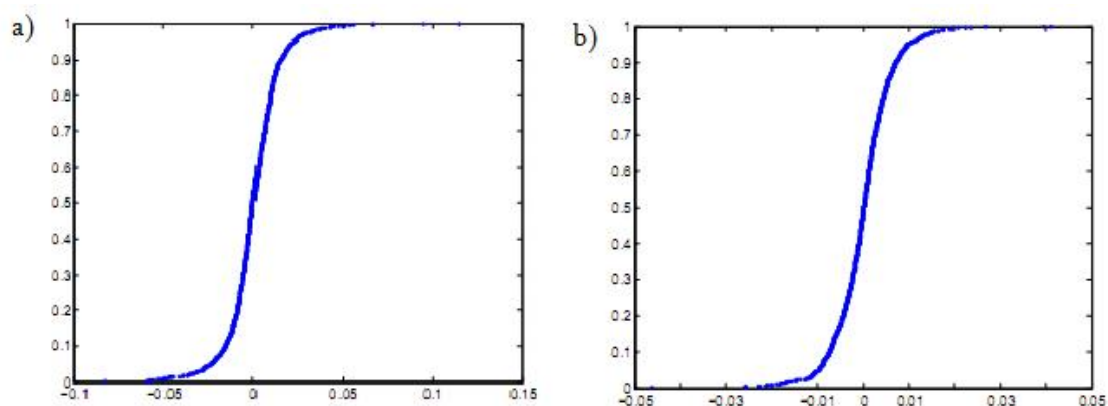


Obr. 3.13: Denné relatívne zmeny vo vývoji devízového kurzu EUR/USD v sledovanom období 1.4.2004 - 1.4.2009

Spomedzi predstavených postupov sme si vybrali semiparametrickú metódu využívajúcu maximálnu vierohodnosť. Prvým krokom je teda zostavenie empirickej distribučnej funkcie a pretransformovanie sledovaných premenných na pseudopozorovania z intervalu $(0, 1)$.

	IBM	EUR/USD
Priemer	-9.9832e-005	-1.7274e-004
Štandardná odchýlka	0.0155	0.0145
Špicatosť	11.2249	15.5432
Šikmosť	0.1075	0.0680
Minimum	-0.0914	-0.0903
Maximum	0.1181	0.1158
Jarque-Berra (p-hodnota)	1.0000e-003	1.0000e-003
korelačný koeficient	0.9534	

Tab. 3.14: Základné charakteristiky časových radov



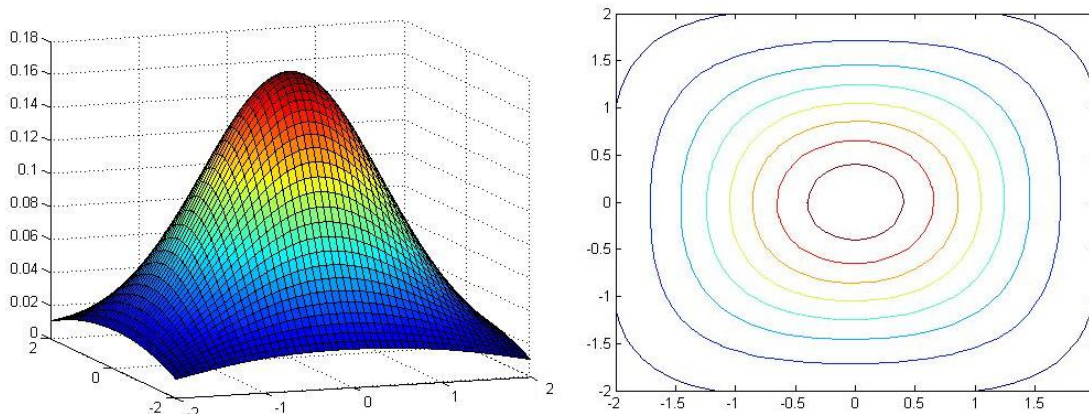
Obr. 3.15: Empirické distribučné funkcie: a) výnosy akcie IBM b) relatívne zmeny výmenného kurzu EUR/USD

Po transformovaní dát metódou maximálnej vierohodnosti odhadneme najvhodnejšie parametre jednotlivých tried rozdelení, hľadáme odhad parametra pre každú z tried a zároveň si všimáme funkčnú hodnotu vierohodnosti L . Pre uistenie sa sledujeme aj hodnotu Akaikeho informačného kritéria (AIC):

Parametrická copula	Odhad parametra θ	$\ln L(\theta)$	AIC
Gaussova copula	$\theta = \rho = 0.0438$	1.2102	-2.4188
Studentova copula	$\theta = (\rho, \nu) = (0.0136, 5.8321)$	15.7353	-31.4674
Claytonova copula	$\theta = 0.1019$	6.6158	-13.2301
Gumbelova copula	$\theta = 1.1000$	-5.8096	11.6208
Frankova copula	$\theta = 0.0411$	0.0284	-0.0552

Tab. 3.16: Odhady parametrov metódou maximálnej virohodnosti pre jednotlivé parametrické triedy copula funkcií

Z uvedených výsledkov je zrejmé, že najlepšie dané dáta popisuje bivariačné rozdelenie so Studentovou copulou.

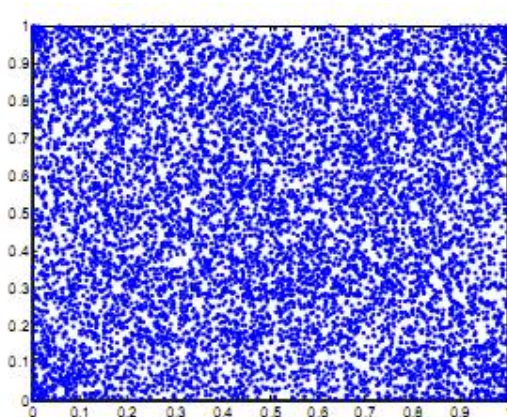


Obr. 3.17: Odhadnuté bivariačné rozdelenie so Studentovou copulou

Ďalším krokom ako získať požadovaný odhad VaR je simulácia dát z tohto rozdelenia. Pre eliptické rozdelenia je potrebné najprv nájsť Choleskeho rozklad korelačnej matice, nazvime ho A . Ďalej, nasimulujeme n nezávislých pozorovaní z_1, \dots, z_n z rozdelenia $\mathcal{N}(0, 1)$. V prípade Gaussovej copuly postavme $x = Az$ a nech $u_i = \Phi(x_i)$ pre $i = 1, \dots, n$. Vektor $(u_1, \dots, u_n)^T$ má potom rozdelenie určené Gaussovou copulou. V prípade Studentovej copuly je odhad vzhľadom na teoretické pozadie trochu odlišný.

Okrem vektora z je potrebné simulovať aj s nezávislé od z z rozdelenia χ^2 . Nech $y = \frac{A}{z}$ a nech $x = \frac{\sqrt{v}}{s}y$, potom vektor u s prvkami $u_i = t_v(x_i)$ má rozdelenie určené Studentovou copulou.

Pre archimedovské rozdelenia je postup odlišný, i keď myšlienka ostáva: simulujeme dva náhodné výbery s, q z $U(0, 1)$ a hľadá sa inverzná funkcia K_φ^{-1} ak K_φ je distribučná funkcia copuly C . Nech $t = K_\varphi^{-1}(q)$. Ak $u = \varphi^{-1}(s\varphi(t))$ a $v = \varphi^{-1}((1-s)\varphi(t))$, potom (u, v) pochádza z rozdelenia určeného archimedovskou copulou s generátorom φ .



Obr. 3.18: Nasimulované dáta z odhadnutého rozdelenia so Studentovou copulou

Upozorníme, že simuláciou sa dostávame k náhodným premenným z intervalu $(0, 1)$, ide o pravdepodobnostné rozdelenie hľadaných dát. Opačným postupom ako pri odhadovaní empirickej distribučnej funkcie sa dostávame k hľadanému rozdeleniu. V prípade 95%-nej hladiny spoľahlivosti oddelíme 5% najhorších výnosov a hraničná hodnota je hľadané VaR. V sledovanom príklade prichádzame k hodnote novej straty -0.02997 (v ponímaní relatívnej zmeny). V prípade 99%-nej hladiny spoľahlivosti postupujeme analogicky a tu sa dostávame k výsledku -0.0527 .

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo priblížiť jeden z najznámejších nástrojov merania trhového rizika a uviesť čitateľa do problematiky odhadu Value-at-Risk pomocou copula funkcií. Okrem iného, bol čitateľovi poskytnutý prehľad neparametrických, semiparametrických a parametrických metód, bol predstavený zástupca každej jednej triedy. I keď predmetom práce bola konkrétna z metód, boli uvedené aj iné metódy, aby si mohol čitateľ vytvoriť vlastný úsudok o tom, predpoklady ktorej metódy sa mu zdajú v konkrétnom prípade najrealistickejšie využiteľné v praxi. V tretej kapitole sme predostreli problém prístupu k portfóliu aktív ako k súboru rizikových faktorov a nie ako k celku. To obnáša mnoho komplikácií, predovšetkým ťažko popísateľnú vzájomnú závislosť medzi rizikovými faktormi. Tento problém je riešiteľný pomocou copula funkcií a táto kapitola je koncipovaná tak, aby aj niekto, kto sa stretol s pojmom copula funkcie po prvýkrát, mal možnosť získať všetky potrebné poznatky k odhadu VaR aj týmto spôsobom. Okrem toho, že táto práca obsahuje kompaktnú teóriu copula funkcií, prináša aj prehľadné predstavenie niekoľkých základných typov parametrických tried copúl. Zaoberali sme sa tiež najvhodnejším výberom copuly pre popis reálnych dát a v poslednej časti sme uviedli názorný príklad na reálnych dátach.

Literatúra

- [1] Ané, T., Kharoubi, C.: *Dependence Structure and Risk Measure*. [online]. In *Journal of Business*, 2003, Volume 76, No. 3. s. 411-438. Dostupné na internete: <<http://www.journals.uchicago.edu/doi/pdf/10.1086/375253>>
- [2] Bacigal, T.: *Advanced methods of time series modelling and their application in geodesy*. [online]. Dizertačná práca, 2007. Dostupné na internete: <http://www.math.sk/bacigal/homepage/research.html#07_PhDthesis>
- [3] Bouyé, E., Durrieman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G., Roncalli, T.: *Copulas For Finance, A Reading Guide And Some Applications*. [online]. Working article. Econometrics Research Centre and Groupe de Recherche Opérationelle du Crédit Lyonnais, July 2000. Dostupné na internete: <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1032533>
- [4] Coles, S.: *An Introduction to statistical modeling of extreme values*. Springer, 2001, 3.vydanie, ISBN 1852334592, 208 s.
- [5] Demarta, S-, McNeil, A.: *The t-Copula and Related Copulas*. [online]. African Journal of Derivatives, Research papers 2004. Dostupné na internete: <http://africanjournalofderivatives.com/yahoo_site_admin/assets/docs/CreditDerivatives53.23482441.pdf>

- [6] De Matteis, R.: *Fitting Copulas to Data*. [online]. Diploma thesis, Institute of Mathematics of the University of Zurich, June 2001. Dostupné na internete: <<http://www.gloriamundi.org/detailpopup.asp?ID=453057470>>
- [7] Embrechts, P., Frey, R., McNeil, A.: *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, 2005.
- [8] Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A.: *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. [online]. Working article. ETH Zurich, September 2001. Dostupné na internete: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.69.792&rep=rep1&type=pdf>>
- [9] Frees, E. V., Valdez, E. A.: *Understanding Relationships Using Copulas*. [online]. In *North American Actuarial Journal, 32nd Actuarial Research Conference, University of Calgary, 1997, Volume 2, Number 1*. s. 1-25. Dostupné na internete: <http://www.soa.org/library/journals/north-american-actuarial-journal/1998/january/naaj9801_1.pdf>
- [10] Gatz, J.: *Properties and Application of the t-Copula*. [online]. Master thesis. TU Delf Netherlands, 2007. Dostupné na internete: <http://dutiosc.twi.tudelft.nl/~risk/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=153&&>
- [11] Genest, C., Rivest, L. P.: *Statistical Inference procedures for bivariate Archimedian copulas*. [online]. In *Journal of the American Statistical Association*, 1993, Volume 88. s. 1034-1043. Dostupné na internete: <<http://www.jstor.org/stable/2290796>>
- [12] Jorion, P.: *Value-at-Risk: The New Benchmark to Managining Financial Risk*. McGraw-Hill, 2001, 2. vydanie.

- [13] Kováčsová, E.: *Použitie teórie extrémnych jednôt vo finančníctve*. [online]. Diplomová práca, 2008. Dostupné na internete: <<http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2008/kovacsova/diplomovka.pdf>>
- [14] Lamoš, F., Potocký, R.: *Pravdepodobnosť a matematická štatistika Štatistické analýzy*. 2.vyd. Bratislava: Vydavateľstvo UK, 1998. 344 s. ISBN 80-223-1262-2
- [15] Linsmeier, T. J., Pearson, N. D.: *Risk Measurement: An Introduction to Value-at-Risk*. [online]. Working article. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1999. Dostupné na internete: <<http://www.casact.org/education/specsem/99frmgt/pearson2.pdf>>
- [16] Nelsen, R. B.: *An Introduction to Copulas*. Springer Verlag, New York, 1999.
- [17] Palaro, H. P., Hotta, L. K.: *Using Conditional Copula to Estimate Value-at-Risk*. [online]. In *Journal of Data Science*, 2006, Volume 4. s. 93-115. Dostupné na internete: <<http://www.gloriamundi.org/picsresources/hpplkh.pdf>>
- [18] Patton, A. J.: *Applications of Copula Theory in Financial Econometrics*. [online]. Dissertation. University of California, San Diego, 2002. Dostupné na internete: <https://www.amstat.org/sections/bus_econ/papers/patton_dissertation.pdf>
- [19] Patton, A. J.: *Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence*. [online]. In *International Economic Review*, May 2006, Vol. 47, No.2. Dostupné na internete: <http://www.economics.ox.ac.uk/members/andrew.patton/Patton_IER_2006.pdf>
- [20] Rimarčík, M.: *Využitie metód Value-at-Risk na meranie kurzového rizika*. [online]. Dizertačná práca, 2004. Dostupné na internete: <<http://rimarcik.com/Value-at-Risk.pdf>>

- [21] Štalmach, M.: *Value-at-Risk: nástroj na meranie trhového rizika*. [online]. Diplomová práca, 2007. Dostupné na internete: <<http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2007/stalmach/diplomovka.pdf> >
- [22] Švarda, N.: *Porovnanie rôznych štatistických testov na validáciu Value-at-Risk modelov*. [online]. Diplomová práca, 2007. Dostupné na internete: <<http://vili.uniba.sk:8880/dzb/dostupne/2007-FM-LZyTLT/2007-FM-LZyTLT.pdf>>