

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



DIPLOMOVÁ PRÁCA

BRATISLAVA 2009

LUKÁŠ SVIENTY

# Cyklická dynamika v makroekonomickom modeli

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Lukáš Svienty

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY  
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika  
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Vedúci práce: Mgr. Michal Zákopčan

BRATISLAVA 2009

Prehlasujem, že túto diplomovú prácu som vypracoval samostatne s použitím uvedenej literatúry a vedomostí nadobudnutých počas štúdia na tejto fakulte.

V Bratislave 20. apríla 2009

.....  
Lukáš Svienty

Ďakujem vedúcemu mojej diplomovej práce Mgr. Michalovi Zákopčanovi za jeho pripomienky, návrhy, rady a čas, ktorý mi pri písaní tejto práce venoval.

Poďakovanie patrí tiež mojej najbližšej rodine, ktorá mi umožnila štúdium na tejto fakulte a vždy ma v ňom podporovala.

## Abstrakt

V súčasnosti zažíva medzi autormi makroekonomických prác rozmach teória Real Business Cycles modelov. Jedným z hlavných predpokladov týchto modelov je konvergencia ekonomík k rovnovážnym stavom. Cieľom našej práce bude overiť hypotézu, že vybrané európske ekonomiky nekonvergujú k svojim pevným stavom, ale aj bez exogénne vstupujúcich šokov sa správajú bez definovateľných zákonitostí vplyvom cyklickej dynamiky v rámci svojich atraktívnych množín. Naš predpoklad budeme postupne overovať pre makroekonomické modely uzavretej a otvorenej ekonomiky.

Kľúčové slová: dynamika stavových premenných, konvergencia k rovnovážnym stavom, fázový portét, stabilita pevného bodu, trajektória

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Viacrozmerné diskkrétne dynamické systémy</b>	<b>3</b>
1.1 Explicitný výpočet trajektórií . . . . .	3
1.2 Stabilita viacrozmerného dynamického systému . . . . .	5
1.3 Afinný viacrozmerný diskretný dynamický systém . . . . .	6
<b>2 Dvojrozmerné diskkrétne dynamické systémy</b>	<b>7</b>
2.1 Fázové portréty a stabilita planárnych lineárnych systémov . . . . .	7
<b>3 Model kapitálu a zásob</b>	<b>12</b>
3.1 Lokálna stabilita v modeli . . . . .	15
3.2 Špecifikácia produkčnej funkcie . . . . .	21
3.2.1 Cobb-Douglasova produkčná funkcia . . . . .	22
3.2.2 CES produkčná funkcia . . . . .	23
3.3 Výber pozorovaných krajín . . . . .	24
3.4 Kalibrácia modelu . . . . .	25
3.5 Odhad bifurkačného parametra . . . . .	27
<b>4 Model výmenného kurzu</b>	<b>32</b>
4.1 Verzia modelu podľa Zhanga . . . . .	33
4.2 Výber pozorovaných krajín . . . . .	35
4.3 Kalibrácia modelu . . . . .	35
4.4 Rozšírenie modelu výmenného kurzu . . . . .	38
<b>Záver</b>	<b>41</b>
<b>Referencie</b>	<b>43</b>
<b>Prílohy</b>	<b>45</b>

# Úvod

V tejto práci sa budeme venovať overovaniu hypotézy, ktorá podľa nášho názoru vzniká ako prirodzená otázka pri štúdiu moderných makroekonomických prác. V RBC (Real Business Cycles) modeloch sa predpokladajú racionálne očakávania agentov na trhu a do rovníc vstupujú premenné vyjadrujúce šoky v ekonomike, ktoré majú nulovú strednú hodnotu a konečnú disperziu. Výsledkom takto postavených modelov je, že skúmané ekonomiky konvergujú k svojim rovnovážnym stavom a v prípade, že už v rovnovážnom stave sú, potom sa pohybujú okolo tohto bodu v malých odchýlkach s danou konečnou disperziou. Našou domnienkou však je, že aj za predpokladu, že by do ekonomík šoky nevstupovali, ekonomiky k svojim rovnovážnym stavom konvergovať nebudú, ale budú sa pohybovať v cykloch, prípadne až chaoticky v rámci atraktívnej množiny bez definovateľných zákonitostí. A tak sa môže stať, že dva blízke stavy ekonomiky v čase  $t$  môžu po konečnom počte iterácií skončiť v rozdielnych stavoch v rámci svojej atraktívnej množiny.

Túto hypotézu sa pokúsime overiť použitím reálnych časových radov vybraných európskych ekonomík postupne na dvoch odlišných typoch makroekonomických modelov. Prvým bude model pre uzavretú ekonomiku, ktorý spája neoklasické a keynessiánske prvky a je použitý v práci Gomesa [7]. Druhým typom je model pre otvorenú ekonomiku, kde budeme venovať pozornosť modelu výmenného kurzu. Pôvodný rámec modelu pochádza z práce Dornbuscha [4] a upravená verzia, ktorú použijeme, vychádza z konštrukcie modelu predstaveného v práci Zhanga [18]. Keďže budeme pracovať prevažne s 2-rozmernými dynamickými systémami, môžeme tak naše výsledky aj graficky podložiť fázovými portrétmi.

Všetky modely, ktoré v našej práci predstavíme, vnímajú čas ako diskrétnu veličinu, preto si vystačíme s teóriou viacrozmerných diferenčných rovníc. Potrebnú teóriu, ktorú opisujeme v prvých dvoch častiach práce, čerpáme z prác Brunovského [3], Hala a Koçaka [9] a Zhanga [18].

# 1 Viacrozmerné diskkrétne dynamické systémy

Základnou úlohou dynamických systémov je nájsť matematický aparát na opis dlhodobého časového vývoja izolovaného systému v dôsledku zmien v ňom prebiehajúcich. Matematický model takéhoto mechanizmu sa nazýva dynamickým systémom. V našej práci vystačíme so sledovaním systému v oddelených časových intervaloch, preto sa budeme zaoberať len systémami, ktoré sa nazývajú diskkrétne dynamické systémy.

Stavom dynamického systému nazývame takú informáciu o ňom, ktorej znalosť v nejakom časovom okamihu spolu so znalosťou vnútorných zákonitostí vývoja systému umožňuje predpovedať jeho vývoj v nasledujúcich časových okamihoch bez vplyvu vonkajšieho prostredia.

Viacrozmerný lineárny diskrétny dynamický systém má tvar

$$x_{t+1} = Ax_t, \quad (1)$$

kde  $x_t \in \mathbb{R}^n$  je vektor endogénnych stavových premenných systému v čase  $t$ ,  $x_t = (x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^n)^T$ ,  $A$  je  $n \times n$  matica reálnych čísel.

Trajektóriu dynamického systému (1) cez počiatočný stav  $x_0$  nazývame postupnosť bodov  $x(t) = x(t, x_0)$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ , ktorá spĺňa rovnicu (1), kde  $x_0 = x(0)$ . Pre explicitný výpočet trajektórií tohto systému teda platí

$$x(t, x_0) = A^t x_0. \quad (2)$$

## 1.1 Explicitný výpočet trajektórií

Aby sme mohli skúmať asymptotické správanie sa takéhoto systému, je potrebné vypočítať mocniny matice  $A$ . Označme  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  vlastné hodnoty matice  $A$ , z ktorých žiadne dve sa nerovnajú a  $v_1, \dots, v_n$  príslušné vlastné vektory k nim. V prípade, že matica  $A$  má aspoň dve vlastné hodnoty rovnaké, postup odvodenia všeobecného riešenia je mierne pozmenený. Na tomto mieste ho však z praktického hľadiska nebudeme odvodzovať, čitateľ ho môže však nájsť napríklad v práci Hale a Koçak [9].

Za vyššie uvedeníých predpokladov potom platí

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

resp. v maticovom tvare

$$AV = V\Lambda,$$



kde  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  je regulárna matica a  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Z toho dostávame

$$A = V\Lambda V^{-1}$$

a

$$A^t = V\Lambda^t V^{-1} = V \begin{bmatrix} \lambda_1^t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^t \end{bmatrix} V^{-1}.$$

Jednoduchou transformáciou môžeme dosiahnuť to, že sa nám tento systém rozpadne na  $n$  nezávislých jednorozmerných systémov. Nech

$$x_t = V\tilde{x}_t, \tag{3}$$

potom platí

$$V\tilde{x}_{t+1} = AV\tilde{x}_t.$$

Časová dynamika  $\tilde{x}_t$  sa riadi dynamickým systémom

$$\tilde{x}_{t+1} = V^{-1}AV\tilde{x}_t = \Lambda\tilde{x}_t,$$

čo vďaka tvaru matice  $\Lambda$  implikuje dynamiku pre jednotlivé zložky

$$\tilde{x}_{t+1}^i = \lambda_i \tilde{x}_t^i.$$

S využitím rovnice (2) dostaneme

$$\tilde{x}_t^i = c_i \lambda_i^t, \tag{4}$$

pričom  $c_i$  sú jednoznačne určené počiatočným stavom  $x_0$ . Spätnou transformáciou dostaneme explicitné vyjadrenie pre riešenie systému (1)

$$x_t = \sum_{i=1}^n c_i v_i \lambda_i^t,$$

kde konštanty  $c_i$  sú jednoznačne určené sústavou rovníc  $\sum_{i=1}^n c_i v_i = x_0$ .

V prípade, že matica  $A$  má komplexnú vlastnú hodnotu  $\lambda$ , má vždy aj vlastnú hodnotu  $\bar{\lambda}$ . Rovnako aj vlastné vektory prislúchajúce k týmto vlastným hodnotám sú komplexne združené vlastné vektory  $v$  a  $\bar{v}$ . Napriek komplexným vlastným číslam a vlastným vektorom musí dynamický systém pre všetky  $x_t$ ,  $t > 0$  nadobúdať reálne hodnoty, pretože  $x_0$  je reálne a matica  $A$  neobsahuje komplexné čísla. Na základe tohto pre reálne  $x_0$  platí

$$c_1 v + c_2 \bar{v} = x_0 = \bar{x}_0 = \bar{c}_1 \bar{v} + \bar{c}_2 v,$$

a teda

$$(c_1 - \bar{c}_2)v + (\bar{c}_1 - c_2)\bar{v}.$$

Keďže  $v, \bar{v}$  sú vlastné vektory rôznych vlastných hodnôt, sú tieto vektory lineárne nezávislé, z čoho vyplýva  $c_1 = \bar{c}_2$ . V explicitnom vyjadrení trajektórií  $x_t$  budú tak členy s  $\lambda, \bar{\lambda}$  mať tvar

$$x_t = \dots + c_1 v \lambda^t + \overline{c_1 v \lambda^t} + \dots = \dots + 2\operatorname{Re}(c_1 v \lambda^t) + \dots$$

Ak vlastnú hodnotu  $\lambda$  vyjadríme v polárnych súradniciach  $\lambda = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$ ,  $\rho = |\lambda|$  a  $\phi = \arctan \lambda$ , potom platí  $\phi \neq 0$  a

$$\lambda^t = \rho^t (\cos t\phi + i \sin t\phi),$$

$$\bar{\lambda}^t = \rho^t (\cos t\phi - i \sin t\phi),$$

a teda vo vyjadrení  $x_t$  bude ako dôsledok komplexných vlastných hodnôt vystupovať člen

$$x_t = \dots + c_1 v \lambda^t + \bar{c}_1 \bar{v} \bar{\lambda}^t + \dots = \dots + 2\operatorname{Re}(c v \lambda^t) + \dots = \dots + \rho^t (a \cos t\rho + b \sin t\rho) + \dots,$$

pre vhodné vektory  $a$  a  $b$ .

## 1.2 Stabilita viacrozmerného dynamického systému

Rovnovážnym stavom (pevným bodom) dynamického systému (1) nazývame taký stav  $x^*$ , pre ktorý platí  $x_{t_0} = x^* = x_t$  pre  $t \geq t_0$ . Pre rovnovážny stav dynamického systému (1) teda platí  $x^* = Ax^*$ . Ak matica  $A - I$  je regulárna<sup>1</sup>, potom má lineárny dynamický systém

$$x_{t+1} = Ax_t.$$

jediný pevný bod 0. Nech  $|\cdot|$  označuje Euklidovskú normu v  $\mathbb{R}^n$ . Stabilita pevného bodu systému (1) je potom určená nasledujúcou vetou.

---

<sup>1</sup>matica  $A - I$  je regulárna práve vtedy, ak  $A$  nemá vlastnú hodnotu rovnú 1

**Veta 1.2.1.** a) Ak sú absolútne hodnoty všetkých vlastných hodnôt matice  $A < 1$ , potom je 0 asymptoticky stabilný pevný bod.

b) Ak sú absolútne hodnoty všetkých vlastných hodnôt matice  $A \leq 1$  a všetky vlastné hodnoty s absolútnou hodnotou  $|\cdot| = 1$  sú jednoduché, potom je pevný bod 0 stabilný.

c) Ak je absolútna hodnota aspoň jednej vlastnej hodnoty  $A > 1$ , potom je pevný bod 0 nestabilný.

Dôkaz nebudeme na tomto mieste uvádzať, nachádza sa v literatúre [3].

### 1.3 Afinný viacrozmerný diskretný dynamický systém

Afínnym viacrozmerným systémom nazývame systém v tvare

$$x_{t+1} = Ax_t + b, \quad (5)$$

kde vektory  $x, b \in \mathbb{R}^n$  a  $A$  je  $n \times n$  matica. Ak je matica  $A - I$  regulárna, potom má systém (5) jediný pevný bod, a to

$$x^* = (I - A)^{-1}b.$$

Systém transformáciou prevedieme na lineárny dynamický systém tak, že budeme skúmať odchýlky od pevného bodu  $y_t = x_t - x^*$ . Dosadením tejto transformácie do systému (5) dostaneme

$$y_{t+1} = Ay_t.$$

Z tohto vyplýva, že o stabilite pevného bodu  $x^*$  rozhodujú vlastné hodnoty matice  $A$  a platí preň Veta 1.2.1.

V prípade, že nehomogénna časť systému  $b$  sa s časom mení, hovoríme o nehomogénnom procese

$$x_{t+1} = Ax_t + b_t.$$

Indukciou priamočiaro dostaneme vzťah pre explicitné vyjadrenie trajektórií

$$x_t = A^{t-t_0}x_{t_0} + \sum_{s=t_0}^{t-1} A^{t-1-s}b(s).$$

## 2 Dvojrozmerné diskkrétne dynamické systémy

Špeciálnu pozornosť v teórii viacrozmerných diskrétnych dynamických systémov budeme venovať dvojrozmerným dynamickým systémom, inak nazývaným aj planárne systémy.

Uvažujme planárny autonómny lineárny diskrétny dynamický systém:

$$x_{t+1}^1 = a_{11}x_t^1 + a_{12}x_t^2 \quad (6)$$

$$x_{t+1}^2 = a_{21}x_t^1 + a_{22}x_t^2,$$

respektíve v maticovom tvare

$$x_{t+1} = Ax_t,$$

kde  $x_t = (x_t^1, x_t^2)^T$  a  $A$  je 2x2 matica.

Pevný bod  $x^*$  tohto systému je jednoznačne daný rovnicou

$$Ax^* = x^*,$$

čo môžeme prepísať na podmienku  $(A - I)x^* = 0$ . Ak je matica  $(A - I)$  nesingulárna, potom má tento systém jediný pevný bod a to  $x^* = 0$ . Ak je matica  $(A - I)$  singulárna, systém má pevných bodov niekoľko. V takomto prípade môžeme miesto dynamiky stavových premenných skúmať ich odchýlky od pevného bodu

$$y_t = x_t - x^*,$$

čím dostaneme lineárny systém diferencných rovníc

$$y_{t+1} = Ay_t.$$

Teda vidíme, že stabilitné vlastnosti pevného bodu  $x^* \neq 0$  sú rovnaké ako pevného bodu  $x^* = 0$ . Na základe toho môžeme ďalej predpokladať, že jediný pevný bod tohto systému je  $x^* = 0$ .

### 2.1 Fázové portréty a stabilita planárnych lineárnych systémov

Nech matica  $J = P^{-1}AP$  vyjadruje Jordanov tvar matice  $A$ . Zavedením transformácie

$$y_t = P^{-1}x_t$$

a jej aplikáciou na systém (6) ho môžeme prepísať do tvaru

$$y_{t+1} = Jy_t, \quad (7)$$

$$y_0 = P^{-1}x_0.$$

Kvalitatívne vlastnosti systémov (6) a (7) sú rovnaké, preto na analýzu stabilitných vlastností použijeme tvar systému (7).

Jordanov tvar matice  $A$  môže nadobúdať tri rôzne kanonické formy v závislosti od jej vlastných hodnôt.

I.  $A$  má rôzne reálne vlastné hodnoty  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Jordanov kanonický tvar matice  $A$  je

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Riešenie systému (7) je v takomto prípade jednoznačne dané rovnicami

$$y_t^i = \lambda_i^t y_0^i, \quad i = 1, 2.$$

Na grafickú ilustráciu dynamiky planárnych systémov použijeme fázové portréty. Fázový portrét systému je graf systému, ktorého osi reprezentujú jednotlivé stavové premenné a v ňom sú vykreslené diskkrétne body  $[y_t^1, y_t^2]$  pre  $t = 0, 1, \dots$ . Pre ešte lepšiu ilustráciu časového priebehu jednotlivé body spojíme čiarou a znázorníme šípkami zmenu stavu systému v čase.

Aby sme vedeli jednoznačne vyjadriť asymptotické vlastnosti pre  $t \rightarrow \infty$ , skúmame podiel stavových premenných v čase  $t$

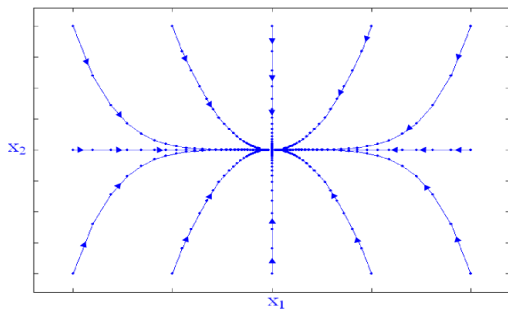
$$\frac{y_t^2}{y_t^1} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t \frac{y_0^2}{y_0^1}, \quad i = 1, 2.$$

Pre  $t \rightarrow \infty$  tak vieme povedať, že môžu nastať dva prípady limitného správania sa systému

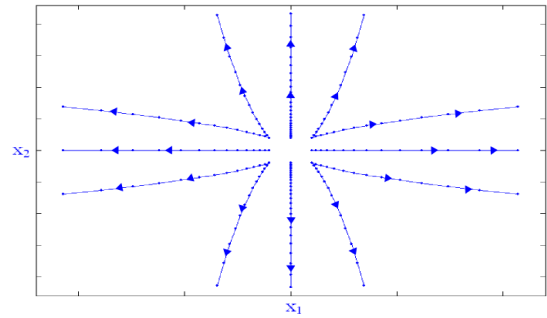
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_t^2}{y_t^1} = \begin{cases} 0 & \text{ak } |\lambda_1| > |\lambda_2|, \\ \infty & \text{ak } |\lambda_1| < |\lambda_2|. \end{cases}$$

Pevný bod má prípade rôznych reálnych vlastných hodnôt matice  $A$  jednu z nasledovných stabilitných vlastností

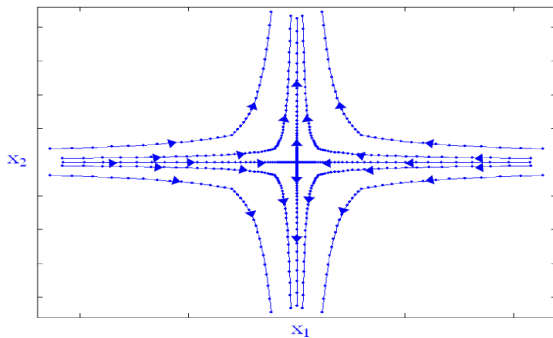
- $|\lambda_1| < |\lambda_2| < 1$  pevný bod je asymptoticky stabilný uzol,
- $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 1$  pevný bod je nestabilný uzol,
- $0 < |\lambda_1| < 1 \wedge |\lambda_2| > 1$  pevný bod má charakter sedla,



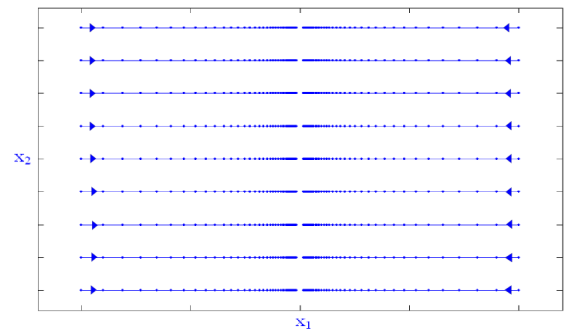
Obrázok 1:  $|\lambda_1| < |\lambda_2| < 1$  asymptoticky stabilný uzol



Obrázok 2:  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 1$  nestabilný uzol



Obrázok 3:  $0 < |\lambda_1| < 1, 0 < |\lambda_2| < 1$  sedlo



Obrázok 4:  $|\lambda_1| < 1 \wedge |\lambda_2| = 1$  asymptoticky stabilný degenerovaný uzol

- $|\lambda_1| < 1 \wedge |\lambda_2| = 1 \quad \vee \quad |\lambda_1| = 1 \wedge |\lambda_2| < 1$  je pevný bod asymptoticky stabilný degenerovaný uzol.

Na nasledujúcich obrázkoch sú zobrazené fázové portréty pre jednotlivé kombinácie vlastných hodnôt  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ .

II.  $A$  má jednu dvojnásobnú vlastnú hodnotu  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ .

Jordanov kanonický tvar matice  $A$  je

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Riešenie systému (7) v tomto prípade je

$$y_t^1 = \lambda^t y_0^1 + t \lambda^t y_0^2$$

$$y_t^2 = \lambda^t y_0^2$$

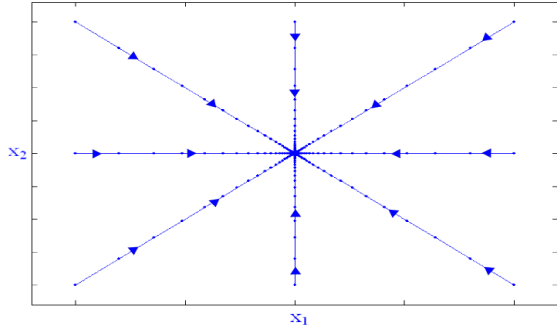
a pre asymptotické správanie podielu stavových premenných pre  $t \rightarrow \infty$  dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_t^2}{y_t^1} = 0.$$

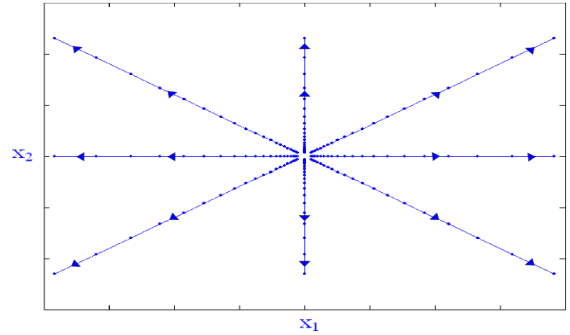
V prípade násobnej vlastnej hodnoty matice  $A$  má pevný bod jednu z týchto vlastností

- $|\lambda| < 1$  pevný bod je asymptoticky stabilný uzol,
- $|\lambda| > 1$  pevný bod je nestabilný uzol,
- $|\lambda| = 1$  pevný bod má charakter degenerovaného nestabilného uzla.

Fázové portréty pre jednotlivé prípady násobnej vlastnej hodnoty  $\lambda$



Obrázok 5:  $|\lambda| < 1$  asymptotický stabilný uzol



Obrázok 6:  $|\lambda| > 1$  nestabilný uzol

III.  $A$  má komplexne združené vlastné hodnoty  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ,  $\beta \neq 0$ .

Jordanov kanonický tvar matice  $A$  je

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Vlastný vektor k vlastnej hodnote  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  definujeme ako  $v_1 = [1 \ i]^T$ , a tak riešenie systému (7) dostaneme nasledovné

$$y_t = (\alpha + i\beta)^t \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Zavedením transformácie systému polárnymi súradnicami  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$  a upravením dostaneme riešenie v tvare

$$y_t^1 = r^t (y_0^1 \cos t\theta + y_0^2 \sin t\theta)$$

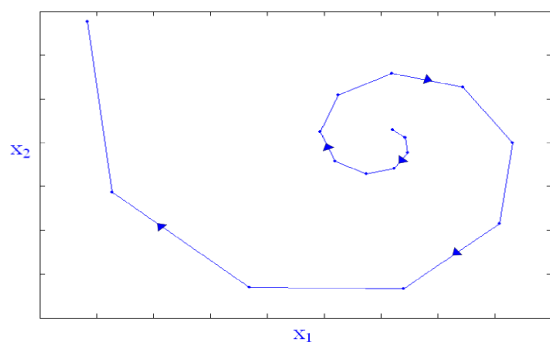
$$y_t^2 = r^t (-y_0^1 \sin t\theta + y_0^2 \cos t\theta).$$

Definovaním  $r_0 = \left((y_0^1)^2 + (y_0^2)^2\right)^{1/2}$ ,  $\cos \gamma = \frac{y_0^1}{r_0}$  a  $\sin \gamma = \frac{y_0^2}{r_0}$  môžeme riešenie prepísať

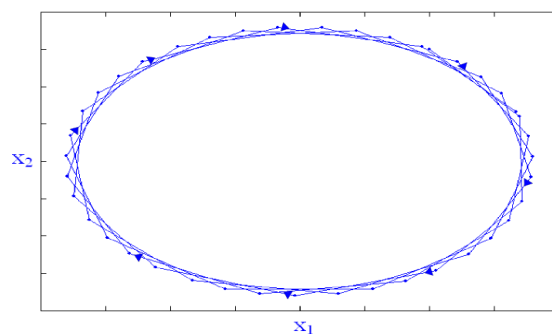
$$y_t^1 = r^t r_0 \cos(t\theta - \gamma)$$

$$y_t^2 = -r^t r_0 \sin(t\theta - \gamma).$$

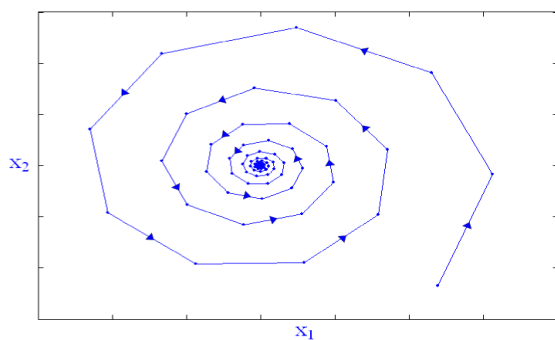
Stabilita takto zapísaného systému závisí od hodnoty parametra  $r$ , čiže absolútnej hodnoty komplexne združených vlastných hodnôt matice  $A$ . V prípade, že  $r > 1$ , má pevný bod systému charakter nestabilného fókus, ak  $r < 1$ , je pevný bod asymptoticky stabilný fókus a v špeciálnom prípade  $r = 1$  dostaneme centrum. Grafickú ilustráciu fázových portrétov uvádzame nižšie.



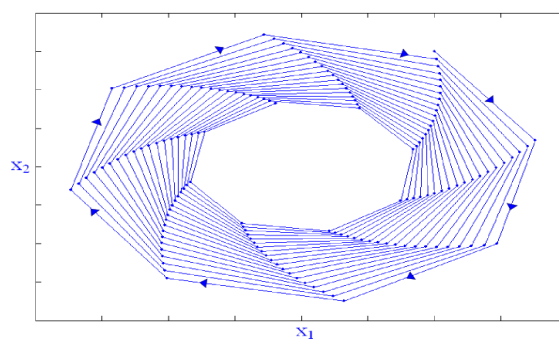
Obrázok 7:  $r > 1$  nestabilný fókus



Obrázok 8:  $r = 1$  centrum



Obrázok 9:  $r < 1$  asymptoticky stabilný fókus



Obrázok 10:  $r < 1$  asymptoticky stabilný fókus



### 3 Model kapitálu a zásob

V tejto kapitole predstavíme model, ktorý vo svojej práci použil O. Gomes [7]. Model je postavený pre uzavretú ekonomiku a spája prvky aj neoklasickej, aj Keynesiánskej teórie, a tým vytvára model, ktorý môže dávať ako výstup rast pri rovnovážnom pevnom bode (neoklasický model rastu) alebo endogénne výkyvy spôsobené nelineárnym vzťahom medzi premennými modelu (Keynesiánska teória nerovnováhy). V nasledujúcich častiach odvodíme model a jeho stabilitné vlastnosti, aby sme mohli následne nakalibrovať parametre a overiť tak našu hypotézu na vybraných ekonomikách podľa kritérií, ktoré uvedieme nižšie.

Predpokladajme teda uzavretú ekonomiku, ktorá pozostáva z veľkého množstva homogénnych domácností a homogénnych firiem. Ďalej predpokladajme, že v každom čase  $t = 0, 1, \dots$  je k dispozícii konštantná produktívna pracovná sila, ktorá zodpovedá počtu všetkých žijúcich v ekonomike. V modeli preto budú vystupovať premenné označené malými písmenami a budú vyjadrovať hodnoty premenných na obyvateľa, resp. na pracujúceho obyvateľa. Tieto dva pojmy na základe predchádzajúceho predpokladu splývajú.

Spotreba domácností je v každom čase  $t = 0, 1, \dots$  daná ako konštantná časť výstupu ekonomiky

$$c_t = b \cdot y_t,$$

kde  $c_t \in \mathbb{R}_+$  je spotreba na obyvateľa v čase  $t$  a  $y_t \in \mathbb{R}_+$  je hrubý domáci produkt (ďalej HDP, resp. výstup) na obyvateľa. Parameter  $b \in (0, 1)$  vyjadruje hraničný sklon domácností k spotrebe.

Jediným produktívnym vstupom pre firmy je fyzický kapitál, ktorý vstupuje do ich produkčnej funkcie. Výstupom produkčnej funkcie je HDP ekonomiky daný neoklasickou produkčnou funkciou v tvare

$$y_t = f(k_t),$$

kde  $k_t$  je fyzický kapitál na obyvateľa a  $f(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Na tomto mieste nebudeme špecifikovať konkrétny tvar produkčnej funkcie. Jej konkrétnymi tvarmi sa budeme zaoberať neskôr, nateraz však aspoň uveďme, že naša produkčná funkcia spĺňa základné neoklasické predpoklady

- $f$  je dvakrát spojitely diferencovateľná:  $f \in \mathcal{C}^2$ ,
- $f$  vykazuje klesajúce hraničné príjmy:  $f' > 0$ ,  $f'' < 0$ ,
- $f$  spĺňa podmienky:  $\lim_{k \rightarrow 0} f' = +\infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f' = 0$ .

Dynamika kapitálu v ekonomike je daná takto: kapitál je v každom čase znehodnotený o mieru depreciaácie  $\delta > 0$  a naopak akumulovaný investíciami do ekonomiky. Nech  $i_t \in \mathbb{R}_+$  označuje investície na obyvateľa v čase  $t$ , potom vývoj kapitálu je daný rovnicou

$$k_{t+1} = k_t - \delta \cdot k_t + i_t, \quad k_0 \text{ dané.} \quad (8)$$

Nevyhnutnosťou pre charakterizáciu procesu akumulácie kapitálu je poznať pravidlo, ktoré stanovuje vývoj investícií v čase. To dostaneme z predpokladu, že trh tovarov sa „nevyčistí“. Inak povedané, v každom čase je v ekonomike nerovnováha medzi výstupom firiem a dopytom domácností. Z tohto dôvodu je do modelu zavedená nová abstraktná premenná stav tovarových zásob,  $h_t \in \mathbb{R}$ , ktorá opisuje túto nerovnováhu v čase

$$h_{t+1} = h_t + y_t - d_t, \quad h_0 \text{ dané.} \quad (9)$$

Premenná  $d_t$  vyjadruje dopyt v ekonomike, pričom jej jej dynamika je daná rovnicou

$$d_t = c_t + i_t.$$

Keďže dynamika stavu tovarových zásob je daná rozdielom medzi výstupom a dopytom, môže nadobúdať aj kladné aj záporné hodnoty. V prvom prípade  $h_t > 0$ , keď je na skladoch kladný stav zásob, je v ekonomike dočasná nadprodukcia tovaru. Tento stav môže byť spôsobený napríklad faktom, že firmy nie sú schopné výrobok predať hneď po jeho vyrobení, ale trvá im to nejaký čas. V prípade, ak  $h_t < 0$ , je v ekonomike nedostatočná produkcia tovaru a firmy nestačia uspokojiť dopyt po vyrábaných výrobkoch. To môže byť spôsobené napríklad vyššou dobou dodávky tovaru k domácnostiam.

Tieto oneskorenia predaja a dodania tovarov sú prirodzeným faktom ekonomických aktivít. Navyše ich môžeme chápať aj ako ťažkosť, resp. neschopnosť firiem v danom momente zmeniť existujúce produkčné kapacity. Na dokonale konkurenčnom trhu by bol prirodzeným rovnovážnym stavom nulový stav zásob tovarov na sklade,  $h_t = 0$ . V tomto modeli to však nepredpokladáme, preto rovnováha v dlhodobom horizonte nemusí nevyhnutne nastať pre nulový stav zásob. Naopak, môže byť aj kladná (v prípade rovnováhy pri nadprodukcii), aj záporná (pre nedostatočnú produkciu).

Na skompletizovanie modelu je potrebné ešte charakterizovať vzťahy pre agregovaný dopyt a agregovanú ponuku. Pre agregovaný dopyt predpokladáme, že vývoj cien spotrebných statkov v ekonomike je daný stavom zásob na jednotku dopytu

$$p_{t+1} = p_t - \theta \cdot \frac{h_t}{d_t} \cdot p_t, \quad h_0 \text{ dané,} \quad (10)$$

kde parameter  $\theta > 0$  vyjadruje citlivosť cien na zmeny stavu zásob. Pre kladný stav zásob teda nastáva oneskorenie predavania výrobkov, a teda sila trhu je na strane domácností,

a to tlačí ceny smerom nadol. Ak sú, naopak, zásoby v skladoch záporné, v ekonomike je nedostatočná produkcia, čo dáva väčšiu silu na trhu produkujúcim firmám a tie zvyšujú ceny svojich produktov.

Definovaním inflácie,  $\pi_t \in \mathbb{R}$  v modeli  $\pi_t = \frac{p_{t+1} - p_t}{p_t}$  môžeme predchádzajúcu rovnicu prepísať nasledovne

$$\pi_t = -\theta \cdot \frac{h_t}{d_t}. \quad (11)$$

Ponuková strana ekonomiky sa riadi jednoduchou Phillipsovou krivkou

$$\pi_t = \lambda \cdot x_t, \quad (12)$$

pričom  $x_t$  vyjadruje produkčnú medzeru a tá je definovaná ako rozdiel logaritmov výstupu v čase  $t$  a potenciálneho výstupu  $y^*$

$$x_t = \ln y_t - \ln y^*.$$

Pod potenciálnym výstupom budeme rozumieť dlhodobý rovnovážny výstup za optimálnych podmienok. Tvar potenciálneho výstupu ekonomiky je logicky podmienený tvarom produkčnej funkcie firiem a je riešením neoklasického optimalizačného problému, preto ho budeme špecifikovať neskôr.

Parameter  $\lambda \in (0, 1)$  vyjadruje mieru cenovej flexibility. Pre hodnoty parametra blízko nuly sa ceny prispôbujú veľmi pomaly a, naopak, pre hodnoty blízko jednej sa ceny prispôbujú veľmi flexibilne. Z pohľadu literatúry zaoberajúcej sa novou Keynesiánskou menovou politikou vyjadruje rovnica (12) novú Phillipsovú krivku, ak platí zjednodušujúci predpoklad, že v ekonomike neexistujú náhodné výkyvy v produkcii, nakoľko produkčná funkcia je definovaná deterministickým procesom.

Spojením rovníc vyjadrujúcich agregovaný dopyt a agregovanú ponuku dostaneme výraz pre dopyt

$$d_t = -\frac{\theta}{\lambda} \cdot \frac{h_t}{\ln y_t - \ln y^*}. \quad (13)$$

Je dôležité poznamenať, že spojením týchto dvoch rovníc sme nevyjadrili rovnováhu na trhu, ale len vyjadrili prepojenie medzi agregovaným dopytom a agregovanou ponukou na trhu. Preto rovnovážnu hodnotu dopytu nemôžeme počítať z tohto vzťahu. Dôvodom sú napríklad aj tieto dve situácie, ktoré môžu nastať na trhu: keď je dlhodobo  $h_t = 0$ , a teda ponuka na trhu sa rovná dopytu alebo situácia, kedy je produkčná medzera dlhodobo konštantne nulová  $x_t = 0$ , a teda úroveň produkcie je rovná potenciálnej. Vzťah (13) slúži na vyjadrenie hodnoty agregovaného dopytu pri nenulovej úrovni zásob a nenulovej produkčnej medzere. Z vyššie uvedenej definície dopytu  $d_t$  ďalej prirodzene očakávame kladnú úroveň dopytu. Keďže pre podiel parametrov flexibility platí  $\frac{\theta}{\lambda} > 0$ , kladný dopyt vyžaduje jeden z nasledujúcich prípadov

- stav zásob je kladný a aktuálna úroveň výstupu je pod úrovňou potenciálneho výstupu,
- stav zásob je záporný a úroveň aktuálneho výstupu je vyššia ako potenciálny výstup.

Prvý prípad, keď je produkčná medzera záporná, vyjadruje v ekonomike obdobie recesie. V takomto období je pre ekonomiku typický nadbytok ponuky, a teda produkuje firmy majú problémy predávať svoje výrobky, pretože dopyt nedokáže pokryť výrobu. V druhom prípade hovoríme o expanzii v ekonomike, produkčná medzera je kladná, stav zásob na skladoch je negatívny, a teda produkuje firmy nie sú schopné svojou výrobou plne uspokojiť dopyt.

Teraz už máme všetky potrebné nástroje na definovanie 2-rozmerného diskrétného dynamického modelu rastu, ktorý spája neoklasické a keynessiánske prvky s endogénnymi premennými kapitálom a stavom zásob. S využitím rovníc (13) a (12) vyjadrujúcich podmienky agregovaného trhu, predpokladu, že spotreba je v každom čase daná ako konštantná časť výstupu a rovnice (13) pre dopyt, dostaneme z rovníc (8) a (9) systém

$$k_{t+1} = (1 - \delta) \cdot k_t - \frac{\theta}{\lambda} \cdot \frac{h_t}{\ln y_t - \ln y^*} - b \cdot y_t \quad (14)$$

$$h_{t+1} = h_t + y_t + \frac{\theta}{\lambda} \cdot \frac{h_t}{\ln y_t - \ln y^*},$$

kde  $y_t = f(k_t)$ . Podiel parametrov citlivosti  $\frac{\theta}{\lambda}$  budeme ďalej považovať za bifurkačný parameter tohto modelu.

### 3.1 Lokálna stabilita v modeli

**Definícia 3.1.** *Ustálený stav (pevný bod) systému (14) je množina konštánt  $\{\bar{k}, \bar{h}, \bar{y}, \bar{d}, \bar{\pi}, \bar{c}, \bar{i}\}$ , ktorú dostaneme položením  $\bar{k} \equiv k_{t+1} = k_t$  a  $\bar{h} \equiv h_{t+1} = h_t$  v rovniciach (8) a (9).*

Aplikovaním tejto definície dostaneme nasledovné tvrdenie.

**Tvrdenie 3.1.1.** *Pevný bod systému (14) existuje, je jediný a je charakterizovaný nasledovnou skupinou výrazov*

1.  $\bar{y} = \bar{d}$
2.  $\frac{f(\bar{k})}{\bar{k}} = \frac{\delta}{1-b}$
3.  $\bar{\pi} = \lambda \cdot \ln \left( \frac{f(\bar{k})}{y^*} \right)$
4.  $\bar{h} = -\frac{\lambda}{\theta} \cdot \ln \left( \frac{f(\bar{k})}{y^*} \right) \cdot f(\bar{k})$
5.  $\bar{c} = b \cdot f(\bar{k})$

$$6. \bar{i} = (1 - b) \cdot f(\bar{k})$$

*Dôkaz.* Existencia pevného bodu vyplýva z definovania systému. Výrazy 1. – 6. dostaneme jednoduchým aplikovaním už známych podmienok. Jedinečnosť riešenia je zaručená konkávnosťou neoklasickej produkčnej funkcie.  $\square$

Systém (14) je nelineárny diskretný dynamický systém a na, to aby sme mohli skúmať jeho lokálnu stabilitu, musíme systém linearizovať. Definovaním premenných  $\tilde{k}_t = k_t - \bar{k}$  a  $\tilde{h}_t = h_t - \bar{h}$ , ktoré vyjadrujú odchýlky aktuálnych stavov premenných od ich rovnovážnych stavov, môžeme systém prepísať do tvaru

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{t+1} \\ \tilde{h}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \delta - \left(b + \frac{1}{\bar{x}}\right) \cdot f'(\bar{k}) & -\frac{\theta}{\lambda} \cdot \frac{1}{\bar{x}} \\ \left(1 + \frac{1}{\bar{x}}\right) \cdot f'(\bar{k}) & 1 + \frac{\theta}{\lambda} \cdot \frac{1}{\bar{x}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{k}_t \\ \tilde{h}_t \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{k}_t \\ \tilde{h}_t \end{bmatrix}, \quad (15)$$

kde  $\bar{x} = \ln(\bar{y}/y^*)$ .

**Tvrdenie 3.1.2.** *Nutnou podmienkou pre asymptoticky stabilný pevný bod systému je  $\bar{x} < 0$ .*

*Dôkaz.* Priamočiaro dostaneme výrazy pre stopu a determinant matice  $\mathbf{J}$

$$Tr(\mathbf{J}) = 2 - \delta - \left(b + \frac{1}{\bar{x}}\right) \cdot f'(\bar{k}) + \frac{\theta}{\lambda} \cdot \frac{1}{\bar{x}},$$

$$Det(\mathbf{J}) = 1 - \delta - \left(b + \frac{1}{\bar{x}}\right) \cdot f'(\bar{k}) + (1 - \delta) \frac{\theta}{\lambda} \cdot \frac{1}{\bar{x}} + \frac{\theta}{\lambda} \cdot (1 - b) \cdot \frac{1}{\bar{x}} \cdot f'(\bar{k}).$$

Ľahko môžeme nahliadnuť, že na základe týchto výrazov platí

$$Det(\mathbf{J}) = Tr(\mathbf{J}) - 1 + \frac{\theta}{\lambda} \cdot [(1 - b) \cdot f'(\bar{k}) - \delta] \cdot \frac{1}{\bar{x}}.$$

Z teórie vieme, že nutnou podmienkou asymptotickej stability pevného bodu je, aby platilo  $1 - Tr(\mathbf{J}) + Det(\mathbf{J}) > 0$ , čo možno na základe vyššie uvedeného výraz prepísať na podmienku

$$\frac{\theta}{\lambda} \cdot [(1 - b) \cdot f'(\bar{k}) - \delta] \cdot \frac{1}{\bar{x}} > 0.$$

Z tvrdenia (3.1.1) vieme, že  $\frac{f(\bar{k})}{\bar{k}} = \frac{\delta}{1-b}$  a teda nutnú podmienku asymptotickej stability môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{\theta}{\lambda} \cdot (1 - b) \cdot \left[ f'(\bar{k}) - \frac{f(\bar{k})}{\bar{k}} \right] \cdot \frac{1}{\bar{x}} > 0.$$

Z predpokladov o parametroch je zrejmé, že  $\frac{\theta \cdot (1-b)}{\lambda}$  je kladný, a teda na splnenie nutnej podmienky musí nevyhnutne platiť

$$\bar{y} > y^* \wedge f'(\bar{k}) > \frac{f(\bar{k})}{\bar{k}} \quad \vee \quad \bar{y} < y^* \wedge f'(\bar{k}) < \frac{f(\bar{k})}{\bar{k}}.$$

Vieme, že neoklasická produkčná funkcia má klesajúce príjmy z kapitálu, čo znamená, že pridaním jednotky kapitálu na vstupe sa výstup zvýši o oveľa menšiu časť. Preto hraničný produkt kapitálu bude vždy menší ako priemerný produkt kapitálu pre akúkoľvek jeho hodnotu. Teda platí  $f'(\bar{k}) < \frac{f(\bar{k})}{\bar{k}}$ , čo implikuje fakt, že nutnou podmienkou asymptotickej stability pevného bodu je záporná produkčná medzera  $\bar{x} < 0$ .  $\square$

Tvrdenie (3.1.2) nám inými slovami hovorí aj to, že obe vlastné čísla matice  $\mathbf{J}$  sú v absolútnej hodnote menšie ako jedna. Táto podmienka nám však nehovorí, ako sa jednotlivé premenné dostali do svojho pevného bodu. Mohlo ísť o prípad monotónnej konvergencie (ak sú obe vlastné čísla matice reálne a kladné), oscilatorickej konvergencie (ak sú obe vlastné čísla matice reálne a súčasne majú rôzne znamienko) alebo špirálovitej oscilácie s klesajúcou amplitúdou (ak sú vlastné čísla komplexné). Nasledujúce tvrdenie nám dáva nutnú podmienku, kedy je pevný bod uzol a kedy fókus.

**Tvrdenie 3.1.3.** *Prepokladajme, že  $\bar{x} < 0$ . Ak existuje stabilný pevný bod systému (14), potom ak navyše platí nasledujúca podmienka, tak tento pevný bod je stabilný uzol*

$$\frac{1}{(2\bar{x})^2} \left( \frac{\theta}{\lambda} \right)^2 - \left[ 1 - \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left( b - \frac{1}{\bar{x}} \right) \cdot f'(\bar{k}) \right] \cdot \frac{1}{\bar{x}} \cdot \frac{\theta}{\lambda} - 1 + \delta + \left( b + \frac{1}{\bar{x}} \right) \cdot f'(\bar{k}) + \left[ 1 - \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left( b - \frac{1}{\bar{x}} \right) \cdot f'(\bar{k}) \right]^2 > 0.$$

*Ak platí opačná nerovnosť, potom je pevný bod stabilný fókus.*

*Dôkaz.* V prípade, ak platí rovnosť  $Det(\mathbf{J}) = \left( \frac{Tr(\mathbf{J})}{2} \right)^2$ , sú obe vlastné čísla matice rovnaké a rovnajú sa hodnote  $Tr(\mathbf{J})/2$ . Nad touto parabolou, t.j. ak platí  $Det(\mathbf{J}) > \left( \frac{Tr(\mathbf{J})}{2} \right)^2$ , sú obe vlastné čísla reálne a pod parabolou, t.j.  $Det(\mathbf{J}) < \left( \frac{Tr(\mathbf{J})}{2} \right)^2$ , sú vlastné čísla pár komplexne združených čísel. Dosadením výrazov pre stopu a determinant matice  $\mathbf{J}$  vyjadrených v dôkaze Tvrdenia (3.1.2) dostaneme po jednoduchých úpravách dokazovanú nerovnosť.  $\square$

Tvrdenie (3.1.3) nám dáva len nutné podmienky na asymptoticky stabilný uzol a fókus. Nasledujúce tvrdenie nám hovorí o postačujúcich podmienkach.

**Tvrdenie 3.1.4.** *Pevný bod je lokálne asymptoticky stabilný, ak okrem  $\bar{x} < 0$  platia nasledovné nerovnosti*

$$i.) \left[ 2 - \delta + (1 - b) \cdot f'(\bar{k}) \right] \cdot \frac{1}{\bar{x}} \cdot \frac{\theta}{\lambda} + 4 - 2\delta + 2 \cdot \left( b + \frac{1}{\bar{x}} \right) \cdot f'(\bar{k}) > 0$$

$$ii.) \left[ 1 - \delta + (1 - b) \cdot f'(\bar{k}) \right] \cdot \frac{1}{\bar{x}} \cdot \frac{\theta}{\lambda} - \delta - \left( b + \frac{1}{\bar{x}} \right) \cdot f'(\bar{k}) < 0$$

*Dôkaz.* Vlastné čísla matice ležia vnútri jednotkového kruhu, ak platia súčasne nasledujúce tri nerovnosti  $1 - Tr(\mathbf{J}) + Det(\mathbf{J}) > 0$ ,  $1 + Tr(\mathbf{J}) + Det(\mathbf{J}) > 0$ ,  $1 - Det(\mathbf{J}) > 0$ . Prvú z nich sme použili na dôkaz Tvrdenia (3.1.2) dosadením výrazov pre stopu a determinant do zvyšných dvoch nerovností dostaneme výrazy *i.)* a *ii.)*.  $\square$

Centrom nášho záujmu je závislosť stability pevného bodu od bifurkačného parametra  $\frac{\theta}{\lambda}$ . Tvrdenie (3.1.4) udáva dve kritické hranice pre  $\frac{\theta}{\lambda}$ , stačí preto z týchto dvoch nerovností bifurkačný parameter osamostatniť a určiť, ktorá z nerovností udáva hornú a ktorá dolnú hranicu. Už vieme, že hraničný produkt kapitálu v pevnom bode je menší ako priemerný produkt kapitálu,  $0 < f'(\bar{k}) < \frac{f(\bar{k})}{\bar{k}}$  a tiež, čomu sa rovná priemerný produkt kapitálu v pevnom bode,  $\frac{f(\bar{k})}{\bar{k}} = \frac{\delta}{1-b}$ , čo implikuje platnosť nerovností

$$[2 - \delta + (1 - b) \cdot f'(\bar{k})] \cdot \frac{1}{\bar{x}} < [2 - \delta + (1 - b) \frac{\delta}{1 - b}] \cdot \frac{1}{\bar{x}} = [2 - 2\delta] \cdot \frac{1}{\bar{x}} < 0,$$

$$[1 - \delta + (1 - b) \cdot f'(\bar{k})] \cdot \frac{1}{\bar{x}} < [1 - \delta + (1 - b) \frac{\delta}{1 - b}] \cdot \frac{1}{\bar{x}} = [1 - 2\delta] \cdot \frac{1}{\bar{x}} < 0.$$

Posledná podmienka v oboch prípadoch platí na základe predpokladu o zápornej produkčnej medzere a teda výrazy pred bifurkačným parametrom  $\frac{\theta}{\lambda}$  sú záporné. Ak označíme

$$\phi = - \frac{4 - 2\delta + 2 \cdot (b + \frac{1}{\bar{x}}) \cdot f'(\bar{k})}{2 - \delta + (1 - b) \cdot f'(\bar{k})} \cdot \bar{x}$$

a

$$\varphi = \frac{\delta + (b + \frac{1}{\bar{x}}) \cdot f'(\bar{k})}{1 - \delta + (1 - b) \cdot f'(\bar{k})} \cdot \bar{x},$$

potom môžeme podmienky *i.)* a *ii.)* prepísať do tvaru

$$\frac{\theta}{\lambda} < \phi,$$

$$\frac{\theta}{\lambda} > \varphi.$$

Ako dôsledok Tvrdenia (3.1.4) platí, že za predpokladu  $\bar{x} < 0$  a bifurkačného parametra ohraničeného množinou

$$\frac{\theta}{\lambda} \in (\varphi, \phi).$$

je pevný bod asymptoticky stabilný. V prípade, že by výraz  $\phi$  dával menšie číslo ako  $\varphi$ , pre daný pevný bod systému prípad asymptotickej stability nastať nemôže. Ešte je potrebné dodať, že pre prípady záporného  $\varphi$  sa na základe predpokladov postaví  $\varphi = 0$ . Nasledujúce tvrdenie hovorí o dynamike systému v takomto prípade.

**Tvrdenie 3.1.5.** V prípade zápornej produkčnej medzery  $\bar{x} < 0$  a kladnej hodnoty  $\varphi$  môžu nastať okrem asymptotickej stability pevného bodu ešte tieto dva prípady:

Stabilitná sedlová cesta

$$\frac{\theta}{\lambda} > \phi$$

nestabilita, pre

$$\frac{\theta}{\lambda} < \varphi.$$

*Dôkaz.* Stabilitnú sedlovú cestu dostaneme, ak niektoré z vlastných čísel matice  $\mathbf{J}$  je menšie ako  $-1$ . To platí pre  $1 + Tr(\mathbf{J}) + Det(\mathbf{J}) < 0$ , z čoho po dosadení výrazov pre stopu a determinant dostaneme prvú nerovnosť z tvrdenia.

Pevný bod je nestabilný pre komplexné vlastné čísla, t.j.  $1 - Det(\mathbf{J}) < 0$ . □

Prechod pevného bodu medzi jednotlivými stabilitnými množinami hovorí o tom, že sú prekročené bifurkačné body. V prípade prechodu z pevného bodu z množiny asymptotickej stability do množiny stabilnej sedlovej cesty, teda keď jedna z vlastných hodnôt sa stane menšou ako  $-1$ , nastáva flip bifurkácia, vďaka ktorej sa z pevného bodu stáva cyklus. Pre prípad prechodu vlastných hodnôt z reálnych čísel do komplexných, čiže pre prechod z množiny asymptotickej stability do množiny nestability, vidíme v tomto modeli Neimark-Sackerovu bifurkáciu. V súlade s predpokladom  $\frac{\theta}{\lambda} > 0$  musia byť všetky bifurkačné body kladné.

Doteraz sme sa zaoberali len prípadom zápornej produkčnej medzery. Ďalšie tvrdenie nám dá odpoveď na otázku, aká je dynamika modelu v prípade, keď je  $\bar{x} > 0$ .

**Tvrdenie 3.1.6.** Nech  $\bar{x} > 0$ . Pevný bod má stabilitnú sedlovú cestu, za podmienky

$$\frac{\theta}{\lambda} \in \left( \frac{\delta + (b + \frac{1}{\bar{x}}) \cdot f'(\bar{k})}{1 - \delta + (1 - b) \cdot f'(\bar{k})} \cdot \bar{x}, -\frac{4 - 2\delta + 2 \cdot (b + \frac{1}{\bar{x}}) \cdot f'(\bar{k})}{2 - \delta + (1 - b) \cdot f'(\bar{k})} \cdot \bar{x} \right).$$

Inak je pevný bod nestabilný.

*Dôkaz.* Za predpokladu kladnej produkčnej medzery je porušená podmienka  $1 - Tr(\mathbf{J}) + Det(\mathbf{J}) > 0$ , a teda jedno vlastné číslo matice bude vždy väčšie ako 1. To znamená, že môžu nastať len dva prípady: pevný bod bude stabilný iba v jednej svojej dimenzii alebo bude nestabilný v oboch. Pokiaľ platia súčasne podmienky:  $1 + Tr(\mathbf{J}) + Det(\mathbf{J}) > 0$  a  $1 - Det(\mathbf{J}) > 0$ , tak nastáva prípad jednej dimenzie stabilnej, t.j. má stabilnú sedlovú cestu, čo pre hodnoty stopy a determinantu matice  $\mathbf{J}$  zodpovedá intervalu z tvrdenia.

Ak je porušená ešte jedna z týchto podmienok, teda ani jedno z vlastných čísel matice nie je v absolútnej hodnote menšie ako jedna, pevný bod systému je nestabilný. □



Nestabilita pevného bodu má dve rozdielne trajektórie, ktorých tvar závisí od toho, ktorá z podmienok je porušená. Ak platí  $1 + \text{Tr}(\mathbf{J}) + \text{Det}(\mathbf{J}) < 0$  a súčasne  $1 - \text{Tr}(\mathbf{J}) + \text{Det}(\mathbf{J}) < 0$ , obe vlastné hodnoty sú reálne, jedna je väčšia ako 1 a druhá menšia ako  $-1$ . V tomto prípade budú trajektórie osilovať od pevného bodu so zväčšujúcou sa amplitúdou. Ak je  $1 - \text{Det}(\mathbf{J}) < 0$ , divergencia trajektórií je určená existenciou nestabilného fókusu.

Na prípad, kedy má pevný bod stabilnú sedlovú cestu sa pozrieme bližšie. O správaní sa trajektórií hovorí toto tvrdenie.

**Tvrdenie 3.1.7.** *Nech  $\bar{x} > 0$  a súčasne bifurkačný parameter  $\frac{\theta}{\lambda}$  spĺňa podmienku z Tvrdenia (3.1.6). Potom je pevný bod systému sedlový a trajektórie sa správajú podľa rovnice*

$$\tilde{h}_t = -\frac{\left(1 + \frac{1}{\bar{x}}\right) \cdot f'(\bar{k})}{1 - \lambda_1 + \frac{\theta}{\lambda} \cdot \frac{1}{\bar{x}}} \cdot \tilde{k}_t, \quad (16)$$

kde  $\lambda_1$  je vlastná hodnota matice  $\mathbf{J}$ , ktorá je menšia ako 1.

*Dôkaz.* V prípade, že pevný bod je sedlo, potom má matica  $\mathbf{J}$  vlastné hodnoty  $|\lambda_1| < 1$  a  $|\lambda_2| > 1$ . Trajektória k pevnému bodu je v takomto prípade určená výrazom

$$\tilde{h}_t = \frac{v_1^2}{v_1^1} \cdot \tilde{k}_t,$$

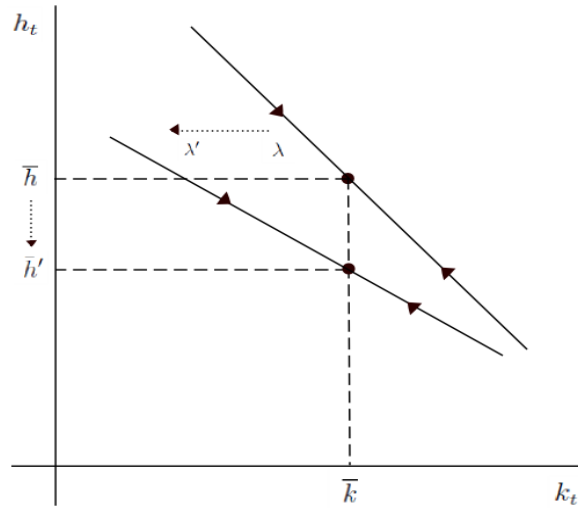
kde  $v_1^1$  a  $v_1^2$  sú zložky vlastného vektora  $v_1$  prislúchajúceho k vlastnej hodnote  $\lambda_1$ . Pre  $v_1^1$  a  $v_1^2$  platí

$$\left(1 + \frac{1}{\bar{x}}\right) \cdot f'(\bar{k}) \cdot v_1^1 + \left(1 - \lambda_1 + \frac{\theta}{\lambda} \cdot \frac{1}{\bar{x}}\right) \cdot v_1^2 = 0.$$

Ak položíme  $v_1^1 = 1$ , potom vlastný vektor  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\left(1 + \frac{1}{\bar{x}}\right) \cdot f'(\bar{k})}{1 - \lambda_1 + \frac{\theta}{\lambda} \cdot \frac{1}{\bar{x}}} \end{bmatrix}^T$ . Dosadením zložiek vlastného vektora do rovnice pre dynamiku trajektórií dostaneme výraz z tvrdenia. □

Z Tvrdenia (3.1.7) vyplýva, že v prípade splnených predpokladov nárast kapitálu v čase  $t$  spôsobí pokles úrovne zásob v tom istom čase a naopak.

Pevný bod môže byť narušený zmenami v hodnote ktoréhokoľvek z parametrov. Ak sa napríklad stanú ceny tovarom menej prispôsobivé, čiže hodnota parametra  $\lambda$  bude klesať, na základe Tvrdenia (3.1.1) vieme povedať, že kým rovnovážna hodnota kapitálu  $\bar{k}$  nie je ovplyvňovaná hodnotou tohto parametra a zostane rovnaká, na druhej strane rovnovážna hodnota zásob  $\bar{h}$  bude nižšia. Z predchádzajúceho Tvrdenia (3.1.6) vidíme, že sklon trajektórie bude v absolútnej hodnote menší a trajektória sa tak stane plytšou. Efekt na konvergenciu k sedlovému pevnému bodu bude taký, že pri poklese parametra citlivosti  $\lambda$  bude pri danej zmene kapitálu zmena stavu zásob nižšia ako pred zmenou parametra  $\lambda$ .



Obrázok 11: Vplyv zmeny parametra  $\lambda$

### 3.2 Špecifikácia produkčnej funkcie

Ako sme vyššie uviedli, v tejto časti dodáme modelu poslednú chýbajúcu časť - konkrétny tvar neoklasickej produkčnej funkcie. Budeme sa zaoberať postupne Cobb-Douglasovú a CES produkčnou funkciou.

Aj hodnota potenciálneho výstupu  $y^*$  dostane konkrétny tvar. Potenciálny výstup je definovaný ako stabilný výstup, ktorý dostaneme z riešenia optimalizačného problému - maximalizovania úžitkovej funkcie

$$\max \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \cdot U(c_t)$$

$$k_{t+1} - k_t = f(k_t) - c_t - \delta \cdot k_t$$

$$k_0 = k(0),$$

kde  $\beta \in (0, 1)$  je diskontný faktor.

Ako funkciu užitočnosti budeme uvažovať jednoduchú logarimickú funkciu  $U(c_t) = \ln c_t$ . Riešením tohto optimalizačného problému je diferenčná rovnica pre spotrebu

$$c_{t+1} = \beta \cdot (1 - \delta + f'(k_t)) \cdot c_t.$$

Pre pevný bod platí  $c^* = c_{t+1} = c_t$ , z čoho dostaneme, že  $f'(k^*) = 1/\beta - (1 - \delta)$  a potenciálny výstup ekonomiky je definovaný ako  $y^* = f(k^*)$ .

### 3.2.1 Cobb-Douglasova produkčná funkcia

Prvý prípad neoklasickej produkčnej funkcie, ktorý špecifikujeme, je Cobb-Douglasova produkčná funkcia

$$f(k_t) = A \cdot k_t^\alpha.$$

Parameter  $A > 0$  vyjadruje technologický pokrok a  $\alpha \in (0, 1)$  je elasticita kapitálu. S touto produkčnou funkciou je hodnota potenciálneho výstupu definovaná už len pomocou parametrov

$$y^* = A^{1/\alpha} \cdot \left( \frac{\alpha}{1/\beta - (1 - \delta)} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}.$$

Pre pevný bod, ktorý bol definovaný v Tvrdení 3.1.1, dostávame vyjadrenie len pomocou konštant

$$\bar{k} = \left( \frac{(1 - b) \cdot A}{\delta} \right)^{1/(1-\alpha)}.$$

Pre tento tvar produkčnej funkcie je úroveň rovnovážneho kapitálu zvyšovaná vyššou úrovňou technologického pokroku a vyššou elasticitou kapitálu. Naopak, čím je nižší hraničný sklon k spotrebe domácností a depreciácia kapitálu, tým je táto rovnovážna úroveň kapitálu nižšia.

Rovnovážny stav zásob vyjadrený cez konštanty je rovný

$$\bar{h} = -\frac{\lambda}{\theta} \cdot \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot A^{1/(1-\alpha)} \cdot \left( \frac{1 - b}{\delta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \cdot \ln \left( \frac{(1 - b) \cdot (1/\beta - (1 - \delta))}{\alpha \cdot \delta} \right).$$

Vplyv niektorých parametrov na rovnovážny stav zásob nie je možné odvodiť priamo z jeho tvaru, preto by bolo potrebné skúmať jednotlivé parciálne derivácie. To však nie je pre naše účely nevyhnutná záležitosť, preto ich na tomto mieste odvodzovať nebudeme.

Pre úplnosť ešte uvádzame rovnovážne stavy pre spotrebu, investície a infláciu

$$\begin{aligned} \bar{c} &= b \cdot A^{\alpha/(1-\alpha)} \cdot \left( \frac{1 - b}{\delta} \right)^{\alpha/(1-\alpha)}, \\ \bar{i} &= [(1 - b) \cdot A]^{1/(1-\alpha)} \cdot \delta^{-\alpha/(1-\alpha)}, \\ \bar{\pi} &= \frac{\alpha \cdot \lambda}{1 - \alpha} \cdot \ln \left( \frac{(1 - b) \cdot (1/\beta - (1 - \delta))}{\alpha \cdot \delta} \right). \end{aligned}$$

Keďže už vieme konkrétne tvary pre rovnovážny výstup aj pre potenciálny výstup, môžeme určiť podmienku, ktorá bude určovať znamienko rovnovážnej produkčnej medzery. Pripomeňme, že  $\bar{x} = \ln(\bar{y} - y^*)$ , z čoho po dosadení konkrétnych výrazov výstupy dostaneme

$$\bar{x} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot \ln \left( \frac{(1 - b) \cdot (1/\beta - (1 - \delta))}{\alpha \cdot \delta} \right).$$

Teda znamienko produkčnej medzery je určené výrazom vnútri logaritmu. V prípade zápornej produkčnej medzery, kedy môže nastať prípad asymptotickej stability pevného bodu, musí byť tento výraz menší ako jedna, čo sa dá prepísať do podmienky

$$b > \frac{(1 - \beta)/\beta + \delta \cdot (1 - \alpha)}{(1 - \beta)/\beta + \delta}.$$

### 3.2.2 CES produkčná funkcia

V tejto časti uvedieme druhý prípad neoklasickej produkčnej funkcie, a to CES funkciu, ktorá má tú vlastnosť, že dáva konštantnú elasticitu substitúcie medzi jednotlivými vstupmi produkčnej funkcie. Z tvaru produkčnej funkcie vynechávame parameter  $m$ , respektíve ho stavíme rovný 1

$$f(k_t) = A \cdot \left[ a \cdot k_t^\psi + (1 - a) \right]^{1/\psi}.$$

Parameter  $A > 0$  rovnako ako v Cobb-Douglasovej produkčnej funkcii vyjadruje technologický pokrok,  $a \in (0, 1)$  je váhový parameter - vyjadruje, aký vplyv má na výstup ekonomiky kapitál a aký práca (v našom prípade rovná jednotke), a nakoniec parameter  $\psi \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$ . Elasticita substitúcie medzi prácou a kapitálom je  $1/(1 - \psi)$ , teda pre limitný prípad, kedy parameter  $\psi \rightarrow 0$  je elasticita rovná jednej a CES funkcie má rovnaký tvar ako C-D produkčná funkcia. Druhým limitným prípadom je  $\psi = 1$ , vtedy je elasticita substitúcie CES funkcie rovná nekonečnu, čo značí, že práca a kapitál sú dokonale zameniteľné faktory. Posledným limitným prípadom je  $\psi \rightarrow -\infty$ , vtedy je CES funkcia rovná Leontiefovej produkčnej funkcii s prácou a kapitálom ako dokonale nezameniteľnými faktormi.

Potenciálny výstup v ekonomike s takouto produkčnou funkciou je

$$y^* = A \cdot \left( \frac{(1 - a) \cdot z}{z - a} \right)^{1/\psi}, \quad kde \quad z = \left( \frac{1/\beta - (1 - \delta)}{A \cdot a} \right)^{\psi/(1 - \psi)}.$$

V pevnom bode je rovnovážny kapitál rovný

$$\bar{k} = \frac{(1 - a)^{1/\psi}}{\left( \left( \frac{\delta}{(1 - b) \cdot A} \right)^\psi - a \right)^{1/\psi}}.$$

Z hľadiska vplyvu parametrov  $A$ ,  $\beta$  a  $b$  je rovnovážny stav kapitálu v modeli s CES funkciou kvalitatívne rovnaký ako v prípade C-D produkčnej funkcie. Dosadením rovnovážneho kapitálu do produkčnej funkcie máme výraz pre rovnovážny výstup ekonomiky

$$\bar{y} = A \cdot \left[ \frac{(1 - a) \cdot \omega}{\omega - a} \right]^{1/\psi}, \quad kde \quad \omega = \left( \frac{\delta}{(1 - b) \cdot A} \right)^\psi.$$

Tak ako v predchádzajúcom prípade, aj teraz vieme určiť konkrétny tvar pre produkčnú medzeru

$$\bar{x} = \ln(\bar{y}/y^*) = \ln\left(\frac{(1-a)^{1/\psi} \cdot \omega^{1/\psi} \cdot (z-a)^{1/\psi}}{(\omega-a)^{1/\psi} \cdot (1-a)^{1/\psi} \cdot z^{1/\psi}}\right).$$

Asymptotická stabilita pevného bodu vyžaduje zápornú produkčnú medzeru,  $\bar{x} < 0$ , a teda musí platiť

$$\frac{\omega^{1/\psi} \cdot (z-a)^{1/\psi}}{(\omega-a)^{1/\psi} \cdot z^{1/\psi}} < 1.$$

Z toho dostávame podmienku

$$\omega > z$$

a po vyjadrení  $\omega$  a osamostatnení hraničného sklonu k spotrebe domácností -  $b$  dostaneme podmienku asymptotickej stability modelu

$$b > 1 - \frac{\delta}{A \cdot z^{1/\psi}}.$$

### 3.3 Výber pozorovaných krajín

Na overenie našej hypotézy potrebujeme vybrať ekonomiky, na ktoré môžeme vyššie predstavený model aplikovať. Nakoľko model predpokladá uzavretú ekonomiku, čo však v realite ťažko povedať o nejakej ekonomike, okrem svetovej ekonomiky, zvolili sme ako kritérium index otvorenosti ekonomiky. Tento index sa vo všeobecnosti používa na definíciu toho, ako veľmi je daná ekonomika otvorená pre zahraničný obchod.

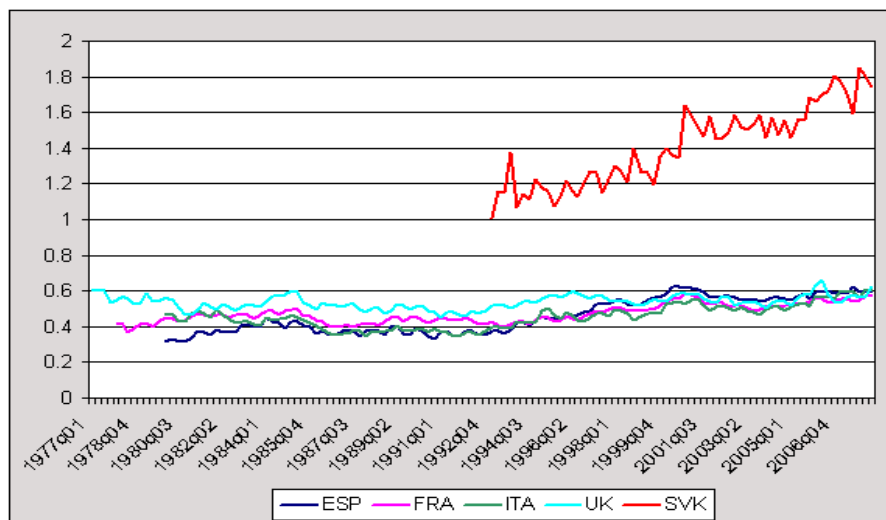
$$open = \frac{EX + IM}{Y},$$

pričom  $EX$  označuje export ekonomiky v bežných cenách,  $IM$  import v bežných cenách a  $Y$  hrubý domáci produkt v bežných cenách. Prirodzene, všetky tri veličiny sú v rovnakých jednotkách, konkrétne v našom prípade v miliónoch EUR.

Čím je ekonomika otvorenejšia, tým vyššie hodnoty tohto indexu dosahuje. Kritickou hodnotou je  $open = 1$ , kedy pre hodnoty vyššie ako 1 hovoríme, že ekonomika je otvorená, inak ju môžeme označiť ako skôr uzavretú.

Index sme určili na základe kvartálnych dát pre všetky európske ekonomiky. Na základe pozorovaných výsledkov sme si zvolili pre model tieto štyri krajiny: Francúzsko, Taliansko, Španielsko a Veľkú Britániu. Ako kritérium sme zvolili hodnotu indexu otvorenosti pre všetky dostupné roky nižšiu ako 0,6.

Na obrázku uvádzame časový rad hodnôt indexu otvorenosti pre vybrané krajiny a pre porovnanie uvádzame v grafe aj index otvorenosti slovenskej ekonomiky.



Obrázok 12: Otvorenosť vybraných európskych ekonomík

### 3.4 Kalibrácia modelu

Na kalibráciu modelu sme použili kvartálne časové rady jednotlivých premenných podľa nasledujúcej tabuľky.

premenná	popis	jednotky	zdroj
Y	Hrubý domáci produkt	mil. EUR	Eurostat
C	Konečná spotreba domácností	mil. EUR	Eurostat
I	Investície (Gross fixed capital formation)	mil. EUR	Eurostat
p	Cenový index v domácej ekonomike - CPI index		Eurostat
population	Počet obyvateľov		OECD
i	úroková miera (štátne dlhopisy s 10 ročnou maturitou)		OECD

Tabuľka 1: Zdroje dát

Pre jednotlivé krajiny sme použili údaje za tieto obdobia

krajina	úroková miera	ostatné časové rady
Španielsko	1995q1 - 2008q4	1980q1 - 2008q4
Francúzsko	1995q1 - 2008q4	1978q1 - 2008q4
Taliansko	1995q1 - 2008q4	1980q1 - 2008q4
Veľká Británia	1995q1 - 2008q4	1972q1 - 2008q4

Tabuľka 2: Použité časové rady

Časové rady sme sezónne očistili pomocou softvéru EViews s využitím metódy sezónneho očistenia Census X12. Aby sme pracovali v jednote s predstaveným modelom, jednotlivé premenné sme prerátali na osoby.

Parametre  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\theta$  a  $\lambda$  sme odhadli z dát pomocou metódy najmenších štvorcov. Pre každý z časových radov sme odhadli rovnovážnu hodnotu pomocou Hodrick - Prescott filtra, ktorého popis na tomto mieste nebudeme uvádzať. Je možné ho nájsť napríklad v práci [15]. Parametre sme následne odhadli z časových radov odchýliek aktuálnych hodnôt od rovnovážnych hodnôt.

Parameter diskontného fakturu  $\beta$  sme určili na základe rovnice

$$\beta = \frac{1}{1 + \bar{i}},$$

kde  $\bar{i}$  je priemer úrokových mier za dané obdobie.

Depreciácia kapitálu sa vo všeobecnosti v makroekonomických modeloch uvažuje ako malé číslo zväčša v rozmedzí  $\delta \in (0,05, 0,1)$ , preto sme sa rozhodli použiť hodnoty rovnaké ako autor modelu Gomes.

Parametre CES produkčnej funkcie  $a$  a  $\psi$  nebudeme odhadovať. Použijeme odhad z práce Zemana a Senaja [17]. Vo všeobecnosti sa váhový parameter  $a$  zvykne používať ako stred povoleného intervalu, teda aj my položíme  $a = 0,5$ . Elasticita substitúcie sa zvykne brať ako číslo blízke 0, preto sme zvolili tento parameter rovný  $\psi = 0,01$ .

Nakoniec abstrahujeme od exogénneho technologického pokroku v modeli, a preto parameter technologického pokroku  $A$  sme zvolili rovný 1.

Ešte ostáva určiť počiatočné hodnoty pre výpočet časových radov premenných modelu. Pre jednotlivé krajiny sme počiatočný čas  $t = 0$  zvolili podľa príslušných časových radov. Počiatočnú hodnotu zásob sme zvolili nulovú, teda  $h_0 = 0$ . Pre výpočet počiatočnej hodnoty kapitálu sme použili parameter  $\alpha = 1/3$  z Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie, ktorý

použil autor O. Gomes. Ostatné hodnoty časového radu sme vypočítali na základe rovnice o akumulácii kapitálu (8).

Pre všetky pozorované krajiny teda počiatkové podmienky endogénnych premenných modelu majú tvar

$$h_0 = y_0 - d_0,$$

$$k_0 = y^3.$$

Aplikovaním vyššie uvedenej metodiky sme dostali kalibráciu modelu pre jednotlivé krajiny

<b>Španielsko</b>		
parameter	odhad	zdroj
$b$	0,5994	vlastný odhad
$\alpha$	0,3333	O.Gomes
$\delta$	0,067	O.Gomes
$\beta$	0,9487	vlastný odhad
$a$	0,5	Zeman & Senaj
$\psi$	0,01	Zeman & Senaj

<b>Taliansko</b>		
parameter	odhad	zdroj
$b$	0,5668	vlastný odhad
$\alpha$	0,3333	O.Gomes
$\delta$	0,067	O.Gomes
$\beta$	0,9465	vlastný odhad
$a$	0,5	Zeman & Senaj
$\psi$	0,01	Zeman & Senaj

<b>Francúzsko</b>		
parameter	odhad	zdroj
$b$	0,7688	vlastný odhad
$\alpha$	0,3333	O.Gomes
$\delta$	0,067	O.Gomes
$\beta$	0,9538	vlastný odhad
$a$	0,5	Zeman & Senaj
$\psi$	0,01	Zeman & Senaj

<b>UK</b>		
parameter	odhad	zdroj
$b$	0,6294	vlastný odhad
$\alpha$	0,3333	O.Gomes
$\delta$	0,067	O.Gomes
$\beta$	0,9513	vlastný odhad
$a$	0,5	Zeman & Senaj
$\psi$	0,01	Zeman & Senaj

### 3.5 Odhad bifurkačného parametra

V tejto časti uvedieme odhady bifurkačných parametrov pre jednotlivé pozorované ekonomiky a na základe nich interpretujeme výsledky pre pevné body modelu kapitálu a zásob.

Najprv sa pozrieme na model, ktorý uvažoval premenu kapitálu na výstup za pomoci Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie. Na základe vyššie uvedenej kalibrácie modelu dostaneme odhady pre potenciálny a rovnovážny výstup ekonomiky. Teda dostaneme aj



rovnovážnu hodnotu produkčnej medzery, ktorá nám určí, aké stabilitné vlastnosti môže pevný bod nadobúdať.

	Španielsko	Francúzsko	Taliansko	UK
$y^*$	1,6593	1,6991	1,6424	1,6797
$\bar{y}$	2,4452	1,8576	2,5428	2,3518
$\bar{x}$	0,3878	0,0892	0,4371	0,3365

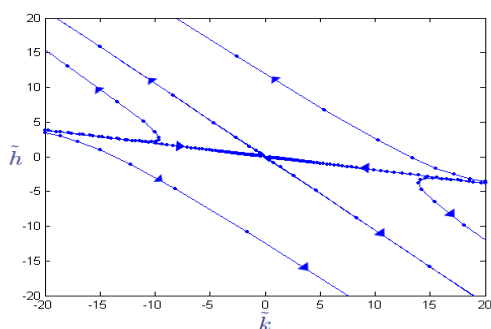
Tabuľka 3: Odhad produkčnej medzery pre C-D funkciu

Odhad produkčnej medzery na základe tohto modelu je kladný pre všetky pozorované ekonomiky. Z tohto nám na základe vyššie predstavených vlastností vyplýva, že pre pevný bod takto nakalibrovaného systému môže nastať buď nestabilita alebo stabilitná sedlová cesta. Definitívnu odpoveď nám dáva odhad bifurkačného parametra pre jednotlivé krajiny, na základe ktorého dostaneme odhady vlastných hodnôt matice  $\mathbf{J}$ , ktoré určujú stabilitné vlastnosti pevných bodov.

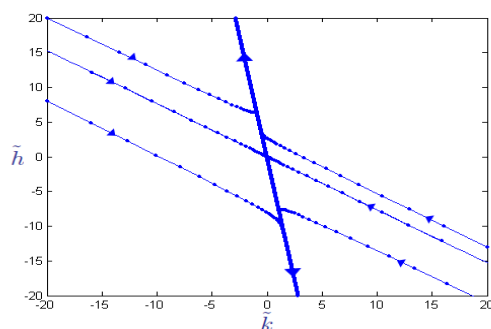
	Španielsko	Francúzsko	Taliansko	UK
$\frac{\theta}{\lambda}$	0,3826	0,0398	0,0138	0,0817
$\lambda_1$	0,9448	0,1971	0,8099	0,8732
$\lambda_2$	1,7976	1,0248	1,0074	1,0855

Tabuľka 4: Odhad vlastných hodnôt pre C-D funkciu

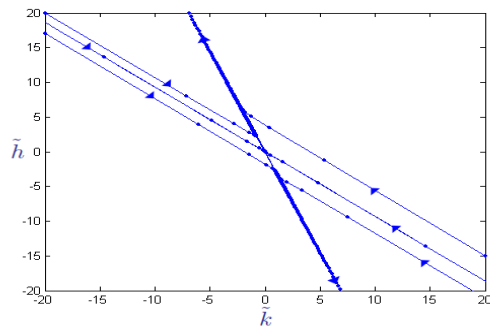
Pevný bod modelu kapitálu a zásob definovaný vyššie je na základe odhadnutých vlastných hodnôt sedlový pevný bod pre všetky krajiny. Jednotlivé sedlové body sú vykreslené aj s trajektóriami na nasledujúcich fázových portrétoch.



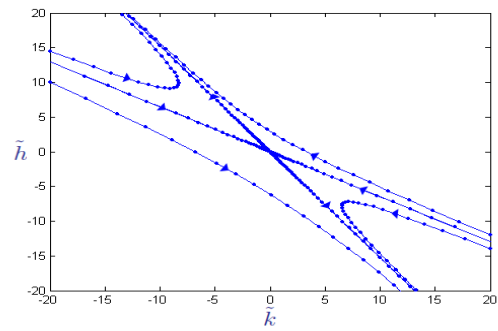
Obrázok 13: Španielsko - sedlový pevný bod



Obrázok 14: Taliansko - sedlový pevný bod



Obrázok 15: Francúzsko - sedlový pevný bod



Obrázok 16: Veľká Británia - sedlový pevný bod

Osi fázových portétov sú reprezentované premennými  $\tilde{k}$  a  $\tilde{h}$ , ktoré vyjadrujú odchýlky od rovnovážneho stavu v jednotlivých časoch. Na grafoch môžeme ľahko nájsť stabilnú sedlovú cestu, pozdĺž ktorej trajektórie odchýliek v konečnom čase dokonvergujú k pevnému bodu, a teda premenné kapitál  $k$  a stav zásob  $h$  dosiahnu svoju rovnovážnu hodnotu. Táto stabilná cesta je určená vlastným vektorom, ktorý prislúcha k vlastnej hodnote  $\lambda_2$ , ktorá leží mimo jednotkového kruhu. V prípade, že sa odchýlky od rovnovážnych stavov nachádzajú mimo tejto stabilnej cesty, budú sa s časom zväčšovať a nikdy tak nedosiahnu rovnovážny stav.

Pre CES produčnú funkciu sme dostali postupne pre potenciálny výstup, rovnovážny výstup a rovnovážnu produkčnú medzeru takýto odhad.

	Španielsko	Francúzsko	Taliansko	UK
$y^*$	4,2774	4,4939	4,1876	4,3880
$\bar{y}$	6,1770	3,5048	6,6995	5,6981
$\bar{x}$	0,3675	-0,2486	0,4699	0,2613

Tabuľka 5: Odhad produkčnej medzery pre CES funkciu

Pre ekonomiku Francúzska sme dostali odhad rovnovážnej produkčnej medzery záporný, a teda v tomto prípade je splnená nutná podmienka asymptotickej stability pevného bodu.

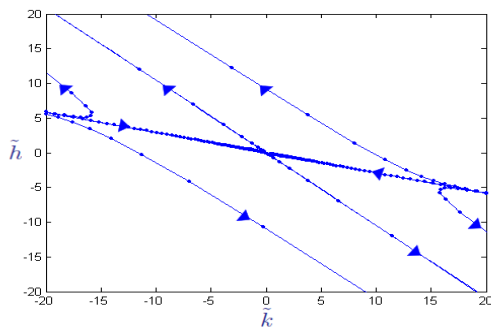
Na základe toho môžeme určiť odhady vlastných hodnôt matice  $\mathbf{J}$  pri použití CES produkčnej funkcie, ktoré určujú stabilitné vlastnosti pevných bodov.

	Španielsko	Francúzsko	Taliansko	UK
$\frac{\theta}{\lambda}$	0,3826	0,0398	0,0138	0,0817
$\lambda_1$	0,9536	1,0233	0,7462	0,7874
$\lambda_2$	1,7377	1,2269	1,0038	1,0484

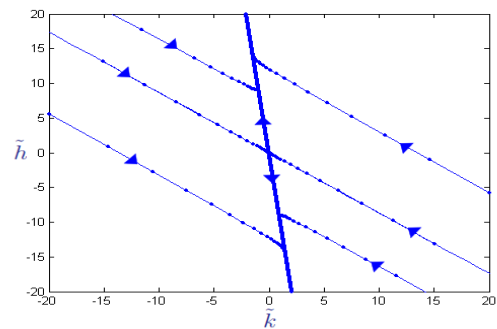
Tabuľka 6: Odhad vlastných hodnôt pre CES funkciu

Z tabuľky vidíme, že ekonomiky Španielska, Talianska a Veľkej Británie, pre ktoré bol odhad rovnovážnej produkčnej medzery kladný, sa pevné body opäť správajú ako stabilné sedlové body. Pre ekonomiku Francúzska, ktorej odhad rovnovážnej produkčnej medzery bol záporný, sme dostali obe vlastné hodnoty mimo jednotkového kruhu. Pevný bod má tak charakter nestabilného uzla.

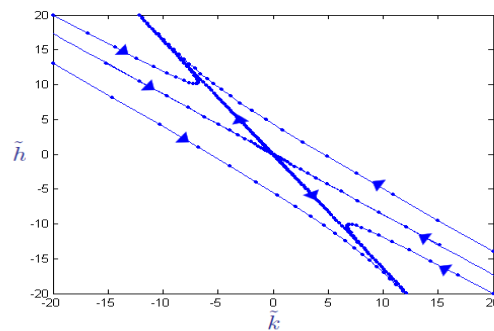
Pre grafickú ilustráciu opäť uvádzame fázové portréty pevných bodov.



Obrázok 17: Španielsko - sedlový pevný bod



Obrázok 18: Taliansko - sedlový pevný bod



Obrázok 19: Veľká Británia - sedlový pevný bod

V tejto časti sme predstavili 2-rozmerný model pre uzavretú ekonomiku, ktorého endogénne premenné boli fyzický kapitál a stav zásob. Model sme sa rozhodli na základe už vyššie uvedených dôvodov kalibrovať a skúmať pre ekonomiky Španielska, Francúzska, Talianska a Veľkej Británie. Pri použití Cobb-Douglassovej produkčnej funkcie majú pevné body pre všetky ekonomiky sedlový charakter, na základe ktorého buď budú konvergovať ku svojim rovnovážnym stavom, alebo sa budú od nich vzdiaľovať. Zavedením CES produkčnej funkcie sme dostali pre tri ekonomiky opäť stabilný sedlový pevný bod. V prípade Francúzska má na základe odhadu vlastných hodnôt pevný bod charakter nestabilného uzla. Tento fakt je spôsobený zápornou rovnovážnou produkčnou medzerou, ktorú spôsobuje vyšší sklon domácností k spotrebe v tejto ekonomike.

Výsledky hovoria jednoznačne o tom, že tieto ekonomiky sú si navzájom podobné vo svojej makroekonomickej dynamike. Na základe dosiahnutých odhadov pri použití dvoch neoklasických produkčných funkcií sa prikláňame k názoru, že pevný bod tohto modelu v prípade všetkých štyroch ekonomík je sedlový so stabilnou sedlovou trajektóriou.

Naša hypotéza sformulovaná v úvode teda zostáva nateraz nepotvrdená. Na základe predstaveného modelu pre vybrané európske krajiny sme nepotvrdili náš predpoklad, že ekonomiky nebudú konvergovať k svojim rovnovážnym stavom.

## 4 Model výmenného kurzu

V predchádzajúcej časti sme venovali pozornosť modelu, ktorého hlavným predpokladom bola uzavretá ekonomika. Teraz prejdeme o krok ďalej a priblížime sa k realite. Budeme sa zaoberať modelom pre otvorenú ekonomiku a predstavíme variant modelu výmenného kurzu, ktorý bol prvýkrát publikovaný R. Dornbuschom [4].

Napriek tomu, že model bol publikovaný pred vyše 30 rokmi, má vzhľadom na jeho pomernú jednoduchosť stále široko aplikovateľné použitie. Model predpokladá domácu krajinu malú vzhľadom na veľkosť svetového trhu a otvorenú v zahraničnom obchode. Jadro modelu tvoria dve jednoduché rovnice. Prvá z nich vyjadruje arbitrážnu podmienku pre úrokové miery, tzv. úrokovú paritu

$$i_t = \tilde{i} + E_t(e_{t+1} - e_t), \quad (17)$$

kde  $i$  označuje nominálnu úrokovú mieru na domácom trhu,  $\tilde{i}$  nominálnu úrokovú mieru na zahraničnom trhu,  $e_t$  logaritmus nominálneho výmenného kurzu, ktorý uvažujeme v tvare počet jednotiek domácej meny na jednotku zahraničnej meny a operátor  $E_t(\cdot)$  je funkciou očakávania agentov na trhu na základe informácie z času  $t$ . Vzhľadom na veľkosť zahraničnej ekonomiky uvažujeme úroveň nominálnej úrokovej miery v zahraničí  $\tilde{i}$  ako exogénnu premennú. Rovnica (17) hovorí, že ak sú domáce a zahraničné dlhopisy dokonale zameniteľné a pohyb na svetovom trhu dokonale voľný, jediný rozdiel, ktorý agent zaplatí pri nákupe zahraničného dlhopisu, je rovný očakávanej zmene nominálneho výmenného kurzu.

Druhou rovnicou vstupujúcou do modelu je LM krivka charakterizujúca domáci trh peňazí

$$M/P = Y^\phi \cdot i^{-\eta},$$

ktorú však budeme používať v logaritmickom tvare

$$m - p_t = -\eta i_t + \phi y. \quad (18)$$

$m$  vyjadruje logaritmus ponuky peňazí v ekonomike,  $p$  je logaritmus ceny na domácom trhu a  $y$  logaritmus domáceho HDP. Parametre  $\eta > 0$  a  $\phi > 0$  vyjadrujú flexibilitu úrokových sadzieb a HDP. Pre jednoduchosť budeme nasledovať rámec pôvodného modelu a budeme uvažovať ponuku peňazí ako exogénne danú.

Na skompletizovanie modelu potrebujeme však ešte rovnicu agregovaného dopytu a rovnicu dynamiky cien. Na tomto mieste predstavíme modifikovanú verziu modelu z práce Zhanga [18].

## 4.1 Verzia modelu podľa Zhanga

Nech  $q$  vyjadruje reálny výmenný kurz. Definujeme ho nasledovne

$$q_t = e_t + \tilde{p} - p_t,$$

kde  $\tilde{p}$  je logaritmus cenovej úrovne zahraničia, ktorú uvažujeme v modeli ako exogénnu premennú.

Rovnica agregovaného dopytu v domácej ekonomike sa riadi nasledovnou dynamikou

$$y_t = \delta(e_t + \tilde{p} - p_t) - \sigma(i_t - p_{t+1} + p_t). \quad (19)$$

Tento tvar rovnice agregovaného dopytu predstavil Dornbusch [4]. Parametre  $\delta > 0$  a  $\sigma > 0$  sú parametre flexibility výmenného kurzu a úrokovej miery. S využitím definície reálneho výmenného kurzu môžeme rovnicu (19) napísať v tvare

$$y_t = \delta \cdot q_t - \sigma(q_{t+1} - q_t + \tilde{i}). \quad (20)$$

Rovnica dynamiky cien na domácom trhu má tvar

$$p_{t+1} - p_t = \alpha(y_t - \bar{y}), \quad (21)$$

kde  $\bar{y}$  je potenciálny výstup ekonomiky pri plnej zamestnanosťou. Budeme ho v modeli uvažovať ako exogénne daný. Rovnica dynamiky cien na domácom trhu hovorí, že kladná produkčná medzera v ekonomike dáva silu produkujúcej strane, a to vedie k zvyšovaniu cien. Parameter  $\alpha$  je v tomto prípade opäť kladný parameter flexibility.

Rovnice (17), (18), (20) a (21) tvoria model so štyrmi endogénnymi premennými  $y_t^d$ ,  $i_t$ ,  $p_t$  a  $q_t$ . Aby sme mohli ľahšie analyzovať dynamiku tohto modelu, zredukujeme jeho dimenziu, a budeme skúmať model dvoch rovníc s dvomi endogénnymi premennými.

Predtým je ešte potrebné definovať operátor očakávania agentov na trhu  $E_t(\cdot)$ . Nakoľko Dornbusch [4] vo svojom modeli abstrahuje od neistoty agentov na trhu, môžeme očakávanú hodnotu zmeny výmenného kurzu v rovnici (17) nahradiť jeho aktuálnou hodnotou

$$E_t(e_{t+1} - e_t) = e_{t+1} - e_t.$$

S využitím tohto faktu a dosadením rovníc (17) a (20) do rovnice (21), po úprave dostaneme prvú rovnicu modelu

$$p_{t+1} - p_t = \alpha\delta q_t - \alpha\sigma(q_{t+1} - q_t) - \alpha\sigma\tilde{i} - \alpha\bar{y}.$$

Druhú rovnicu dostaneme dosadením (17) do (18)

$$m - (1 + \eta)p_t - \phi\bar{y} + \eta p_{t+1} = -\eta(q_{t+1} - q_t) - \tilde{\eta}\tilde{i}.$$

Systém týchto dvoch rovníc má jediný pevný bod. Z druhej rovnice dostaneme, čomu je rovná rovnovážna cenová úroveň

$$p^* = \eta \tilde{i} + m - \phi \bar{y},$$

ktorá je rastúcou funkciou exogénne danej úrokovej sadzby zahraničia a ponuky peňazí v domácej ekonomike a klesajúcou funkciou potenciálneho výstupu.

Rovnovážny reálny výmenný kurz je rovný

$$q^* = \frac{\sigma}{\delta} \tilde{i} + \frac{1}{\delta} \bar{y},$$

čiže je rastúcou funkciou zahraničnej úrokovej miery a potenciálneho výstupu domácej ekonomiky.

V modeli osamostatníme na ľavej strane  $p_{t+1}$  a  $q_{t+1}$ , a tým dostaneme jednoznačné výrazy pre dynamiku endogénnych premenných modelu v čase

$$p_{t+1} = \frac{\eta - \alpha\sigma(1 + \eta)}{\eta(1 - \sigma\alpha)} p_t + \frac{\alpha\delta}{1 - \alpha\sigma} q_t + \frac{\alpha\sigma m - \eta\alpha\bar{y} - \phi\alpha\sigma\bar{y}}{\eta(1 - \alpha\sigma)}$$

$$q_{t+1} = \left( \frac{1}{\eta(1 - \alpha\sigma)} \right) p_t + \left( 1 - \frac{\alpha\delta}{1 - \alpha\sigma} \right) q_t - \frac{m - \phi\bar{y} - \eta\alpha\bar{y}}{\eta(1 - \alpha\sigma)} - \tilde{i}.$$

Ak definujeme  $\hat{p}_t = p_t - p^*$  a  $\hat{q}_t = q_t - q^*$ , potom transformáciou môžeme systém prepísať na tvar

$$\hat{p}_{t+1} = \frac{\eta - \alpha\sigma(1 + \eta)}{\eta(1 - \sigma\alpha)} \hat{p}_t + \frac{\alpha\delta}{1 - \alpha\sigma} \hat{q}_t$$

$$\hat{q}_{t+1} = \left( \frac{1}{\eta(1 - \alpha\sigma)} \right) \hat{p}_t + \left( 1 - \frac{\alpha\delta}{1 - \alpha\sigma} \right) \hat{q}_t,$$

respektíve v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_{t+1} \\ \hat{q}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\eta - \alpha\sigma(1 + \eta)}{\eta(1 - \sigma\alpha)} & \frac{\alpha\delta}{1 - \alpha\sigma} \\ \frac{1}{\eta(1 - \alpha\sigma)} & 1 - \frac{\alpha\delta}{1 - \alpha\sigma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{p}_t \\ \hat{q}_t \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \hat{p}_t \\ \hat{q}_t \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Vlastné hodnoty tejto matice určujú stabilitné vlastnosti tohto dynamického systému a tie sú jednoznačne dané rovnicou

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}^2 - Tr(A)\lambda_{1,2} + Det(A),$$

kde  $Tr(A)$  je stopa matice  $A$ , teda súčet diagonálnych prvkov a  $Det(A)$  je determinant matice  $A$ .

## 4.2 Výber pozorovaných krajín

Ako sme už vyššie povedali, žiadnu zo svetových ekonomík nemôžeme považovať za dokonale uzavretú ekonomiku v zahraničnom obchode, preto budeme kalibráciu parametrov modelu robiť pre všetky štyri doteraz pozorované ekonomiky. Budeme tak môcť porovnať výsledky pre model, ktorý predpokladá ekonomiku uzavretú a model pre ekonomiku otvorenú.

## 4.3 Kalibrácia modelu

Na kalibráciu modelu sme použili kvartálne časové rady jednotlivých premenných podľa nasledujúcej tabuľky.

premenná	popis	jednotky	zdroj
Y	Hrubý domáci produkt	mil. EUR	Eurostat
p	Cenový index v domácej ekonomike - CPI index		Eurostat
population	Počet obyvateľov		OECD
i	úroková miera (štátne dlhopisy s 10 ročnou maturitou)		OECD
q	efektívny výmenný kurz		Eurostat
$\tilde{i}$	zahraničná úroková miera (štátne dlhopisy s 10 ročnou maturitou)		Eurostat
m	menový agregát M2	mil. EUR	národné centrálné banky <sup>1</sup>

Tabuľka 7: Zdroje dát

Pre jednotlivé krajiny sme použili údaje za tieto obdobia

krajina	$\tilde{i}$	agregát M2	ostatné časové rady
Španielsko	1990q1 - 2008q4	1997q1 - 2008q4	1980q1 - 2008q4
Francúzsko	1990q1 - 2008q4	1997q1 - 2008q4	1978q1 - 2008q4
Taliansko	1990q1 - 2008q4	1997q1 - 2008q4	1980q1 - 2008q4
Veľká Británia	1990q1 - 2008q4	1997q1 - 2008q4	1972q1 - 2008q4

Tabuľka 8: Použité časové rady

Časové rady HDP a M2 (menových agregátov) sme opäť sezónne očistili a prepočítali na jedného obyvateľa.

Na odhad potenciálneho výstupu ekonomiky  $\bar{y}$  sme použili Hodrick - Prescott filter. Keďže sme potenciálny výstup odhadovali z kvartálnych dát, použili sme rovnako ako v práci [15] hodnotu vyhladzovacieho parametra  $\lambda = 1600$ .

<sup>1</sup>Zdrojom sú konkrétne stránky národných centrálnych bánk [www.nbs.sk](http://www.nbs.sk), [www.banque-france.fr](http://www.banque-france.fr), [www.bancaditalia.it](http://www.bancaditalia.it), [www.bde.es](http://www.bde.es), [www.bankofengland.co.uk](http://www.bankofengland.co.uk)



Úrokovú mieru zahraničia  $\tilde{i}$  sme dostali tak, že pre každú zo skúmaných krajín sme určili 15 krajín, ktoré majú najväčší podiel na zahraničnom obchode danej krajiny. Váhy týchto krajín v zahraničnom obchode domácej ekonomiky sme potom prenásobili úrokovými sadzbami v jednotlivých krajinách. Takto sme dostali pre každú z našich štyroch skúmaných ekonomík časový rad váženej zahraničnej úrokovej sadzby, ktorá odráža zahraničný obchod príslušnej ekonomiky.

Všetky ostatné parametre pre model výmenného kurzu sme odhadli pomocou lineárnej, resp. multilineárnej regresie. Výsledná kalibrácia pre jednotlivé ekonomiky vyzerá nasledovne

Španielsko		
parameter	odhad	zdroj
$\delta$	1,9000	vlastný odhad
$\sigma$	10,4193	vlastný odhad
$\alpha$	0,1493	vlastný odhad
$\phi$	0,6159	vlastný odhad
$\eta$	10,5065	vlastný odhad

Taliansko		
parameter	odhad	zdroj
$\delta$	1,8977	vlastný odhad
$\sigma$	3,8820	vlastný odhad
$\alpha$	0,0350	vlastný odhad
$\phi$	0,5957	vlastný odhad
$\eta$	8,6285	vlastný odhad

Francúzsko		
parameter	odhad	zdroj
$\delta$	1,9452	vlastný odhad
$\sigma$	5,1404	vlastný odhad
$\alpha$	0,0632	vlastný odhad
$\phi$	0,6332	vlastný odhad
$\eta$	10,6946	vlastný odhad

UK		
parameter	odhad	zdroj
$\delta$	1,9049	vlastný odhad
$\sigma$	2,9018	vlastný odhad
$\alpha$	0,1117	vlastný odhad
$\phi$	0,7400	vlastný odhad
$\eta$	20,1321	vlastný odhad

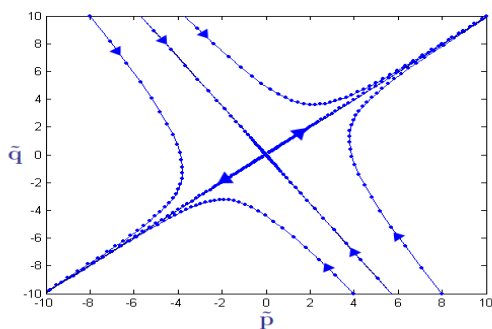
Vlastné hodnoty matice  $A$ , ktoré určujú stabilné vlastnosti modelu, majú po dosadení odhadnutých parametrov pre jednotlivé krajiny tieto hodnoty

	Španielsko	Francúzsko	Taliansko	UK
$\lambda_1$	1,7080	1,0594	1,0581	1,0412
$\lambda_2$	1,0686	0,7138	0,8467	0,6203

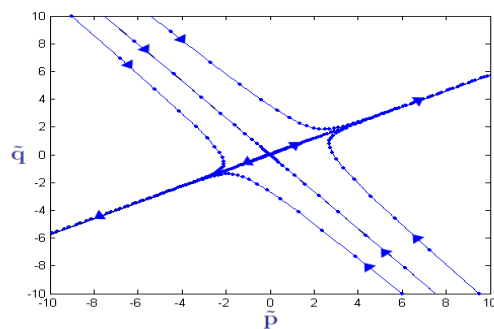
Tabuľka 9: Odhad vlastných hodnôt

O stabilných vlastnostiach pevného bodu modelu výmenného kurzu, ktorý sme definovali vyššie, rozhodujú vlastné hodnoty matice  $A$ . Na základe predstavenej teórie v 2. kapitole

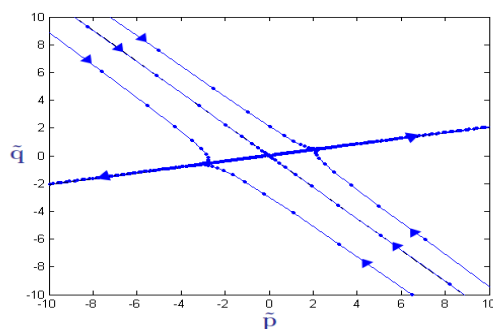
vidíme, že vlastné hodnoty pre tri zo štyroch pozorovaných krajín hovoria o tom, že pevný bod pre tieto ekonomiky je sedlo. Konkrétne ide o krajiny Taliansko, Francúzsko a Veľkú Britániu. Na nasledujúcich fázových portétoch sú zobrazené stabilné sedlové pevné body pre jednotlivé ekonomiky.



Obrázok 20: Taliansko - sedlový pevný bod



Obrázok 21: Francúzsko - sedlový pevný bod



Obrázok 22: Veľká Británia - sedlový pevný bod

Na fázových portétoch vidíme stabilnú trajektóriu pozdĺž jedného z vlastných vektorov, ktorý prislúcha k absolútnej hodnote  $|\lambda_2| < 1$ . Táto stabilná sedlová trajektória vyjadruje to, že bod  $(\tilde{p}_t \quad \tilde{q}_t)^T$ , ktorý sa v nejakom čase  $t$  nachádza na nej, v konečnom čase dokonverguje k svojmu pevnému bodu. Ak sa naopak tento bod  $(\tilde{p}_t \quad \tilde{q}_t)^T$  nachádza mimo tejto stabilnej trajektórie, potom budú odchýlky od pevného bodu s časom narastať.

Na základe kalibrácie parametrov modelu vidíme, že vlastné hodnoty pre ekonomiku Španielska hovoria o tom, že pre tento model je pevný bod nestabilný uzol. Teda odchýlky od rovnovážneho stavu pre obe endogénne premenné sa časom nebudú znižovať, ale práve naopak, budú narastať.

Z odhadnutých parametrov pre jednotlivé krajiny môžeme pozorovať, že parametre flexibility reálneho výmenného kurzu  $\delta$  a flexibility HDP  $\phi$  sú pre všetky uvažované ekonomiky takmer rovnaké. Výrazne odlišným od ostatných je len odhad parametra flexibility domácej

nominálnej úrokovej miery z LM krivky pre ekonomiku Veľkej Británie. Dôvodom je, že ostatné krajiny patria už dlhšiu dobu do spoločnej menovej únie a teda ich úrokové sadzby sú v posledných rokoch takmer rovnaké. Nestabilita, ktorú vykazuje pevný bod pre ekonomiku Španielska v takto skonštruovanom modeli, je spôsobená vyššími hodnotami parametrov  $\sigma$  a  $\alpha$ . Tie sú spôsobované vyššou flexibilitou cien v domácej ekonomike, ktoré vstupujú do odhadov týchto parametrov. Prikláňame sa však k názoru, že rovnako ako ostatné ekonomiky, aj pevný bod Španielska by sa mal správať ako sedlový pre tento model výmenného kurzu.

Rovnako aj vlastné hodnoty, ktoré určujú stabilitné vlastnosti pevných bodov a fázové portréty nám ukázali, že nami vybrané ekonomiky sú si navzájom veľmi podobné. Až na jednu výnimku sme ako výsledok dostali, že pevný bod pre obe verzie Dornbuschovho modelu je stabilný sedlový bod. Tieto krajiny nemajú teda spoločné len to, že patria medzi väčšie a uzavretejšie ekonomiky, ale aj ich makroekonomické ukazovatele a makroekonomický vývoj je veľmi podobný. Dôvodom je najmä to, že patria do spoločnej politickej štruktúry a navyše tri z týchto krajín patria ešte aj do spoločnej menovej únie.

#### 4.4 Rozšírenie modelu výmenného kurzu

V tejto časti rozšírime model výmenného kurzu o ďalšie dve rovnice. Premenné zahraničná úroková miera  $\tilde{i}$  a ponuka peňazí v domácej ekonomike  $m$  vstupovali do modelu v predchádzajúcej časti ako exogénne premenné. Teraz ich zahrnieme do modelu ako endogénne premenné, ktorých dynamika sa nasledovnými rovnicami

$$\tilde{i}_{t+1} = \gamma \tilde{i}_t,$$

$$m_{t+1} = \vartheta m_t.$$

Nech  $\tilde{i}^*$  a  $m^*$  označujú pevné body jednotlivých rovníc, potom transformáciou zavedieme nové premenné, ktoré vyjadrujú odchýlky aktuálnych hodnôt od týchto pevných stavov

$$\hat{i}_t = \tilde{i}_t - \tilde{i}^*,$$

$$\hat{m}_t = m_t - m^*.$$

Na odhad rovnovážnej úrovne zahraničnej úrokovej miery  $\tilde{i}^*$  a rovnovážnej ponuky peňazí v domácej ekonomike  $m^*$  sme použili Hodrick - Prescott filter. Ich odhady sme následne dosadili do rovníc pre  $\hat{i}_t$  a  $\hat{m}_t$  a parametre  $\gamma$  a  $\vartheta$  sme odhadli pomocou  $AR(1)$  modelov

$$\hat{i}_{t+1} = \gamma \hat{i}_t,$$

$$\hat{m}_{t+1} = \vartheta \hat{m}_t.$$

Odhad parametrov pre jednotlivé krajiny

	Španielsko	Francúzsko	Taliansko	UK
$\gamma$	0,6951	0,6960	0,6780	0,6917
$\vartheta$	0,9604	0,9126	0,7687	0,8465

Tabuľka 10: Odhad parametrov  $\vartheta$  a  $\gamma$

Ak tieto dve rovnice zahrnieme do systému (22), dostaneme štvorrozmerný systém, ktorý hovorí o dynamike odchýliek aktuálnych stavov endogénnych premenných od ich pevných bodov.

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_{t+1} \\ \hat{q}_{t+1} \\ \hat{i}_{t+1} \\ \hat{m}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\eta - \alpha\sigma(1+\eta)}{\eta(1-\sigma\alpha)} & \frac{\alpha\delta}{1-\alpha\sigma} & 0 & \frac{\alpha\sigma}{\eta(1-\alpha\sigma)} \\ \frac{1}{\eta(1-\alpha\sigma)} & 1 - \frac{\alpha\delta}{1-\alpha\sigma} & -1 & -\frac{1}{\eta(1-\alpha\sigma)} \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{p}_t \\ \hat{q}_t \\ \hat{i}_t \\ \hat{m}_t \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Stabilitné vlastnosti týchto modelov sú určené vlastnými hodnotami matíc jednotlivých dynamických systémov

	Španielsko	Francúzsko	Taliansko	UK
$\lambda_1$	1,7080	1,0594	1,0581	1,0412
$\lambda_2$	1,0686	0,7138	0,8467	0,6203
$\lambda_3$	0,9604	0,9126	0,7687	0,8465
$\lambda_4$	0,6951	0,6902	0,6780	0,6917

Tabuľka 11: Odhad vlastných hodnôt

Endogenizácia premenných - zahraničná úroková miera  $\tilde{i}$  a ponuka peňazí v domácej ekonomike  $m$  - nemohla ovplyvniť vlastné hodnoty, ktoré sme vypočítali pre 2-dimenzionálnu verziu modelu. Tento fakt je spôsobený konštrukciou modelu. Odhadom parametrov  $\gamma$  a  $\vartheta$  sme dostali vlastné hodnoty  $\lambda_3$  a  $\lambda_4$  vnútri jednotkového kruhu pre všetky skúmané ekonomiky. Z toho vyplýva, že pre jednotlivé verzie modelu bude stabilita pevných bodov silne ovplyvnená stabilitou pevných bodov príslušného 2-rozmerného modelu.

Pre rozšírenú verziu modelu predstaveného v práci Zhanga [18] tak dostávame pre krajiny Francúzsko, Taliansko a Veľkú Britániu 4-rozmerný stabilný sedlový bod. Pri pohľade na pevný bod v rovinách  $\hat{q} = \hat{p} = 0$ ,  $\hat{q} = \hat{m} = 0$  a  $\hat{q} = \hat{i} = 0$  vidíme tento pevný bod dokonca ako stabilný uzol. Pre Španielsko sa oproti 2-rozmernej verzii stabilita pevného bodu zmenila z nestabilného uzla na stabilný sedlový bod a v rovine  $\hat{q} = \hat{p} = 0$  dokonca na asympntoticky stabilný uzol.

V tejto časti sme predstavili dve verzie modelu výmenného kurzu pre otvorené ekonomiky. Ekonomiky, ktoré sme brali do úvahy, boli rovnaké ako v prípade modelu pre uzavretú ekonomiku. Kalibráciou modelu, ktorú sme urobili prevažne pomocou H-P filtra, sme dostali odhady jednotlivých parametrov, ktoré určujú výsledné stabilitné vlastnosti pevných bodov pre jednotlivé krajiny. Výsledok však rovnako ako v modeli kapitálu a zásob nepotvrdil naše očakávania a predpoklady, že ekonomiky nebudú konvergovať k svojim rovnovážnym stavom, ale budú sa pohybovať v cykloch, resp. sa správať chaoticky. Predpoklad makroekonomických modelov teórie rastu a RBC modelov o konvergencii ekonomík k rovnovážnym stavom sa nám na základe tohto modelu výmenného kurzu nepodarilo spochybníť. Ukázali sme však, že v niektorých prípadoch, konkrétne v prípade Španielska, môže mať model nestabilný pevný bod na základe nakalibrovaných parametrov z reálnych dát.

## Záver

Cieľom našej práce bolo na reálnych ekonomikách overiť hypotézu, ktorú sme si stanovili v úvode tejto práce. Podľa nášho predpokladu sa súčasné makroekonomické práce nezaoberajú overovaním podmienky konvergenencie svetových ekonomík k svojim rovnovážnym stavom. Tá je v nich uvažovaná ako prirodzená, a tak fluktuácie od rovnovážnych stavov môžu byť spôsobené jedine exogénnymi pridávanými šokmi. V našej práci sme sa pokúsili overiť fakt, že aj za predpokladu, keď do ekonomiky nebudú vstupovať šoky, ekonomika nebude časom konvergovať k svojmu pevnému bodu, ale bude sa pohybovať v ekonomických cykloch, poprípade až chaoticky v rámci atraktívnej množiny.

V práci sme venovali pozornosť dvom makroekonomickým modelom. Prvým je model z práce Gomesa [7], ktorého hlavným predpokladom je uzavretá ekonomika. Aby sme sa vyhli predpokladu uzavretosti, rozhodli sme sa ako protipól použiť model výhradne pre otvorenú ekonomiku, a to modifikáciu Dornbuschovho modelu výmenného kurzu z práce Zhanga [18]. Oba tieto modely viedli v konečnom dôsledku na dvojrozmerné diskkrétne dynamické systémy. Ich dynamiku sme tak ľahko mohli zachytiť na fázových portrétoch.

Ako pozorované krajiny sme zvolili vybrané európske krajiny. Keďže prvý model predpokladal uzavretú ekonomiku, rozhodli sme sa ako kritérium výberu použiť index otvorenosti, čiže pomer súčtu exportu a importu na HDP. Spomedzi európskych ekonomík sme vybrali tie, pre ktoré bol index otvorenosti najnižší. Konkrétne krajiny Španielsko, Taliansko, Francúzsko a Veľkú Britániu. Pre druhý model, ktorý je postavený pre otvorenú ekonomiku, sme použili rovnaké krajiny, a to hlavne z dvoch dôvodov. Prvým je, že žiadna reálna ekonomika, okrem svetovej ekonomiky ako celku, nemôže byť považovaná za dokonale uzavretú, a preto takýto model viac odzrkadľuje realitu. A druhým, čisto praktickým dôvodom, je možnosť porovnania výsledkov pre tieto rôzne modely.

Rozhodujúcim faktorom pre determinovanie stability pevných bodov bol odhad vlastných hodnôt matíc príslušných dynamických systémov. Pre model s uzavretou ekonomikou sme uvažovali dva druhy neoklasickej produkčnej funkcie. Pri použití Cobb-Douglasovej funkcie sme dostali odhady vlastných hodnôt, ktoré charakterizujú stabilný sedlový bod pre všetky ekonomiky. Malý rozdiel nastal pri použití CES produkčnej funkcie, kedy si charakter sedla zachovali tri z pozorovaných ekonomík. Pre Francúzsko sme kvôli vyššiemu odhadu sklonu domácností k spotrebe dostali záporný odhad rovnovážnej produkčnej medzery. Obe vlastné hodnoty však boli mimo jednotkového kruhu a pevný bod mal tak charakter nestabilného uzla. Na základe podobnosti pozorovaných krajín a získaných makroekonomických poznatkov sa však prikláňame k názoru, že aj pevný bod pre ekonomiku Francúzska bude mať charakter sedlového bodu. Veľkosť jednej vlastnej hodnoty je natoľko blízka hranici

jednotkovej kružnice, že je pravdepodobné, že odlišnosť od ostatných krajín vznikla nepresnosťami pri kalibrácii modelu pre túto krajinu.

Pre model výmenného kurzu sme pre tri z pozorovaných krajín dostali rovnovážne body, ktoré mali charakter sedla. Pre Španielsko boli však obe vlastné hodnoty mimo jednotkového kruhu, čiže ekonomika sa mala podľa tohto modelu vzdiaľovať od svojho pevného bodu. Opäť je však veľkosť jednej vlastnej hodnoty natoľko blízka číslu 1, že sa prikláňame k názoru, že aj v tomto prípade je pevný bod ekonomiky sedlový.

Použitím týchto modelov na vybraných ekonomikách sa nám náš predpoklad potvrdiť nepodarilo. Oba modely vykazujú konvergenciu k rovnovážnym stavom, ktoré sa pre všetky skúmané prípady ukázali ako stabilné sedlové body.

Možným smerovaním ďalšieho výskumu v tejto problematike je napríklad analýza modelov pre všetky európske krajiny. Ďalšou možnosťou je uvažovať európsku menovú úniu ako jednotnú ekonomiku a študovať tak jej dynamiku. Možným smerovaním ďalšieho výskumu v tejto problematike je napríklad analýza modelov pre všetky európske krajiny. Ďalšou možnosťou je uvažovať európsku menovú úniu ako jednotnú ekonomiku a študovať tak jej dynamiku na základe predstavených makroekonomických modelov.

## Referencie

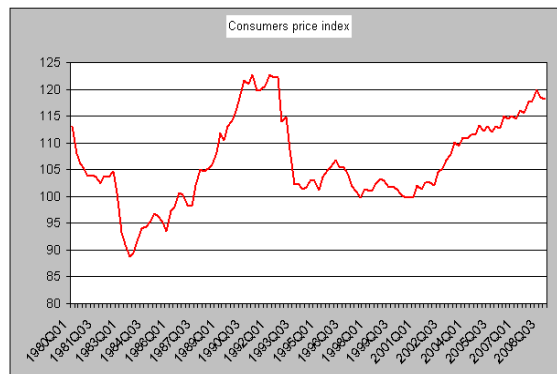
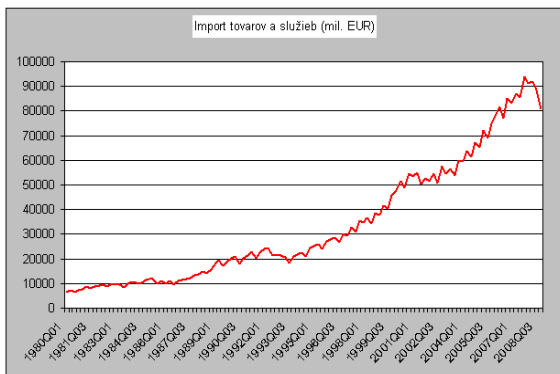
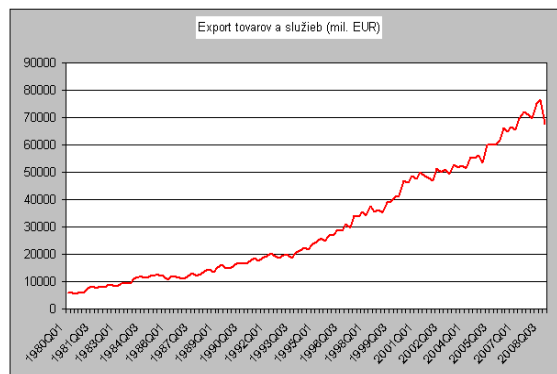
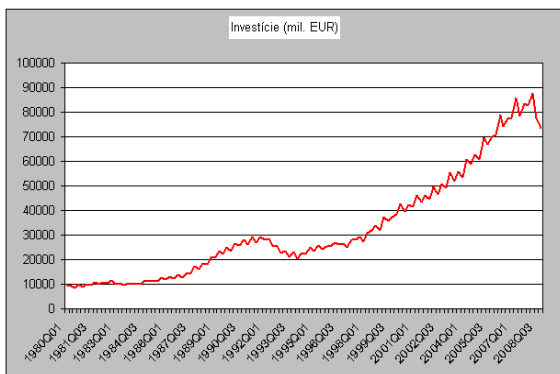
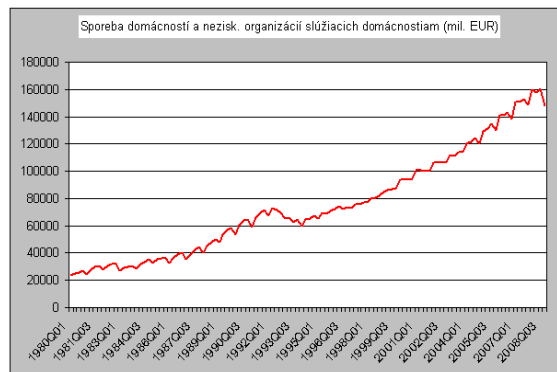
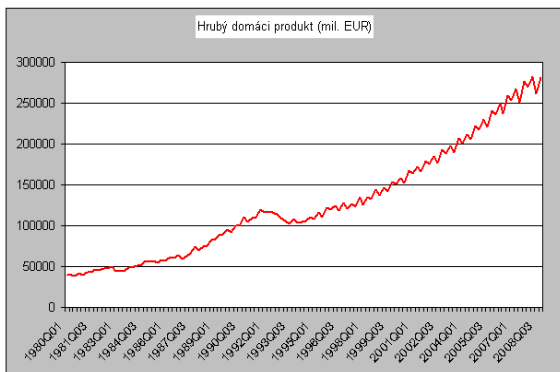
- [1] Alberola, E., Cervero, S. G., Lopez, H., Ubide, A., *Equilibrium Exchange Rates: Euro, Dollar, Ins, Outs and Other Major Currencies in a Panel Cointegration Framework*, Working Paper, International Monetary Found, 1999, 43s.
- [2] Azariadis, C., Kaas, L., *Is dynamic general Equilibrium a theory of everything?*, University of California, Los Angeles, 2006, 34s.
- [3] Brunovský, P., *Diferenčné a diferenciálne rovnice*, 67s.
- [4] Dornbusch, R., *Expectations and Exchange Rate Dynamics*, Journal of Political Economy, Vol. 84, 1976, 16s.
- [5] Engel, Ch., Mark, N. C., West, K. D., *Exchange Rate Models Are Not as Bad as You Think*, NBER Macroeconomics Annual, 2007, 60s.
- [6] Frait, J., *Nerovnovážne modely devízového kurzu*, Politická ekonomie 4, 1994, 16s.
- [7] Gomes, O., *A two-dimensional non-equilibrium dynamic model*, Escola Superior de Comunicação Social - Instituto Politécnico de Lisboa, MPRA Paper No. 4817, 2007, 43s.
- [8] Hairault, J.-O., Sopraseuth, T., *Exchange rate dynamics - A new open economy macroeconomics*, Routledge London, 2004, 297s.
- [9] Hale, J., Koçak, H., *Dynamics and Bifurcations*, Springer - Verlag, 1996, 592s.
- [10] Hallegatte, S., Ghil, M., Dumas, P., Hourcade, J.-Ch., *Bussiness Cycles, Bifurcations and Chaos in a Neo-Classical Model with Investment Dynamics*, Elsevier Science, 2007, 35s.
- [11] Isard, P., *Equilibrium Exchange Rates: Assessment Methodologies*, Working Paper, International Monetary Found, 2007, 50s.
- [12] Kempa, B., Nelles, M., Pierdzioch, Ch., *The term structure of interest rates and sticky price target zone model*, Journal of International Money and Finance 18, 1999, 18s.
- [13] Kucsera, D., *Equilibrium exchange rate*, diplomová práca, FMFI UK, 2007, 67s.
- [14] Mussa, M., *A Model of Exchange Rate Dynamics*, Journal of Political Economy 90, 1982, 31s.



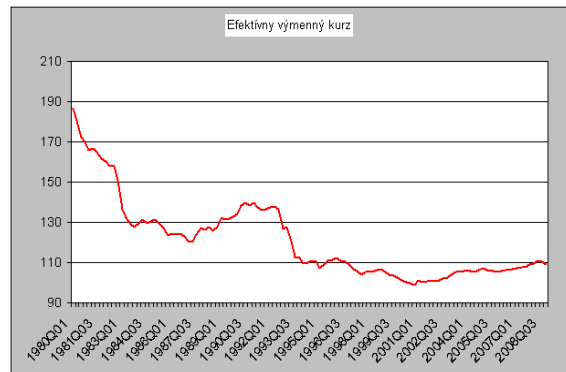
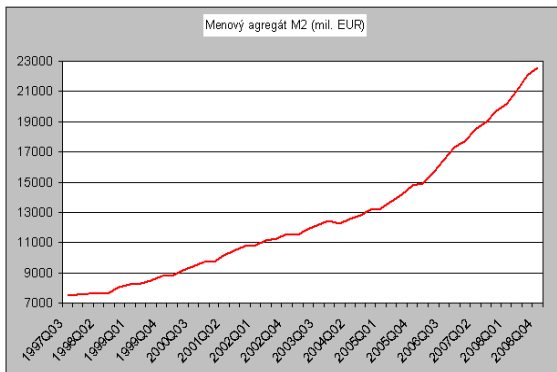
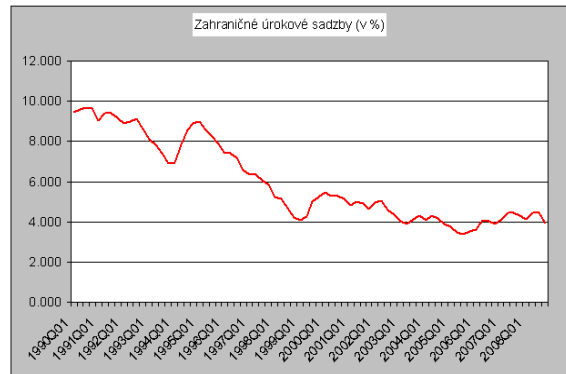
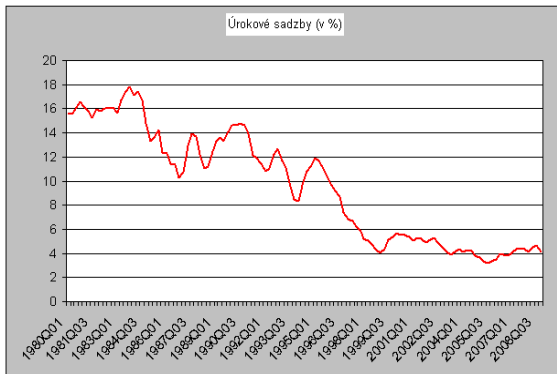
- [15] Pašiaková, Z., *Produkčná medzera SR*, diplomová práca, FMFI UK, Bratislava, 2004, 48s.
- [16] Rogoff, K., *Dornbusch's Overshooting Model After Twenty-Five Years*, Working Paper, International Monetary Found, 2002, 41s.
- [17] Zeman, J., Senaj, M., *DSGE Model - Slovakia*, Národná Banka Slovenska, 2008, 35s.
- [18] Zhang, W.-B., *Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics*, ELSEVIER B.V., 2006, 460s.
- [19] Žamborský, P., Taušer, J., *Ekonomie měnového kurzu 1*, Vysoká škola ekonomická v Praze, 2003, 60s.
- [20] <http://epp.eurostat.ec.europa.eu>
- [21] [www.bancaditalia.it](http://www.bancaditalia.it)
- [22] [www.bankofengland.co.uk](http://www.bankofengland.co.uk)
- [23] [www.banque-france.fr](http://www.banque-france.fr)
- [24] [www.bde.es](http://www.bde.es)
- [25] [www.bis.org/cbanks](http://www.bis.org/cbanks)
- [26] [www.nbs.sk](http://www.nbs.sk)
- [27] [www.oecd.org](http://www.oecd.org)
- [28] [www.statistics.sk](http://www.statistics.sk)

# Prílohy

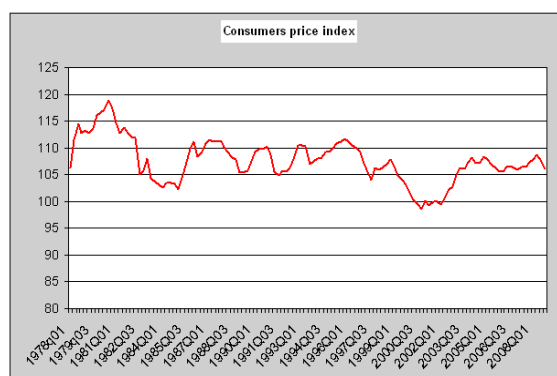
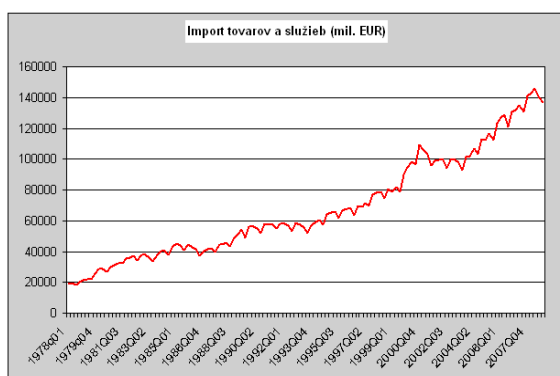
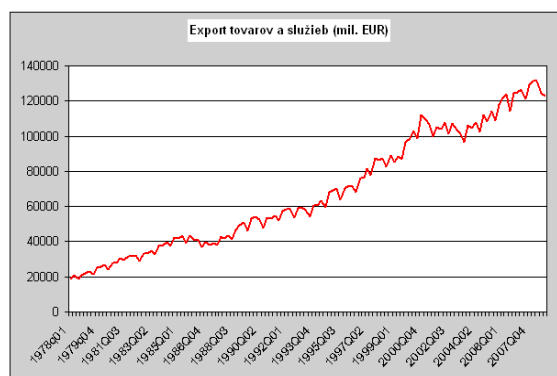
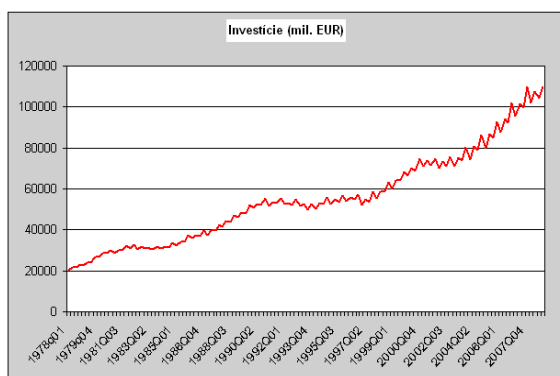
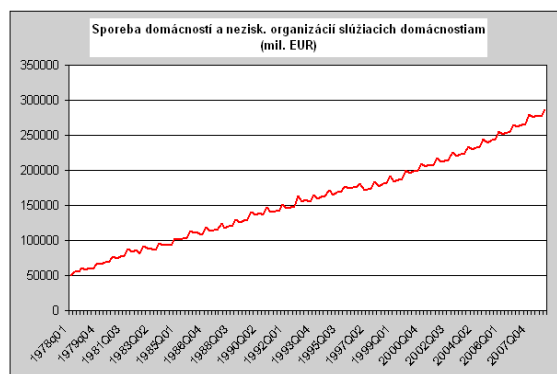
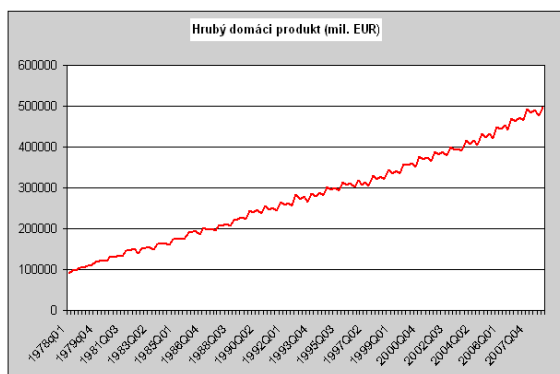
## Španielsko - použité dáta



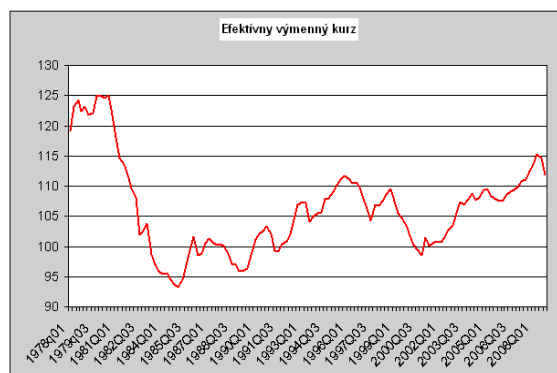
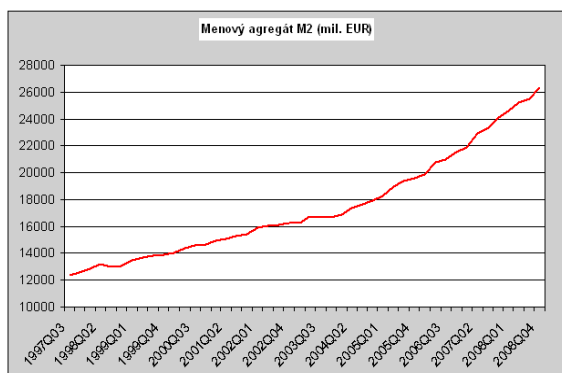
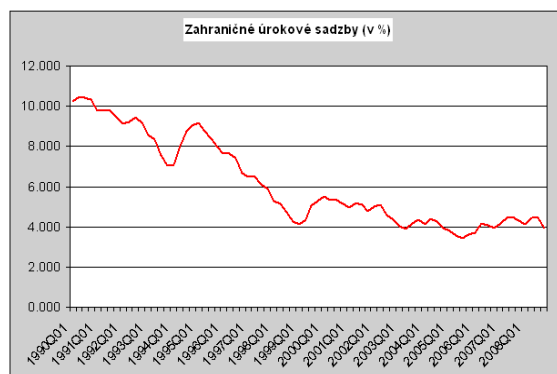
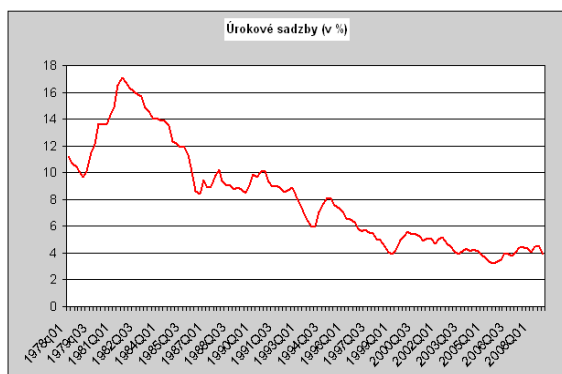
## Španielsko - použité dáta (pokračovanie)



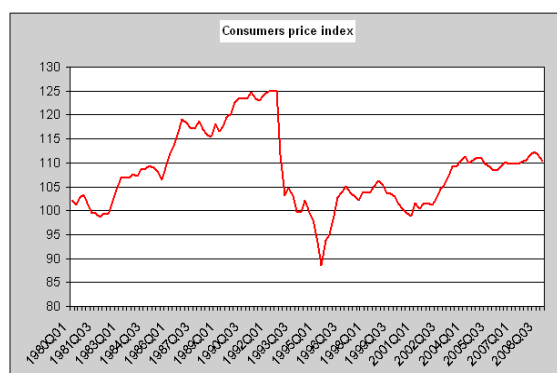
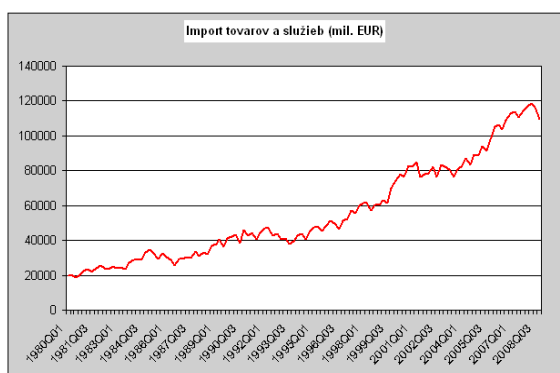
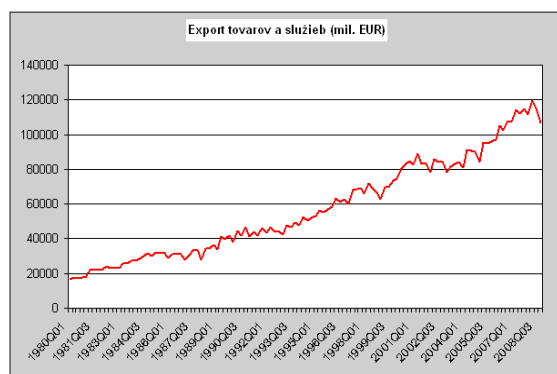
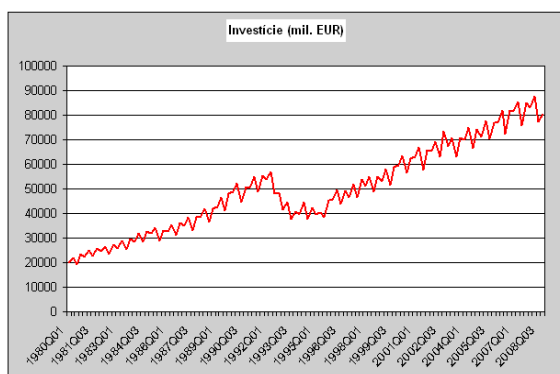
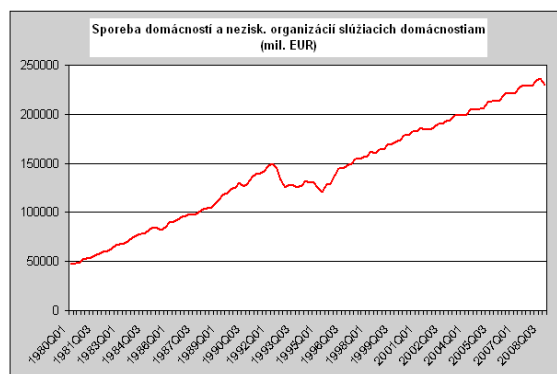
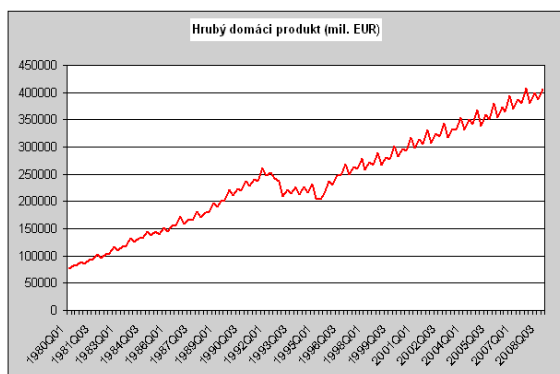
## Francúzsko - použité dáta



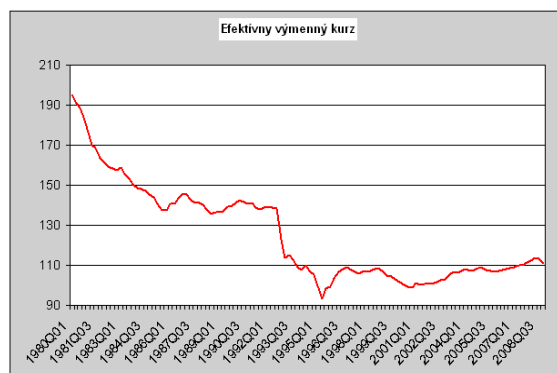
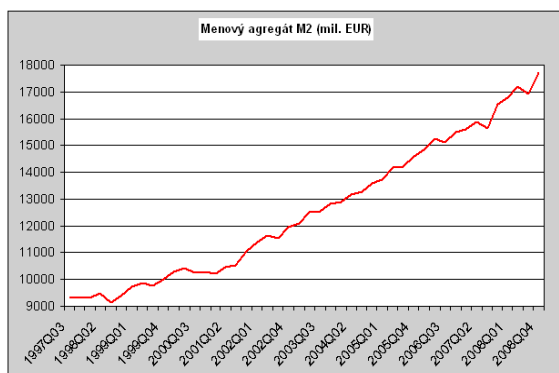
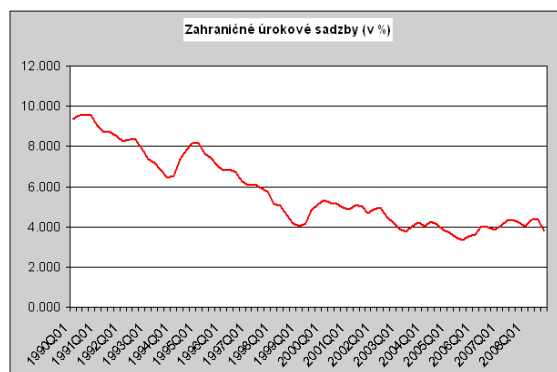
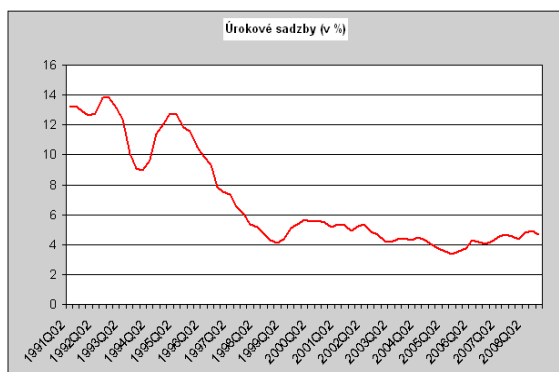
## Francúzsko - použité dáta (pokračovanie)



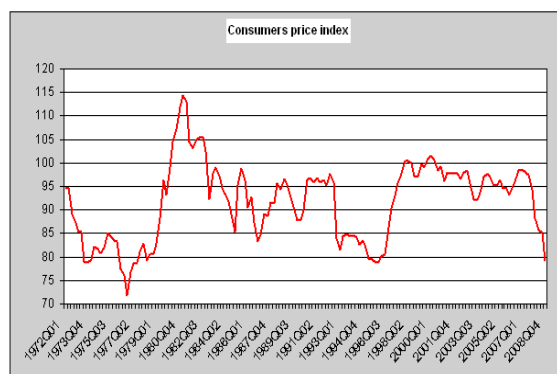
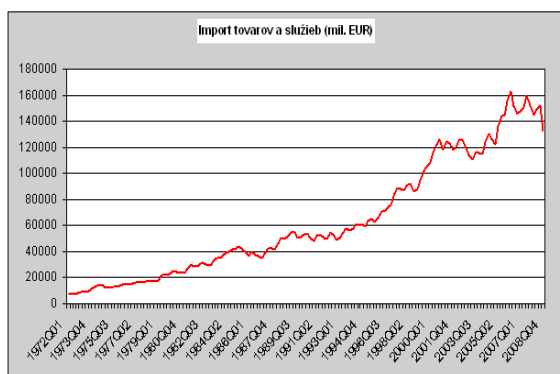
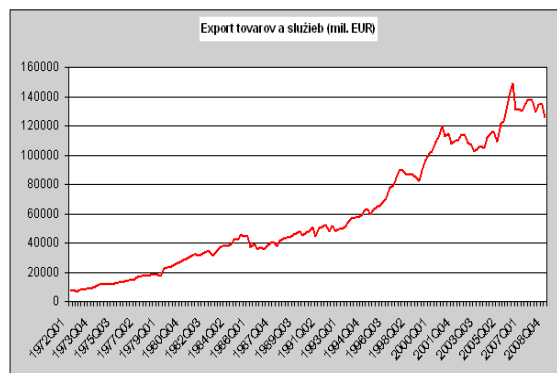
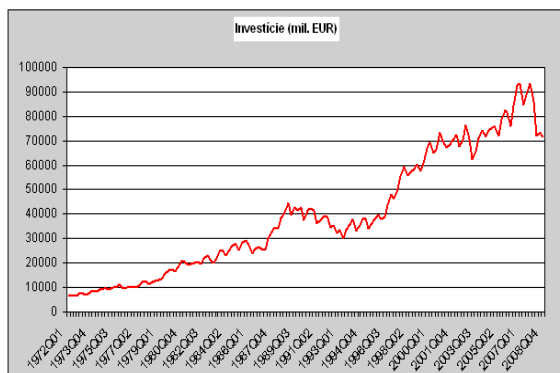
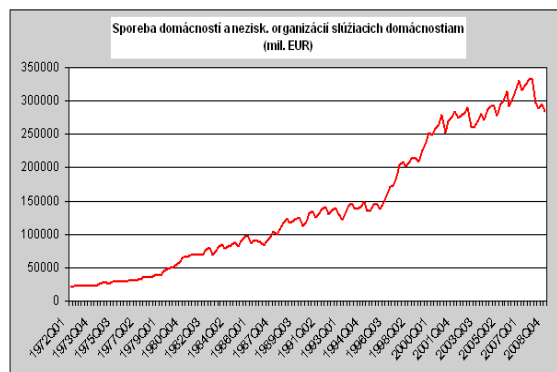
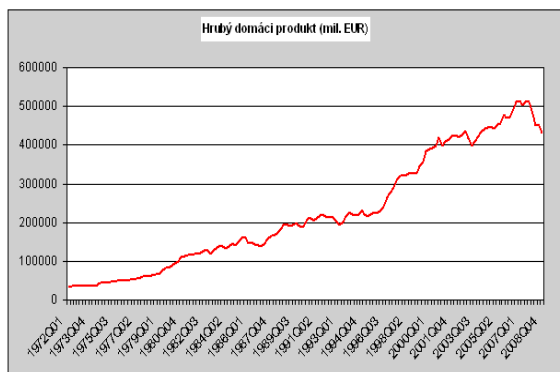
## Taliansko - použité dáta



## Taliansko - použité dáta (pokračovanie)



## Velká Británie - použité data





## Veľká Británia - použité dáta (pokračovanie)

