Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Reálne opcie a averzia k riziku

Diplomová práca

BRATISLAVA, 2009

Vedúci: Mgr. Jana Szolgayová

Martin Tóth

Reálne opcie a averzia k riziku

Diplomová práca

Martin Tóth

Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci záverečnej práce
Mgr. Jana Szolgayová

BRATISLAVA, 2009

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s využitím teoretických vedomostí a s použitím uvedenej literatúry.

. . . .

Martin Tóth

Poďakovanie

Vedúcej diplomovej práce Mgr. Jane Szolgayovej ďakujem v prvom rade za to, že ma prijala za svojho diplomanta s radosťou. Dokázala ma nadchnúť oblasťou, ktorou sa zaoberá a navrhnúť cestu, ktorou sa vydať. Keď sa mi nedarilo, vždy ma povzbudila a motivovala. Dbala na korektnosť mojej práce a venovala mi veľa svojho času.
Za to jej úprimne ďakujem.

Abstrakt

Teória reálnych opcií je nástroj na analýzu optimálneho rozhodovania investora, zohľadnňujúc pritom možnosť odložiť rozhodnutie na neskôr a stochastický vývoj určitých parametrov. Hoci je založená na rizikovej neutralite investora, vieme ju modifikovať aj pre rizikovo averzného investora. Zavedením investora maximalizujúceho očakávanú užitočnosť nájdeme optimálne správanie takéhoto investora pre projekt s nekonečným časovým horizontom a porovnáme ho so správaním rizikovo neutrálneho investora. Model ďalej rozšírime o konečné trvanie projektu a zanalyzujeme správanie investora.

Kľúčové slová: reálne opcie, riziková averznosť, funkcia užitočnosti

Abstract

Real options theory provides a framework, in which investment under uncertainty can be investigated when irreversibility and flexibility with respect to the timing of decisions are involved. Although originally developed for a risk neutral investor, the approach can be modified to account for a risk averse investor. By introducing a investor maximizing his expected utility we are able to derive the optimal behaviour of such an investor for a project of infinite duration and compare the result with the risk neutral case. Further we extend the model to account for a project with finite duration and analyze the impact on investor's behaviour.

Keywords: real options, risk aversion, utility function

Obsah

Úvod

Problém investičného rozhodovania je v praxi častý. Firmy zvažujú rôzne možnosti investovania s cieľom maximalizovať svoj zisk. Bežná teória investičného rozhodovania a takzvaného NPV pravidla však slabo opisuje bežné problémy investorov. Zisk často nie je deterministický, firmy majú možnosť odložiť svoje rozhodnutie a počkať ako sa situácia na trhu vyvinie. Aj kvôli týmto vlastnostiam investičných problémov ekonómovia rozvinuli novú teóriu investičného rozhodovania, teóriu reálnych opcií. Je založená na stochastickom vývoji podkladového aktíva investičnej príležitosti. V najjednoduchších modeloch je týmto aktívom priamo hodnota projektu, do ktorého firma zvažuje investovať. Analogickým postupom ako pri teórii amerických finančných opcií a ich oceňovaní, odvodili ekonómovia ocenenie možnosti investovať, ale hlavne investičné pravidlo. To investorovi hovorí, kedy má využiť možnosť investovať, a kedy naopak s týmto rozhodnutím počkať.

Základný model reálnych opcií bol rozšírený rôznymi spôsobmi. Jedným z rozšírení je, že hodnota projektu sa nemodelovala priamo vybraným stochastickým procesom, ale počítala sa na základe vývoja podkladového aktíva tohoto projektu. To znamená, že projekt, do ktorého sme investovali, nám bude prinášať produkt, ktorého cena sa riadi stochastickým procesom. Toto rozšírenie spôsobilo, že hodnotu projektu je potrebné najskôr vyjadriť v závislosti od ceny produktu, ktorý nám prináša. Potom môžeme pristúpiť k hľadaniu investičného pravidla pre tento projekt. Ďalšie rozšírenia teórie reálnych opcií sú zavedenie nákladov na výrobu produktu, zavedenie alternatívnych stochastických procesov, zavedenie možnosti pozastaviť a opäť naštartovať projekt, ako aj zavedenie nekompletného trhu.

Všetky doposiaľ spomenuté modely počítali s rizikovo neutrálnym investorom. V tejto práci rozšírime vybraný model teórie reálnych opcií o rizikovo averzného investora. Ďalším rozšírením, ktoré do modelu zavedieme, je konečná doba trvania projektu, do ktorého investor zvažuje investovať. Pre takto rozšírený model nájdeme investičné pravidlo a budeme ho analyzovať v závislosti od vybraných parametrov.

Práca je členená na štyri kapitoly. Prvá kapitola je zhrnutím teoretických poznatkov potrebných pre našu prácu. Po krátkom úvode do teórie reálnych opcií sformulujeme základný model, ktorý budeme v ďalších kapitolách rozširovať. Ukážeme, ako takýto model riešiť a nájdeme investičné pravidlo pre tento model. V prvej kapitole tiež uvedieme výsledky teórie rizikovej averznosti, ktoré sú potrebné pre naše rozširovanie modelu. Ďalšie kapitoly sú už prezentovaním našej práce a prínosu do teórie reálnych opcií. V druhej kapitole upravíme model pre rizikovo averzného investora a v súlade s postupmi popísanými v prvej kapitole ho vyriešime. V tretej kapitole budeme uvažovať projekt s konečným časovým horizontom. Model upravíme pre tento projekt a vyriešime ho pre rizikovo neutrálneho, ako aj pre rizikovo averzného investora. V štvrtej kapitole zhrnieme výsledky, ukážeme, že všetky prípady, čo sme riešili sú limitným prípadom modelu s projektom s konečným časovým horizontom a rizikovo averzným investorom. Graficky ukážeme vplyv vybraných parametrov na jednotlivé investičné pravidlá, niektoré vlastnosti dokážeme a slovne interpretujeme. Taktiež zanalyzujeme vplyv rizikovej averznosti na rozhodovanie investora pre projekt s nekonečným, ako aj s konečným časovým horizontom.

1 Teória

Reálne opcie sú alternatívnym pohľadom na investičné rozhodovanie k NPV (net present value). NPV je založené na porovnaní budúcich diskontovaných nákladov a príjmov. Ak príjmy prevyšujú náklady, NPV odporúča investovať, v opačnom prípade odporúča neinvestovať. Nevýhodou tohoto prístupu je, že neuvažuje o možnosti pozdržať rozhodnutie a počkať, ako sa vyvynie situácia. Významná je najmä v rizikovom prostredí, kde budúce príjmy nie sú deterministické a uvažuje sa ich stredná hodnota. Pre potrebu rozhodovania sa v neistom prostredí je vhodná teória reálnych opcií. Často totiž dokážeme odložením rozhodnutia získať vyššiu hodnotu NPV ako v súčasnosti.

Teória reálnych opcií je založená na predpoklade, že firma, ktorá sa rozhoduje či investovať do projektu, vlastní fiktívnu opciu na tento projekt. To znamená, že až do expiračného času opcie má možnosť kedykoľvek sa rozhodnúť, že do projektu investuje. Tento prístup sa po matematickej stránke podobá na teóriu amerických finančných call opcií. Narozdiel od finančných opcií, kde sa zameriavame najmä na výpočet ceny opcie, aby sme s nimi vedeli správne obchodovať, tu sa zameriavame najmä na výpočet investičného pravidla, ktoré nám povie, pri akej cene projektu sa oplatí investovať.

Ako prvý spomenul pojem reálna opcia vo svojom článku „Determinants of Corporate Borrowing" profesor Mayers. Základnou učebnicou reálnych opcií je [2]Investment under Uncertainty, ktorá okrem úvodu do problematiky a základného modelu ponúka aj mnohé jeho rozšírenia. Pre úvod do problematiky reálnych opcií odporúčam aj úvodnú časť práce [4]Real Options Applications for Strategic Investment Decisions, ako slovenský úvod časť práce [5]Analýza investičného rozhodovania pri uplatnení reálnej opcie. V tejto práci sa úvodom do teórie reálnych opcií zaoberať nebudeme, preto začiatočníkom v tejto oblasti odporúčam niektorú z hore uvedených prác.

V tejto kapitole načrtneme problém firmy, ktorá sa rozhoduje, kedy investovať do projektu. Vytvoríme matematický model, ktorý bude túto situáciu opisovať. Zavedieme pojmy rizikovo neutrálny investor, rizikovo averzný investor a k nim prislúchajúce funkcie užitočnosti. Následne s využitím literatúry, najmä [2]Investment under Uncertainty, ukážeme, ako sa dá takýto model riešiť pre rizikovo neutrálneho investora. Tento model označíme za základný model, ktorý budeme postupne modifikovať. Ukážeme aj alternatívny prístup k riešeniu modelu, ktorý budeme v ďalších kapitolách používať.

1.1 Formulácia úlohy a značenie

Najskôr si opíšeme situáciu, ktorú budeme modelovať. Predstavme si firmu bez kapitálu, ktorá má možnosť investovať do projektu. Táto možnosť nie je časovo obmedzená, môže sa rozhodnúť kedykoľvek. Projekt sa vyznačuje tým, že počas jeho trvania prináša spojito produkt, jednotku za rok, ktorý je okamžite predaný za jeho aktuálnu cenu P. Tvorba tohoto produktu si však vyžaduje náklady c za rok, taktiež vyplácané spojito. Firma však nemá žiadny kapitál, preto si na počiatočnú investíciu musí požičať. Počas priebehu projektu bude platiť spojito úroky ρ z investovanej sumy za rok. V prípade, že budeme uvažovať projekt na dobu T rokov, po ukončení projektu musí firma svoju pôžičku platiť. V tomto prípade je projekt po dobe T rokov bezcenný, neprináša žiadne ďalšie príjmy ani náklady. Našou úlohou je zistiť, ako sa má firma rozhodovať, či investovať alebo radšej počkať.

- I - počiatočná investícia
- P_t - aktuálna cena produktu v čase t
- c - náklady na výrobu produktu
- ρ - úroková sadzba, ktorou sa spojito úročí dlžná suma a tieto úroky sú platené

okamžite

- T - doba trvania projektu

Cena P_t nie je v čase konštantná. Jej vývoj budeme modelovať ako geometrický Brownov pohyb. To znamená, že cena produktu sa bude riadiť nasledujúcou diferenciálnou rovnicou

$$dP_t = \alpha P_t dt + \sigma P_t dW_t, \quad P_0 = P \geq 0$$

kde W_t je Wienerov proces a P je počiatočná hodnota procesu. Konštanta α je konštantou driftu geometrického Brownovho pohybu a σ je konštantou rozptylu geometrického Brownovho pohybu.

- P - počiatočná hodnota procesu P_t
- α - drift stochastického procesu ceny P_t
- σ - rozptyl stochastického procesu ceny P_t
- W_t - Wienerov proces

Pri riešení našej úlohy bude prvým krokom zistiť hodnotu projektu V, ktorá bude závisieť od aktuálnej ceny P. Pri tomto výpočte budeme potrebovať diskontovať budúce očakávané príjmy. K tomu potrebujeme úrokovú mieru, ktorou budeme diskontovať. Diskontovať budeme práve takou úrokovou mierou, za akú si vie firma požičať na tento projekt peniaze, teda úrokovou mierou ρ. Keďže v ďalších kapitolách budeme rozširovať tento model, dolný index hodnoty projektu bude značiť, či je projekt nekonečný alebo na dobu T rokov. Horný index bude značiť, či je firma neutrálna alebo averzná voči riziku. V základnom modeli predpokladáme rizikovú neutrálnosť firmy.

- $V(P)$ - hodnota projektu v závislosti od ceny produktu v čase ohodnotenia projektu
- $V_\infty^N(P)$ - hodnota nekonečne trvajúceho projektu pre rizikovo neutrálnu firmu, základný model

- $V_T^R(P)$ - hodnota projektu na T rokov pre rizikovo averznú firmu
- ρ - úroková miera používaná na diskontovanie

Ďalším krokom bude nájsť diferenciálnu rovnicu, ktorú musí spĺňať hodnota opcie F. Tá je taktiež funkciou aktuálnej ceny P. Potom určíme podmienky, ktoré musí riešenie diferenciálnej rovnice spĺňať pri cene, ktorá je hranicou firemného rozhodovania medzi čakaním a investovaním. To znamená, že akonáhle cena produktu dosiahne túto hranicu, firma by mala do projektu investovať. Pomocou týchto podmienok a diferenciálnej rovnice nájdeme hraničnú cenu pre investovanie do projektu a označíme ju horným a dolným indexom, podobne ako u hodnoty projektu. Dolný index podľa toho, či je projekt nekonečný alebo na dobu T rokov, horný index podľa toho, či je firma voči riziku neutrálna alebo averzná.

- $F(P)$ - hodnota opcie v závislosti od ceny produktu v čase ohodnotenia opcie
- P_∞^N - hraničná cena pre investovanie do nekonečne trvajúceho projektu pre rizikovo neutrálnu firmu, základný model
- P_T^R - hraničná cena pre investovanie pre projekt na T rokov a rizikovo averznú firmu

1.2 Funkcia užitočnosti

V tejto časti zhrnieme hlavné výsledky teórie rizikovej averznosti, ktoré sú potrebné pre našu modifikáciu modelu. Vychádzajúc zo zaužívanej funkcie užitočnosti rizikovo averzného investora sformulujeme funkciu užitočnosti, ktorá vyhovuje naším potrebám. Na záver ukážeme, že v súlade s výsledkami teórie rizikovej averznosti vyhovuje všetkým podmienkam a skutočne odzrkadľuje rizikovo averzného investora.

Teória rizikovej averznosti začala vznikať po uvedení hypotézy očakávanej užitočnosti autormi John von Neumann a Oskar Morgenstern [6] v roku 1944. Ekonómovia si ihneď

všimli možnosti využitia očakávanej užitočnosti v problémoch voľby portfólia, poistného a v mnohom ďalšom. Za využitie funkcie užitočnosti na odzrkadlenie rizikovej averznosti vďačíme najmä ekonómom Milton Friedman a Leonard J. Savage [3]. Pojem rizikovo averzný značí, že keď čelíme dvom ponukám s porovnateľným výnosom, tak si vyberieme menej rizikovú ponuku. Pre ilustráciu uvedieme príklad:
Investor dostane možnosť získať náhodne rozdelený zisk, konkrétne x_1 s pravdepodobnosťou p a x_2 s pravdepodobnosťou $1-p$, alebo možnosť získať strednú hodnotu tohoto zisku s istototu. Od rizikovo averzného investora očakávame, že bude preferovať druhú možnosť. Túto podmienku meme zapísať v tvare

$$U(px_1 + (1-p)x_2) = pU(x_1) + (1-p)U(x_2)$$

čo znamená, že funkcia užitočnosti pre rizikovo averzného investora by mala byť konkávna. Po tejto ilustrácii rizikovej averznosti uvedieme dva pre nás najpodstatnejšie výsledky teórie rizikovej averznosti. Prvá veta nám objasní vlastnosti funkcie užitočnosti pre rizikovo neutrálneho a rizikovo averzného investora [3].

Veta 1.2.1. *Nech $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia užitočnosti reprezentujúca preferencie $\preceq_u$ nad množinou M a je monotónne rastúca. Potom:*

- *u je konkávna práve vtedy, ak $\preceq_u$ vyjadruje rizikovú averznosť*
- *u je lineárna práve vtedy, ak $\preceq_u$ vyjadruje rizikovú neutrálnosť*
- *u je konvexná práve vtedy, ak $\preceq_u$ vyjadruje obľubu rizika*

Vďaka tejto vete vieme, že ľubovoľná rastúca a konkávna funkcia užitočnosti odzrkadľuje nejakého rizikovo averzného investora. Druhá veta nám umožní rozhodnúť medzi dvoma funkciami užitočnosti, ktorá predstavuje rizikovo averznejšieho investora [8].

Veta 1.2.2. *Nech $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sú dve rastúce, monotónne a dva krát diferencovateľné funckie užitočnosti reprezentujúce preferencie $\preceq_u$, respektíve $\preceq_v$ na množine M. Potom funkcia u má vyššiu mieru rizikovej averznosti ako funkcia v, ak*

$$\frac{-u''(x)}{u'(x)} > \frac{-v''(x)}{v'(x)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pre modelovanie rizikovo averzného investora budeme používať nasledovnú funkciu užitočnosti

$$U(X) = \frac{(X+C)^{1-R}}{1-R} - \frac{C^{1-R}}{1-R}, \qquad X > -C, \qquad 0 \leq R < 1$$

kde C vyjadrujú náklady, ktoré treba od príjmu P odpočítať, teda musí platiť $X = P - C$. V ďalšom texte tejto kapitoly vysvetlíme, prečo sme zvolili takýto tvar funkcie užitočnosti a dokážeme, že odzrkadľuje rizikovo averzného investora. Taktiež ukážeme, že voľbou parametra R môžeme meniť mieru rizikovej averznosti investora.

Úvahy o výbere funkcie užitočnosti pre rizikovo averzného investora sme začali s populárnou CRRA (constant relative risk aversion) funkciou užitočnosti, ktorá je definovaná nasledovne

$$u(X) = \frac{X^{1-R}}{1-R}, \qquad X > 0, \qquad 0 \leq R < 1$$

V našom modeli je zisk v danom roku počítaný ako rozdiel príjmov a nákladov, pričom príjmy sú nezáporné a náklady kladné, čo znamená, že zisk môže nadobúdať aj záporné hodnoty. Pre $X < 0$ však CRRA funkcia užitočnosti nie je definovaná, preto ju musíme upraviť. Chceme však zachovať niektoré jej vlastnosti, a preto sme sa rozhodli modifikovať ju do nasledovného tvaru

$$U(X) = \frac{(X+C)^{1-R}}{1-R} - \frac{C^{1-R}}{1-R}, \qquad X > -C, \qquad 0 \leq R < 1$$

kde C sú náklady, P náklady a platí,$X = P - C$. Funkciu užitočnosti vieme zapísať aj v tvare

$$U(X) = \frac{P^{1-R}}{1-R} - \frac{C^{1-R}}{1-R}, \qquad X = P - C, \qquad P > 0, \qquad C > 0$$

Tento zápis sme spravili len pre lepšiu ilustráciu toho, ako budeme počítať v modeli užitočnosť z príjmov a nákladov v jednotlivých obdobiach. Pozrime sa však na vlastnosti našej funkcie užitočnosti. Aby sme ukázali, že odzrkadľuje rizikovo averzného investora, treba dokázať jej konkávnosť na celom definičnom obore. To ukážeme pomocou druhej derivácie

$$U''(X) = -R\,(X+C)^{-(1+R)} < 0, \qquad X > -C$$

Druhá derivácia funkcie je záporná na celom definičnom obore, čiže je konkávna. Ďalšou vlastnosťou, ktorú by sme chceli, aby si od pôvodnej CRRA funkcii ponechala, je že voľbou parametra R môžeme diverzifikovať mieru rizikovej averznosti investora. Aby sme ukázali, že zväčšením parametra R zväčšíme rizikovú averznosť investora, ktorého funkcia užitočnosti odzrkadľuje, využijeme vetu 1.2.2. Ukážeme, že naša funkcia užitočnosti s dvoma parametrami $R_1 > R_2$ vyhovuje tejto vete na svojom definičnom obore. K tomu potrebujeme poznať prvú a druhú deriváciu našej funkcie užitočnosti.

$$U(X) = \frac{(X+C)^{1-R}}{1-R} - \frac{C^{1-R}}{1-R}$$
$$U'(X) = (X+C)^{-R}$$
$$U''(X) = -R\,(X+C)^{-(1+R)}$$

Teraz ukážeme, že ak $R_1 > R_2$, tak parameter R_1 vyjadruje spolu s našou funkciou užitočnosti rizikovo averznejšieho investora ako parameter R_2.

$$\frac{-U_1''(x)}{U_1'(x)} = \frac{R_1\,(X+C)^{-(1+R_1)}}{(X+C)^{-R_1}} = \frac{R_1}{X+C}$$
$$\frac{-U_2''(x)}{U_2'(x)} = \frac{R_2\,(X+C)^{-(1+R_2)}}{(X+C)^{-R_2}} = \frac{R_2}{X+C}$$
$$\frac{R_1}{X+C} > \frac{R_2}{X+C}, \qquad \forall X > -C$$

V tejto časti sme ukázali, že $U(X)$ je funkciou užitočnosti rizikového investora a voľbou parametra R teda môžeme rozlišovať mieru rizikovej averznosi investora. Čím je investor rizikovo averznejší, tým väčší parameter pre neho zvolíme. Ako vidíme, pre $R = 0$ nadobúda naša funkcia užitočnosti tvar $U(X) = X$. Keďže je to lineárna funkcia, odzrkadľuje rizikovo neutrálneho investora. V ďalších výpočtoch budeme počítať užitošnosť budúcich príjmov, pričom túto užitočnosť budeme diskonotvať úrokovou mierou ρ do súčasnosti. To však neovplyvňuje vlastnosti tejto funkcie a ostávajú naďalej platné.

1.3 Výpočet hodnoty projektu

Na to, aby sme odvodili investičné pravidlo pre investora, potrebujeme poznať hodnotu projektu v závislosti od aktuálnej ceny. V tejto časti túto hodnotu projektu v základnom modeli vypočítame, pričom sme sa inšpirovali knihou [2]Investment under Uncertainty. Investor je rizikovo neutrálny a projekt je na nekonečný časový horizont. Nájdeme diferenciálnu rovnicu, ktorú musí hodnota projektu spĺňať a vyriešime ju. Pomocou podmienok, ktoré musí hodnota projektu spĺňať, nájdeme jediné riešenie pre hodnotu projektu.

Prvou podmienkou je $\lim\limits_{P\to 0} V(P) = -\left(\frac{c}{\rho} + I\right)$. Ak je $P = 0$, z rovnice pre správanie sa stochastického procesu P_t vyplýva, že ostane navždy 0. Ak bude cena produktu, ktorý nám projekt vyrába, vždy 0, tak projekt nám prináša len náklady c a potrebu platiť úroky z investovanej sumy. Keďže tento cashflow je už deterministický, na zistenie hodnoty projektu nám stačí zintegrovať zdiskontované budúce náklady.

$$\lim_{P\to 0} V(P) = \int_0^\infty -e^{-\rho t}\left(c + \rho I\right) dt = -\left(c + \rho I\right)\left[\frac{e^{-\rho t}}{-\rho}\right]_0^\infty =$$
$$= -\left(\frac{c}{\rho} + I\right)$$

Ak P_t rastie, obchodníci majú tendenciu nadhodnotiť hodnotu projektu, v domnení že cena bude naďalej rásť a bude to pre nich výhodné. Hodnota projektu by sa však takýmto špekuláciám mala vyvarovať. Preto budeme požadovať, aby hodnota projektu spĺňala druhú podmienku $\lim\limits_{P\to\infty} |V'(P)| < \infty$. Chceme iba, aby hodnota projektu aj pre veľké P

rástla len vďaka nárastu očakávaných budúcich príjmov.

Prikročme teda k hľadaniu diferenciálnej rovnice pre hodnotu projektu. Vieme ju v čase t vyjadriť ako kapitálový zisk z projektu za čas dt a očakávanú zdiskontovanú hodnotu projektu v čase $t + dt$. Keďže za rok z projektu získame jednu jednotku produktu v hodnote P a musíme zaplatiť náklady c a úroky z investovanej sumy, tak za čas dt nám projekt prinesie $(P - c - \rho I)\,dt$. To znamená, že hodnotu projektu vieme zapísať ako

$$V(P) = (P - c - \rho I)\,dt + E_p\left[e^{-\rho dt} V(P + dP)\right]$$

Rovnicu upravíme

$$\begin{aligned} V(P) - e^{-\rho dt} V(P) &= (P - c - \rho I)\,dt + E_p\left[e^{-\rho dt} V(P + dP)\right] - e^{-\rho dt} V(P) \\ (1 - e^{-\rho dt}) V(P) &= (P - c - \rho I)\,dt + e^{-\rho dt}\left(E_p[V(P + dP) - V(P)]\right) \end{aligned}$$

Na rozvitie výrazu $V(P+dP)-V(P) = dV$ do Taylorovho rozvoja použijeme Itôvu lemu.

Veta 1.3.1. *Itôva lema Nech x_t je Itôv proces $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dW$ a $f(x,t) \in C^2(\mathbb{R}\times <0,\infty))$. Potom prvý diferenciál funckie $f(x_t,t)$ je daný vzťahom*

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2(x,t)dt$$

Dostávame

$$E_p[dV] = E_p\left[V'(P)dP + \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P)dt + O(dt)\right]$$

kde člen $O(dt)$ zahŕňa členy, ktoré idú k nule rýchlejšie ako dt.

Využijeme rovnicu $dP = \alpha P dt + \sigma P dW$

$$E_p[dV] = E_p\left[\alpha P V'(P)dt + \sigma P V'(P)dW + \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P)dt + O(dt)\right]$$

Teraz využijeme vlastnosť Wienerovho procesu $E_p[dW] = 0$

$$E_p[dV] = \alpha P V'(P)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 V''(P)dt + O(dt)$$

Dosadíme do pôvodnej rovnice a vydelíme rovnicu dt

$$\frac{1-e^{-\rho dt}}{dt}V(P) = (P-c-\rho I) + e^{-\rho dt}\left(\alpha PV'(P) + \frac{1}{2}\sigma^2P^2V''(P) + \frac{O(dt)}{dt}\right)$$

Pošleme $dt \to 0$, pričom využijeme, že $\frac{O(dt)}{dt} \to 0$, $e^{-\rho dt} \to 1$ a $\frac{(1-e^{-\rho dt})}{dt} \to \rho$ a dostávame

$$\rho V(P) = P - c - \rho I + \alpha PV'(P) + \frac{1}{2}\sigma^2P^2V''(P)$$
$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2P^2V''(P) + \alpha PV'(P) - \rho V(P) + P - c - \rho I$$

Hodnota projektu teda musí spĺňať horeuvedenú diferenciálnu rovnicu. Dosadením si môžeme overiť, že jednoduchým riešením homogénnej časti diferenciálnej rovnice je $V_H(P) = AP^\beta$, kde β je riešením nasledujúcej kvadratickej rovnice

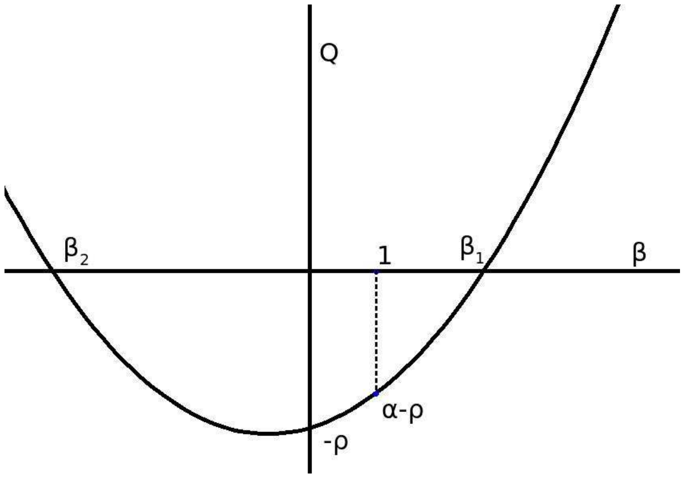
$$Q(\beta) = \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \alpha\beta - \rho = 0$$

Riešením kvadratickej rovnice dostávame dve riešenia pre parameter β

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}}$$
$$\beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}}$$

Z grafického znázornenia kvadratickej funkcie Q odvodíme niektoré vlastnosti týchto dvoch riešení. Keďže pri β^2 je kladný koeficient $\frac{1}{2}\sigma^2$, tak $Q(\beta) \to \infty$ ak $\beta \to \pm\infty$. Ďalej vieme, že $Q(1) = -\rho < 0$ a $Q(0) = \alpha - \rho < 0$, keďže $\rho > \alpha$. Z toho je zrejmé, že kvadratická funkcia $Q(\beta)$ má jeden kladný a jeden záporný koreň, čo vidieť aj na obrázku 1.1. Z tvaru β_1 a β_2 ľahko vidieť, že $\beta_1 > \beta_2$, a teda $\beta_1 > 0 > \beta_2$. Z obrázka ešte vidieť, že $\beta_1 > 1$. Všeobecným riešením homogénnej časti diferenciálnej rovnice je $V_H(P) = A_1P^{\beta_1} + A_2P^{\beta_2}$ s parametrami A_1 a A_2. Aby sme dostali všeobecné riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice, musíme k nemu ešte pripočítať ľubovoľné riešenie rovnice. Najjednoduchším riešením je $V(P) = \frac{P}{\rho-\alpha} - \left(\frac{c}{\rho} + I\right)$. Všeobecným riešením teda je

$$V(P) = A_1P^{\beta_1} + A_2P^{\beta_2} + \frac{P}{\rho-\alpha} - \left(\frac{c}{\rho} + I\right)$$



Obr. 1.1: Kvadratická funkcia $Q(\beta)$

Vráťme sa k podmienkam, ktorých splnenie vyžadujeme od hodnoty projektu. Spomenuli sme ich v úvode tejto časti. Prvá podmienka je $\lim\limits_{P\to 0} V(P) = -\left(\frac{c}{\rho} + I\right)$. Keďže $\beta_2 < 0$, tak $P^{\beta_2} \to \infty$ ak $P \to 0$. Teda musí platiť $A_2 = 0$.

Keďže $\beta_1 > 1$, po zderivovaní hodnoty projektu zistíme, že $\lim_{P\to\infty} V'(P) = \infty$. To je v rozpore s druhou podmienkou. Vidíme, že ak bude P veľké, tak $A_1 P^{\beta_1} \gg \frac{P}{\rho-\alpha} - \left(\frac{c}{\rho} + I\right)$. Pričom práve člen na pravej strane nerovnice vyjadruje očakávané budúce zdiskontované príjmy z projektu. Keďže chceme, aby aj pre veľké hodnoty P hodnota projektu vyjadrovala očakávané príjmy z projektu, určíme $A_1 = 0$. Dostávame teda výsledný tvar pre hodnotu projektu

$$V_N^{\infty}(P) = \frac{P}{\rho - \alpha} - \left(\frac{c}{\rho} + I\right)$$

1.4 Alternatívny prístup k výpočtu hodnoty projektu

V tejto časti si priblížime alternatívny výpočet hodnoty projektu. Jednoducho zintegrujeme diskontované očakávané budúce príjmy. Aby sme vedeli spočítať očakávané príjmy v čase t, potrebujeme poznať pravdepodobnostné rozdelenie ceny P_t v čase t. Keďže P sa riadi diferenciálnou rovnicou

$$dP_t = \alpha P_t dt + \sigma P_t dW_t,\ P_0 = P \geq 0$$

kde W_t je Wiennerov proces, tak P_t pre daný čas t pochádza z lognormálneho rozdelenia a hustota rozdelenia P_t je

$$f\left(P_t\right) = \frac{1}{P_t \sigma \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\left(\ln \frac{P_t}{P} - \left[\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right] t\right)^2}{2\sigma^2 t}}$$

Ako sme už vysvetlili v časti 1.3, za čas dt nám projekt prinesie zisk $\left(P_t - c - \rho I\right) dt$. Hodnota projektu sa teda bude rovnať

$$V_N^{\infty}(P) = E_p\left(\int_0^{\infty} e^{-\rho t}(P_t - c - \rho I) dt\right)$$

Strednú hodnotu prepíšeme do integrálu a zameníme poradie integrovania.

$$V_N^{\infty}(P) = E_p\left(\int_0^{\infty} e^{-\rho t}(P_t - c - \rho I) dt\right) = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-\rho t}(P_t - c - \rho I) dt\right) f\left(P_t\right) dP_t =$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\left(\int_0^{\infty}\left(P_t - c - \rho I\right) f\left(P_t\right) dP_t\right) dt$$

Teraz môžeme pristúpiť k výpočtu hodnoty projektu. Ako prvé spočítame vnútorný integrál, následne spočítame celú hodnotu projektu.

Tvrdenie 1.4.1.

$$\int_0^{\infty}\left(P_t - c - \rho I\right) f\left(P_t\right) dP_t = P e^{\alpha t} - c - \rho I$$

Dôkaz.

$$\int_0^{\infty}\left(P_t - c - \rho I\right) f\left(P_t\right) dP_t = \int_0^{\infty} P_t f\left(P_t\right) dP_t - (c + \rho I)\int_0^{\infty} f\left(P_t\right) dP_t =$$
$$= \int_0^{\infty} P_t f\left(P_t\right) dP_t - c - \rho I = \int_0^{\infty} P_t \frac{1}{P_t \sigma \sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\left(\ln P_t - \ln P - \left[\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right] t\right)^2}{2\sigma^2 t}} dP_t - c - \rho I$$

Použijeme substitúciu $y = \ln P_t$

$$\int_0^\infty P_t \frac{1}{P_t\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\left(\ln P_t - \ln P - \left[\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right]t\right)^2}{2\sigma^2 t}} dP_t - c - \rho I = \left| \begin{array}{l} y = \ln P_t \\ e^y = P_t \\ dy = \frac{1}{P_t} dP_t \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^y \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\left(y - \ln P - \left[\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right]t\right)^2}{2\sigma^2 t}} dy - c - \rho I =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2 - 2y\left[\ln P + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] + \left[\ln P + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]^2 - 2\sigma^2 t y}{2\sigma^2 t}} dy - c - \rho I =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2 - 2y\left[\sigma^2 t + \ln P + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] + \left[\ln P + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]^2}{2\sigma^2 t}} dy - c - \rho I =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2 - 2y\left[\ln P + \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right] + \left[\ln P + \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]^2 + 2\ln P\left[\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right]t - 2\ln P\left[\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right] - 2\alpha\sigma^2 t^2}{2\sigma^2 t}} dy - c - \rho I =$$

$$= e^{\frac{2\sigma^2 t \ln P + 2\alpha\sigma^2 t}{2\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{\left(y - \left[\ln P + \left(\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]\right)^2}{2\sigma^2 t}} dy - c - \rho I =$$

$$= e^{\ln P + \alpha t} - c - \rho I = Pe^{\alpha t} - c - \rho I \qquad \square$$

Pomocou uvedeného tvrdenia spočítame hodnotu projektu s nekonečným časovým horizontom pre rizikovo neutrálneho investora.

Tvrdenie 1.4.2.

$$V_N^\infty(P) = \frac{P}{\rho - \alpha} - \frac{c}{\rho} - I$$

Dôkaz.

$$V_N^\infty(P) = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left(\int_0^\infty (P_t - c - \rho I) f(P_t) dP_t \right) dt = \int_0^\infty e^{-\rho t} \left(Pe^{\alpha t} - c - \rho I \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty Pe^{-(\rho - \alpha)t} dt - (c + \rho I) \int_0^\infty e^{-\rho t} dt = P \left[\frac{e^{-(\rho-\alpha)t}}{-(\rho - \alpha)} \right]_0^\infty - (c + \rho I) \left[\frac{e^{-\rho t}}{-\rho} \right]_0^\infty =$$

$$= P\left(0 + \frac{1}{\rho - \alpha}\right) - (c + \rho I)\left(0 + \frac{1}{\rho}\right) = \frac{P}{\rho - \alpha} - \frac{c}{\rho} - I \qquad \square$$

V ďalších rozšíreniach modelu budeme používať tento prístup k výpočtu hodnoty projektu.

1.5 Hodnota opcie a investičné pravidlo investora

Ďalším krokom k nájdeniu investičného pravidla je nájsť diferenciálnu rovnicu pre možnosť investovať do projektu-opciu. Po uplatnení opcie, teda po investovaní do projektu, sa jej hodnota bude rovnať hodnote projektu. Po uplatnení opcie nám totiž opcia už neponúka inú možnosť ako vlastniť projekt. Dovtedy nám však ponúka možnosť rozhodnúť sa, či ju uplatníme alebo s týmto krokom počkáme. V [2]Investment under Uncertainty autori ukázali, že pre takýto typ úlohy je oblasť, na ktorej sa nám oplatí neinvestovať a ponechať si opciu v tvare $P < P^*$, kde P^* je investičné pravidlo investora. Kým je cena produktu menšia ako toto investičné pravidlo, investor opciu neuplatňuje. Akonáhe cena produktu dosiahne túto hraničnú hodnotu, investor opciu uplatní a investuje do projektu. Po uplatnení, ako sme už spomenuli, bude hodnota opcie rovná hodnote projektu. Preto potrebujeme nájsť hodnotu opcie len do momentu uplatnenia. Hodnotu opcie označíme F. Kým sme opciu na projekt neuplatnili, neprináša nám žiadny cashflow. Podobne ako v časti 1.3 určíme hodnotu opcie v čase t ako súčet kapitálového zisku za čas dt a očakávanú zdiskontovanú hodnotu opcie v čase $t + dt$, akurát kapitálový zisk z držania opcie je nulový.

$$F(P) = E_p[e^{-\rho dt} F(P + dP)]$$

Rovnicu rovnako ako v časti 1.3 upravíme, použijeme Itôvu lemu, vydelíme dt a pošleme $dt \to 0$.

$$
\begin{aligned}
F(P) - e^{-\rho dt}F(P) &= e^{-\rho dt}\left(E_p\left[F(P+dP) - F(P)\right]\right)\\
\left(1 - e^{-\rho dt}\right)F(P) &= e^{-\rho dt}\left(E_p\left[F'(P)dP + \frac{1}{2}\sigma^2P^2F''(P)dt + O(dt)\right]\right)\\
\left(1 - e^{-\rho dt}\right)F(P) &= e^{-\rho dt}\left(E_p\left[\alpha PF'(P)dt + \sigma PF'(P)dW + \frac{1}{2}\sigma^2P^2F''(P)dt + O(dt)\right]\right)\\
\left(1 - e^{-\rho dt}\right)F(P) &= e^{-\rho dt}\left(\alpha PF'(P)dt + \frac{1}{2}\sigma^2P^2F''(P)dt + O(dt)\right)\\
\frac{1 - e^{-\rho dt}}{dt}F(P) &= e^{-\rho dt}\left(\alpha PF'(P) + \frac{1}{2}\sigma^2P^2F''(P) + \frac{O(dt)}{dt}\right)\\
\rho F(P) &= \alpha PF'(P) + \frac{1}{2}\sigma^2P^2F''(P)\\
0 &= \frac{1}{2}\sigma^2P^2F''(P) + \alpha PF'(P) - \rho F(P)
\end{aligned}
$$

Navyše od hodnoty opcie očakávame, že bude spĺňať nasledujúce podmienky (nazveme ich okrajové):

- Ak je cena $P = 0$, tak hodnota opcie na realizovanie projektu je nulová $\lim\limits_{P\to 0} F(P) = 0$
  Ak je totiž cena $P = 0$, tak z definície geometrického Brownovho pohybu ostane navždy $P = 0$. Potom by nám projekt prinášal iba straty, čo znamená, že do takého projektu by sme investovať nikdy nechceli. Preto hodnota možnosti investovania do takého projektu je $\lim\limits_{P\to 0} F(P) = 0$

- V čase uplatnenia opcie bude mať hodnotu rovnú hodnote projektu $F(P^*) = V(P^*)$
  Túto podmienku sme si vysvetlili v úvode tejto časti. Opciu využijeme až keď sa hodnota projektu vyrovná hodnote opcie.

- V čase uplatnenia opcie sa hodnota opcie hladko napojí na hodnotu projektu $F'(P^*) = V'(P^*)$
  Táto podmienka je čisto matematická, aby sa hodnota opcie v čase uplatnenia hladko napojila na hodnotu projektu

V časti 1.3 sme hľadali všeobecné riešenie homogénnej časti diferenciálnej rovnice, ktorá je totožná s diferenciálnou rovnicou pre F. Odvodili sme, že všeobecným riešením je $F(P) = A_1 P^{\beta_1} + A_2 P^{\beta_2}$, kde β_1 a β_2 sú riešením kvadratickej rovnice

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta - 1) + \alpha\beta - \rho = 0$$

Tak ako aj v časti 1.3, jedno riešenie kvadratickej rovnice je kladné a druhé záporné. Označme β_1 kladné riešenie rovnice a β_2 záporné riešenie. Z podmienky $\lim_{P\to 0} F(P) = 0$, rovnako ako aj v časti 1.3 vyplýva, že $A_2 = 0$. Keďže aj v ďalšom texte pri diferenciálnej rovnici pre hodnotu opcie budeme mať podmienku $\lim_{P\to 0} F(P) = 0$, od tejto chvíle budeme za všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice pre hodnotu opcie uvažovať $F(P) = AP^{\beta}$, kde β je kladným riešením horeuvedenej kvadratickej rovnice. Toto riešenie už spĺňa prvú okrajovú podmienku, preto sa v ďalšom texte ňou už nebudeme zaoberať. Pomocou podmienok pre hodnotu opcie v čase uplatnenia nájdeme investičné pravidlo P_N^{∞}, t.j. cenu produktu, pri ktorej sa hodnota projektu vyrovná hodnote opcie. Akonáhle sa cena produktu dostane na túto hranicu, firma sa rozhodne do projektu investovať.

Tvrdenie 1.5.1.

$$P_N^{\infty} = \frac{\beta}{\beta - 1}(\rho - \alpha)\left(\frac{c}{\rho} + I\right)$$

Dôkaz. Ukážeme, že ak má P spĺňať okrajové podmienky, tak musí byť rovné P_N^{∞} v tvrdení. Naše okrajové podmienky sú

$$AP^{\beta} = \frac{P}{\rho - \alpha} - \frac{c}{\rho} - I$$
$$\beta AP^{\beta - 1} = \frac{1}{\rho - \alpha}$$

Upravíme prvú okrajovú podmienku vynásobením β

$$\beta AP^{\beta} = \frac{\beta P}{\rho - \alpha} - \frac{\beta c}{\rho} - \beta I$$

Druhú okrajovú podmienku vynásobíme P

$$\beta AP^{\beta} = \frac{P}{\rho - \alpha}$$

Obe rovnice dáme do rovnosti a upravíme

$$\begin{aligned}
\frac{\beta P}{\rho-\alpha} - \frac{\beta c}{\rho} - \beta I &= \frac{P}{\rho-\alpha} \\
\frac{\beta-1}{\rho-\alpha} P &= \beta\left(\frac{c}{\rho} + I\right) \\
P &= \frac{\beta}{\beta-1}(\rho-\alpha)\left(\frac{c}{\rho} + I\right)
\end{aligned}$$

□

2 Projekt s nekonečným časovým horizontom

V tejto kapitole sa budeme zaoberať možnosťou firmy investova do projektu, ktorý jej po investovaní do neho bude prinášať produkt do nekonečna. Pokiaľ uvažujeme rizikovo neutrálneho investora, tento model sme riešili v kapitole 1. Zhrnieme si výsledky tohoto modelu a následne vyriešime model pre rizikovo averzného investora súlade s tým, čo sme o rizikovej averznosti napísali v časti 1.2.

V kapitole 1 sme pre rizikovo neutrálneho investora a projekt s nekonečným časovým horizontom vypočítali hodnotu projektu $V_N^\infty(P)$ a investičné pravidlo P_N^∞.

$$\begin{aligned} V_N^\infty(P) &= \frac{P}{\rho-\alpha} - \frac{c}{\rho} - I \\ P_N^\infty &= \frac{\beta}{\beta-1}(\rho-\alpha)\left(\frac{c}{\rho}+I\right) \end{aligned}$$

2.1 Hodnota projektu pre rizikovo averzného investora

Pre rizikovo averzného investora v súlade s časťou 1.2 budeme miesto zisku $P - c - \rho I$ uvažovať užitočnosť tohoto zisku, teda

$$\frac{P^{1-R}}{1-R} - \frac{(c+\rho I)^{1-R}}{1-R}$$

Hodnotou projektu teda bude očakávaná budúca diskontovaná užitočnosť

$$V_R^\infty(P) = E_p\left(\int_0^\infty e^{-\rho t}\left\{\frac{P_t^{1-R}}{1-R} - \frac{(c+\rho I)^{1-R}}{1-R}\right\}dt\right)$$

Keďže z časti 1.4 vieme, že P_t v konkrétnom čase t pochádza z lognormálneho rozdelenia, prepíšeme strednú hodnotu na integrál a zameníme poradie integrovania.

$$\begin{aligned}
V_R^{\infty}(P) &= E_p\left(\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\left\{\frac{P_t^{1-R}}{1-R}-\frac{(c+\rho I)^{1-R}}{1-R}\right\}dt\right) = \\
&= \int\limits_0^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\left\{\frac{P_t^{1-R}}{1-R}-\frac{(c+\rho I)^{1-R}}{1-R}\right\}dt\right) f\left(P_t\right)dP_t = \\
&= \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{P_t^{1-R}}{1-R}f\left(P_t\right)dP_t\right)dt - \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\frac{(c+\rho I)^{1-R}}{1-R}dt
\end{aligned}$$

Vypočítame integrál strednej hodnoty P_t.

Tvrdenie 2.1.1.

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{P_t^{1-R}}{1-R}f\left(P_t\right)dP_t = \frac{e^{(\ln P+\alpha t)(1-R)-\frac{1}{2}\sigma^2 tR(1-R)}}{1-R}$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{\infty}\frac{P_t^{1-R}}{1-R}f\left(P_t\right)dP_t = \int\limits_0^{\infty}\frac{P_t^{1-R}}{1-R}\frac{1}{P_t\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{\left(\ln P_t-\ln P-\left[\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right]t\right)^2}{2\sigma^2 t}}dP_t = \\
&= \left|\begin{array}{l} y=\ln P_t \\ e^y = P_t \\ dy = \frac{1}{P_t}dP_t \end{array}\right| = \frac{1}{1-R}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{y(1-R)}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{\left(y-\ln P-\left[\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right]t\right)^2}{2\sigma^2 t}}dy = \\
&= \frac{1}{1-R}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{\left(y-\ln P-\left[\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right]t\right)^2}{2\sigma^2 t}+\frac{y(1-R)2\sigma^2 t}{2\sigma^2 t}}dy =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1-R}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2-2y\left(\ln P+\left[\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right]t+(1-R)\sigma^2 t\right)+\left(\ln P+\left[\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right]t\right)^2}{2\sigma^2 t}}dy =$$

$$= \frac{1}{1-R}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2-2y\left(\ln P+\left[\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right]t+(1-R)\sigma^2 t\right)+\left(\ln P+\left[\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right]t+(1-R)\sigma^2 t\right)^2}{2\sigma^2 t}}$$

$$\frac{-2\left(\ln P+\left[\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right]t\right)(1-R)\sigma^2 t-(1-R)^2\sigma^4 t^2}{2\sigma^2 t}dy =$$

$$= \frac{1}{1-R}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{\left(y-\ln P-\left[\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right]t-(1-R)\sigma^2 t\right)^2}{2\sigma^2 t}}dy}_{1}\, e^{\frac{2\left(\ln P+\left[\alpha-\frac{1}{2}\sigma^2\right]t\right)(1-R)\sigma^2 t+(1-R)^2\sigma^4 t^2}{2\sigma^2 t}}$$

$$= \frac{1}{1-R}e^{\left(\ln P+\alpha t-\frac{1}{2}\sigma^2 t\right)(1-R)+\frac{(1-R)^2\sigma^2 t}{2}} = \frac{e^{(\ln P+\alpha t)(1-R)-\frac{1}{2}\sigma^2 tR(1-R)}}{1-R} \qquad \square$$

Pomocou predchádzajúceho tvrdenia vypočítame hodnotu projektu s nekonečným časovým horizontom pre rizikovo averzného investora.

Tvrdenie 2.1.2.

$$V_R^{\infty}(P) = \frac{P^{1-R}}{1-R}\frac{1}{\rho-\alpha\,(1-R)+\frac{1}{2}\sigma^2 R\,(1-R)} - \frac{(c+\rho I)^{1-R}}{\rho\,(1-R)}$$

Dôkaz. Pri dôkaze budeme vychádzať z

$$V_R^{\infty}(P_t) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\left(\int\limits_0^{\infty}\frac{P_t^{1-R}}{1-R}f\left(P_t\right)dP_t\right)dt - \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\frac{(c+\rho I)^{1-R}}{1-R}dt$$

Postupne spočítame oba integrály. Pri prvom využijeme predchádzajúce tvrdenie

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{P_t^{1-R}}{1-R}f\left(P_t\right)dP_t = \frac{e^{(\ln P+\alpha t)(1-R)-\frac{1}{2}\sigma^2 tR(1-R)}}{1-R}$$

Dostávame teda

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\frac{e^{(\ln P+\alpha t)(1-R)-\frac{1}{2}\sigma^2 tR(1-R)}}{1-R}dt =$$

$$= \frac{P^{1-R}}{1-R}\int\limits_0^{\infty} e^{-t\left[\rho-\alpha(1-R)+\frac{1}{2}\sigma^2 R(1-R)\right]}dt = \frac{P^{1-R}}{1-R}\left[\frac{e^{-t[\ldots]}}{-[\ldots]}\right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{P^{1-R}}{1-R}\frac{1}{\rho-\alpha\,(1-R)+\frac{1}{2}\sigma^2 R\,(1-R)}$$

Druhý integrál je jednoduchší

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{(c+\rho I)^{1-R}}{1-R}dt = \frac{(c+\rho I)^{1-R}}{1-R}\left[\frac{e^{-\rho t}}{-\rho}\right]_0^\infty = \frac{(c+\rho I)^{1-R}}{\rho(1-R)}$$

$\square$

Teraz ukážeme, že hodnotu projektu vieme zapísať aj v tvare, s ktorým sa nám bude lepšie počítať pri hľadaní riešenia diferenciálnej rovnice pre hodnotu opcie.

Tvrdenie 2.1.3.

$$\frac{1}{\rho-\alpha(1-R)+\frac{1}{2}\sigma^2 R(1-R)} = \frac{\beta\gamma}{\rho(1-\gamma-R)(1-\beta-R)}$$

kde $\gamma = \frac{-2\rho}{\beta\sigma^2}$ *a* β *je kladným riešením* $\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+\alpha\beta-\rho=0$

Dôkaz. Kvadratickú rovnicu vynásobíme výrazom $\frac{2}{\beta\sigma^2}$ a využijeme, že $\gamma = \frac{-2\rho}{\beta\sigma^2}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)+\alpha\beta-\rho=0\\
&(\beta-1)+\frac{2\alpha}{\sigma^2}-\frac{2\rho}{\beta\sigma^2}=0\\
&\beta+\gamma=1-\frac{2\alpha}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

Z rovnice pre γ dostaneme $\beta\gamma = \frac{-2\rho}{\sigma^2}$. Teraz budeme upravovať pravú stranu rovnice, ktorú chceme dokázať. Využijeme pri tom $\beta\gamma = \frac{-2\rho}{\sigma^2}$ a $\beta+\gamma = 1-\frac{2\alpha}{\sigma^2}$

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta\gamma}{\rho(1-\gamma-R)(1-\beta-R)} = \frac{\frac{-2\rho}{\sigma^2}}{\rho[1-\beta-R-\gamma+\beta\gamma-R+\beta R+R^2]} =\\
&= \frac{\frac{2}{\sigma^2}}{(\beta+\gamma)-R(\beta+\gamma)-\beta\gamma-(1-2R+R^2)} = \frac{\frac{2}{\sigma^2}}{(1-R)(\beta+\gamma)-\beta\gamma-(1-R)^2} =\\
&= \frac{\frac{2}{\sigma^2}}{(1-R)\left(1-\frac{2\alpha}{\sigma^2}\right)+\frac{2\rho}{\sigma^2}-(1-R)^2} = \frac{1}{\rho-\alpha(1-R)+\frac{\sigma^2}{2}(1-R)-\frac{\sigma^2}{2}(1-R)} =\\
&= \frac{1}{\rho-\alpha(1-R)+\frac{\sigma^2}{2}(1-R)(1-1+R)} = \frac{1}{\rho-\alpha(1-R)+\frac{\sigma^2}{2}R(1-R)}
\end{aligned}$$

$\square$

Poznámka: Keďže kvadratická rovnica v tomto tvrdení je totožná s kvadratickou rovnicou v častiach 1.3 a 1.5, jedným z jej riešení je aj $\beta_1 > 1$, ktoré sme vypočítali v časti 1.3

a následne ho pre ďalší text v časti 1.5 označili β. To znamená, že aj vo vyjardení hodnoty opcie v časti 1.5 aj v predchádzajúcom tvrdení môžeme použijeme zhodnú β, ktorá je vyjadrená v časti 1.3 ako β_1. Potom $\gamma = \frac{-2\rho}{\beta\sigma^2}$. Použitím tohoto tvrdenia dostaneme

$$V_R^\infty(P) = \frac{\beta\gamma P^{1-R}}{\rho\,(1-R)\,(1-\gamma-R)\,(1-\beta-R)} - \frac{(c+\rho I)^{1-R}}{\rho\,(1-R)}$$

2.2 Investičné pravidlo rizikovo averzného investora

V tejto časti s využitím poznatkov z častí 1.5 a 2.1 vyriešime diferenciálnu rovnicu pre hodnotu opcie pre rizikovo averzného investora a projekt s nekonečným časovým horizontom. Pod pojmom vyriešime chápeme, že pre tohoto investora nájdeme investičné pravidlo P_R^∞, t.j. hranicu, ktorú keď cena produktu dosiahne, investor sa rozhodne investovať do projektu.

Možnosť investovať, ktorú má firma, je rovnaká ako v 1.5. Preto bude hodnota tejto opcie riešením nasledujúcej diferenciálnej rovnice s okrajovými podmienkami.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F''(P) + \alpha P F'(P) - \rho F(P) = 0 \tag{2.1}$$

$$F(P_R^\infty) = V_R^\infty(P_R^\infty)$$

$$F'(P_R^\infty) = V_R^{\infty\prime}(P_R^\infty)$$

V 1.5 sme odvodili, že všeobecným riešením diferenciálnej rovnice s využitím podmienky $\lim_{P\to 0} F(P) = 0$, je $F(P) = AP^\beta$, kde β je kladným riešením kvadratickej rovnice

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta\,(\beta-1) + \alpha\beta - \rho = 0$$

Pripomeňme, že táto rovnica je identická s rovnicou v tvrdení 2.1.3 a teda β je totožná pre hodnotu projektu aj riešenie diferenciálnej rovnice pre hodnotu opcie. Pomocou okrajových podmienok nájdeme ivestičné pravidlo P_R^∞. Akonáhle bude cena produktu rovná P_R^∞, firma sa rozhodne investovať do projektu.

Tvrdenie 2.2.1.

$$P_R^{\infty} = \left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}} (c+\rho I)$$

Dôkaz. Ukážeme, že ak má P spĺňať okrajové podmienky, tak musí byť rovné P_R^{∞} v tvrdení. Naše okrajové podmienky sú

$$\begin{aligned}
AP^{\beta} &= \frac{\beta\gamma P^{1-R}}{\rho(1-R)(1-\gamma-R)(1-\beta-R)} - \frac{(c+\rho I)^{1-R}}{\rho(1-R)} \\
\beta AP^{\beta-1} &= \frac{(1-R)\beta\gamma P^{-R}}{\rho(1-R)(1-\gamma-R)(1-\beta-R)}
\end{aligned}$$

Prvú okrajovú podmienku vynásobíme β

$$\beta AP^{\beta} = \frac{\beta^2\gamma P^{1-R}}{\rho(1-R)(1-\gamma-R)(1-\beta-R)} - \frac{\beta(c+\rho I)^{1-R}}{\rho(1-R)}$$

Druhú okrajovú podmienku vynásobíme P

$$\beta AP^{\beta} = \frac{(1-R)\beta\gamma P^{1-R}}{\rho(1-R)(1-\gamma-R)(1-\beta-R)}$$

Obe rovnice dáme do rovnosti a upravíme

$$\begin{aligned}
\frac{(1-R)\beta\gamma P^{1-R}}{\rho(1-R)(1-\gamma-R)(1-\beta-R)} &= \frac{\beta^2\gamma P^{1-R}}{\rho(1-R)(1-\gamma-R)(1-\beta-R)} - \frac{\beta(c+\rho I)^{1-R}}{\rho(1-R)} \\
\frac{(1-R-\beta)\,\beta\gamma P^{1-R}}{\rho(1-R)(1-\gamma-R)(1-\beta-R)} &= -\frac{\beta(c+\rho I)^{1-R}}{\rho(1-R)} \\
\frac{\gamma P^{1-R}}{\gamma+R-1} &= (c+\rho I)^{1-R} \\
P^{1-R} &= \left[\frac{\gamma+R-1}{\gamma}\right](c+\rho I)^{1-R} \\
P &= \left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}(c+\rho I)
\end{aligned}$$

□

3 Projekt s konečným časovým horizontom

V tejto kapitole budeme uvažovať rovnakú situáciu ako v predchádzajúcej, len s jednou výnimkou. Projekt bude svkonečným časovým horizontom. To znamená, že ak firma do projektu investuje sumu I, bude jej produkt prinášať len po dobu T rokov. Pri výpočte hodnoty projektu nastane zmena pri vyjadrení očakávanej(strednej) hodnoty budúcich diskontovaných príjmov. Keďže budúce príjmy sú len T rokov od času investovania, integrovať budeme len do času T. Ako sme spomínali už v časti 1.1, firma si na investíciu do projektu požičia. Počas trvania projektu bude z dlžnej sumy platiť len úroky, no po skončení projektu musí vrátiť aj dlžnú sumu. Túto dlžnú sumu musíme ešte zdiskontovať do času hodnotenia projektu. Toto taktiež zahrnieme do hodnoty projektu. Postupne v tejto kapitole odvodíme pre takýto projekt investičné pravidlo pre rizikovo neutrálneho investora P_N^T, ako aj pre rizikovo averzného investora P_R^T.

3.1 Hodnota projektu pre rizikovo neutrálneho investora

Pri výpočte hodnoty projektu s konečným časovým horizontom budeme postupovať podobne ako v časti 1.4. Hodnotu projektu budeme počítať rovnako, akurát príjmy budeme integrovať len do času T a odpočítame zdiskontovanú dlžnú sumu, ktorú musí firma po skončení projektu vrátiť. Hodnota projektu teda bude

$$V_N^T(P) = E_p\left(\int_0^T e^{-\rho t}(P_t - c - \rho I)dt\right) - e^{-\rho T}I$$

Opäť vyjadríme strednú hodnotu v integrálnej forme a zameníme poradie integrovania

$$V_N^T(P) = E_p\left(\int\limits_0^T e^{-\rho t}(P_t - c - \rho I)dt\right) - e^{-\rho T}I =$$
$$= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^T e^{-\rho t}(P_t - c - \rho I)dt\right) f\left(P_t\right) dP_t - e^{-\rho T}I =$$
$$= \int\limits_0^T e^{-\rho t}\left(\int\limits_0^\infty \left(P_t - c - \rho I\right) f\left(P_t\right) dP_t\right) dt - e^{-\rho T}I$$

Vnútorný integrál sme už spočítali v časti 1.4. Podľa tvrdenia 1.4.1 sa vnútorný integrál rovná

$$\int\limits_0^\infty \left(P_t - c - \rho I\right) f\left(P_t\right) dP_t = Pe^{\alpha t} - c - \rho I$$

Takže môžeme pristúpiť k vypočítaniu hodnoty projektu s konečným časovým horizontom pre rizikovo neutrálneho investora.

Tvrdenie 3.1.1.

$$V_N^T(P) = \frac{P}{\rho - \alpha}\left(1 - e^{-T(\rho-\alpha)}\right) - \frac{c}{\rho}\left(1 - e^{-\rho T}\right) - I$$

Dôkaz.

$$V_N^T(P) = \int\limits_0^T e^{-\rho t}\left(\int\limits_0^\infty \left(P_t - c - \rho I\right) f\left(P_t\right) dP_t\right) dt - e^{-\rho T}I =$$
$$= \int\limits_0^T e^{-\rho t}\left(Pe^{\alpha t} - c - \rho I\right) dt - e^{-\rho T}I =$$
$$= \int\limits_0^T Pe^{-(\rho-\alpha)t}dt - (c + \rho I)\int\limits_0^T e^{-\rho t}dt - e^{-\rho T}I =$$
$$= P\left[\frac{e^{-(\rho-\alpha)t}}{-\left(\rho - \alpha\right)}\right]_0^T - (c + \rho I)\left[\frac{e^{-\rho t}}{-\rho}\right]_0^T - e^{-\rho T}I =$$

$$= P\left(\frac{e^{-(\rho-\alpha)T}}{-(\rho-\alpha)} + \frac{1}{\rho-\alpha}\right) - (c+\rho I)\left(\frac{e^{-\rho T}}{-\rho} + \frac{1}{\rho}\right) - e^{-\rho T} I =$$
$$= \frac{P}{\rho-\alpha}\left(1 - e^{-T(\rho-\alpha)}\right) - \frac{c}{\rho}\left(1 - e^{-\rho T}\right) - I \qquad \square$$

3.2 Investičné pravidlo rizikovo neutrálneho investora

Vlastnosti možnosti investovať-opcie, ktorú má firma, sú rovnaké ako v 1.5. Zmenila sa len hodnota projektu. Preto bude hodnota tejto opcie riešením nasledujúcej diferenciálnej rovnice s novými okrajovými podmienkami.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F''(P) + \alpha P F'(P) - \rho F(P) = 0$$
$$F(P_N^T) = V_N^T(P_N^T)$$
$$F'(P_N^T) = V_N^{T\prime}(P_N^T)$$

V 1.5 sme odvodili, že všeobecným riešením diferenciálnej rovnice je $F(P) = AP^{\beta}$. Pripomeňme, že sme už využili podmienku $\lim\limits_{P\to 0} F(P) = 0$. Parameter β je kladným riešením kvadratickej rovnice

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \alpha\beta - \rho = 0$$

Pomocou okrajových podmienok nájdeme ivestičné pravidlo P_N^T. Akonáhle bude cena produktu rovná P_N^T, firma sa rozhodne investovať do projektu.

Tvrdenie 3.2.1.

$$P_N^T = \frac{\beta}{\beta-1}(\rho-\alpha)\frac{\left(\frac{c}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right) + I\right)}{1 - e^{-T(\rho-\alpha)}}$$

Dôkaz. Ukážeme, že ak má P spĺňať okrajové podmienky, tak musí byť rovné P_N^{∞} v tvrdení. Naše okrajové podmienky sú

$$AP^{\beta} = \frac{P}{\rho-\alpha}\left(1 - e^{-T(\rho-\alpha)}\right) - \frac{c}{\rho}\left(1 - e^{-\rho T}\right) - I$$
$$\beta A P^{\beta-1} = \frac{1}{\rho-\alpha}\left(1 - e^{-T(\rho-\alpha)}\right)$$

Upravíme prvú okrajovú podmienku vynásobením β

$$\beta A P^{\beta} = \frac{\beta P}{\rho - \alpha}\left(1 - e^{-T(\rho-\alpha)}\right) - \frac{\beta c}{\rho}\left(1 - e^{-\rho T}\right) - \beta I$$

Druhú okrajovú podmienku vynásobíme P

$$\beta A P^{\beta} = \frac{P}{\rho - \alpha}\left(1 - e^{-T(\rho-\alpha)}\right)$$

Obe rovnice dáme do rovnosti a upravíme

$$\begin{aligned}
\frac{P}{\rho - \alpha}\left(1 - e^{-T(\rho-\alpha)}\right) &= \frac{\beta P}{\rho - \alpha}\left(1 - e^{-T(\rho-\alpha)}\right) - \frac{\beta c}{\rho}\left(1 - e^{-\rho T}\right) - \beta I \\
\beta\left(\frac{c}{\rho}\left(1 - e^{-\rho T}\right) + I\right) &= \frac{\beta - 1}{\rho - \alpha} P\left(1 - e^{-T(\rho-\alpha)}\right) \\
P &= \frac{\beta}{\beta - 1}(\rho - \alpha)\frac{\left(\frac{c}{\rho}\left(1 - e^{-\rho T}\right) + I\right)}{1 - e^{-T(\rho-\alpha)}}
\end{aligned}$$

□

3.3 Rizikovo averzný investor

V tejto časti spomenieme výsledný tvar hodnoty projektu s konečným časovým horizontom V_R^T a tvar investičného pravidla P_R^T pre takýto projekt pre rizikovo averzného investora. Konkrétne výpočty tu pre ich rozsiahlosť nebudeme uvádzať, možno ich však nájsť v apendixe A. Kombináciou úvah v predchádzajúcich častiach tejto kapitoly a časti 2.1 dostávame nasledujúce výsledky.

$$\begin{aligned}
V_R^T(P) =& \frac{\beta\gamma P^{1-R}}{\rho(1-R)(1-\gamma-R)(1-\beta-R)}\left(1 - e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}\right) - \\
& - \frac{(c+\rho I)^{1-R}}{\rho(1-R)}\left(1 - e^{-\rho T}\right) - e^{-\rho T}\frac{I^{1-R}}{1-R} \\
P_R^T =& \left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}\left(\frac{(c+\rho I)^{1-R}\left(1 - e^{-\rho T}\right) + \rho e^{-\rho T} I^{1-R}}{1 - e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}}\right)^{\frac{1}{1-R}}
\end{aligned}$$

4 Porovnanie a výsledky

Túto kapitolu venujeme analýze výsledkov, ktoré sme dostali v predošlých kapitolách. Najskôr ukážeme, že všetky modely čo sme skúmali sú limitným prípadom modelu s rizikovo averzným investorom a projektom s konečným časovým horizontom. Ďalej sa budeme zaoberať závislosťou investičného pravidla od vybraných parametrov, konkrétne R, T a σ, a to vo všetkých modeloch. Z grafického zobrazenia závislosti vyslovíme hypotézy, niektoré dokážeme a slovne interpretujeme. V častiach 4.1 až 4.3 analyticky dokážeme všetky vyslovené hypotézy. V závere časti 4.4 a v časti 4.5 uvedieme hypotézy, ktoré sa nám však pre ich zložitosť analyticky dokázať nepodarilo, prípadne sme ich dokázali len pre vybrané ohraničenie parametrov.

Pre zopakovanie a lepšiu orientáciu v texte tejto kapitoly uvedieme všetky investičné pravidlá, ktoré sme v predošlom texte odvodili.

$$P_N^\infty = \frac{\beta}{\beta-1}(\rho-\alpha)\left(\frac{c}{\rho}+I\right)$$

$$P_R^\infty = \left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}(c+\rho I)$$

$$P_N^T = \frac{\beta}{\beta-1}(\rho-\alpha)\frac{\left(\frac{c}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)+I\right)}{1-e^{-T(\rho-\alpha)}}$$

$$P_R^T = \left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}\left(\frac{(c+\rho I)^{1-R}\left(1-e^{-\rho T}\right)+\rho e^{-\rho T}I^{1-R}}{1-e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}}\right)^{\frac{1}{1-R}}$$

4.1 Limitné prípady $R = 0$ a $T \to \infty$

V časti 1.2 sme uviedli, že $R = 0$ zodpovedá rizikovo neutrálnemu investorovi. Preto by sme od výsledných investičných pravidiel očakávali

$$\lim_{R\to 0} P_R^{\infty} = P_N^{\infty}$$
$$\lim_{R\to 0} P_R^{T} = P_N^{T}$$

Prirodzene taktiež očakávame, že bude platiť

$$\lim_{T\to \infty} P_N^{T} = P_N^{\infty}$$
$$\lim_{T\to \infty} P_R^{T} = P_R^{\infty}$$

Posledné dve rovnice nie je ťažké dokázať, stačí spočítať jednotlivé limity. Využijeme, že

$$\lim_{T\to\infty} e^{-kT} = 0, \qquad k > 0$$

Potrebné je len dokázať, že

$$\frac{\beta\gamma}{\rho\left(1-\beta-R\right)\left(1-\gamma-R\right)} > 0$$

Pripomeňme, že $\beta > 1$ a $\gamma = \frac{-2\rho}{\beta\sigma^2}$. Z toho je zrejmé, že $\gamma < 0$. Čitateľ je teda záporný. Keďže $\beta > 1$ a $1 - R \leq 1$, tak $1 - R - \beta < 0$. Taktiež keďže $\gamma < 0$ a $1 - R > 0$, tak $1 - R - \gamma > 0$. Menovateľ je teda tiež záporný a celý zlomok je kladný.

Po dosadení $R = 0$ do P_R^{∞}, respektíve P_R^{T} zistíme, že k dokázaniu prvých dvoch rovností potrebujeme dokázať nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 4.1.1.

$$\rho\frac{\gamma-1}{\gamma} = \left(\rho-\alpha\right)\frac{\beta}{\beta-1}$$

Dôkaz. Začneme z rovnosti, ktorú chceme dokázať a postupnými úpravami sa dostaneme k rovnici, o ktorej vieme, že platí. Obrátením postupu je dôkaz hotový.

$$\rho\frac{\gamma-1}{\gamma} = (\rho-\alpha)\frac{\beta}{\beta-1}$$
$$\rho\left(\beta\gamma-(\beta+\gamma)+1\right) = \beta\gamma\left(\rho-\alpha\right)$$

V dôkaze tvrdenia 2.1.3 sme dostali $\beta+\gamma = 1-\frac{2\alpha}{\sigma^2}$

$$\rho\left(\beta\gamma-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}+1\right) = \beta\gamma\left(\rho-\alpha\right)$$
$$\rho\left(1+\frac{2\alpha}{\beta\gamma\sigma^2}\right) = \rho-\alpha$$

Opäť využijeme výsledok zo spomínaného dôkazu, tentoraz $\beta\gamma = \frac{-2\rho}{\sigma^2}$

$$\rho\left(1-\frac{2\alpha\sigma^2}{2\rho\sigma^2}\right) = \rho-\alpha$$
$$\rho-\alpha = \rho-\alpha$$ □

Dokázali sme všetko, čo bolo potrebné k ukázaniu platnosti štyroch rovníc z úvodu tejto časti. Naše výsledky v tomto teste vzájomnej konzistentnosti obstáli a môžeme sa v ďalších častiach sústrediť na ich analýzu. Z uvedeného vyplýva, že vo všeobecnosti stačí sledovať závislosť P_R^T od jednotlivých parametrov. Závislosť pre P_R^∞, respektíve pre P_N^T a P_N^∞ získame limitným prechodom $T\to\infty$ a $R=0$.

4.2 Vplyv R a T na investičné pravidlo

Pokiaľ nebude povedané inak, v nasledujúcich častiach budeme pre grafické znázornenie vplyvu vybraných parametrov na investičné pravidlo používať nasledovné nastavenie parametrov.

$$c=50 \qquad I=1000 \qquad \rho=0.08 \qquad \alpha=0.04 \qquad \sigma=0.2 \qquad R=0.5 \qquad T=25$$

Túto časť venujeme analýze vplyvu pridania rizikovej averznosti do nášho modelu na investičné pravidlo investora. Následne sa pozrieme aj na vplyv pridania konečného časového horizontu projektu do modelu na investičné pravidlo.

Očakávame, že pridanie rizikovej averznosti investora do základného modelu spôsobí zvýšenie hodnoty investičného pravidla, keďže rizikovo averzný investor, ktorý sa bojí rizika, sa musí lepšie proti tomuto riziku zabezpečiť. Zabezpečí sa práve vyššou cenou produktu v čase investovania, čím zníži riziko budúcich strát. Pred tým, ako ukážeme, či model toto naše očakávanie potvrdí alebo vyvráti, dokážeme si pomocné tvrdenie.

Tvrdenie 4.2.1.

$$\ln x > 1 - \frac{1}{x}, \qquad \forall x > 1$$

Dôkaz. Ľahko vidieť, že pre $x = 1$ nastáva rovnosť. Stačí nám teda ukázať, že ľavá strana rastie rýchlejšie ako pravá strana pre $x > 1$. Ukážeme, že $\left(\ln x - 1 + \frac{1}{x}\right)' > 0, \qquad \forall x > 1$

$$\left(\ln x - 1 + \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) > 0, \qquad \forall x > 1 \qquad \square$$

Teraz už môžeme dokázať tvrdenie o rastúcosti P_R^{∞} v závislosti od R.

Tvrdenie 4.2.2.

$$\frac{\partial P_R^{\infty}}{\partial R} > 0, \qquad 0 < R < 1$$

Dôkaz.

$$\frac{\partial P_R^{\infty}}{\partial R} = \frac{\partial \left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}}{\partial R}(c + \rho I)$$

K dôkazu tvrdenia potrebujeme ukázať nasledovné.

$$\frac{\partial \left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}}{\partial R} > 0$$

Upravíme tvar derivovaného výrazu.

$$\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}} = e^{\frac{1}{1-R}\ln\left(\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right)}$$

Pristúpime k derivácii.

$$\frac{\partial\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}}{\partial R}=e^{\frac{1}{1-R}\ln\left(\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right)}\left(\frac{1}{(1-R)^2}\ln\left(\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right)+\frac{1}{1-R}\,\frac{\gamma}{R+\gamma-1}\,\frac{1}{\gamma}\right)=$$

$$=\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}\frac{1}{1-R}\left(\frac{1}{1-R}\ln\left(\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right)+\frac{1}{R+\gamma-1}\right)$$

Keďže $\gamma-(1-R)<\gamma$ a obe strany nerovnosti sú záporné, tak platí $\frac{\gamma-1+R}{\gamma}>1$. Oba činitele pred zátvorkou sú teda kladné. Navyše na logaritmus v zátvorke môžeme použiť predchádzajúce tvrdenie. V zátvorke potom dostaneme

$$\frac{1}{1-R}\ln\left(\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right)+\frac{1}{R+\gamma-1}>\frac{1}{1-R}\left(1-\frac{\gamma}{R+\gamma-1}\right)+\frac{1}{R+\gamma-1}=$$

$$=\frac{1}{1-R}\,\frac{R-1}{R+\gamma-1}+\frac{1}{R+\gamma-1}=\frac{-1}{R+\gamma-1}+\frac{1}{R+\gamma-1}=0$$

Keďže aj zátvorka je kladná, tvrdenie je dokázané. □

V súlade s našimi očakávaniami, riziková averznosť investora zapríčiní, že bude na vhodnú chvíľu pre investovanie do projektu čakať dlhšie. Jeho investičné pravidlo je väčšie ako investičné pravidlo rizikovo neutrálneho investora. Tieto závery nás neprekvapujú, skôr potvrdzujú, že model zachytáva požadované vlastnosti modelovanej situácie.

Teraz sa pozrieme na vplyv skrátenia trvania projektu na rozhodovanie rizikovo neutrálneho investora. Očakávame, že čím bude projekt trvať kratšie, tým vyššia bude hodnota investičného pravidla. Investovanú sumu musíme totiž zarobiť za kratší čas, teda potrebujeme vyššie ročné zisky. To zabezpečíme práve vyššou cenou produktu v čase investovania. Dokážme teda nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 4.2.3.

$$\frac{\partial P_N^T}{\partial T}<0$$

Dôkaz. Zderivujeme P_N^T.

$$\frac{\partial P_N^T}{\partial T}=\frac{\beta}{\beta-1}(\rho-\alpha)\frac{\frac{c}{\rho}\rho e^{-\rho T}\left(1-e^{-T(\rho-\alpha)}\right)-\left(\frac{c}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)+I\right)(\rho-\alpha)\,e^{-T(\rho-\alpha)}}{\left(1-e^{-T(\rho-\alpha)}\right)^2}$$

Výraz $\frac{\beta}{\beta-1}(\rho-\alpha)$ je kladný, ako aj menovateľ zlomku je kladný. Stačí ukázať, že čitateľ je záporný. Ako prvé využijeme, že $0 < I$. Ako vidíme, dosadením $I = 0$ získame nasledujúcu nerovnosť.

$$\begin{aligned}
&ce^{-\rho T}\left(1-e^{-T(\rho-\alpha)}\right)-\left(\frac{c}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)+I\right)(\rho-\alpha)\,e^{-T(\rho-\alpha)} < \\
&< ce^{-\rho T}\left(1-e^{-T(\rho-\alpha)}\right)-\frac{c}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)(\rho-\alpha)\,e^{-T(\rho-\alpha)} = \\
&= ce^{-\rho T}-ce^{-\rho T}e^{-T(\rho-\alpha)}-ce^{-T(\rho-\alpha)}+ce^{-\rho T}e^{-T(\rho-\alpha)}+\alpha\frac{c}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)e^{-T(\rho-\alpha)} = \\
&= \alpha\frac{c}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)e^{-T(\rho-\alpha)}-\left(ce^{-T(\rho-\alpha)}-ce^{-\rho T}\right) = cw(\alpha)
\end{aligned}$$

Chceme ukázať, že získané horné ohraničenie je záporné. Keďže $c > 0$, stačí ukázať že

$$w(\alpha) = \frac{\alpha}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)e^{-T(\rho-\alpha)}-\left(e^{-T(\rho-\alpha)}-e^{-\rho T}\right) < 0$$

Poľahky vidíme, že pre $\alpha = 0$ a $\alpha = \rho$ nadobúda daná funkcia hodnotu 0. Ukážeme, že na intervale $\alpha \in (0,\rho)$ má funkcia jedno lokálne minimum, čo spojením s $w(\alpha) \in C^1$, $\alpha \in < 0, \rho >$ dokazuje, že je na tomto intervale záporná. Zderivujeme teda funkciu $w(\alpha)$. Následne ukážeme, že existuje práve jedno $\alpha \in (0,\rho)$ také, že derivácia funkcie je nula. Potom ešte ukážeme, že pre $\alpha = \rho$ je táto derivácia kladná. Tým dokážeme, že funkcia $w(\alpha)$ je záporná pre $\alpha \in (0,\rho)$.

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = -Te^{-T(\rho-\alpha)}+\frac{1}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)e^{-T(\rho-\alpha)}+\frac{\alpha}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)Te^{-T(\rho-\alpha)}$$

Položme deriváciu rovnú nule.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial \alpha} = -Te^{-T(\rho-\alpha^*)}+\frac{1}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)e^{-T(\rho-\alpha^*)}+\frac{\alpha^*}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)Te^{-T(\rho-\alpha^*)} = 0 \\
&-T+\frac{1}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)+\frac{\alpha^*}{\rho}T\left(1-e^{-\rho T}\right) = 0 \\
&\alpha^* = \frac{\rho}{1-e^{-\rho T}}-\frac{1}{T}
\end{aligned}$$

V prvom kroku sme rovnicu vydelili výrazom $e^{-T(\rho-\alpha^*)}$. Tým sme nestratili žiadne riešenia, keďže pre $0 < \alpha < \rho$ je tento výraz kladný. Keď už sme našli bod lokálneho extrému, potrebujeme ukázať, že naozaj leží v potrebnom intervale. To, že $\alpha^* < \rho$ je ľahko vidieť. Potrebujeme ešte ukázať, že $\alpha^* > 0$, čo je ekvivalentné s

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{1-e^{-\rho T}} &> \frac{1}{T} \\ \frac{1-e^{-\rho T}}{\rho T} &< 1 \end{aligned}$$

Vieme, že $\lim\limits_{T\to 0} \frac{1-e^{-\rho T}}{\rho T} = 1$. Potrebujeme teda ešte ukázať, že $\frac{1-e^{-\rho T}}{\rho T}$ je klesajúca od T.

$$\frac{\partial \frac{1-e^{-\rho T}}{\rho T}}{\partial T} = \frac{\rho e^{-\rho T} - \rho\left(1-e^{-\rho T}\right)}{\rho^2 T^2} = \frac{-\rho}{\rho^2 T^2} < 0$$

Ukázali sme, že $\alpha^* \in (0, \rho)$. Na tomto intervale má nulovú deriváciu len v jednom bode. To znamená, že funkcia $w(\alpha)$ na tomto intervale nie je konštantná. Jediný spôsob, ako môže funkcia $w(\alpha)$ byť spojitá a nadobúdať v bodoch 0 a ρ nulovú hodnotu, je, že na tomto intervale zmení znamienko derivácie. To však môže len v bode α^*, čo značí že tento bod je naozaj lokálny extrém. Teraz ukážeme, že pre $\alpha = \rho$ je $\frac{\partial w(\alpha)}{\partial \alpha} > 0$.

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = -Te^{-T(\rho-\alpha)} + \frac{1}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)e^{-T(\rho-\alpha)} + \frac{\alpha}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)Te^{-T(\rho-\alpha)}$$

Položme $\alpha = \rho$. Dostávame

$$-T + \frac{1}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right) + T\left(1-e^{-\rho T}\right) = \frac{1}{\rho} - e^{-\rho T}\left(\frac{1}{\rho} + T\right)$$

Potrebujeme dokázať nasledovné

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &> e^{-\rho T}\left(\frac{1}{\rho} + T\right) \\ e^{\rho T} &> 1 + \rho T \\ \rho T &> \ln\left(1 + \rho T\right) \end{aligned}$$

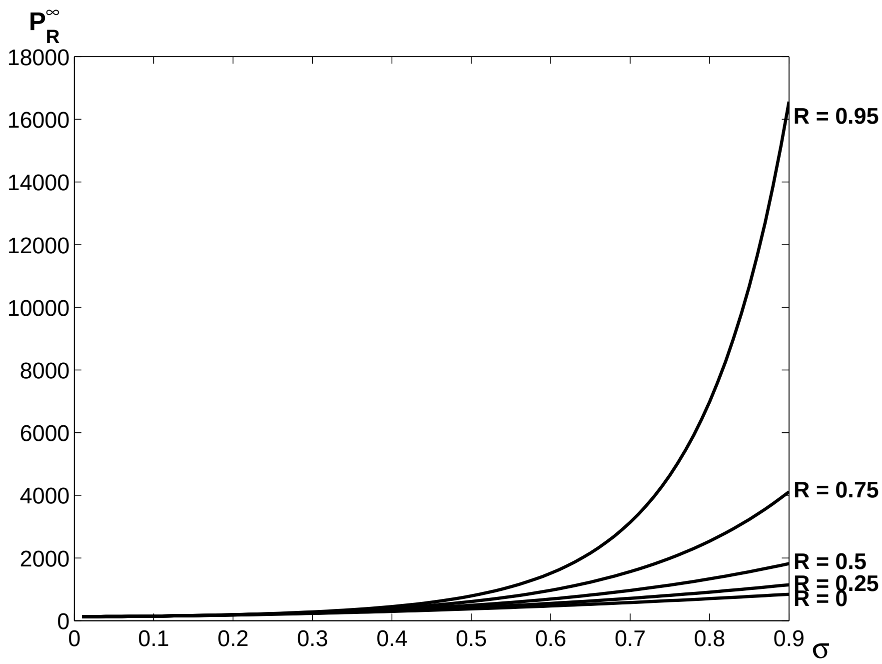
Dosadením $x = \rho T > 0$ do známej nerovnice $x > \ln(1+x), \quad \forall x > 0$ dostávame platnosť nerovnosti $\rho T > \ln\left(1+\rho T\right)$. Otočením poradia ekvivalentných operácií dostávame, že v bode $\alpha = \rho$ je $\frac{\partial w(\alpha)}{\partial \alpha} > 0$. Tým sme dokázali, že na ľavom okolí bodu ρ je derivácia

kladná. Keďže jediná možnosť zmeny znamienka derivácie je v bode α^*, tak na pravom okolí bodu α^* je derivácia kladná. Tým je dokázané, že $w(\alpha)$ má na intervale $(0, \rho)$ práve jedno lokálne minimum v bode α^*. Keďže v krajných bodoch tohoto intervalu je funkcia nulová, tak vo vnútri intervalu je záporná.
Tým sme dokázali zápornosť čitatela vo vyjadrení $\frac{\partial P_N^T}{\partial T}$ a tým pádom aj celé tvrdenie. $\square$

Zatiaľ sme v tejto časti ukázali, že zvýšenie rizikovej averznosti investora zvýši hodnotu investičného pravidla pre projekt s nekonečným časovým horizontom. Rovnaký vplyv má aj skrátenie doby trvania projektu pre rizikovo neutrálneho investora. Čo sa však stane, ak tieto dva vplyvy skombinujeme? Túto otázku zodpovieme v záverečných častiach tejto kapitoly.

4.3 Vplyv σ na investičné pravidlo pre projekt s nekonečným časovým horizontom

V tejto časti sa budeme venovať analýze vplyvu volatility ceny produktu σ na jednotlivé investičné pravidlá. Začneme vplyvom na P_N^∞ a pokračovať budeme s P_R^∞. Pre začiatok sme na obrázku 4.1 znázornili závislosť P_R^∞ od σ. Ako vidieť na obrázku, pre $R = 0$, P_N^∞ je rastúce v závislosti od σ. To znamená, že aj rizikovo neutrálny investor s rastúcou volatilitou vyžaduje na investovanie do projektu vyššiu cenu produktu. Rovnakú vlastnosť vidíme aj pre $R > 0$, dokonca sa zdá, že vplyv volatility je pre rizikovo averzného investora výraznejší. To nás vedie k hypotéze, že P_R^∞ rastie rýchlejšie pre R väčšie. Uvedené hypotézy postupne dokážeme, začneme rastúcosťou P_N^∞ v závislosti od σ. Pred tým však v nasledujúcom tvrdení sformulujeme a aj dokážeme pre ďalšie výpočty užitočné vlastnosti.



Obr. 4.1: Závislosť P_R^∞ od σ pre rôzne hodnoty R

Tvrdenie 4.3.1.

$$\rho - \alpha\beta > 0$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} < 0, \qquad \forall \sigma > 0$$

$$\frac{\partial \frac{\beta}{\beta - 1}}{\partial \sigma} > 0, \qquad \forall \sigma > 0$$

Dôkaz. Prvá nerovnica vyplýva z kvadratickej rovnice, ktorú β spĺňa. Jednoduchým preusporiadaním rovnice dostávame

$$\rho - \alpha\beta = \frac{1}{2}\sigma^2\beta\left(\beta - 1\right)$$

Keďže $\beta > 1$ je už zrejmé, že $\rho - \alpha\beta > 0$.

Druhú nerovnicu budeme dokazovať zderivovaním β. Z časti 1.3 vieme, že

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}}$$

Prikročme k derivácii a postupnej úprave

$$\frac{\partial\beta}{\partial\sigma} = \frac{2\alpha}{\sigma^3} + \frac{\frac{1}{2}\left(2\left(\frac{\alpha}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-2\alpha}{\sigma^3}\right)-\frac{2\rho}{\sigma^3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}}} = \frac{2\alpha}{\sigma^3} + \frac{-2\frac{\alpha^2}{\sigma^2}+\alpha-2\rho}{\sigma^3\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}}}$$

Z rovnice pre β vyplýva, že odmocninu v menovateli vieme zapísať aj v tvare $\beta - \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sigma^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta}{\partial\sigma} &= \frac{2\alpha}{\sigma^3} + \frac{-2\frac{\alpha^2}{\sigma^2}+\alpha-2\rho}{\sigma^3\left(\beta-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\sigma^2}\right)} = \frac{2\alpha\left(\beta-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\sigma^2}\right)-2\frac{\alpha^2}{\sigma^2}+\alpha-2\rho}{\sigma^3\left(\beta-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\sigma^2}\right)} = \\ &= \frac{2\alpha\beta-\alpha+2\frac{\alpha^2}{\sigma^2}-2\frac{\alpha^2}{\sigma^2}+\alpha-2\rho}{\sigma^3\left(\beta-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\sigma^2}\right)} = \frac{-2\left(\rho-\alpha\beta\right)}{\sigma^3\left(\beta-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\sigma^2}\right)} < 0\end{aligned}$$

V poslednom kroku sme použili prvú nerovnicu tohoto tvrdenia, ktorú sme už dokázali.
Pri dokazovaní tretej nerovnice začneme s derivovaním $\frac{\beta}{\beta-1}$

$$\frac{\partial\frac{\beta}{\beta-1}}{\partial\sigma} = \frac{(\beta-1)-\beta}{(\beta-1)^2}\frac{\partial\beta}{\partial\sigma} > 0$$

Opäť sme v poslednom kroku využili predošlú nerovnicu tohoto tvrdenia. □

Keď už sme toto tvrdenie dokázali, môžeme ho využiť k dôkazu rastúcosti P_N^∞ v závislosti od σ. Preto sformulujeme a poľahky dokážeme nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 4.3.2.

$$\frac{\partial P_N^\infty}{\partial\sigma} > 0, \qquad \forall\sigma > 0$$

Dôkaz.

$$\begin{aligned}P_N^\infty &= \frac{\beta}{\beta-1}(\rho-\alpha)\left(\frac{c}{\rho}+I\right)\\ \frac{\partial P_N^\infty}{\partial\sigma} &= (\rho-\alpha)\left(\frac{c}{\rho}+I\right)\frac{\partial\frac{\beta}{\beta-1}}{\partial\sigma} > 0, \qquad \forall\sigma > 0\end{aligned}$$

□

Ukázali sme, že u rizikovo neutrálneho investora s rastúcou volatilitou rastie hodnota investičného pravidla. Je to pochopiteľné, keďže pri väčšej rizikovosti ceny produktu je možnosť počkať s rozhodnutím cennejšia. Pristúpme teraz k dôkazu rastúcosti investičného pravidla v závislosti od σ aj pre $R > 0$. Najskôr dokážeme nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 4.3.3.

$$\frac{\partial \frac{R+\gamma-1}{\gamma}}{\partial \sigma} > 0$$

Dôkaz. Upravíme zlomok a zderivujeme

$$\frac{R+\gamma-1}{\gamma} = \frac{R-1}{\gamma} + 1$$

$$\frac{\partial \frac{R+\gamma-1}{\gamma}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \frac{R-1}{\gamma}}{\partial \sigma} = (R-1)\frac{\partial \frac{1}{\gamma}}{\partial \sigma} = (R-1)\frac{\partial \frac{-\beta\sigma^2}{2\rho}}{\partial \sigma} = (1-R)\left[\frac{\sigma^2}{2\rho}\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} + \frac{2\beta\sigma}{2\rho}\right]$$

V dôkaze tvrdenia 4.3.1 sme odvodili nasledovné

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} = \frac{-2(\rho-\alpha\beta)}{\sigma^3\left(\beta - \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\sigma^2}\right)}, \qquad \rho - \alpha\beta = \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)$$

S využitím týchto poznatkov upravíme výraz tak, aby bolo zjavné že je kladný.

$$\frac{\partial \frac{R+\gamma-1}{\gamma}}{\partial \sigma} = (1-R)\left[\frac{\sigma^2}{2\rho}\frac{-2(\rho-\alpha\beta)}{\sigma^3\left(\beta-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\sigma^2}\right)} + \frac{\beta\sigma}{\rho}\right] = (1-R)\left[\frac{-\frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1)}{\rho\sigma\left(\beta-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\sigma^2}\right)} + \frac{\beta\sigma}{\rho}\right] =$$
$$= \frac{(1-R)\beta\sigma}{\rho}\left[1 - \frac{\beta-1}{2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}}\right]$$

Keďže platí $\beta - 1 < 2\beta - 1 + \frac{2\alpha}{\sigma^2}$, výsledný výraz je kladný a tvrdenie dokázané. $\square$

Teraz už ľahko dokážeme rastúcosť investičného pravidla pre rizikovo averzného investora v závislosti od volatility ceny produktu.

Tvrdenie 4.3.4.

$$\frac{\partial P_R^\infty}{\partial \sigma} > 0, \qquad \sigma > 0, \qquad 0 \le R < 1$$

Dôkaz.

$$\frac{\partial P_R^\infty}{\partial \sigma} = \frac{1}{1-R}\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{R}{1-R}} \frac{\partial \frac{R+\gamma-1}{\gamma}}{\partial \sigma}(c+\rho I) > 0, \qquad \sigma > 0, \qquad 0 \le R < 1$$

V poslednom kroku sme využili tvrdenie 4.3.3 a nasledujúce

$$\frac{R+\gamma-1}{\gamma} = \frac{R-1}{\gamma} + 1 > 0$$ $\square$

Teraz ešte ukážeme, že čím je investor rizikovo averznejší, tým je jeho investičné pravidlo citlivejšie reaguje na zmenu volatility ceny produktu. Chceme teda dokázať nasledovné tvrdenie.

Tvrdenie 4.3.5.

$$\frac{\partial^2 P_R^\infty}{\partial\sigma\partial R} > 0$$

Dôkaz. Ukážeme, že $\frac{\partial P_R^\infty}{\partial\sigma}$ je rastúca v závislosti od R. Z dôkazu tvrdenia 4.3.4 vieme, že

$$\frac{\partial P_R^\infty}{\partial\sigma} = \frac{1}{1-R}\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{R}{1-R}} \frac{\partial\frac{R+\gamma-1}{\gamma}}{\partial\sigma}(c+\rho I)$$

Zderivujme teda tento výraz podľa R.

$$\frac{\partial^2 P_R^\infty}{\partial\sigma\partial R} = (c+\rho I)\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{1-R}\frac{\partial\frac{R+\gamma-1}{\gamma}}{\partial\sigma}\right)}{\partial R}\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{R}{1-R}} + \frac{1}{1-R}\frac{\partial\frac{R+\gamma-1}{\gamma}}{\partial\sigma}\frac{\partial\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{R}{1-R}}}{\partial R}\right]$$

Najskôr ukážeme, že prvý sčítanec je nulový. K tomu potrebujeme ukázať nasledovné

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{1-R}\frac{\partial\frac{R+\gamma-1}{\gamma}}{\partial\sigma}\right)}{\partial R} = 0$$

V dôkaze tvrdenia 4.3.3 sme odvodili, že

$$\frac{\partial\frac{R+\gamma-1}{\gamma}}{\partial\sigma} = \frac{(1-R)\beta\sigma}{\rho}\left[1-\frac{\beta-1}{2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}}\right]$$

Vynásobením $\frac{1}{1-R}$ sa tento výraz stane nezávislým od parametra R, a teda

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{1-R}\frac{\partial\frac{R+\gamma-1}{\gamma}}{\partial\sigma}\right)}{\partial R} = \frac{\partial\frac{\beta\sigma}{\rho}\left[1-\frac{\beta-1}{2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}}\right]}{\partial R} = 0$$

Teraz stačí ukázať, že druhý sčítanec je kladný. K tomu potrebujeme ukázať nasledovné.

$$\frac{\partial\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{R}{1-R}}}{\partial R} > 0$$

Zderivujeme a upravíme.

$$\frac{\partial\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{R}{1-R}}}{\partial R}=\frac{\partial e^{\frac{R}{1-R}\ln\left(\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right)}}{\partial R}=$$
$$=\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{R}{1-R}}\left(\frac{1-R+R}{(1-R)^2}\ln\left(\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right)+\frac{R}{1-R}\frac{\gamma}{R+\gamma-1}\frac{1}{\gamma}\right)=$$
$$=\frac{1}{1-R}\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{R}{1-R}}\left(\frac{1}{1-R}\ln\left(\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right)+\frac{R}{R+\gamma-1}\right)$$

Potrebujeme ukázať, že posledná zátvorka je kladná. V dôkaze tvrdenia 4.2.2 sme ukázali, že $\frac{\gamma-1+R}{\gamma}>1$. Opäť teda využijeme tvrdenie 4.2.1 a dostávame

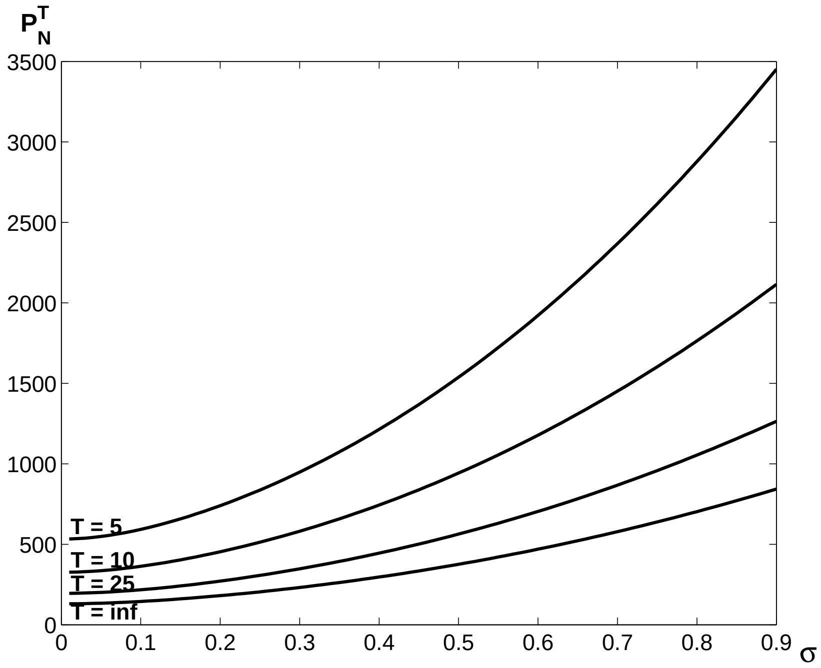
$$\frac{1}{1-R}\ln\left(\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right)+\frac{R}{R+\gamma-1}>\frac{1}{1-R}\left(1-\frac{\gamma}{R+\gamma-1}\right)+\frac{R}{R+\gamma-1}=$$
$$=\frac{1}{1-R}\frac{R-1}{R+\gamma-1}+\frac{R}{R+\gamma-1}=\frac{R-1}{R+\gamma-1}>0$$

Dokázali sme teda, že posledná zátvorka vo výraze pre $\frac{\partial\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{R}{1-R}}}{\partial R}$ je kladná. Tým sme dokázali že aj druhý sčítanec v $\frac{\partial^2 P^{\infty}_{R}}{\partial\sigma\partial R}$ je kladný a zároveň aj celé tvrdenie. ☐

V tejto časti sme úkazali niektoré vlastnosti vplyvu parametra σ na investičné pravidlo pre rizikovo neutrálneho i rizikovo averzného investora. Ukázali sme, že rizikovo averzný investor reaguje citlivejšie na zmenu rizikovosti ceny produktu ako rizikovo neutrálny investor. To je v súlade s našimi očakávaniami. Obaja investori pri náraste rizikovosti ceny produktu vyžadujú vyššiu cenu preduktu k tomu, aby sa rozhodli do projektu investovať.

4.4 Vplyv σ na investičné pravidlo pri rôznej dobe trvania projektu

V tejto časti zanalyzujeme vplyv volatility ceny produktu na hodnotu investičného pravidla pri rôznych dobách trvania projektu. Pre začiatok uvedieme obrázok, ktorý znázorňuje investičné pravidlo rizikovo neutrálneho investora v závislosti od parametra σ pre vybrané



Obr. 4.2: Závislosť P_N^T od σ pre rôzne hodnoty T

trvania projektu. Prvú vlastnosť, ktorú si pri pohľade na grafické znázornenie závislosti všimneme, je že pre všetky znázornené doby trvania projektu je táto závislosť rastúca. Túto vlastnosť si dokážeme ako prvú. Následne dokážeme, že čím trvá projekt dlhšie, tým je miera tohoto rastu menšia. Začnime teda s dôkazom nasledovného tvrdenia.

Tvrdenie 4.4.1.

$$\frac{\partial P_N^T}{\partial \sigma} > 0, \qquad \forall \sigma > 0$$

Dôkaz. Tento dôkaz je veľmi jednoduchý. Stačí investičné pravidlo zderivovať a s využitím tvrdenia 4.3.1 vidíme, že všetky činitele v tejto derivácii sú kladné.

$$P_N^T = \frac{\beta}{\beta - 1} (\rho - \alpha) \frac{\frac{c}{\rho}\left(1 - e^{-\rho T}\right) + I}{1 - e^{-T(\rho - \alpha)}}$$

$$\frac{\partial P_N^T}{\partial \sigma} = (\rho - \alpha) \frac{\frac{c}{\rho}\left(1 - e^{-\rho T}\right) + I}{1 - e^{-T(\rho - \alpha)}} \frac{\partial \frac{\beta}{\beta - 1}}{\partial \sigma} > 0, \qquad \forall \sigma > 0$$

□

Teraz chceme ukázať, že pri kratšom trvaní projektu reaguje investor na zmenu volatility ceny produktu citlivejšie.

Tvrdenie 4.4.2.

$$\frac{\partial^2 P_N^T}{\partial\sigma\partial T} < 0$$

Dôkaz. Tento dôkaz začneme zderivovaním $\frac{\partial P_N^T}{\partial\sigma}$ podľa T.

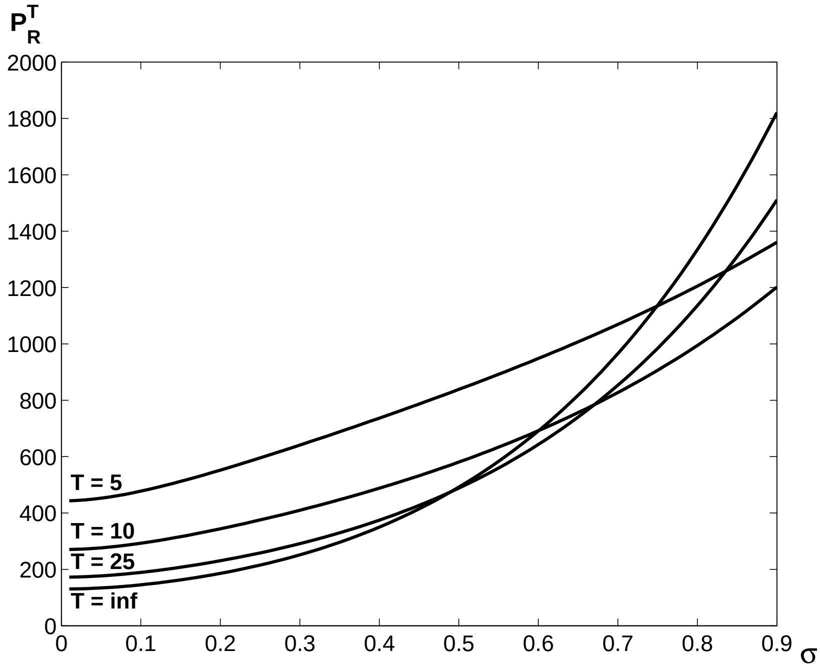
$$\frac{\partial^2 P_N^T}{\partial\sigma\partial T} = \frac{\partial\frac{\beta}{\beta-1}}{\partial\sigma}\left(\rho-\alpha\right)\frac{\frac{c}{\rho}\rho e^{-\rho T}\left(1-e^{-T(\rho-\alpha)}\right)-\left(\frac{c}{\rho}\left(1-e^{-\rho T}\right)+I\right)\left(\rho-\alpha\right)e^{-T(\rho-\alpha)}}{\left(1-e^{-T(\rho-\alpha)}\right)^2}$$

Výraz $(\rho-\alpha)\frac{\partial\frac{\beta}{\beta-1}}{\partial\sigma} > 0$, ako aj menovateľ nasledujúceho zlomku je kladný. To, že čitateľ zlomku je záporný, sme dokázali už pri dôkaze tvrdenia 4.2.3. Z toho vyplýva, že tvrdenie je dokázané. $\square$

Dokázali sme obe vlastnosti vplyvu parametra σ na investičné pravidlo rizikovo neutrálneho investora. V časti 4.2 sme ukázali, že pre kratšiu dobu trvania projektu sa zvýši hodnota investičného pravidla. Tu sme naviac ukázali, že tento rozdiel v hodnote investičného pravidla sa zvyšuje s rastúcou σ. Pri väčšej volatilite sa treba voči skráteniu projektu zabezpečiť viac ako pri malej volatilite. Teraz sa pozrieme na rovnakú závislosť pre rizikovo averzného investora. Ako vidíme na obrázku 4.3, u rizikovo averzného investora má vplyv σ trocha odlišné vlastnosti. Zdá sa, že závislosť investičného pravidla pre každú dobu trvania projektu je rastúca. Vidíme, že pre σ malé, podobne ako u rizikovo neutrálneho investora, je investor citlivejší na zmenu parametra σ pre kratšiu dobu trvania projektu T. Avšak pre σ veľké, narozdiel od rizikovo neutrálneho investora, pri dlhšom časovom horizonte projektu je rizikovo averzný investor citlivejší na zmenu parametra σ. Rastúcosť hodnoty investičného pravidla v závislosti od σ dokážeme, avšak len pre $\sigma^2 < \rho + \alpha$.

Tvrdenie 4.4.3.

$$\frac{\partial P_R^T}{\partial\sigma} > 0$$



Obr. 4.3: Závislosť P_R^T od σ pre rôzne hodnoty T a $R = 0.5$

Dôkaz. Postupne zderivujeme oba činitele v P_R^T podľa σ. Začneme prvým.

$$\frac{\partial \left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}}{\partial \sigma} = \frac{1}{1-R}\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{R}{1-R}} \frac{\partial \left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]}{\partial \sigma} =$$

$$= \frac{1}{1-R}\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}} \left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{-1} \frac{\partial \left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]}{\partial \sigma}$$

Pomocou tvrdenia 4.1.1 upravíme nasledovný výraz

$$\frac{R+\gamma-1}{\gamma} = \frac{R}{\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} = -\frac{R\beta\sigma^2}{2\rho} + \frac{\rho-\alpha}{\rho}\,\frac{\beta}{\beta-1} = \frac{\beta\left(\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)\right)}{\rho(\beta-1)}$$

S využitím tohoto tvaru a derivácie daného výrazu podľa σ odvodenej v dôkaze tvrdenia

4.3.3 dostávame

$$\frac{\partial\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}}{\partial\sigma}=\frac{1}{1-R}\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{-1}\frac{\partial\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]}{\partial\sigma}=$$
$$=\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}\frac{\rho(\beta-1)}{\beta\left(\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)\right)}\frac{1}{1-R}\frac{\sigma\beta(1-R)}{\rho}\left[1-\frac{\beta-1}{2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}}\right]=$$
$$=\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}\frac{\sigma(\beta-1)}{\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)}\left[\frac{2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}-\beta+1}{2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}}\right]=$$
$$=\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}\frac{\sigma(\beta-1)}{\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)}\left[\frac{\beta+\frac{2\alpha}{\sigma^2}}{2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}}\right]$$

Zderivujeme aj druhý činiteľ v P_R^T podľa σ. Najskôr však spočítame pomocnú deriváciu. Využijeme pri nej tvrdenie 2.1.3

$$\frac{\partial\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}{\partial\sigma}=\frac{\partial-T\left(\rho-\alpha(1-R)+\frac{\sigma^2}{2}R(1-R)\right)}{\partial\sigma}=-T\sigma R(1-R)$$

Už môžeme pristúpiť k derivácii druhého činiteľa

$$\frac{\partial\left(\frac{(c+\rho I)^{1-R}\left(1-e^{-\rho T}\right)+\rho e^{-\rho T}I^{1-R}}{1-e^{-\frac{T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}}\right)^{\frac{1}{1-R}}}{\partial\sigma}=$$
$$=\frac{1}{1-R}\left(\frac{\dots}{1-e^{\frac{-T\dots}{\beta\gamma}}}\right)^{\frac{R}{1-R}}\left(\frac{\dots}{\left(1-e^{-\frac{T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}\right)^2}\right)e^{\frac{-T\dots}{\beta\gamma}}(-T\sigma R(1-R))=$$
$$=\left(\frac{\dots}{1-e^{\frac{-T\dots}{\beta\gamma}}}\right)^{\frac{1}{1-R}}\frac{1}{1-e^{-\frac{T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}}e^{\frac{-T\dots}{\beta\gamma}}(-T\sigma R)$$

Z uvedených derivácií oboch činiteľov už ľahko získame deriváciu P_R^T

$$\frac{\partial P_R^T}{\partial\sigma}=P_R^T\left(\frac{\sigma(\beta-1)}{\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)}\frac{\beta+\frac{2\alpha}{\sigma^2}}{2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}}-\frac{e^{-T\left(\rho-\alpha(1-R)+\frac{\sigma^2}{2}R(1-R)\right)}T\sigma R}{1-e^{-T\left(\rho-\alpha(1-R)+\frac{\sigma^2}{2}R(1-R)\right)}}\right)$$

Časť pred zátvorkou je zjavne kladná. Potrebujeme teda ukázať, že zátvorka je kladná. Ako vidíme, od doby trvania projektu T závisí len druhý sčítanec v zátvorke. Ukážeme, že jeho závislosť od T je rastúca.

$$\frac{\partial \frac{-e^{-Tk}T\sigma R}{1-e^{-Tk}}}{\partial T} = \frac{\left(ke^{-Tk}T - e^{-Tk}\right)\left(1-e^{-Tk}\right) + e^{-Tk}Te^{-Tk}k}{\left(1-e^{-Tk}\right)^2}\sigma R =$$
$$= \frac{Tke^{-Tk} - e^{-Tk} - Tke^{-Tk}e^{-Tk} + e^{-Tk}e^{-Tk} + Tke^{-Tk}e^{-Tk}}{\left(1-e^{-Tk}\right)^2}\sigma R =$$
$$= \frac{e^{-Tk}\left(Tk - \left(1-e^{-Tk}\right)\right)}{\left(1-e^{-Tk}\right)^2}\sigma R$$

kde $k = \rho - \alpha(1-R) + \frac{\sigma^2}{2}R(1-R)$. Pomocou tvrrdenia 4.2.1 sa ľahko ukáže, že $Tk > 1 - e^{-Tk}$ pre $k > 0$, čo vyhovuje naším potrebám, keďže $\rho - \alpha(1-R) + \frac{\sigma^2}{2}R(1-R) > 0$. To znamená že druhý sčítanec je rastúci od T a celá zátvorka nadobúda svoje minimum pre $T = 0$. Stačí teda ukázať, že je kladná pre $T = 0$. Dosaďme túto dobu trvania projektu do nášho výrazu. Využijeme pri tom, že $\lim\limits_{T\to 0} \frac{e^{-Tk}T}{1-e^{-Tk}} = \frac{1}{k}$. Dostávame

$$\frac{\sigma(\beta-1)}{\rho - \alpha - \frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)}\,\frac{\beta + \frac{2\alpha}{\sigma^2}}{2\beta - 1 + \frac{2\alpha}{\sigma^2}} - \frac{\sigma R}{\rho - \alpha(1-R) + \frac{\sigma^2}{2}R(1-R)}$$

Teraz ukážeme, že $\rho - \alpha - \frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1) > 0$. Keďže $R < 1$, stačí nám túto nerovnosť dokázať pre $R = 1$. Ďalej parameter α vieme zapísať v tvare $\alpha = \lambda\rho$, kde $\lambda \in (0,1)$. Upravme teda daný výraz

$$\rho - \alpha - \frac{\sigma^2}{2}(\beta - 1) = \rho - \alpha - \frac{\sigma^2}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}}\right) =$$
$$= \rho - \lambda\rho - \frac{\sigma^2}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\lambda\rho}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda\rho}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2\rho}{\sigma^2}}\right) =$$
$$= \rho\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{\sigma^2}{4} - \sqrt{\frac{\sigma^4}{4}\left(\frac{\lambda^2\rho^2}{\sigma^4} - \frac{\lambda\rho}{\sigma^2} + \frac{1}{4} + \frac{2\rho}{\sigma^2}\right)} =$$
$$= \rho\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{\sigma^2}{4} - \sqrt{\frac{\lambda^2\rho^2}{4} + \frac{\sigma^2(2-\lambda)\rho}{4} + \frac{\sigma^4}{16}}$$

Potrebujeme teda ukázať, že

$$\rho\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) + \frac{\sigma^2}{4} > \sqrt{\frac{\lambda^2\rho^2}{4} + \frac{\sigma^2(2-\lambda)\rho}{4} + \frac{\sigma^4}{16}}$$

Keďže obe strany sú zjavne kladné, môžeme ich umocniť. Ďalšími úpravami dospejeme k pravdivému tvrdeniu a obrátením postupu je táto časť dôkazu hotová.

$$\begin{aligned}
\left(\rho\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{\sigma^2}{4}\right)^2 &> \frac{\lambda^2\rho^2}{4}+\frac{\sigma^2(2-\lambda)\rho}{4}+\frac{\sigma^4}{16}\\
\rho^2\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2+\frac{\sigma^2\rho\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)}{2}+\frac{\sigma^4}{16} &> \frac{\lambda^2\rho^2}{4}+\frac{\sigma^2\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\rho}{2}+\frac{\sigma^4}{16}\\
\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)^2 &> \frac{\lambda^2}{4}\\
1-\lambda+\frac{\lambda^2}{4} &> \frac{\lambda^2}{4}\\
1 &> \lambda
\end{aligned}$$

Dokázali sme teda, že $\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)>0$. Vráťme sa teraz k nášmu pôvodnému problému. Chceme ukázať kladnosť výrazu

$$\frac{\sigma(\beta-1)}{\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)}\,\frac{\beta+\frac{2\alpha}{\sigma^2}}{2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}}-\frac{\sigma R}{\rho-\alpha(1-R)+\frac{\sigma^2}{2}R(1-R)}$$

Tento výraz môžeme vynásobiť výrazom $\frac{1}{\sigma}\left(\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)\right)$, keďže je kladný. Dostávame

$$\frac{(\beta-1)\left(\beta+\frac{2\alpha}{\sigma^2}\right)}{2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}}-\frac{R\left(\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)\right)}{\rho-\alpha(1-R)+\frac{\sigma^2}{2}R(1-R)}$$

Ako vidíme, od parametra R je závislá len odčítavaná časť. Ukážeme, že je rastúca od R, a teda celý výraz sa dá zdola ohraničiť položením $R=1$. Po úprave odčítavanej časti ju zderivujeme podľa R.

$$\frac{R\left(\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)\right)}{\rho-\alpha(1-R)+\frac{\sigma^2}{2}R(1-R)}=\frac{\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)}{\frac{\rho-\alpha}{R}+\alpha+\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sigma^2}{2}R}$$

$$\frac{\partial\frac{\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)}{\frac{\rho-\alpha}{R}+\alpha+\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sigma^2}{2}R}}{\partial R}=\frac{-\frac{\sigma^2}{2}(\beta-1)\left(\frac{\rho-\alpha}{R}+\alpha+\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sigma^2}{2}R\right)-\left(\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}R(\beta-1)\right)\left(-\frac{\rho-\alpha}{R^2}-\frac{\sigma^2}{2}\right)}{\left(\frac{\rho-\alpha}{R}+\alpha+\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sigma^2}{2}R\right)^2}$$

Potrebujeme ukázať, že táto derivácia je kladná. Stačí ukázať že menovateľ je kladný.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\sigma^2}{2}(\beta-1)(\rho-\alpha)\frac{1}{R}-\alpha\frac{\sigma^2}{2}(\beta-1)-\frac{\sigma^4}{4}(\beta-1)+\frac{\sigma^4}{4}(\beta-1)R+\\
&+\frac{(\rho-\alpha)^2}{R^2}-\frac{\sigma^2}{2}(\beta-1)(\rho-\alpha)\frac{1}{R}+(\rho-\alpha)\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sigma^4}{4}(\beta-1)R=\\
&=\frac{(\rho-\alpha)^2}{R^2}-\sigma^2(\beta-1)(\rho-\alpha)\frac{1}{R}+\rho\frac{\sigma^2}{2}-\alpha\frac{\sigma^2}{2}-\alpha\beta\frac{\sigma^2}{2}+\alpha\frac{\sigma^2}{2}-\frac{\sigma^4}{4}(\beta-1)=\\
&=\frac{(\rho-\alpha)^2}{R^2}-\sigma^2(\beta-1)(\rho-\alpha)\frac{1}{R}+\frac{\sigma^2}{2}\left(\rho-\alpha\beta\right)-\frac{\sigma^4}{4}(\beta-1)
\end{aligned}
$$

Z dôkazu tvrdenia 4.3.1 vieme, že $\rho-\alpha\beta=\frac{\sigma^2}{2}\beta(\beta-1)$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\rho-\alpha)^2}{R^2}-\sigma^2(\beta-1)(\rho-\alpha)\frac{1}{R}+\frac{\sigma^4}{4}\beta\left(\beta-1\right)-\frac{\sigma^4}{4}(\beta-1)=\\
&=\frac{(\rho-\alpha)^2}{R^2}-\sigma^2(\beta-1)(\rho-\alpha)\frac{1}{R}+\frac{\sigma^4}{4}\left(\beta-1\right)^2=\\
&=\left(\frac{\rho-\alpha}{R}-\frac{\sigma^2}{2}\left(\beta-1\right)\right)^2>0
\end{aligned}
$$

Ukázali sme, že odčítavaný člen je rastúci od R, a teda môžeme celý výraz ohraničiť položením $R=1$. Dostávame

$$
\frac{(\beta-1)\left(\beta+\frac{2\alpha}{\sigma^2}\right)}{2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}}-\frac{\left(\rho-\alpha-\frac{\sigma^2}{2}(\beta-1)\right)}{\rho}
$$

Upravme teraz čitateľ prvého zlomku.

$$
\begin{aligned}
&(\beta-1)\left(\beta+\frac{2\alpha}{\sigma^2}\right)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\sigma^2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\sigma^2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}}\right)=\\
&=\left(\frac{\alpha}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2\rho}{\sigma^2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\sigma^2}\right)^2=\frac{\alpha^2}{\sigma^4}-\frac{\alpha}{\sigma^2}+\frac{1}{4}+\frac{2\rho}{\sigma^2}-\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{\sigma^2}-\frac{\alpha^2}{\sigma^4}=\frac{2(\rho-\alpha)}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

Dosadíme do našeho výrazu a vynásobíme ho $\rho(2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2})$

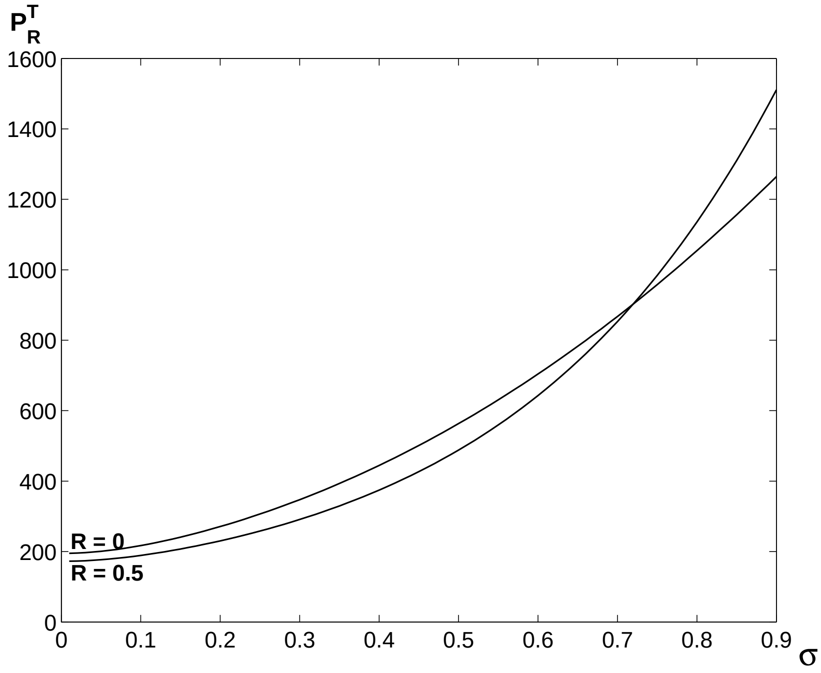
$$
\begin{aligned}
&\frac{2\rho}{\sigma^2}(\rho-\alpha)-(\rho-\alpha)\left(2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}\right)+\frac{\sigma^2}{2}(\beta-1)\left(\beta-1+\beta+\frac{2\alpha}{\sigma^2}\right)=\\
&=\frac{2\rho}{\sigma^2}(\rho-\alpha)-(\rho-\alpha)\left(2\beta-1+\frac{2\alpha}{\sigma^2}\right)+\frac{\sigma^2}{2}(\beta-1)^2+\frac{\sigma^2}{2}(\beta-1)\left(\beta+\frac{2\alpha}{\sigma^2}\right)
\end{aligned}
$$

Opäť použijeme $(\beta - 1)\left(\beta + \frac{2\alpha}{\sigma^2}\right) = \frac{2(\rho-\alpha)}{\sigma^2}$

$$\begin{aligned}
&\frac{2\rho}{\sigma^2}(\rho-\alpha) - (\rho-\alpha)\left(2\beta - 1 + \frac{2\alpha}{\sigma^2}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(\beta-1)^2 + \frac{\sigma^2}{2}\frac{2(\rho-\alpha)}{\sigma^2} = \\
&= (\rho-\alpha)\left(\frac{2\rho}{\sigma^2} - 2\beta + 1 - \frac{2\alpha}{\sigma^2} + 1\right) + \frac{\sigma^2}{2}(\beta-1)^2 = \\
&= \frac{2(\rho-\alpha)^2}{\sigma^2} - 2(\rho-\alpha)(\beta-1) + \frac{\sigma^2}{2}(\beta-1)^2 = \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}(\rho-\alpha)}{\sigma} - \frac{\sigma(\beta-1)}{\sqrt{2}}\right)^2 > 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

Dokázali sme rastúcosť hodnoty investičného pravidla rizikovo neutrálneho investora v závislosti od σ, ale len pre $\sigma < \sqrt{\rho+\alpha}$. Ťažko si však predstaviť, že by pre $\sigma > \sqrt{\rho+\alpha}$ sa pri zvýšení volatility ceny produktu hodnota investičného pravidla znížila. Druhú vlastnosť nebudeme dokazovať, pokúsime sa však priblížiť, prečo by mohla platiť. Zdá sa, že na správanie rizikovo averzného investora pôsobia dva faktory. Prvý je, že pre kratšiu dobu trvania projektu potrebujeme investovanú sumu zarobiť za kratší čas. To podobne ako u rizikovo neutrálneho investora, spôsobuje vyššiu hodnotu investičného pravidla pre projekt s kratšou dobou trvania. Druhým faktorom je, že pre dlhšie trvajúci projekt je celkové riziko projektu väčšie. Parameter σ totiž vyjadruje ročnú mieru volatility ceny produktu. Rizikovo averzný investor sa u dlhšie trvajúceho projektu potrebuje proti tomuto väčšiemu riziku zabezpečiť, čo spôsobí vyššiu hodnotu investičného pravidla. Ako sa zdá na obrázku, pre σ malé prevažuje vplyv prvého faktora, no s rastúcou σ postupne vplyv druhého faktora prevažuje nad vplyvom prvého faktora. To spôsobuje rôznu citlivosť od zmeny σ pre malú a veľkú ročnú mieru volatility ceny produktu.

Je logické, že vplyv druhého faktora klesá s klesajúcou averznosťou investora. Ako ukazuje obrázok 4.2 pre rizikovo neutrálneho investora, pre neho je vplyv druhého faktora nulový. Na obrázku 4.4 si ukážeme, že vplyv druhého faktora pre σ malé má opačný výsledok, ako by sme očakávali. Pre malé σ vplyv druhého faktora znižuje hodnotu investičného pravidla. To môže mať za následok, že pre malé σ a vhodnej dobe trvania projektu je hodnota investičného pravidla rizikovo averzného investora nižšia ako rizikovo neutrálneho investora.



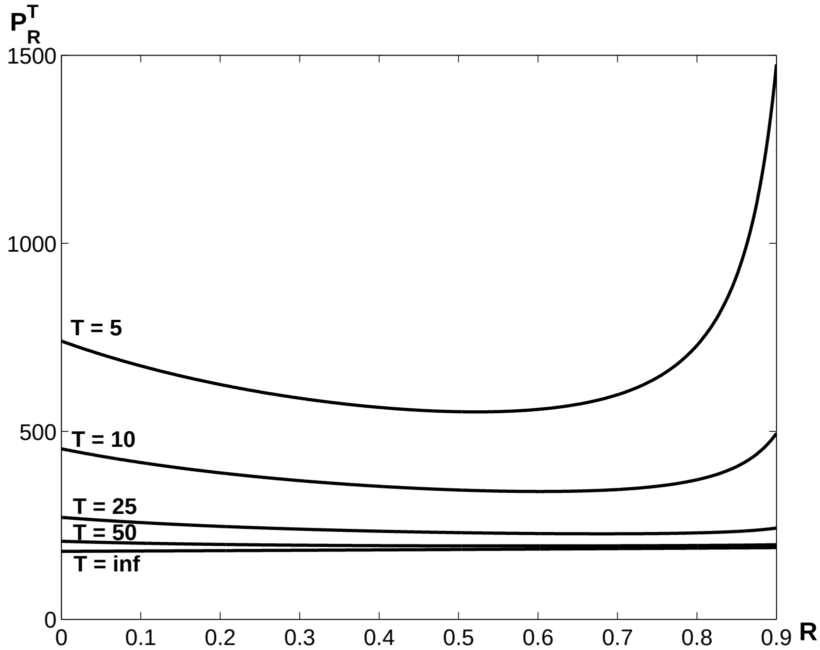
Obr. 4.4: Závislosť P_R^T od σ pre $R = 0$ a $R = 0.5$ a $T = 5$

4.5 Vplyv parametra R na investičné pravidlo pre projekt s konečným časovým horizontom

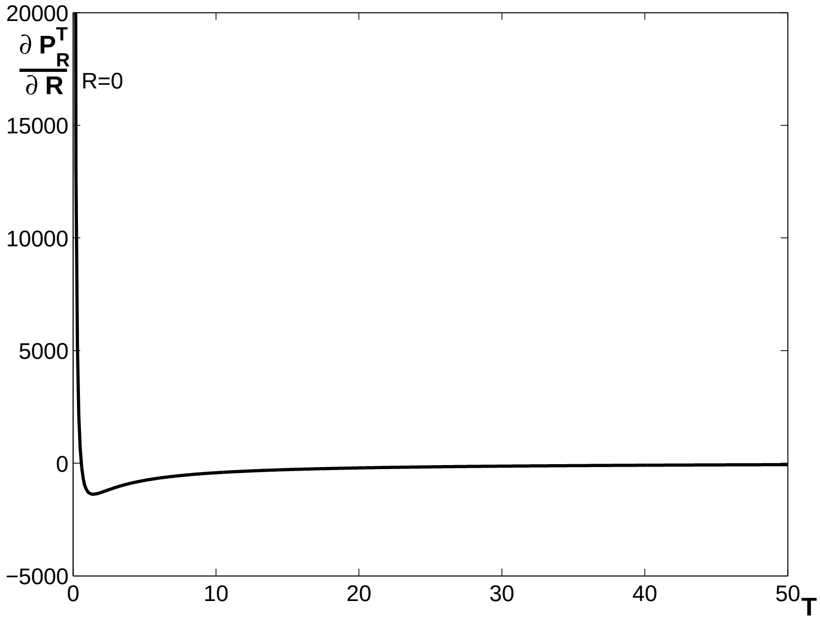
Intuitívne by sme očakávali, že rizikovo averzný investor investuje neskôr ako rizikovo neutrálny. Už v predchádzajúcej časti sme však naznačili, že numerické výsledky nášho modelu spochybňujú všeobecnú platnosť týchto očakávaní. Na obrázku 4.5 sme znázornili závislosť hodnoty investičného pravidla od miery rizikovej averznosti investora. Ako vidíme, v mnohých prípadoch je derivácia $\frac{\partial P_R^T}{\partial R}$ v bode $R = 0$ záporná. Keďže bod $R = 0$ predstavuje rizikovo neutrálneho investora, zápornosť tejto derivácie by dokázala, že pre hodnoty parametra R blízke nule je hodnota investičného pravidla nižšia. Numerické výsledky ďalej naznačujú, že závislosť P_R^T od R je konvexná. To znamená, že ak pre vybranú dobu trvania projektu je derivácia v bode $R = 0$ kladná, tak kladná bude aj pre $R > 0$. Ak je však derivácia v bode $R = 0$ záporná, tak množina hodnôt parametra R, pre ktoré je hodnota investičného pravidla nižšia ako u rizikovo neutrálneho investora, má tvar $(0, R^*)$. Zápornosť derivácie $\frac{\partial P_R^T}{\partial R}$ v bode $R = 0$ sa nám však dokázať nepodarilo.

Aby sme lepšie demonštrovali vplyv doby trvania projektu na znamienko tejto derivácie, zobrazíme na obrázku 4.6 hodnotu derivácie $\frac{\partial P_R^T}{\partial R}$ v bode $R = 0$ v závislosti od doby trvania projektu. Z obrázka vidno, že pre veľmi krátke trvanie projektu je derivácia kladná a rizikovo neutrálny investor investuje skôr ako rizikovo averzný investor. Z časti 4.2 vieme, že pre nekonečný časový horizont je $\frac{\partial P_R^\infty}{\partial R}$ kladná, a to aj v bode $R = 0$. Preto $\lim_{T\to\infty} \frac{\partial P_R^T}{\partial R}\big|_{R=0} > 0$, čo znamená že pre veľkú dobu trvania projektu je táto derivácia opäť kladná. Numerické výsledky naznačujú, že množina T takých, že $\frac{\partial P_R^T}{\partial R}\big|_{R=0} < 0$, má tvar (T_{min}, T_{max}) a nie je zanedbateľná.

Spomenuté výsledky nás vedú k hypotéze, že v mnohých prípadoch rizikovo averzný investor v našom modeli pre konečnú dobu trvania projektu investuje skôr ako rizikovo neutrálny investor. Túto hypotézu síce nevieme dokázať, snažili sme sa ju však podložiť numerickými výpočtami a ich analýzou. Taktiež môžeme pripomenúť naše vysvetlenie z predošlej časti, kde sme komentovali rozličné vlastnosti vplyvu parametra σ na investičné pravidlo rizikovo neutrálneho a rizikovo averzného investora pri rôznej dobe trvania projektu. Rizikovo neutrálny investor na skrátenie doby projektu reaguje zvýšením investičného pravidla, pričom toto zvýšenie je úmerné parametru σ. Vysvetlili sme to potrebou zarobiť investované peniaze za kratší čas, čo zapríčiní nárast investičného pravidla, pričom vyššia volatilita ceny produktu samozrejme spôsobí vyšší nárast hodnoty investičného pravidla. U rizikovo averzného investora pôsobili dva faktory. Prvý je totožný ako u rizikovo neutrálneho investora, čiže skrátenie doby trvania projektu zapríčiní nárast investičného pravidla. Avšak pôsobí na neho aj druhý faktor. Pre dlhšie trvajúci projekt je celkové riziko spojené s vývojom ceny produktu väčšie. Voči tomuto nárastu rizika sa rizikovo averzný investor musí zabezpečiť nárastom investičného pravidla. Tento faktor je významnejší pre veľké hodnoty σ, čo spôsobuje rôzne reakcie rizikovo averzného investora na skrátenie projektu pre rôzne hodnoty σ. Obrázok 4.4 naznačil, že pre malé hodnoty parametra σ môže mať druhý faktor opačný vplyv na hodnotu investičného pravidla rizikovo averzného investora a docieliť jeho nižšiu hodnotu ako u rizikovo neutrálneho investora. Práve toto rozdielne správanie investorov pri zmene doby trvania projektu môže podporiť našu hypotézu.



Obr. 4.5: Závislosť P_R^T od R pre rôzne hodnoty T



Obr. 4.6: $\frac{\partial P_R^T}{\partial R}$ v bode $R = 0$ v závislosti od T

Záver

Teória reálnych opcií opisuje správanie rizikovo neutrálneho investora pri investičnom rozhodovaní. V skutočnosti sa však mnohí, najmä menší investori, správajú rizikovo averzne. Riziková averznosť je dôležitou súčasťou ľudskej povahy, povahy firiem a výrazne ovplyvňuje ich správanie.

Cieľom tejto práce bolo analyzovať vplyv investorovej averzie k riziku na jeho optimálne rozhodovanie. Rizikovo averzného investora sme modelovali ako agenta maximalizujúceho svoju očakávanú užitočnosť. Vhodnou voľbou funkcie užitočnosti sa nám podarilo modifikovať a následne aj analyticky vyriešiť základný model reálnych opcií pre projekt s nekonečným trvaním. Analyzovali a interpretovali sme vplyv najdoležitejších parametrov modelu na výsledok. Ukázali sme, že vyššia miera averzie k riziku zapríčiní vyššiu hodnotu investičného pravidla a spôsobí oneskorenie investície. Taktiež sa nám podarilo ukázať, že rizikovo averzný investor reaguje citlivejšie na zmenu volatility ceny produktu, ako rizikovo neutrálny investor.

Uvedený model sme následne rozšírili o konečnú dobu trvania projektu. Ukázali sme, že aj v tomo prípade vieme analyticky odvodiť investičné pravidlo pre rizikovo averzného investora. Vidíme však, že už v prípade tejto relatívne jednoduchej modifikácie sa správanie investora značne skomplikuje a na výsledné rozhodnutie má vplyv viacero faktorov. Numerické výsledky naznačujú, že správanie rizikovo averzného investora môže byť zaujímavé, ba až nečakané. Vlastnosti jeho správania sa výrazne odlišujú od rizikovo neutrálneho investora. Zaujala nás závislosť investičného pravidla od volatility ceny produktu, ktorá má odlišné vlastnosti pre nízku a vysokú mieru tejto volatility. Následne sme vyslovili hypotézu, že rizikovo averzný investor môže mnohokrát investovať skôr ako rizikovo neutrálny investor. Pomocou predchádzajúcich poznatkov sme sa pokúsili vysvetliť príčiny tohoto správania, avšak vo všeobecnosti sa nám ju dokázať nepodarilo.

Téma rizikovej averznosti v teórii reálnych opcií nie je touto prácou zďaleka vyčerpaná. Okrem mnohých možných rozšírení nášho modelu, prípadne aplikovania odlišného prístupu k modelovaniu rizikovej averznosti, je tu možnosť pokračovať v analýze našich výsledkov. Pre konečný časový horiznt a rizikovo averzného investora sme vyslovili zaujímavé hypotézy, ktoré však čakajú na svoj dôkaz. Ďalšou cestou by mohlo byť aplikovanie nášho modelu na reálny problém investičného rozhodovania a skúmanie spomenutých výsledkov modelu na reálnom probléme.

A Výpočty pre rizikovo averzného investora a projekt s konečným časovým horizontom

Na základe častí 2.1 a 3.1 je hodnota projektu s konečným časovým horizontom pre rizikovo averzného investora nasledovná

$$V_R^T(P) = E_p\left(\int_0^T e^{-\rho t}\left\{\frac{P_t^{1-R}}{1-R} - \frac{(c+\rho I)^{1-R}}{1-R}\right\}dt\right) - e^{-\rho T}\frac{I^{1-R}}{1-R}$$

Pre dlžnú sumu, ktorú musí firma vrátiť, sme použili limitný prípad našej funkcie užitočnosti pre $P \to 0$ a $C = I$, teda $X \to -I$

$$\lim_{X\to -I} U(X) = -\frac{I^{1-R}}{1-R}, \qquad 0 \le R < 1$$

Strednú hodnotu vyjadríme v integrálnej forme a zameníme poradie integrovania

$$\begin{aligned} V_R^T(P) &= E_p\left(\int_0^T e^{-\rho t}\left\{\frac{P_t^{1-R}}{1-R} - \frac{(c+\rho I)^{1-R}}{1-R}\right\}dt\right) - e^{-\rho T}\frac{I^{1-R}}{1-R} = \\ &= \int_0^\infty\left(\int_0^T e^{-\rho t}\left\{\frac{P_t^{1-R}}{1-R} - \frac{(c+\rho I)^{1-R}}{1-R}\right\}dt\right) f\left(P_t\right)dP_t - e^{-\rho T}\frac{I^{1-R}}{1-R} = \\ &= \int_0^T e^{-\rho t}\left(\int_0^\infty \frac{P_t^{1-R}}{1-R} f\left(P_t\right)dP_t\right)dt - \int_0^T e^{-\rho t}\frac{(c+\rho I)^{1-R}}{1-R}dt - e^{-\rho T}\frac{I^{1-R}}{1-R} \end{aligned}$$

Tvrdenie A.1.

$$V_R^T(P) = \frac{P^{1-R}}{1-R}\,\frac{1-e^{-T\left[\rho-\alpha(1-R)+\frac{1}{2}\sigma^2 R(1-R)\right]}}{\rho-\alpha\left(1-R\right)+\frac{1}{2}\sigma^2 R\left(1-R\right)} - \frac{(c+\rho I)^{1-R}}{\rho\left(1-R\right)}\left(1-e^{-\rho T}\right) - e^{-\rho T}\frac{I^{1-R}}{1-R}$$

Dôkaz. Pri dôkaze budeme vychádzať z

$$V_R^T(P) = \int_0^T e^{-\rho t}\left(\int_0^\infty \frac{P_t^{1-R}}{1-R} f\left(P_t\right)dP_t\right)dt - \int_0^\infty e^{-\rho t}\frac{(c+\rho I)^{1-R}}{1-R}dt - e^{-\rho T}\frac{I^{1-R}}{1-R}$$

Postupne spočítame oba integrály. Pri prvom využijeme tvrdenie 2.1.1.

$$\int_0^{\infty} \frac{P_t^{1-R}}{1-R} f\left(P_t\right) dP_t = \frac{e^{(\ln P+\alpha t)(1-R)-\frac{1}{2}\sigma^2 tR(1-R)}}{1-R}$$

Dostávame teda

$$\int_0^T e^{-\rho t} \frac{e^{(\ln P+\alpha t)(1-R)-\frac{1}{2}\sigma^2 tR(1-R)}}{1-R} dt =$$

$$= \frac{P^{1-R}}{1-R} \int_0^T e^{-t\left[\rho-\alpha(1-R)+\frac{1}{2}\sigma^2 R(1-R)\right]} dt = \frac{P^{1-R}}{1-R} \left[\frac{e^{-t[\dots]}}{-[\dots]}\right]_0^T =$$

$$= \frac{P^{1-R}}{1-R} \frac{1-e^{-T\left[\rho-\alpha(1-R)+\frac{1}{2}\sigma^2 R(1-R)\right]}}{\rho-\alpha\left(1-R\right)+\frac{1}{2}\sigma^2 R\left(1-R\right)}$$

Druhý integrál

$$\int_0^T e^{-\rho t} \frac{\left(c+\rho I\right)^{1-R}}{1-R} dt = \frac{\left(c+\rho I\right)^{1-R}}{1-R} \left[\frac{e^{-\rho t}}{-\rho}\right]_0^T = \frac{\left(c+\rho I\right)^{1-R}}{\rho\left(1-R\right)} \left(1-e^{-\rho T}\right)$$

Spočítame teda všetky vypočítané časti a dostávame

$$V_R^T(P) = \frac{P^{1-R}}{1-R} \frac{1-e^{-T\left[\rho-\alpha(1-R)+\frac{1}{2}\sigma^2 R(1-R)\right]}}{\rho-\alpha\left(1-R\right)+\frac{1}{2}\sigma^2 R\left(1-R\right)} - \frac{\left(c+\rho I\right)^{1-R}}{\rho\left(1-R\right)} \left(1-e^{-\rho T}\right) - e^{-\rho T} \frac{I^{1-R}}{1-R}$$

□

Použijeme tvrdenie 2.1.3 a dostaneme

$$\begin{aligned} V_R^T(P) =& \frac{\beta\gamma P^{1-R}}{\rho\left(1-R\right)\left(1-\gamma-R\right)\left(1-\beta-R\right)} \left(1-e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}\right) - \\ &- \frac{\left(c+\rho I\right)^{1-R}}{\rho\left(1-R\right)} \left(1-e^{-\rho T}\right) - e^{-\rho T} \frac{I^{1-R}}{1-R} \end{aligned}$$

Možnosť investovať, ktorú má firma, je rovnaká ako v časti 1.5. Preto bude hodnota tejto opcie riešením nasledujúcej diferenciálnej rovnice s okrajovými podmienkami.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 P^2 F''(P) + \alpha P F'(P) - \rho F(P) = 0 \\ F(P_R^T) = V_R^T(P_R^T) \\ F'(P_R^T) = V_R^{T\prime}(P_R^T) \end{aligned}$$

V 1.5 sme odvodili, že všeobecným riešením diferenciálnej rovnice je $F(P) = AP^{\beta}$, pričom sme už využili podmienku $\lim\limits_{P \to 0} F(P) = 0$. Parameter β je kladným riešením kvadratickej rovnice

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta\left(\beta - 1\right) + \alpha\beta - \rho = 0$$

Táto rovnica je identická s rovnicou v tvrdení 2.1.3 a teda β je totožná pre hodnotu projektu aj riešenie diferenciálnej rovnice pre hodnotu opcie. Pomocou okrajových podmienok nájdeme ivestičné pravidlo P_R^T. Akonáhle bude cena produktu rovná P_R^T, firma sa rozhodne investovať do projektu.

Tvrdenie A.2.

$$P_R^T = \left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}} \left(\frac{\left(c+\rho I\right)^{1-R}\left(1-e^{-\rho T}\right) + \rho e^{-\rho T} I^{1-R}}{1 - e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}}\right)^{\frac{1}{1-R}}$$

Dôkaz. Ukážeme, že ak má P spĺňať okrajové podmienky, tak musí byť rovné P_R^T v tvrdení. Naše okrajové podmienky sú

$$\begin{aligned}
AP^{\beta} =& \frac{\beta\gamma P^{1-R}}{\rho\left(1-R\right)\left(1-\gamma-R\right)\left(1-\beta-R\right)}\left(1-e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}\right) - \\
&- \frac{\left(c+\rho I\right)^{1-R}}{\rho\left(1-R\right)}\left(1-e^{-\rho T}\right) - e^{-\rho T}\frac{I^{1-R}}{1-R} \\
\beta AP^{\beta-1} =& \frac{\left(1-R\right)\beta\gamma P^{-R}}{\rho\left(1-R\right)\left(1-\gamma-R\right)\left(1-\beta-R\right)}\left(1-e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}\right)
\end{aligned}$$

Prvú okrajovú podmienku vynásobíme β

$$\begin{aligned}
\beta AP^{\beta} =& \frac{\beta^2\gamma P^{1-R}}{\rho\left(1-R\right)\left(1-\gamma-R\right)\left(1-\beta-R\right)}\left(1-e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}\right) - \\
&- \frac{\beta\left(c+\rho I\right)^{1-R}}{\rho\left(1-R\right)}\left(1-e^{-\rho T}\right) - \beta e^{-\rho T}\frac{I^{1-R}}{1-R}
\end{aligned}$$

Druhú okrajovú podmienku vynásobíme P

$$\beta AP^{\beta} = \frac{\left(1-R\right)\beta\gamma P^{1-R}}{\rho\left(1-R\right)\left(1-\gamma-R\right)\left(1-\beta-R\right)}\left(1-e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}\right)$$

Obe rovnice dáme do rovnosti a upravíme

$$\frac{(1-R)\,\beta\gamma P^{1-R}}{\rho\,(1-R)\,(1-\gamma-R)\,(1-\beta-R)}\left(1-e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}\right)=$$

$$=\frac{\beta^{2}\gamma P^{1-R}}{\rho\,(1-R)\,(1-\gamma-R)\,(1-\beta-R)}\left(1-e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}\right)-$$

$$-\frac{\beta\,(c+\rho I)^{1-R}}{\rho\,(1-R)}\left(1-e^{-\rho T}\right)-\beta e^{-\rho T}\frac{I^{1-R}}{1-R}$$

$$\frac{(1-R-\beta)\,\beta\gamma P^{1-R}}{\rho\,(1-R)\,(1-\gamma-R)\,(1-\beta-R)}\left(1-e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}\right)=$$

$$=-\frac{\beta\,(c+\rho I)^{1-R}}{\rho\,(1-R)}\left(1-e^{-\rho T}\right)-\beta e^{-\rho T}\frac{I^{1-R}}{1-R}$$

$$\frac{\gamma P^{1-R}}{R+\gamma-1}\left(1-e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}\right)=(c+\rho I)^{1-R}\left(1-e^{-\rho T}\right)+\rho e^{-\rho T}I^{1-R}$$

$$P^{1-R}=\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]\left(\frac{(c+\rho I)^{1-R}\left(1-e^{-\rho T}\right)+\rho e^{-\rho T}I^{1-R}}{1-e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}}\right)$$

$$P=\left[\frac{R+\gamma-1}{\gamma}\right]^{\frac{1}{1-R}}\left(\frac{(c+\rho I)^{1-R}\left(1-e^{-\rho T}\right)+\rho e^{-\rho T}I^{1-R}}{1-e^{\frac{-T\rho(1-\beta-R)(1-\gamma-R)}{\beta\gamma}}}\right)^{\frac{1}{1-R}} \qquad \square$$

Literatúra

[1] K.J. Arrow, *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*, Helsinki: Yrjö Hahnsson Foundation, 1965

[2] A. K. Dixit, R.S. Pindyck, *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, Princeton, 1994

[3] M. Friedman, L.P. Savage, *The Utility Analysis of Choices involving Risk*, Journal of Political Economy, Vol. 56, p.279-304.,1948

[4] Z. Chladná, *Real Options Applications for Strategic Investment Decisions*, Dizertačná práca, Universität Wien, 2007

[5] I. Michnová, *Analýza investičného rozhodovania pri uplatnení reálnej opcie*, Diplomová práca, FMFI UK, 2008

[6] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*,Princeton University Press, Princeton, 1944

[7] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equation*, Fourth Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1995

[8] J.W. Pratt, *Risk Aversion in the Small and in the Large*, Econometrica, Vol. 32, p.122-36., 1964

[9] http://cepa.newschool.edu/het/essays/uncert/aversion.htm