

UNIVERZITA KOMENSKÉHO
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

DSGE modelovanie

Diplomová práca

Bratislava 2009

Marián Varga

DSGE modelovanie

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Marián Varga

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY
A ŠTATISTIKY**

Študijný odbor:
9.1.9 Aplikovaná matematika

Vedúci diplomovej práce:
Ing. Marek Radvanský

BRATISLAVA 2009

Čestné prehlásenie

Týmto prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne pod vedením vedúceho diplomovej práce, s použitím teoretických vedomostí a uvedenej literatúry.

V Bratislave 28.4.2009

.....

Pod'akovanie

Chcel by som pod'akovať Ing. Marekovi Radvanskému za jeho podnetné nápady a pripomienky, poskytnutie vhodných materiálov, ako aj za obetovaný čas a množstvo trpezlivosti.

Abstrakt

Dynamické stochastické modely všeobecnej rovnováhy, skrátene DSGE modely, patria v posledných rokoch k hlavnému prúdu ekonomického modelovania. Snažia sa popisovať ekonomický rast, fluktuácie v ekonomike a takisto aj vplyvy monetárnej, či fiškálnej politiky v danej ekonomike. Dôležitým prínosom týchto modelov je, že na rozdiel od klasických makroekonometrických modelov sú postavené na silných mikroekonomických základoch. Aj keď je DSGE modelovanie vo svete značne rozšírené, na Slovensku ešte nie je dostatočne známe. Práca približuje teóriu DSGE modelovania a popisuje jeho základné metódy. Tie sú využité pri práci s jednoduchým DSGE modelom a pri spracovaní údajov popisujúcich slovenskú ekonomiku.

Kľúčové slová: DSGE model, DSGE modelovanie, real business cycle (RBC)

Obsah

Úvod	2
1 DSGE modelovanie	3
1.1 Základná charakteristika	3
1.2 Vznik DSGE modelovania	4
1.3 Súčasti DSGE modelu	5
1.4 Základné vetvy DSGE modelovania	6
1.5 DSGE modelovanie doma a v zahraničí	7
2 DSGE model – Real Business Cycle model	9
3 Aproximácia a riešenie DSGE modelu	12
3.1 Log-Linearizácia	12
3.2 Metódy riešenia	14
3.2.1 Metóda Blancharda a Kahna	16
3.2.2 Uhligova metóda	19
4 Spracovanie dát	22
4.1 Odstránenie trendu	23
4.1.1 Detrending a diferenciácia	24
4.1.2 H-P filter	26
4.2 Izolácia cyklov	27
4.2.1 Teória komplexných čísel	27
4.2.2 Spektrum	30
4.2.3 Využitie filtrov pri izolácii cyklov	31
4.3 Nepresnosť pri odstraňovaní trendov a izolácii cyklov	36
5 Riešenie jednoduchého RBC modelu	37
5.1 Dosadenie funkčných foriem	37
5.2 Log-linearizácia modelu	39
5.3 Aplikácia metódy riešenia	42
6 Business cycle dáta SR	46
6.1 Aplikácia metód na odstránenie trendu	47
6.2 Aplikácia filtrov na izoláciu cyklov	51
Záver	55
Použitá literatúra	56

Úvod

Na popisovanie vývoja a hlavných vzťahov v ekonomike sa začali vo veľkej miere používať DSGE modely. Pomaly tak nahrádzajú populárne makroekonometrické modely, ktoré boli určené hlavne na prognózovanie. Hlavným dôvodom je, že DSGE modelovanie je založené na mikroekonomických základoch, čím sú vzťahy v týchto modeloch ľahšie logicky interpretovateľné.

Cieľom tejto práce je priblížiť základné metódy používané pri DSGE modelovaní, keďže na Slovensku je tento smer málo známy.

Práca sa skladá z viacerých častí. V prvej kapitole sa snažíme načrtnúť všeobecnú charakteristiku DSGE modelovania. Druhá kapitola predstavuje jednoduchý DSGE model, RBC model, popisuje jeho rovnice a základné vzťahy. Tretia kapitola približuje techniky, ktoré sú najčastejšie používané pri riešení modelov. Vo štvrtej kapitole prezentujeme metódy, používané pri spracovaní dát. To je nevyhnutné pre prepojenie vlastností dát s tým, čo modeluje teoretický model. V piatej kapitole je na model z druhej kapitoly aplikovaná metóda riešenia, pričom vstupmi sú slovenské parametre. Posledná kapitola sa zaoberá aplikáciou metód popísaných v štvrtej kapitole na slovenské dáta.

1 DSGE modelovanie

1.1 Základná charakteristika

Dynamic Stochastic General Equilibrium, skrátene *DSGE* modelovanie, predstavuje v posledných rokoch moderný prúd ekonomického modelovania. Metodológia DSGE sa snaží popisovať rôzne javy v ekonomike, ako napríklad ekonomický rast, biznis cykly, vplyv menovej či fiškálnej politiky. Pracuje s modelmi, ktoré sa od svojich predchodcov líšia silným vplyvom mikroekonomických princípov.

Ako vyplýva z názvu, tieto modely sú dynamické, pretože skúmajú ako sa ekonomika vyvíja v čase. Sú taktiež stochastické, keďže sa zaoberajú aj tým, ako je ekonomika vystavená rôznym náhodným šokom (šoky spôsobuje napríklad technologický pokrok či fluktuácie cien palív). Súčasťou názvu je aj pojem *general equilibrium*. V preklade to znamená „všeobecná rovnováha“, čo je jedným zo smerov teoretickej mikroekonómie. Snaží sa vysvetľovať vývoj ponuky, dopytu a cien v ekonomike hľadaním ekvilibria (rovnováhy na trhu), pričom skúma individuálne trhy a agentov (napr. domácnosti, firmy) v danej ekonomike. Preto sú DSGE modely postavené na mikroekonomických základoch.

Tradičné makroekonometrické modely, určené na prognózovanie, používané centrálnymi bankami od 70-tych rokov minulého storočia do dnes, odhadujú dynamické vzťahy medzi rôznymi sektormi ekonomiky a často obsahujú viac ako sto premenných. Na druhej strane, DSGE modely síce sú náročnejšie pri riešení a analyzovaní, ale abstrahujú od veľkého počtu sektorových vzťahov. Obsahujú väčšinou omnoho menej premenných, najviac okolo sto premenných pri experimentálnych prognostických DSGE modeloch, ktoré sú konštruované centrálnymi bankami (napr. model BEQM, The National Bank of England, bližšie popísaný v časti 1.5). Hlavnou výhodou DSGE modelov oproti makroekonometrickým modelom je fakt, že vzťahy v týchto modeloch sú ľahšie logicky interpretovateľné, keďže sú založené na mikroekonomických princípoch.

Vo všeobecnosti sa dá povedať, že DSGE modely sa používajú na simuláciu rôznych šokov, ktorým sú ekonomiky vystavené, alebo na prognózovanie vývoja ekonomiky. Pri simulácii sa často uplatňuje iba čisto teoretický model, alebo sa model kalibruje podľa reálnych údajov tak, aby čo najlepšie vystihoval situáciu v konkrétnej ekonomike. Veľakrát sa pomocou DSGE modelov skúma aj to, aký je vplyv

jednotlivých typov menových či iných štrukturálnych politík a šokov na vývoj ekonomiky.

1.2 Vznik DSGE modelovania

Prvý článok, ktorý podnietil rozvoj DSGE modelov, publikovali Kydland a Prescott v roku 1982¹. Základným príspevom tejto práce bola zmena pohľadu na to, ako makroekonómia vedú empirický výskum. Empirickou paradigmou, ktorá ovplyvňovala výskum vo vtedajšom čase, bolo hlavne zameranie sa najmä na čisto štatistickú stránku makroekonomického správania sa, alebo zameranie sa na modely zo systémov rovníc, ktoré ignorovali uvažovanie všeobecného ekvilibria a očakávania agentov.

Kritiky tohto prístupu, ktoré podložil Lucas (1976) a taktiež metodológie Simsa (1972), či Hansena a Sargenta (1980) vyvolali prechod k novej empirickej paradigme. V tomto prechodnom období sa zaviedla istá „teoretická disciplína“ v charakteristikách redukovanej formy makroekonomických systémov. Zdrojom tejto „disciplíny“ sa stala trieda DSGE modelov. Základom tejto teoretickej disciplíny bolo hlavne zavedenie rôznych rovnicových ohraničení, pri ktorých stochastické vlastnosti súboru exogénnych premenných, v spojení s očakávaniami agentov, spôsobovali endogénne stochastické správanie premenných určených agentmi. Používanie týchto ohraničení bolo napriek tomu vedľajšie, takže špecifikácie redukovanej formy naďalej slúžili ako základ empirického výskumu.

Kydland a Prescott však definitívne zmenili predchádzajúci prístup. Ako odkaz ich práce, DSGE modely už dlhšie neslúžia ako vedľajšie zdroje teoretickej disciplíny, založenej na štatistických špecifikáciách. Tieto modely sa naopak stávajú základom, ktorým sa riadi empirická práca makroekonómov. Dôsledkom toho sa v DSGE modelovaní začínajú zavádzať rôzne nové metodológie a prístupy. To isté platí aj pre štatistické postupy s ktorými je tento výskum spojený. Napriek charakteristickej heterogenite metód použitých pri sledovaní súčasného empirického makroekonomického výskumu je prínos Kydlanda a Prescottta významný.

¹ Ich spoločnou prevratnou prácou bol článok: Finn Kydland and Edward Prescott (1982), „Time to build and aggregate fluctuations.“ *Econometrica* 50, pp. 1350-72.

1.3 Súčasti DSGE modelu

DSGE modely pozostávajú zo súborov rovníc, ktoré sa tvoria optimalizáciou na mikroekonomickom základe. To znamená, že agenti (domácnosti, firmy) optimalizujú svoje správanie. Na tomto princípe je položené aj odvodenie rovníc modelu. Modely väčšinou pozostávajú z viacerých blokov. Často popisujú viacero sektorov, medzi inými aj sektor domácností, ktorý charakterizujú rovnice popisujúce optimálne správanie domácností. Tie sa snažia maximalizovať súčasnú hodnotu očakávanej užitočnosti pri určitých rozpočtových ohraničeniach. Ďalší blok modelu popisuje optimálne správanie firiem, ktoré sa snažia maximalizovať súčasnú hodnotu očakávaného zisku. Často sa v modeloch uvažuje aj úloha menovej politiky, kedy centrálna banka nastavuje úrokové sadzby v domácej ekonomike. Na to sa používajú rôzne modifikácie Tylorovho pravidla. Rozsah modelov je však väčšinou rôzny a líši sa podľa toho na aký účel má byť DSGE model konštruovaný.

DSGE modely sa snažia rozlúštiť a popísať nasledujúce aspekty ekonomiky²:

- Preferencie: musia byť špecifikované ciele agentov v danej ekonomike. Napríklad, domácnosti sa snažia maximalizovať súčasnú hodnotu očakávanej užitočnosti, firmy sa snažia maximalizovať svoj zisk.
- Technológie: musí byť špecifikovaná produkčná kapacita agentov v ekonomike. Napríklad firmy majú svoju produkčnú funkciu, určujúcu koľko tovarov sa vyprodukuje na báze kombinácie pracovnej sily a kapitálu.
- Inštitucionálny rámec: musia byť určené inštitucionálne obmedzenia, pri ktorých agenti v ekonomike vystupujú. To napríklad znamená, že agenti sa rozhodujú na základe určitých rozpočtových obmedzení. Takisto sa špecifikujú pravidlá menovej a fiškálnej politiky a ako sa menia rozpočtové ohraničenia v závislosti od bankovo-politických procesov.

Špecifikovaním preferencií (aké sú ciele agentov), technológií (čo vedia agenti vyprodukovať) a inštitúcií (ako agenti navzájom vplyvajú v ekonomike), je možné zostrojiť a vyriešiť DSGE model, ktorý ukáže koľko sa aktuálne produkuje, obchoduje,

² Podľa Ódor, L.: „Štruktúralna makroekonometria.“ NBS, Bratislava 2008

či konzumuje. Je takisto možné urobiť predikcie, čo nastane, keď sa bude meniť inštitucionálny rámec (napr., keď sa zmení menová politika ekonomiky).

Výhodou DSGE modelov je, že na nich neplatí Lucasova kritika³. Lucas tvrdil, že predikcie v klasických makroekonometrických modeloch nie sú správne, pretože tieto modely využívajú korelácie medzi premennými, ktoré boli pozorované v minulosti z historických dát. Tieto korelácie sa môžu zmeniť pri zavedení novej menovej politiky a tým pádom sú predikcie založené na historických pozorovaniach nepravdivé. V prípade DSGE modelov sa však na základe mikroekonomickej teórie pri zmene menovej politiky môžu meniť aj preferencie agentov.

Aj keď je DSGE metodológia pomerne rozvinutá a rozšírená, je náročné skonštruovať DSGE model. Dané je to najmä tým, že je ťažké dokonale identifikovať všetky potrebné vzťahy teoretického modelu ekonomiky a problémová môže byť aj kalibrácia modelu (voľba parametrov modelu). Preto viaceré centrálnych bánk stále ostáva pri tradičných makroekonometrických modeloch pre krátkodobé prognózovanie.

1.4 Základné vetvy DSGE modelovania

V DSGE modelovaní sa od jeho vzniku postupom času vyvinulo aj viaceré smerov. Najvýraznejšie sú však dve základné školy modelovania: *Real business cycle* (RBC) modely a *New-Keynesian* DSGE modely.

RBC teória je založená na neoklasickom modeli rastu, pričom sa predpokladá, že ceny sú flexibilné. Táto teória predpokladá, že fluktuácie reálnych veličín sú spôsobené len reálnymi šokmi – technologickým pokrokom, alebo šokmi vládnych výdavkov. Za zakladateľov tejto teórie sa považujú Kydland a Prescott (1982), ktorí zároveň svojou prácou prispeli k vzniku DSGE modelovania vôbec.

New-Keynesian modely sú štruktúrou podobné RBC modelom, ale na rozdiel od nich predpokladajú, že ceny sú určované monopolistickou konkurenciou, teda predpokladajú nominálne nepružnosti (nepružné ceny, nepružné mzdy). Tieto nepružnosti majú za následok, že aj nominálne šoky spôsobujú fluktuácie reálnych veličín. Tieto modely popisujú rozhodovanie domácností, firiem, centrálnych bánk a

³ Túto kritiku Lucas publikoval v odbornom článku v roku 1976. Lucas, R.: „Econometric Policy Evaluation. A critique.“ *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 1976, pp. 19-46.

d'alších ekonomických agentov. Jeden z prvých odhadnutých modelov, založených na tejto teórii, je od autorov Rotemberga a Woodforda (1997)⁴.

1.5 DSGE modelovanie doma a v zahraničí

Aj keď sa DSGE začali vo svete používať už v 80-tych rokoch na Slovensku sa táto metodológia začala používať relatívne nedávno. Národná Banka Slovenska v roku 2008 predstavila model⁵, ktorý vychádza zo základného novokeynesiánskeho modelu pre malú otvorenú ekonomiku. Novokeynesiánsky model je základom aj pre viaceré menšie modely vo svete. Praktickou aplikáciou slovenského modelu je simulácia vplyvov šokov na ekonomiku (napr. šok v nominálnej úrokovej sadzbe, šok v reálnom výmennom kurze). Ako uvádzajú autori, model nie je vhodný na kvalitatívnu analýzu. Aby sa dal použiť aj pre potreby prognózovania, treba ho rozšíriť, čo bude aj predmetom ďalšieho výskumu v NBS. Rozšírený model by mal podľa ich slov, okrem iného, obsahovať aj kapitálové a vládne výdavky, nepružnosti na kapitálovom trhu a trhu práce.

Známejšie európske modely vyvinuli v centrálnych bankách Veľkej Británie, Fínska alebo Švédska. Skúsenosti s DSGE modelmi majú aj slovenskí susedia z Česka, Maďarska aj Poľska⁶. Priblížime si ich nižšie.

Pomerne rozsiahly model s názvom BEQM (The Bank of England Quarterly Model), vytvorený centrálnou bankou Veľkej Británie, sa stal dôležitým nástrojom kvartálneho prognózovania v tejto krajine. Je to pomerne rozsiahly model skladajúci sa z troch častí: základom práce je *Conceptual Model*, obsahuje základný teoretický model; v druhej časti, *Data-Adjusted Model*, je tento model rozšírený o ďalšie premenné, čo zabezpečuje lepší súlad s empirickými údajmi; tretia časť, *Operational Model*, je využívaná najmä na prognostické účely, pri prognózovaní ďalšieho vývoja ekonomiky.

⁴ Model popísali v práci: Julio Rotemberg and Michael Woodford (1997), „An optimization-based econometric framework for the evaluation of monetary policy.“ NBER Macroeconomics Annual 12, pp. 297-346.

⁵ Bližšie je model popísaný v článku: Juraj Zeman, Matúš Senaj: „Modelovanie vývoja slovenskej ekonomiky pomocou základného DSGE modelu.“ IN: Biatic, ročník 16, 3/2008.

⁶ Týmito modelmi sa bližšie zaoberá článok Matúš Senaj: „DSGE modelovanie – nová výzva pre NBS.“ IN: Biatic, ročník 15, 8/2007.

Fínska centrálna banka vytvorila model s názvom AINO. Využívajú ho na analýzu krátkodobých a dlhodobých trendov v ekonomike, zároveň však slúži aj na prognózovanie. Jeho jadro tvorí neoklasický základ, ktorý obsahuje niekoľko zaujímavých rozšírení. Napríklad obyvateľstvo nie je homogénne a rozdeľuje sa na pracujúcich a na dôchodcov. Takto je možné sledovať dopady demografických zmien na vývoj ekonomiky.

Vo švédskej centrálnej banke vyvinuli model s názvom RAMSES. Slúži na analýzu menovej politiky krajiny a takisto na prognostické účely. Tento model je istou modifikáciou štrukturálneho modelu pre otvorenú ekonomiku. Modifikácia je založená na upravení úrokovej parity tak, aby bola konzistentná s reálnymi údajmi. Zaujímavosťou je aj zavedenie negatívnej korelácie medzi rizikovou prirážkou na zahraničné investície a očakávanou zmenou výmenného kurzu.

Poľská centrálna banka pretvorila švédsky model a jeho parametre odhadli na základe poľských údajov. Používa sa najmä na makroekonomické simulácie. Poliaci tomuto modelu dali názov SOE-PL.

Nakoniec treba spomenúť aj vytvorenie českého DSGE modelu, keďže ten bol základom aj pre prvý DSGE model slovenskej centrálnej banky. Česká národná banka sa DSGE modelovaniu začala venovať v roku 2004. Publikovali už viacero prác založených na problematike DSGE modelovania. Práca Vašíčka a Musila (2006) z Českej národnej banky popisuje novokeynesiánsky DSGE model pre malú otvorenú ekonomiku, ktorý je vhodný na prognózovanie makroekonomických veličín, ale takisto popisuje reakcie ekonomiky na rôzne šoky.

2 DSGE model – Real Business Cycle model

Podstatou RBC modelov je neoklasické uvažovanie rastu ekonomiky, rozšírené o 2 základné črty: agenti sa rozhodujú medzi prácou a nič nerobením, a významnú úlohu zohráva stochastickosť, ktorá ovplyvňuje technologický progres.

Uvažujme ekonomiku, ktorá pozostáva z obrovského počtu identických domácností. Cieľom každej domácnosti je maximalizovať očakávanú diskontovanú hodnotu užitočnosti U , pričom si vyberajú medzi spotrebou a oddychom:

$$\max_{c_t, l_t} U = E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t). \quad (2.1)$$

E_0 je operátor očakávaní podmienený informácií v čase 0, $\beta \in (0,1)$ je diskontný faktor, $u(\cdot)$ je okamžitá funkcia užitočnosti, c_t označuje úroveň spotreby, l_t vyjadruje úroveň oddychu v čase t .

Domácnosti sú vybavené aj určitou produkčnou technológiou, ktorou v čase t produkujú tovar y_t . Produkčná funkcia je reprezentovaná ako

$$y_t = a_t f(k_t, n_t), \quad (2.2)$$

kde k_t a n_t označujú množstvo fyzického kapitálu resp. prácu, ktorou domácnosti zabezpečujú produkciu, a_t označuje náhodné narušenia týchto dvoch produkčných faktorov (hovoríme tomu aj produkčný alebo technologický šok).

V každej jednej perióde majú domácnosti k dispozícii jednu jednotku času na rozdelenie medzi prácu a oddych, teda

$$1 = n_t + l_t. \quad (2.3)$$

Výstup vyrobený v čase t sa môže spotrebovať alebo môže byť použitý na rozšírenie zásoby fyzického kapitálu, ktorý je použiteľný v čase $t+1$ na ďalšiu produkciu. To znamená, že výstup môže byť buď spotrebovaný alebo investovaný:

$$y_t = c_t + i_t, \quad (2.4)$$

kde i_t označuje množstvo investícií. Nakoniec, úroveň fyzického kapitálu sa vyvíja podľa rovnice

$$k_t = i_t + (1 - \delta)k_{t-1}, \quad (2.5)$$

kde $\delta \in (0,1)$ označuje mieru amortizácie kapitálu. Úlohou domácností je teda maximalizovať (2.1) pri splnení podmienok (2.2) až (2.5), keď k_0 a a_0 sú dané.

Špecifickou črtou pri tejto úlohe domácností sú 2 konflikty, ktoré tu nastávajú. Prvým je konflikt spotreba/úspory: vyššia súčasná spotreba implikuje nižšie investície (úspory) v budúcnosti alebo menej kapitálu pre ďalšiu produkciu. Druhý konflikt predstavuje práca/oddych, viac oddychu implikuje menej vyprodukovanej práce a teda menší výstup.

Dôležitým krokom pri tvorbe tohto modelu je aj špecifikácia funkčnej formy pre $u(\cdot)$ a $f(\cdot)$, a takisto charakterizácia stochastického správania produkčného šoku a_t . Prvotným cieľom teórie RBC je špecifikovať model tak, aby zachytával dôležité charakteristiky ekonomického rastu, a následne posúdiť, ako je model schopný zachytávať kľúčové komponenty aktivity business cycle. Z pohľadu tvorby modelu, tieto ciele zohrávajú dôležitú rolu pri voľbe funkčných foriem $u(\cdot)$ a $f(\cdot)$, a stochastického procesu a_t . V tomto kontexte sú významnými tri základné aspekty ekonomického rastu, slúžiace ako obmedzenia: v dlhodobom horizonte sú úrovne rastu veličín $\{c_t, i_t, y_t, k_t\}$ skoro rovnaké (rovnomerný rast), marginálne produkcie kapitálu a práce sú približne konštantné v čase, a $\{l_t, n_t\}$ nepreukazujú žiadne trendy v dlhodobom vývoji.

S ohľadom na tieto obmedzenia, funkčná forma $u(\cdot)$ je zväčša rastúca v oboch argumentoch, je spojitě diferencovateľná, konkávna a spĺňa

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\partial u(c_t, l_t)}{\partial c_t} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\partial u(c_t, l_t)}{\partial l_t} = \infty .$$

Funkčné formy $f(\cdot)$ väčšinou vykazujú konštantné výnosy z rozsahu a spĺňajú analogickú limitnú podmienku.

Jedným zo spôsobov riešenia problému domácnosti je aplikácia teórie dynamického programovania. Dostaneme tak nutné podmienky pre riešenie tohto problému, tzv. Eulerove podmienky:

$$\frac{\partial u(c_t, l_t)}{\partial l_t} = \left\langle \frac{\partial u(c_t, l_t)}{\partial c_t} \right\rangle \times \left\langle \frac{\partial f(k_t, n_t)}{\partial n_t} \right\rangle, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u(c_t, l_t)}{\partial c_t} = \beta E_t \left\langle \frac{\partial u(c_{t+1}, l_{t+1})}{\partial c_{t+1}} \left[\frac{\partial f(k_{t+1}, n_{t+1})}{\partial k_{t+1}} + (1 - \delta) \right] \right\rangle. \quad (2.7)$$

Podmienka optimality (2.6) je vlastne marginálny úžitok z ďalšej jednotky voľného času spojený s nákladmi stratenej príležitosti: marginálna hodnota stratenej produkcie spôsobenej príslušným znížením času stráveného prácou. Podmienka optimality (2.7)

predstavuje marginálny úžitok z ďalšej jednotky dnešnej spotreby spojený s cenou stratenej príležitosti: diskontovaná očakávaná hodnota zajtrajšej pridanej užitočnosti, vytváraná príslušným úbytkom v úsporách.

Po dosadení konkrétnych funkčných noriem $u(\cdot)$ a $f(\cdot)$, a špecifikovaním stochastického procesu a_t , môžeme použiť Eulerove podmienky. Tak získame systém lineárnych a nelineárnych rovníc, ktoré charakterizujú výsledný model.

3 Aproximácia a riešenie DSGE modelu

Empirické skúmanie DSGE modelov väčšinou vyžaduje 2 prípravné fázy. Prvá fáza zahŕňa prípravu teoretického modelu ako takého, druhá je zameraná na prípravu dát, s ktorými má model pracovať.

Čo sa týka prípravnej fázy, DSGE modely zväčša obsahujú 3 časti: charakterizáciu prostredia, v ktorom sa rozhodujú plánovači, súbor pravidiel, podľa ktorých sa rozhodujú a takisto aj charakterizáciu „neurčitosti“, ktorej musia čeliť pri svojich rozhodnutiach. Dohromady tieto časti vytvárajú nelineárny systém diferencných rovníc s očakávaniami a ohraničeniami. Takéto systémy sú síce nie vždy prístupné empirickej analýze, ale môžu byť konvertované na riešiteľné systémy pomocou dvoch základných krokov.

Prvý krok zahŕňa konštrukciu lineárnej aproximácie modelu. Tak, ako vieme ľahko aproximovať nelineárne rovnice pomocou Tylorovho radu, takisto vieme aproximovať aj nelineárne systémy diferencných rovníc s očakávaniami. Druhým krokom je riešenie takejto lineárnej aproximácie. Toto riešenie je napísané (pokiaľ ide o premenné) vo forme odchýlok od hodnôt rovnovážneho stavu, čo je možné empiricky vyriešiť.

Hlavným cieľom tejto časti práce je intuitívne zachytiť a pochopiť prípravnú fázu modelu a poskytnúť užitočné nástroje pri jej realizácii. Samozrejme, existuje viacero spôsobov a metód, ktorými sa pri aproximácii a riešení modelu dá postupovať. Môžeme spomenúť napríklad projekčné metódy, „value-function“ iterácie alebo „policy function“ iterácie (Heer and Maussner, 2005). Tieto alternatívy nám dávajú nelineárne aproximácie skúmaného modelu. Najpoužívanejšou alternatívou pri aproximácii modelu sú perturbačné metódy.

3.1 Log-Linearizácia

Cieľom log-lineárnej aproximácie je pretvoriť systém nelineárnych diferencných rovníc na systém lineárny. V kontexte RBC modelov, existuje viacero spôsobov ako pri log-linearizácii postupovať. Základným spoločným princípom je však použitie Tylorovej aproximácie okolo rovnovážneho stavu. Tým sa všetky rovnice nahradia

aproximáciami, ktoré sú lineárnymi funkciami v logaritmovaných odchýlkach premenných (od rovnovážneho stavu).

Nech x_t je vektor premenných, \bar{x} ich rovnovážne stavy a

$$\tilde{x}_t = \log x_t - \log \bar{x} \quad (3.1)$$

je vektor logovaných odchýlok od rovnovážneho stavu. Rovnice charakterizujúce ekvilibrium modelu vieme napísať v tvare

$$1 = f(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t-1}) \quad (3.2)$$

$$1 = E_t[g(\tilde{x}_{t+1}, \tilde{x}_t)] \quad (3.3)$$

kde $f(0,0)=1$ a $g(0,0)=1$. Ak spravíme Tylorovu aproximáciu prvého rádu týchto rovníc okolo $(\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t-1}) = (0,0)$, dostaneme

$$0 \approx f_1 \tilde{x}_t + f_2 \tilde{x}_{t-1} \quad (3.4)$$

$$0 \approx E_t[g_1 \tilde{x}_{t+1} + g_2 \tilde{x}_t]. \quad (3.5)$$

Tak dostaneme lineárny systém premenných $\tilde{x}_t, \tilde{x}_{t-1}$ v deterministických rovniciach a premenných $\tilde{x}_{t+1}, \tilde{x}_t$ v rovniciach s očakávaniami.

Vo väčšine prípadov nie je potrebné explicitne diferencovať funkcie f a g . Log-lineárny systém vieme získať aj nasledujúcim spôsobom. Zo vzťahu (3.1) vyplýva, že x_t vieme napísať ako

$$x_t = \bar{x} \exp(\tilde{x}_t) \quad (3.6)$$

kde \tilde{x}_t je reálne číslo blízke 0. Rovnako, nech \tilde{y}_t je reálne číslo blízke 0. Rovnice zlogaritmuje na oboch stranách a využijeme nasledujúce aproximácie:

$$\exp(\tilde{x}_t + a\tilde{y}_t) \approx 1 + \tilde{x}_t + a\tilde{y}_t$$

$$\tilde{x}_t \tilde{y}_t \approx 0$$

$$E_t[a \exp(\tilde{x}_{t+1})] \approx E_t[a\tilde{x}_{t+1}] + c$$

kde a, c sú konštanty. Druhá rovnica plynie z toho, že \tilde{x}_t a \tilde{y}_t sú veľmi malé čísla.

Cieľom linearizácie je konvertovať rovnice modelu na lineárny systém, ktorý je potom možné jednoducho riešiť nižšie popísanými technikami. Dôvodom tohto kroku je najmä to, že explicitné riešenia modelov pozostávajúcich z nelineárnych diferenčných rovníc sú zvyčajne nemožné, keďže je potrebné príliš veľké množstvo výpočtov.

Tvar systému, ktorý po log-linearizácii dostaneme, sa dá zapísať ako⁷

$$Ax_{t+1} = Bx_t, \quad (3.7)$$

kde budú premenné zapísané ako logované odchýlky od hodnôt rovnovážneho stavu.

3.2 Metódy riešenia

Po tom, čo sme aproximovali model do formy (3.7), je našom ďalšou úlohou nájsť riešenie vo forme

$$x_{t+1} = Fx_t + Gv_{t+1}. \quad (3.8)$$

Toto riešenie reprezentuje vývoj premenných $\{x_t\}$, ktoré sú funkciou $\{v_t\}$, kde v_t označuje vektor exogénnych inovácií, alebo lepšie povedané, vektor štrukturálnych šokov.

Existuje viacero prístupov, ktorými sa dá riešiť transformácia z formy (3.7) na systém tvaru (3.8). Každý z týchto spôsobov zahŕňa určitú alternatívu vyjadrenia (3.7) a používa vlastné špecifické značenia. My si predstavíme metódu Blancharda a Kahna (1980) a Uhligovu metódu (1999), ktorá je založená na metóde neurčitých koeficientov. Ďalšími používanými metódami sú napríklad Simsova (2001) a Kleinova (2000), ktorá je istým spojením Blanchard-Kahnovej a Simsovej metódy.

Predtým, ako popíšeme metódu Blancharda a Kahna, si ukážeme jeden zo základných príkladov systému formy (3.7), ktorý použijeme pri vysvetlení všeobecných princípov metódy, a ktorý nám pomôže ju lepšie pochopiť. Je to linearizovaná stochastická verzia Ramseyho modelu optimálneho rastu (Romer, 2006).

Model je vyjadrený v nasledovnom tvare:

$$\tilde{y}_{t+1} - \tilde{a}_{t+1} - \alpha\tilde{k}_{t+1} = 0 \quad (3.9)$$

$$\tilde{y}_{t+1} - \gamma_c\tilde{c}_{t+1} - \gamma_i\tilde{i}_{t+1} = 0 \quad (3.10)$$

$$\theta_{lc}E_t(\tilde{c}_{t+1}) + \theta_dE_t(\tilde{a}_{t+1}) + \theta_kE_t(\tilde{k}_{t+1}) + \theta_{2c}\tilde{c}_t = 0 \quad (3.11)$$

$$\tilde{k}_{t+1} - \delta_k\tilde{k}_t - \delta_i\tilde{i}_t = 0 \quad (3.12)$$

$$\tilde{a}_{t+1} - \rho\tilde{a}_t = \varepsilon_{t+1}. \quad (3.13)$$

⁷ Dochádza tu k zmene značenia, kde x_t teraz označuje vektor všetkých premenných modelu.

Rovnica (3.9) je linearizovaná produkčná funkcia, (3.10) popisuje rozdelenie produkcie (výstupu), (3.11) zahŕňa očakávania agentov, (3.12) popisuje vývoj kapitálu, (3.13) špecifikuje lineazirovanú rovnicu technologického procesu.

Premenné $\{\tilde{y}_t, \tilde{c}_t, \tilde{i}_t, \tilde{k}_t, \tilde{a}_t\}$ reprezentujú výstup, spotrebu, investície, fyzický kapitál a šok produktivity. Všetky sú vyjadrené v logaritmických odchýlkach od hodnôt rovnovážneho stavu. Parameter ε_t je nekorelovaný stochastický proces. Vektor

$$\mu = [\alpha \quad \gamma_c \quad \gamma_i \quad \theta_{1c} \quad \theta_a \quad \theta_k \quad \theta_{2c} \quad \delta_k \quad \delta_i \quad \rho]'$$

zahŕňa tzv. „deep“ parametre, teda štrukturálne parametre modelu.

Pomocou dvoch modifikácií môžeme model dostať do tvaru, ktorý sa podobá zápisu (3.7). Prvým krokom je, že v rovnici (3.11) neuvažujeme operátor očakávania $E_t(\cdot)$, namiesto toho zavedieme do rovnice chybu očakávania, ktorú označíme ako η_{ct+1} . V druhom kroku, inováciou výrazu ε_{t+1} v rovnici (3.13) systém prispôbíme vyššie popísaným zmenám. Výsledný model má teda nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha & -1 \\ 1 & -\gamma_c & -\gamma_i & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{1c} & 0 & \theta_k & \theta_a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{y}_{t+1} \\ \tilde{c}_{t+1} \\ \tilde{i}_{t+1} \\ \tilde{k}_{t+1} \\ \tilde{a}_{t+1} \end{bmatrix}}_{x_{t+1}} \\ & = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta_{2c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_i & \delta_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \tilde{c}_t \\ \tilde{i}_t \\ \tilde{k}_t \\ \tilde{a}_t \end{bmatrix}}_{x_t} \\ & + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{t+1} \end{bmatrix}}_{v_{t+1}} \end{aligned}$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta_{ct+1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\eta_{t+1}}. \quad (3.14)$$

3.2.1 Metóda Blancharda a Kahna

Táto metóda riešenia modelu je jednou z najpoužívanejších metód a aplikuje sa na modely zapísané ako

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ E_t(x_{2t+1}) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} + E f_t, \quad (3.15)$$

kde sú premenné modelu rozdelené na: $n_1 \times 1$ vektor endogénnych predeterminovaných premenných x_{1t} (obsahuje premenné, pre ktoré $E_t(x_{1t+1}) = x_{1t+1}$), a $n_2 \times 1$ vektor endogénnych nepredeterminovaných premenných x_{2t} (pre ktoré $x_{2t+1} = E_t(x_{2t+1}) + \eta_{t+1}$, kde η_{t+1} reprezentuje chybu očakávaní). Nakoniec, $k \times 1$ vektor f_t zahŕňa exogénne premenné modelu.

Ak procesom linearizácie modelu nedostaneme automaticky požadovaný tvar formy (3.15), v tom prípade musí byť implementovaný prípravný krok, napr. podľa Kinga a Watsona (2002). Tento krok je vlastne redukciou systému: ide o to, že model sa zapíše pomocou podmnožiny premenných, ktoré sú determinované. Pre lepšiu predstavu uvažujme, že merania pre šok produktivity \tilde{a}_t a kapitál \tilde{k}_t sú postačujúce pre určenie výstupu \tilde{y}_t v rovnici (3.9), a pre dané \tilde{y}_t , pozorovanie pre spotrebu \tilde{c}_t alebo investícií \tilde{i}_t stačí na určenie oboch premenných pomocou (3.10). Takto teda postupujeme, keď pracujeme priamo s $\{\tilde{c}_t, \tilde{k}_t, \tilde{a}_t\}$ použijúc (3.11)-(3.13), a pomocou (3.9) a (3.10) získame $\{\tilde{y}_t, \tilde{i}_t\}$ ako funkcie $\{\tilde{c}_t, \tilde{k}_t, \tilde{a}_t\}$. V trojici $\{\tilde{c}_t, \tilde{k}_t, \tilde{a}_t\}$ je \tilde{k}_t predeterminované (pre dané \tilde{k}_t a \tilde{i}_t , \tilde{k}_{t+1} je určené ako v (3.12)); \tilde{c}_t je endogénne, ale nie predeterminované (ako vidno z (3.11), \tilde{c}_{t+1} je spojené s chybou očakávaní); nakoniec \tilde{a}_t je exogénna premenná. Takto podľa zápisu (3.15) hľadáme špecifikáciu modelu vo forme

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{t+1} \\ E_t(\tilde{c}_{t+1}) \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} \tilde{k}_t \\ \tilde{c}_t \end{bmatrix} + E\tilde{a}_t. \quad (3.16)$$

Aby sme túto formu mohli získať, zaveďme si pomocné vektory

$$\xi_t = [\tilde{y}_t \quad \tilde{i}_t]', \text{ a } \zeta_t = [\tilde{k}_t \quad \tilde{c}_t]',$$

a poznamenajme, že

$$E_t(\tilde{a}_{t+1}) = \rho\tilde{a}_t.$$

Pri takto definovaných premenných, model možno zapísať ako

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\gamma_i \end{bmatrix}}_{\psi_0} \xi_t = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma_c \end{bmatrix}}_{\psi_1} \zeta_t + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\psi_2} \tilde{a}_t \quad (3.17)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \theta_k & \theta_{1c} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\psi_3} E_t(\zeta_{t+1}) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\theta_{2c} \\ \delta_k & 0 \end{bmatrix}}_{\psi_4} \zeta_t + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_i \end{bmatrix}}_{\psi_5} \xi_t + \underbrace{\begin{bmatrix} -\theta_a \rho \\ 0 \end{bmatrix}}_{\psi_6} \tilde{a}_t. \quad (3.18)$$

Ďalej, dosadením (3.17) do (3.18), čo vyžaduje inverziu ψ_0 v rovnici (3.17), dostávame

$$\psi_3 E_t(\zeta_{t+1}) = [\psi_4 + \psi_5 \psi_0^{-1} \psi_1] \zeta_t + [\psi_6 + \psi_5 \psi_0^{-1} \psi_2] \tilde{a}_t. \quad (3.19)$$

Nakoniec, pre násobením (3.19) výrazom ψ_3^{-1} dostávame špecifikáciu modelu v hľadanej forme (3.16). Teraz už môžeme implementovať Blanchard Kahnovu metódu pre nájdenie riešenia modelu. Postupnosť krokov metódy a ich implementáciu si vysvetlíme použitím značenia podľa (3.15).

Metóda začína Jordanovou dekompozíciou matice \tilde{A} , čo nám dáva

$$\tilde{A} = \Lambda^{-1} J \Lambda, \quad (3.20)$$

kde diagonálne prvky matice J , pozostávajúce z vlastných hodnôt matice \tilde{A} , sú usporiadané podľa absolútnej hodnoty vlastných hodnôt zostupne zľava doprava. Maticu J môžeme teda zapísať ako

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

kde vlastné hodnoty J_1 ležia na alebo vnútri jednotkového kruhu a vlastné hodnoty J_2 ležia mimo tohto kruhu. V tomto prípade sa hovorí, že J_2 je nestabilná pretože J_2^n diverguje, keď n rastie. Matice Λ a E môžeme rovnako rozpísať ako

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ & \Lambda_{22} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

kde Λ_{11} je podobná ako J_1 , atď. Pokiaľ počet nestabilných vlastných hodnôt je rovný počtu nepredeterminovaných premenných, existuje jediné riešenie modelu. Ak počet nestabilných vlastných hodnôt je väčší ako počet nepredeterminovaných premenných, riešenie neexistuje; v opačnom prípade existuje nekonečne veľa riešení systému..

Uvažujúc prípad jediného riešenia, dosadením za \tilde{A} a E v rovnici (3.15) dostávame nasledujúci systém:

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ E_t(x_{2t+1}) \end{bmatrix} = \Lambda^{-1} J \Lambda \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} f_t. \quad (3.23)$$

Teraz prenásobíme obidve strany rovnice maticou Λ , z čoho dostaneme

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1t+1} \\ E_t(\dot{x}_{2t+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{1t} \\ \dot{x}_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} f_t, \quad (3.24)$$

kde

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1t} \\ \dot{x}_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Táto transformácia efektívne rozdeľuje systém tak, že nepredeterminované premenné závisia iba na nestabilných vlastných hodnotách \tilde{A} obsiahnutých v J_2 .

Keď máme takto rozdelený systém, odvodíme riešenie pre nepredeterminované premenné vykonaním iterácií (3.27)-(3.29) pre spodnú časť (3.24). Použijeme označenie f_{2t} na popisovanie časti f_t zodpovedajúcej D_2 , čo použijeme nižšie.

Vyjadriť teda spodnú časť (3.24) ako

$$\dot{x}_{2t} = J_2^{-1} E_t(\dot{x}_{2t+1}) - J_2^{-1} D_2 f_{2t}. \quad (3.27)$$

Z tohto logicky máme výraz pre \dot{x}_{2t+1} , ktorý má tvar

$$\dot{x}_{2t+1} = J_2^{-1} E_{t+1}(\dot{x}_{2t+2}) - J_2^{-1} D_2 f_{2t+1}, \quad (3.28)$$

čo môžeme dosadiť do (3.27), čím dostaneme

$$\dot{x}_{2t} = J_2^{-2} E_t(\dot{x}_{2t+2}) - J_2^{-2} D_2 E_t(f_{2t+1}) - J_2^{-1} D_2 f_{2t}. \quad (3.29)$$

Pritom bolo v rovnici (3.29) využité Pravidlo iterovaných očakávaní (Law of Iterated Expectations), ktoré hovorí, že

$$E_t[E_{t+1}(x_t)] = E_t(x_t)$$

pre všetky x_t (Ljungqvist a Sargent, 2004). Keďže J_2 obsahuje nestabilné vlastné hodnoty, J_2^{-n} sa znižuje, keď n ide do nekonečna. Teda pri pokračovaní proces iterácií vedie k

$$\dot{x}_{2t} = -\sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-(i+1)} D_2 E_t(f_{2t+i}). \quad (3.30)$$

Keď sa vrátíme späť, k vyjadreniu x_{2t} podľa (3.25), dostávame, že

$$x_{2t} = -\Lambda_{22}^{-1} \Lambda_{21} x_{1t} - \Lambda_{22}^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} J_2^{-(i+1)} D_2 E_t(f_{2t+i}). \quad (3.31)$$

V kontexte vzorového modelu predstaveného vyššie to znamená, že

$$E_t(f_{2t+i}) = \rho^i \tilde{a}_t,$$

a teda z rovnice (3.31) máme

$$x_{2t} = -\Lambda_{22}^{-1} \Lambda_{21} x_{1t} - \Lambda_{22}^{-1} J_2^{-1} (I - \rho J_2^{-1} D_2)^{-1} \tilde{a}_t. \quad (3.32)$$

Nakoniec, na vyriešenie vrchnej časti systému (3.24), si rozpišeme hornú časť v (3.23), teda:

$$x_{1t+1} = \tilde{A}_{11} x_{1t} + \tilde{A}_{22} x_{2t} + E_1 f_t, \quad (3.33)$$

kde \tilde{A}_{11} a \tilde{A}_{22} sú rozkladom $\Lambda^{-1} J \Lambda$, zodpovedajúce x_{1t} a x_{2t} . Potom, dosadenie za x_{2t} , využijúc (3.31) vedie k riešeniu pre x_{1t} , vo forme danej rovnicou (3.8).

Na záver treba povedať, že použitiu tejto metódy predchádzajú zväčša isté požiadavky. Často je dôležité špecificky redukovat' systém tak, aby sme získali formu modelu, ktorá pozostáva z podmnožiny svojich premenných. Premenné v tejto podmnožine sa rozlišujú podľa toho, či sú predeterminované, alebo nepredeterminované. Taktiež, je potrebná invertibilita matíc ψ_0 a ψ_3 , aby sme mohli získať takú špecifikáciu modelu, ktorú možno riešiť.

3.2.2 Uhligova metóda

Uhlig (1999) predstavil metódu, ktorá je založená na metóde neurčitých koeficientov. Základnou myšlienkou je nájsť riešenie v tvare, kde budú všetky premenné lineárnymi funkciami vektora endogénnych premenných x_{t-1} a exogénnych premenných z_t , ktoré sú dané v čase t . To znamená, že v čase t sa už nemôžu zmeniť. Tieto premenné označujeme aj ako „state“ alebo predeterminované.

Uvažujme vektor endogénnych „state“ premenných x_t veľkosti $m \times 1$, vektor ostatných endogénnych premenných y_t veľkosti $n \times 1$ a vektor exogénnych premenných z_t veľkosti $k \times 1$. Ekvilibrium je zapísané v tvare:

$$0 = Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t \quad (3.34)$$

$$0 = E_t [Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t] \quad (3.35)$$

$$z_{t+1} = Nz_t + \varepsilon_{t+1} \quad E_t[\varepsilon_{t+1}] = 0, \quad (3.36)$$

kde C je matica veľkosti $l \times n$. F je matica veľkosti $(m+n-l) \times n$ a N má len stabilné vlastné hodnoty.

Riešenie systému (3.34)-(3.36) hľadáme vo forme

$$x_t = Px_{t-1}Qz_t \quad (3.37)$$

$$y_t = Rx_{t-1} + Sz_t \quad (3.38)$$

Aby sme dospeli k riešeniu, musíme riešiť maticovú kvadratickú rovnicu. Riešenie musí taktiež spĺňať nasledujúce vlastnosti:

1. P rieši maticové kvadratické rovnice

$$0 = C^0 AP + C^0 B \quad (3.39)$$

$$0 = (F - JC^+ A)P^2 - (JC^+ B - G + KC^+ A)P - KC^+ B + H \quad (3.40)$$

kde C^+ je pseudo-inverzná z matice C , C^0 je matica veľkosti $(l-n) \times l$, ktorej riadky tvoria základ nulového priestoru C' . Ekvilibrium popísané rovnicami (37), (38) a (36) je stabilné, ak všetky vlastné hodnoty P sú menšie ako jedna v absolútnej hodnote.

2. R je dané ako

$$R = -C^+(AP + B)$$

3. Pre dané matice P a R definujeme maticu V

$$V = \begin{bmatrix} I_k \otimes A, & I_k \otimes C \\ N' \otimes F + I_k \otimes (FP + JR + G), & N' \otimes J + I_k \otimes K \end{bmatrix}$$

kde I_k je identická matica veľkosti $k \times k$. Potom

$$V \begin{bmatrix} \text{vec}(Q) \\ \text{vec}(S) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \text{vec}(D) \\ \text{vec}(LN + M) \end{bmatrix}, \quad (3.41)$$

kde $\text{vec}(\cdot)$ označuje opačnú stĺpcovú vektorizáciu.

Je zrejmé, že ak je matica V invertibilná, potom pre násobenie rovnice (3.41) maticou V^{-1} vedie k riešeniu pre Q .

Ak chceme vyriešiť maticové kvadratické rovnice (3.39) a (3.40) pre P , napíšeme ich vo všeobecnej forme

$$\Psi P^2 - \Gamma P - \Theta = 0, \quad (3.42)$$

kde zdefinujeme

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0_{l-n,m} \\ F - JC^+A \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} C^0A \\ JC^+B - G + KC^+A \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} C^0B \\ KC^+B - H \end{bmatrix},$$

pričom $0_{l-n,m}$ je matica veľkosti $(l-n) \times m$ obsahujúca nuly. Aby sme mohli vyriešiť maticovú kvadratickú rovnicu (42) pre $m \times m$ maticu P , zdefinujeme $2m \times 2m$ matice

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Gamma & \Theta \\ I_m & 0_{m,m} \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Psi & 0_{m,m} \\ 0_{m,m} & I_m \end{bmatrix}.$$

Pre takto zadané matice, nech s a λ označujú zovšeobecnený vlastný vektor a zovšeobecnenú vlastnú hodnotu Ξ vzhľadom na Δ , s môžeme zapísať ako $s' = [\lambda x', x']$ pre $x \in \mathfrak{R}^m$. Potom riešenie maticovej kvadratickej rovnice (3.42) je dané ako

$$P = \Omega \Lambda \Omega^{-1}$$

kde $\Omega = [x_1, \dots, x_m]$ a $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Riešenie P je stabilné ak $|\lambda_i| < 1$ pre všetky $i = 1, \dots, m$.

Na záver treba dodať, že riešenie modelu značne závisí od voľby endogénnych a exogénnych „state“ premenných vo vektoroch x_{t-1} a z_t . Vo všeobecnosti, každá premenná daná v čase $t-1$ alebo skôr môže byť považovaná za „state“ premennú.

4 Spracovanie dát

Tak ako DSGE modely musia byť predpripravené pre empirickú analýzu, takisto musia byť pripravené aj zodpovedajúce dáta. Vo všeobecnosti, príprava dát zahŕňa tri hlavné kroky. Základným princípom pri tejto preparácii dát je ich obojstranné spracovanie, teda zaobchádzanie s reálnymi dátami a ich hodnotami, ale aj s ich teoretickou stránkou.

Prvým krokom je, že musí byť zavedený istý súvis medzi tým, čo charakterizuje model, a medzi tým, čo je zachytené v dátach. Napríklad, ak si predstavíme business cycle model, ktorý sa nezaobera vládny sektorom, nebude asi vhodné spájať modelovanú charakteristiku outputu s meraniami agregovaného HDP tvoreného aj vládnymi výdavkami.

Druhý a tretí krok predstavuje odstránenie trendov a izoláciu cyklických zložiek v dátach. Ak sa vrátíme k riešeniu modelu, to je väčšinou zapísané v tvare stacionárnej formy premenných: stochastické správanie veličín má formu dočasných odchýlok od hodnôt rovnovážneho stavu. Príslušné dáta sú reprezentované analogicky. Opäť použijúc business cycle model ako príklad, ak je model konštruovaný tak, aby charakterizoval cyklické správanie časového radu a časový rad preukazuje trendovú aj cyklickú zložku, trend musí byť pred analyzovaním odstránený. V takýchto prípadoch je často užitočné zabudovať do modelu cyklické aj trendové správanie, následne eliminovať trendy z modelovaných aj reálnych dát zároveň. Typickým cieľom v problematike business cycle modelov je úloha určiť, či modely schopné zachytiť „skákajúci“ charakter ekonomického rastu sú schopné prispôbiť sa pozorovaným dátam business cycle aktivity. Pri tomto ciele je dôležité, že špecifikácia modelu je podmienená obmedzeniu a musí úspešne charakterizovať trendové správanie. Ak je táto podmienka splnená, trendy sú náležite eliminované a analýza pokračuje skúmaním cyklického správania. Rovnovážny stav je v tomto prípade interpretovateľný ako relatívna výška trendových kriviek.

Čo sa týka izolovania cyklov, tento proces má blízko k odstraňovaniu trendov. Pri časových radoch, ktoré vykazujú cyklické odchýlky okolo trendu, identifikácia trendu automaticky slúži aj na určenie cyklických odchýlok. Avšak, až keď je dokončená separácia trendu od cyklu, na rade sú ďalšie kroky, potrebné k izolácii cyklov podľa frekvencie ich opakovania. Ak si opäť zoberieme do úvahy business cycle model, ten je určený na charakterizáciu fluktuácií v dátach, ktoré sa opakujú

v typických business cycle frekvenciách: tie sú 6 až 32 štvrt'rokov, teda 1.5 až 8 rokov (Hodrick a Prescott, 1981). Model nie je určený na charakterizáciu sezónnych fluktuácií. Pred zavedením ďalších prídavných krokov, odstránenie trendu zanechá takéto fluktuácie neporušené a ich prítomnosť môže mať škodlivý vplyv pri určovaní business cycle správania.

Izolácia cyklov je taktiež blízka úlohe zosúladieniu modelov s príslušnými dátami, pretože frekvencia, s ktorou sú dáta merané z časti ovplyvňuje ich cyklický charakter. Napríklad, empirická analýza ekonomického rastu často vyžaduje merania veličín, ktoré sú sprimerované v dlhodobom rozpätí (napr. v rozpätí 5 rokov). Je to preto, lebo predmetné modely nie sú konštruované na charakterizáciu business cycle aktivity a časová agregácia počas 5 rokov je väčšinou postačujúca pre elimináciu vplyvu cyklických zmien. To uchová relevantnú informáciu vzhľadom na dlhodobý rast.

Analýza business cycle správania je väčšinou uskutočnená pri použití štvrt'ročných dát. Frekvencia týchto meraní síce nie je ideálna, pretože je tu príznačnejší vplyv sezónnych fluktuácií pri analyzovaní, ale na druhej strane, spojenie s ročnými dátami by malo za následok značnú stratu informácií vzhľadom k fluktuáciám pozorovaným v business cycle frekvenciách. Preto je pre izoláciu cyklov v tomto prípade potrebná alternatíva k časovej agregácii.

V tejto kapitole sú prezentované metódy využiteľné pri odstraňovaní trendov a izolácii cyklov. Týchto metód dnes existuje už pomerne veľa, podrobnejšie sa im venuje viacero odborných článkov a publikácií (napr. Hamilton, 1994; Everts, 2006).

4.1 Odstránenie trendu

Na odstraňovanie trendov z makroekonomických dát sa používa viacero metód. Ich cieľom je pretransformovať dáta do podoby dát s nulovým priemerom a kovariančne stacionárneho stochastického procesu (CSSP). Tieto procesy majú časovo invariantné druhé momenty, preto vybrané priemery môžu byť použité na odhad populačných priemerov týchto momentov a funkcií, ktoré sú s tým spojené. Odstránenie trendu nie je postačujúce pre privodenie kovariančnej stacionarity, ale každopádne je v tomto procese nutné.

Predtým ako si predstavíme tri základné spôsoby ako sa trend dá odstrániť, treba zdôrazniť, že je dnes bežné pracovať s dátami, ktoré sú vyjadrené v logaritmovanej verzii. Zmeny v logaritme premennej y_t v čase reprezentujú mieru rastu tejto veličiny:

$$\frac{\partial}{\partial t} \log y_t = \frac{\frac{\partial}{\partial t} y_t}{y_t} \equiv \frac{\dot{y}_t}{y_t} \equiv g_{y_t}, \quad (4.1)$$

kde $\dot{y}_t = \frac{\partial}{\partial t} y_t$. Navyše, ak použijeme log-lineárnu aproximáciu na vyjadrenie príslušného modelu, práca s logovanou verziou dát poskytuje symetrické naloženie s množinami premenných.

4.1.1 Detrending a diferenciácia

Prvé dve metódy na odstránenie trendu, detrending a diferenciácia, sú vykonávané pri implicitnom predpoklade, že dáta vykazujú približne konštantnú mieru rastu g . Pri tomto predpoklade teda metóda detrending sleduje rast premennej y_t :

$$y_t = y_0 (1 + g_y)^t e^{u_t}, \quad u_t \sim CSSP. \quad (4.2)$$

Zlogaritmovaním dostávame

$$\begin{aligned} \log y_t &= \log [y_0 (1 + g_y)^t e^{u_t}] \\ \log y_t &= \log y_0 + g_y t + u_t, \end{aligned} \quad (4.3)$$

kde $\log(1 + g_y)$ je aproximovaný ako g_y . Odstránenie trendu je dokončené aproximovaním $\log y_t$ lineárnym trendom použijúc jednoduchú metódu najmenších štvorcov (OLS) tak, že:

$$\tilde{y}_t = \log y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 t = \hat{u}_t, \quad (4.4)$$

kde $\hat{\alpha}$ sú odhady koeficientov. V takomto prípade sa hovorí, že $\log y_t$ je trendovo stacionárne.

Pri práci s množinou m premenných, charakterizovaných prislúchajúcim modelom, ktoré zdieľajú spoločný trendový komponent (napr. pri popisovaní vyváženého rastu), si symetria vyžaduje odstránenie spoločného trendu zo všetkých takýchto premenných. To uskutočníme zadefinovaním α_1^j ako trendového koeficientu

prislúchajúceho premennej j a položením lineárnych obmedzení:
 $\alpha_1^1 - \alpha_1^j = 0, \quad j = 2, \dots, m.$

Metóda diferencovania sa uskutočňuje pri predpoklade, že premenná y_t sleduje rovnicu

$$y_t = y_0 e^{\varepsilon_t}, \quad (4.5)$$

kde

$$\varepsilon_t = \gamma + \varepsilon_{t-1} + u_t, \quad u_t \sim \text{CSSP}. \quad (4.6)$$

Poznamenajme, že iteračná substitúcia v (4.6) pre $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$, vedie k tomu, že ε_t môžeme zapísať vo forme

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \gamma + \varepsilon_{t-1} + u_t \\ \varepsilon_t &= \gamma + \underbrace{\gamma + \varepsilon_{t-2} + u_{t-1}}_{\varepsilon_{t-1}} + u_t \\ &\vdots \\ \varepsilon_t &= t\gamma + \sum_{j=0}^{t-1} u_{t-j} + \varepsilon_0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Takto je teda úroveň rastu y_t daná premennou γ . Z (4.5) dostaneme zlogaritmovaním rovnicu:

$$\log y_t = \log y_0 + \varepsilon_t. \quad (4.8)$$

Potom prvá diferencia z $\log y_t$, je daná ako

$$\log y_t - \log y_{t-1} \equiv (1 - L) \log y_t,$$

kde operátor posunutia L je definovaný tak, že $L^p y_t = y_{t-p}$, a je stacionárny:

$$\begin{aligned} \log y_t - \log y_{t-1} &= \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \\ &= \gamma + u_t. \end{aligned} \quad (4.9)$$

V tomto prípade hovoríme, že $\log y_t$ je diferencne stacionárne. Odhad γ dostaneme spriemerovaním $\log y_t - \log y_{t-1}$ a tým dostaneme požadovanú transformáciu y_t :

$$\tilde{y}_t = \log y_t - \log y_{t-1} - \hat{\gamma} = \hat{u}_t. \quad (4.10)$$

Zdieľaná miera rastu viacerých (m) premenných v modeli môže byť vyjadrená použitím OLS. Tak odhadneme $\hat{\gamma}^j$ podmienené reštrikcii: $\hat{\gamma}^1 - \hat{\gamma}^j = 0, \quad j = 2, \dots, m.$

Rozhodnutie, či zvoliť metódu detrending, alebo metódu diferencií, závisí najmä od usúdenia, ktoré z vyjadrení (4.3) alebo (4.9) lepšie popisuje reprezentáciu $\log y_t$. Táto otázka sa však ukazuje ako veľmi náročná, čo dokazuje množstvo odbornej

literatúry, ktorá sa snaží analyzovať tento problém (Nelson a Plosser, 1982). Preto najjednoduchším opatrením ako obísť tento problém výberu je pracovať s oboma technikami naraz a následne vyhodnotiť citlivosť výsledkov pri vybranej metóde.

4.1.2 H-P filter

Tretím prístupom používaným pri odstraňovaní trendu je použitie rôznych filtrov, ktoré sú navrhnuté na separovanie trendu od cyklu, ale s pripustením pomaly vyvíjajúceho sa trendu. Najpopulárnejším a najpoužívanejším, v aplikáciách business cycle, je Hodrick-Prescottov filter, teda tzv. H-P filter (Hodrick a Prescott, 1981).

Uvažujme, že logované dáta $\log y_t$ sú zložené z trendového (g_t) a cyklického (c_t) komponentu, teda

$$\log y_t = g_t + c_t \quad (4.12)$$

H-P filter izoluje trend od cyklu odhadovaním g_t a c_t tak, aby sa minimalizoval nasledujúci problém:

$$\sum_{t=1}^T (\log y_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(g_{t+1} - g_t) - (g_t - g_{t-1})]^2, \quad (4.13)$$

kde prvý výraz môžeme chápať ako istú mieru „presnosti“ časového radu, druhý výraz reprezentuje „hladkosť“ dát.

Dochádza tu teda ku konfliktu medzi presnosťou a hladkosťou, ktorý je vyriešený použitím váhového parametra λ . Parameter λ určuje dôležitosť mať hladko vyvíjajúcu sa úroveň rastu: čím hladšie je g_t , tým menšia bude jeho druhá diferenciacia. Teda s $\lambda = 0$, hladkosť nemá žiadny význam a trendová zložka sa stáva ekvivalentnou k pôvodnému časovému radu. Ak $\lambda \rightarrow \infty$, trend je určený ako maximálne hladký, čo znamená, že je lineárny. Vo všeobecnosti je λ špecifikované ako istý kompromis medzi týmito dvoma extrémami. Pri práci so štvrťročnými dátami business cycle sa zvykne najčastejšie používať hodnota $\lambda = 1600$. Túto hodnotu odporúčajú autori filtra Hodrick a Prescott..

Označme teraz $x_t = \log y_t$. Ak si rovnicu (4.13) prepíšeme do maticového tvaru, z podmienok prvého radu tohto minimalizačného problému dostávame systém lineárnych rovníc

$$AG = X, \quad (4.14)$$

kde $X = (x_1, \dots, x_T)'$, $G = (g_1, \dots, g_T)'$ a A je tridiagonálna matica tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda & -2\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -2\lambda & 1+5\lambda & -4\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & -4\lambda & 1+6\lambda & -4\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -4\lambda & 1+6\lambda & -4\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -4\lambda & 1+6\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+6\lambda & -4\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -4\lambda & 1+5\lambda & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -2\lambda & 1+\lambda \end{pmatrix}.$$

Riešením systému (4.14) dostaneme vektor $G = (\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_T)$. Odstránenie trendu je dokončené jednoducho ako

$$\tilde{y}_t = \log y_t - \hat{g}_t = \hat{c}_t. \quad (4.15)$$

Vidíme, že odstránením trendovej zložky získame automaticky cyklickú zložku príznačnú pre H-P filter. Frekvenčným vlastnostiam tohto cyklického komponentu sa venuje nasledujúca časť našej práce.

4.2 Izolácia cyklov

Predtým, ako nahliadneme do problematiky cyklov a frekvencií je určite potrebné vysvetliť si teóriu komplexných veličín., s ktorou sa v tejto časti diplomovej práce stretneme. Predstavíme si kľúčové vlastnosti popisujúce komplexné čísla, ktoré nám neskôr pomôžu preniknúť do oblasti frekvencií. Priblížime si aj Reisz-Fisherovu vetu, pomocou ktorej vieme ďalej zadefinovať spektrum, ktoré je užitočnou charakteristikou časových radov. V závere si predstavíme filtre používané pri získavaní cyklických zložiek.

4.2.1 Teória komplexných čísel

Premenná z je komplexné číslo, ak ho vieme zapísať ako

$$z = x + iy,$$

kde i je imaginárne číslo, pre ktoré platí $i^2 = -1$; x je reálne a reprezentuje reálnu zložku z ; y je reálne a reprezentuje imaginárnu zložku. Tento zápis sa nazýva algebraický tvar komplexného čísla. Graficky si to môžeme predstaviť tak, že každé komplexné číslo v rovine možno zaznačiť ako vektor so začiatkom v bode so súradnicami $[0;0]$ a koncom v súradniciach daných zápisom tohto čísla. Teda, že reálna zložka je zobrazená na horizontálnej osi, imaginárna na vertikálnej osi, a vzdialenosť z od počiatku je

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x + iy)(x - iy)}. \quad (4.16)$$

Ak je $|z| = 1$, vtedy z leží na jednotkovej kružnici. Existujú aj ďalšie spôsoby, ktorými môžeme zapísať komplexné číslo. Jedným z nich je goniometrický tvar komplexného čísla. Pri tomto zápise je potrebné poznať veľkosť komplexného čísla $|z|$ a uhol, ktorý zvierá s reálnou osou x . Potom sa dá komplexné číslo napísať ako

$$z = |z|(\cos \omega + i \sin \omega),$$

kde $|z|$ je veľkosť komplexného čísla a ω je uhol, ktorý zvierá s reálnou osou. Tento tvar je možné odvodiť z pravouhlého trojuholníka, ktorý vznikne priemetmi vektora komplexného čísla na reálnu a imaginárnu os a zo znalostí funkcií sínus a kosínus. Z odvodenia Tylorových radov funkcií $\cos \omega$, $\sin \omega$ a $e^{i\omega}$ sa dá ukázať, že predchádzajúci zápis sa dá upraviť na tvar

$$z = |z|e^{i\omega},$$

kde $e^{i\omega}$ vieme rozpísať ako

$$\begin{aligned} e^{i\omega} &= 1 + \frac{i\omega}{1!} + \frac{i^2\omega^2}{2!} + \frac{i^3\omega^3}{3!} + \frac{i^4\omega^4}{4!} + \frac{i^5\omega^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + \frac{\omega}{1!}i - \frac{\omega^2}{2!} - \frac{\omega^3}{3!}i + \frac{\omega^4}{4!} + \frac{\omega^5}{5!}i + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\frac{\omega}{1!} - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos \omega + i \sin \omega. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Pri umocňovaní komplexného čísla reálnym číslom j dostávame

$$z^j = |z|^j e^{i\omega j} = |z|^j (\cos \omega j + i \sin \omega j). \quad (4.18)$$

Reisz-Fisherova veta

Ďalej využijeme poznatky z Reisz-Fisherovej vety. Majme rad komplexných čísel $\{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$, ktorý spĺňa podmienku

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|^2 < \infty. \quad (4.19)$$

Potom existuje funkcia $f(\omega)$ integrovateľná a hodnoty a_j sú Fourierovými koeficientmi funkcie f , teda

$$f(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-i\omega j}, \quad (4.20)$$

kde $\omega \in [-\pi, \pi]$, a a_j predstavuje j -ty Fourierov koeficient, pre ktorý po transformácii platí

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) e^{i\omega j} d\omega. \quad (4.21)$$

Spektrálna reprezentácia

Uvažujme teraz správanie sa časového radu y_t^ω dané nasledujúcou rovnicou

$$y_t^\omega = \alpha(\omega) \cos(t\omega) + \beta(\omega) \sin(t\omega), \quad (4.22)$$

kde $\alpha(\omega)$ a $\beta(\omega)$ sú nekorelované náhodné premenné s nulovou strednou hodnotou a rovnakým rozptylom. Uhol ω , vyjadrený v radiánoch, reprezentuje frekvenciu s akou $\cos(t\omega)$ opisuje cyklus vzhľadom ku $\cos(t)$, keď t postupuje v intervale z 0 do 2π , z 2π do 4π , atď. Ak máme realizácie $\alpha(\omega)$ a $\beta(\omega)$, proces y_t^ω opisuje cyklus, ktorý sa opakuje ω -krát pre t od 0 do 2π , atď.

Vytvoríme teraz časový rad y_t , ktorý získame skombinovaním prvkov y_t^ω , rozlíšených variáciami ω na intervale $[0, \pi]$:

$$y_t = \int_0^\pi \alpha(\omega) \cos(t\omega) d\omega + \int_0^\pi \beta(\omega) \sin(t\omega) d\omega. \quad (4.23)$$

Majúc zodpovedajúce špecifikácie pre $\alpha(\omega)$ a $\beta(\omega)$, akýkoľvek časový rad y_t potom môže byť vyjadrený takýmto spôsobom. Je to tzv. spektrálna reprezentácia, alebo tiež

Cramerova reprezentácia radu y_t . Vyjadruje y_t ako kombináciu niekoľkých cyklických komponentov, ktoré sa odlišujú frekvenciou, ktorou opakujú svoj cyklus.

4.2.2 Spektrum

Dôležitý súvis so spektrálnou reprezentáciou časového radu y_t má jeho *spektrum*. Spektrum je symetrická, periodická funkcia, a je užitočným nástrojom, ktorým sa dá merať, ako cyklické komponenty y_t^{ω} ovplyvňujú celkovú varianciu radu y_t v intervale $[0, \pi]$. Svojím spôsobom je spektrum dekompozíciou variancie radu y_t podľa frekvencie.

Pre časový rad s kovarianciami $\gamma(\tau)$ si najskôr definujeme vytvárajúcu funkciu postupnosti autokovariancií $\{\gamma(\tau)\}_{\tau=-\infty}^{\infty}$ (kovariancia medzi y_t a $y_{t+\tau}$, alebo y_t a $y_{t-\tau}$), podobne ako v (4.19) a (4.20)

$$g_y(z) \equiv \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) z^{\tau}, \quad (4.24)$$

kde z je ľubovoľné komplexné číslo. Pomocou tejto vytvárajúcej formule definujeme spektrum

$$s_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} g_y(e^{-i\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) e^{-i\omega\tau}. \quad (4.25)$$

Z toho úpravou a využitím (4.17) dostávame

$$s_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) (\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau), \quad (4.26)$$

čo sa dá upraviť do tvaru, ktorý neobsahuje komplexné čísla

$$s_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \gamma(0) + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} \gamma(\tau) \cos(\omega\tau) \right\}, \quad (4.27)$$

kde sme využili, že $\gamma(\tau) = \gamma(-\tau)$, $\sin(-\omega) = -\sin \omega$ a $\cos(-\omega) = \cos \omega$. Zo symetrickosti $\cos(\omega\tau)$ vyplýva, že aj spektrum je symetrická veličina a preto sa $s_y(\omega)$ obyčajne vyjadruje na intervale $[0, \pi]$.

Pre interpretáciu frekvencie v zmysle istých časových jednotiek je vhodné uvažovať vzťah frekvencie ω so svojou asociovanou periódou p . Tá označuje počet časových jednotiek potrebných pre y_t^{ω} (4.22) na uskutočnenie cyklu, teda $p = 2\pi / \omega$.

Potom $1/p = \omega/2\pi$ vyjadruje, koľko cyklov sa vykoná počas jednej periódy. Ak ako periódu zvolíme štvrťrok, potom pre cyklus pozostávajúci z 32 štvrťrokov dostaneme hodnotu $\omega = 2\pi/32 = 0,196$, pre cyklus zo 6-tich štvrťrokov $\omega = 2\pi/6 = 1,047$. Pri analýze dát business cycle sa pracuje s ω medzi týmito hodnotami, teda hodnotami medzi $[1.047, 0.196]$.

4.2.3 Využitie filtrov pri izolácii cyklov

Uvažujme teraz o pomaly vyvíjajúcom sa trende ako o cykle s nízkou frekvenciou. V prípade, že ide o konštantný trend, je teda frekvencia nulová. Filtre sú užitočnými nástrojmi, ktoré nám umožňujú eliminovať vplyv cyklických zmien pri rôznych frekvenciách.

Všeobecne je lineárny filter, aplikovaný na rad y_t a produkujúci y_t^f , daný ako

$$C(L)y_t \equiv \sum_{j=-r}^s c_j y_{t-j} = y_t^f, \quad (4.28)$$

čo možno chápať tak, že filtrovaný rad y_t^f je lineárnou kombináciou pôvodného radu y_t . Pre interpretáciu v zmysle frekvencií, nahradíme L^j v (4.28) výrazom $e^{-i\omega j}$. Výsledkom bude funkcia odozvy frekvencie $C(e^{-i\omega})$.

Pre lepšie pochopenie toho, ako filtre pracujú pri izolovaní cyklov, je užitočné odvodiť spektrum y_t^f . Uvažujme, že rad y_t je proces s nulovou strednou hodnotou s autokovarianciami $\{\gamma(\tau)\}_{\tau=-\infty}^{\infty}$. Autokovariancia medzi y_t^f a $y_{t-\tau}^f$ je daná ako

$$\begin{aligned} \gamma_{y^f}(\tau) &\equiv E(y_t^f y_{t-\tau}^f) \\ &= E\left(\sum_{j=-r}^s c_j y_{t-j}\right)\left(\sum_{k=-r}^s c_k y_{t-k-\tau}\right) \\ &= E\sum_{j=-r}^s \sum_{k=-r}^s c_j c_k y_{t-j} y_{t-k-\tau} \\ &= \sum_{j=-r}^s \sum_{k=-r}^s c_j c_k \gamma(\tau + k - j) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Podľa (4.25) a po dosadení (4.29) teda pre spektrum radu y_t^f v tomto prípade platí

$$\begin{aligned}
s_{y^f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma_{y^f}(\tau) e^{-i\omega\tau} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-r}^s \sum_{k=-r}^s c_j c_k \gamma(\tau + k - j) e^{-i\omega\tau}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Ak navyše zadáme, že $h = \tau + k - j$, a teda $e^{-i\omega\tau} = e^{-i\omega h} e^{-i\omega j} e^{i\omega k}$, úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
s_{y^f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-r}^s c_j e^{-i\omega j} \sum_{k=-r}^s c_k e^{i\omega k} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-i\omega h} \\
&= s_y(\omega) \sum_{j=-r}^s c_j e^{-i\omega j} \sum_{k=-r}^s c_k e^{i\omega k} \\
&= s_y(\omega) C(e^{-i\omega}) C(e^{i\omega}).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Teraz si zadefinujeme tzv. *gain* (výťažok), nazývaný aj *transfer function* alebo *gain function*, ktorý je dôležitou charakteristikou filtrov používaných pri izolovaní cyklov.

Vyjadruje veľkosť zmeny v amplitúde cyklických komponentov. Je definovaný ako

$$G(\omega) = |C(e^{-i\omega})|, \tag{4.32}$$

kde $|C(e^{-i\omega})|$ označuje absolútnu hodnotu výrazu, danú ako

$$|C(e^{-i\omega})| = \sqrt{C(e^{-i\omega}) C(e^{i\omega})}$$

Ak máme takto definovaný gain, môžeme ľahko ďalej upraviť výraz (31), čím dostaneme vzťah

$$\begin{aligned}
s_{y^f}(\omega) &= |C(e^{-i\omega})|^2 s_y(\omega) \\
&= G(\omega)^2 s_y(\omega),
\end{aligned} \tag{4.33}$$

kde funkcia $G(\omega)^2$ je označovaná aj ako „štvorcový gain“ filtra. Z posledného vzťahu vidno, ako filtre slúžia pri izolovaní cyklov. Na báze frekvencií znižujú alebo zvyšujú spektrum pôvodného časového radu a určujú tak nové spektrum pre filtrované dáta. Rôzne filtre sa líšia rôznymi gain funkciami, čím sú potom určované aj odlišné spektrá filtrovaných časových radov.

First difference filter

Tento najjednoduchší filter získava cyklickú zložku y_t^c z časového radu y_t pomocou vzťahu $y_t^c = y_t - y_{t-1} = (1 - L)y_t$. Tento filter bol v minulosti dosť populárny, aj keď je veľmi nepresný. Hlavnou chybou je, že posúva časové indexy výsledných dát

a dochádza tak k tzv. fázovému efektu. Takisto nerovnomerne rozdeľuje váhy rôznych frekvencií. Gain tohto filtra je daný ako

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \sqrt{(1 - e^{-i\omega})(1 - e^{i\omega})} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \omega} \quad , \end{aligned} \quad (4.34)$$

z čoho vidno, že filter kladie veľkú váhu na vyššie frekvencie. Dnes sa ale viac používajú sofistikovanejšie filtre, ktoré vernejšie popisujú cyklickosť dát.

H-P filter

Ak sa vrátíme k H-P filtru, špecifikácia parametra λ určuje rozdelenie vplyvu y_t^ω na y_t medzi trendový (g_t) a cyklický (c_t) komponent v (12). Cyklickú zložku získame odstránením trendu, podľa rovnice (15). Riešenie problému (13) pre $T \rightarrow \infty$ sa dá explicitne nájsť vo frekvenčnej báze. Podľa Kinga a Rebelu (1993) je funkcia odozvy frekvencie H-P filtra daná ako

$$C(\omega) = \frac{4\lambda(1 - \cos \omega)^2}{1 + 4\lambda(1 - \cos \omega)^2} = \frac{16\lambda \sin^4(\omega/2)}{1 + 16\lambda \sin^4(\omega/2)} \quad (4.35)$$

Z (4.35) sa dá vyjadriť vzťah medzi parametrom λ a tzv. *cut-off* frekvenciou. Tá je definovaná ako frekvencia, pri ktorej je funkcia odozvy rovná 0.5 a platí

$$\begin{aligned} \nu_c &= \frac{\pi}{\arcsin\left(\frac{1}{2} \lambda^{\frac{1}{4}}\right)} \quad , \\ \lambda &= \left[2 \sin\left(\frac{\pi}{\nu_c}\right) \right]^{-4} \quad , \end{aligned}$$

kde $\omega_c = 2\pi/\nu_c$ označuje *cut-off* frekvenciu. Pri práci so štvrťročnými dátami a špecifikácii $\lambda = 1600$ teda máme cyklus veľkosti $\nu_c = 39.7$ štvrťrokov. Tento filter je symetrický, takže nespôsobuje fázový efekt.

Aj keď H-P filtre sú schopné eliminovať trendy, nie sú konštruované tak, aby vedeli eliminovať sezónne výkyvy. Business cycle modely zväčša nie sú konštruované na vykladanie sezónnych odchýlok a preto je vhodné pracovať so sezónne očistenými dátami. Na účel sezónneho očisťovania dát slúži viacero filtrov, spomeňme napríklad filter X-11 (Shiskin, Young a Musgrave, 1967). Štatistické ústavy už väčšinou poskytujú

aj sezónne očistené dáta. Tematika sezónneho očisťovania však nie je predmetom skúmania tejto práce.

Band Pass Filter

Band Pass filter, skrátene BP filter, sa používa na elimináciu fluktuácií, ktoré ležia mimo dopredu stanoveného pásma frekvencií. Toto pásmo sa stanoví hranicami p_l a p_u , ktoré vymedzujú pásmo stanovených periód cyklov. Tieto frekvencie by mali byť medzi 6 až 32 štvrt'rokmi pri analýze business cycle teórie.

Zaujímajú nás teda frekvencie medzi $\omega_1 = 2\pi / p_u$ a $\omega_2 = 2\pi / p_l$. Ideálny symetrický BP filter má tvar

$$C(L) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j L^j. \quad (4.36)$$

Gain funkcia ideálneho BP filtra je daná ako

$$G(\omega)^2 = \begin{cases} 1, & \omega \in [\omega_1, \omega_2] \\ 0, & \text{inak} \end{cases}. \quad (4.37)$$

Ako vidno, ideálny filter nie je možné aplikovať, pretože na to je potrebné mať nefiltrovaný časový rad nekonečnej dĺžky. Preto sa zavádzajú rôzne aproximácie ideálneho HP filtra, ktoré umožňujú použiť aj dáta konečnej dĺžky. Medzi najznámejšie a najpoužívanejšie patria aproximácie Baxtera a Kinga (1999) a Christiana a Fitzgeralda (2003). Zo symetrie vyplýva, že v (4.36) je $c_{-j} = c_j, \forall j$. To zaručuje, že filtre sa vyhýbajú fázovému efektu.

BP filter - Baxter a King

Ideálny symetrický filter (4.36), má po úprave fourierovou transformáciou nasledujúci tvar

$$C(e^{-i\omega}) \equiv C(\omega) = c_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} c_j \cos(\omega). \quad (4.38)$$

Keďže v (4.38) vystupuje nekonečne veľa členov, výraz aproximujeme podľa Baxtera a Kinga a dostaneme symetrický filter:

$$A(e^{-i\omega}) = A(\omega) = a_0 + 2 \sum_{j=1}^K a_j \cos(\omega). \quad (4.39)$$

$A(\omega)$ dostaneme riešením minimalizačného problému

$$\min_{a_j} \int_{-\pi}^{\pi} |C(\omega) - A(\omega)|^2 d\omega, \text{ pričom } A(0) = 0, \quad (4.40)$$

kde $A(\omega)$ minimalizuje odchýlky od $C(\omega)$ akumulované frekvenciami. Riešením tohto problému je Baxterova a Kingova aproximácia BP filtra:

$$\begin{aligned} a_j &= c_j + \theta, \quad j = -K, \dots, K \\ \theta &= \frac{-\sum_{j=-K}^K c_j}{2K+1} \\ c_j &= \begin{cases} \frac{\omega_2 - \omega_1}{\pi}, & j = 0 \\ \frac{\sin(\omega_2 j) - \sin(\omega_1 j)}{\pi j}, & \text{inak} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.41)$$

kde $\omega_1 = 2\pi / p_u$ a $\omega_2 = 2\pi / p_l$. Podľa Baxtera a Kinga je pre prácu so štvrtročnými dátami vhodná voľba $K = 12$. To však spôsobuje stratu 12 filtrovaných dáta zo začiatku a 12 z konca sledovaného obdobia.

BP filter - Christiano a Fitzgerald

Podstatou práce Christiana a Fitzgeralda (2003) je, že ich aproximácia filtra je optimálna v prípade, ak sú dáta generované procesom „random walk“. Preto svoj filter nazývajú *Random Walk Filter*. Nech x_t teraz označuje dáta generované ideálnym filtrom aplikovaným na pôvodný časový rad y_t kde $t = 1, 2, \dots, T$. Christian a Fitzgerald aproximujú tieto filtrované dáta lineárnou funkciou z pôvodných dát, túto aproximáciu označme \hat{x}_t :

$$\begin{aligned} \hat{x}_t &= B_0 y_t + B_1 y_{t+1} + \dots + B_{T-1-t} y_{T-1} + \tilde{B}_{T-t} y_T + \\ &+ B_1 y_{t-1} + \dots + B_{t-2} y_2 + \tilde{B}_{t-1} y_1 \end{aligned} \quad (4.42)$$

pre $t = 3, 4, \dots, T-2$. Pre komponenty B platí

$$B_j = \frac{\sin(\omega_2 j) - \sin(\omega_1 j)}{\pi j}, \quad j \geq 1$$

$$B_0 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\pi}$$

a $\tilde{B}_{T-t}, \tilde{B}_{T-1}$ sú jednoduchými lineárnymi funkciami komponentov B_j . Takto je teda \hat{x}_t lineárnou projekciou x_t na každý prvok y_t časového radu a pre každé t máme teda rôznu projekciu.

Random Walk Filter je veľmi užitočnou aproximáciou ideálneho BP filtra. V praxi je často využívaný, dokonca je účinný aj pri typoch dát, ktoré nie sú generované procesom random walk. Tento filter však nie je symetrický a dochádza tu k fázovému efektu.

4.3 Nepresnosť pri odstraňovaní trendov a izolácii cyklov

Na záver treba dodať, že odstraňovanie trendov a izolácia cyklov podlieha často určitým rizikám, keďže je náročné presvedčivo vystihnúť trendové správanie časového radu a takisto je zložité presne popísať stochastické správanie veličín. Istá dezinformácia môže nastať, keď sa stochastické správanie filtrovaných veličín odlišuje od svojich pôvodných dát. Takisto odstránenie trendovej zložky zapríčiňuje isté rozdiely vo vlastnostiach business cycle aktivity vo filtrovaných dátach, čo má za následok „falošnosť“ výsledkov.

Ak sa pozrieme na odstraňovanie trendu, možno poznamenať, že odstránenie fixného trendu z časového radu, ktorý jednoznačne podlieha narušeniam trendovej zložky, môže spôsobovať chyby v detrendovaných dátach. Navyše je zložité rozlíšiť medzi trendovo a diferencne-stacionárnymi špecifikáciami radu, dokonca aj v prípade konštantnej miery rastu. Odstránenie deterministického trendu z diferencne-stacionárneho radu alebo aplikácia diferencného operátora $(1-L)$ na trendovo-stacionárne procesy takisto spôsobuje „falošnú“ autokoreláciu vo výsledných dátach. Použitie H-P a BP filtrov na nestacionárne dáta takisto zapríčiňuje určitú „nepravosť“ výsledkov.

Postupom času už bolo vyvinutých viacero spôsobov a metód, ktoré pomáhajú zmierňovať tieto problémy. Služi na to použitie Bayesovských metód, ale aj použitie viacerých alternatívnych filtrovacích metód, ktoré pomáhajú prešetriť tieto problémové kroky, napr. Kalmanov filter (Kalman, 1960). Diskusii o falošnosti výsledkov sa venuje viacero vedeckých prác, medzi inými aj Murray (2003).

5 Riešenie jednoduchého RBC modelu

V tejto kapitole sa budeme zaoberať riešením jednoduchého RBC modelu, ktorému sa venuje kapitola 2. Samotnému riešeniu ale predchádza dosadenie príslušných funkčných noriem pre funkciu užitočnosti $u(\cdot)$ a produkčnú funkciu $f(\cdot)$ do tohto základného modelu. Takisto musíme špecifikovať rovnicu pre technologický šok a_t . Pre takto špecifikovaný model pokračujeme praktickou časťou, ktorá zahŕňa loglinearizáciu modelu a následné riešenie tohto linearizovaného systému pomocou Uhligovej metódy.

5.1 Dosadenie funkčných foriem

Pracovať budeme s kostrou základného modelu RBC teórie popísaného v kapitole 2. Do tohto modelu zadáme konkrétne funkčné formy pre $u(\cdot)$ a $f(\cdot)$, s ktorými budeme v ďalšom pracovať. Využijeme pritom špecifikácie jednoduchého RBC modelu popísaného Hansenom (1985). Pre funkciu užitočnosti zavedieme tvar

$$u(c_t, 1 - n_t) = \frac{c_t^{1-\eta}}{1-\eta} - A n_t, \quad (5.1)$$

Táto funkcia užitočnosti je formy *Constant Relative Risk Aversion (CRRA)*, ktorá sa bežne vyskytuje v makroekonomickej literatúre. Využili sme tu vzťah rozdelenia jednotky času medzi prácu a oddych: $l_t = 1 - n_t$. Parameter η vyjadruje koeficient relatívnej averzie k riziku. $1/\eta$ určuje medzičasovú elasticitu substitúcie. Parameter A určuje váhu vplyvu práce na užitočnosť.

Pre produkciu zavedieme typ Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie, v tvare

$$y_t = a_t k_{t-1}^\alpha n_t^{1-\alpha}, \quad (5.2)$$

kde $\alpha \in (0,1)$ reprezentuje mieru, akou sa kapitál podieľa na produkcii. Nakoniec si zavedieme aj špecifikáciu pre technologický šok a_t . Nech je to proces AR(1):

$$\log a_t = (1 - \rho) \log \bar{a} + \rho \log a_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (5.3)$$

kde $\varepsilon_t \sim NID(0, \sigma^2)$, $\rho \in (-1,1)$ označuje autokoreláciu technologického šoku a \bar{a} označuje hodnotu rovnovážneho stavu.

Dosadením týchto funkčných noriem do Eulerových podmienok (2.6) a (2.7), ktoré sú vyjadrené pomocou aplikácie teórie dynamického programovania, odvodíme nasledujúce rovnice:

$$A = \frac{1-\alpha}{c_t^\eta} \left(\frac{y_t}{n_t} \right) \quad (5.4)$$

$$1 = \beta E_t \left[\left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^\eta \cdot \left(\alpha \cdot \frac{y_{t+1}}{k_t} + (1-\delta) \right) \right], \quad (5.5)$$

kde zdefinujeme marginálnu hodnotu pridanej jednotky kapitálu v nasledujúcej perióde ako

$$r_{t+1} = \alpha \cdot \frac{y_{t+1}}{k_t} + (1-\delta). \quad (5.6)$$

Ak zosumarizujeme rovnice z kapitoly 2. a Eulerove podmienky, dostaneme výsledný RBC model. Ten pozostáva z rovníc charakterizujúcich rozpočtové ohraničenia, z produkčnej funkcie a z podmienok optimality. Náš model teda vyzerá nasledovne:

$$y_t = c_t + i_t \quad (5.7)$$

$$k_t = i_t + (1-\delta)k_{t-1} \quad (5.8)$$

$$y_t = a_t k_{t-1}^\alpha n_t^{1-\alpha} \quad (5.9)$$

$$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_{t-1}} + (1-\delta) \quad (5.10)$$

$$1 = \beta E_t \left[\left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^\eta r_{t+1} \right] \quad (5.11)$$

$$A = c_t^{-\eta} (1-\alpha) \frac{y_t}{n_t} \quad (5.12)$$

$$\log a_t = (1-\rho) \log \bar{a} + \rho \log a_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (5.13)$$

Rovnica (5.7) je rovnicou rozdelenia produkcie, (5.8) popisuje vývoj fyzického kapitálu, (5.9) reprezentuje produkčnú funkciu, (5.10) (5.11) (5.12) vyplývajú z Eulerových podmienok optimality, (5.13) špecifikuje technologický proces.

5.2 Log-linearizácia modelu

Vyššie popísaný model je zložený z lineárnych ale aj nelineárnych rovníc. Vo všeobecnosti sa nelineárne systémy ako tento nedajú riešiť analyticky. Ich riešenie však vieme dosiahnuť aproximovaním na patričný systém lineárnych rovníc. Pri log-linearizácii budeme linearizovať logované premenné, ktoré sú vyjadrené ako odchýlky od rovnovážneho stavu, v ktorom sa všetky reálne premenné vyvíjajú v rovnakej miere.

Pripomeňme si, že rovnovážnu hodnotu premennej x_t označujeme \bar{x} a pre jej logovanú odchýlku od rovnovážneho stavu platí

$$\tilde{x}_t = \log x_t - \log \bar{x} = \log \left(\frac{x_t}{\bar{x}} \right) \quad (5.14)$$

to sa dá upraviť aj na tvar

$$x_t = \bar{x} e^{\tilde{x}_t}. \quad (5.15)$$

Log-linearizáciu aplikujeme za pomoci aproximácie výrazu e^{x_t} Tylorovým radom prvého rádu, z čoho máme

$$e^{x_t} \approx 1 + x_t. \quad (5.16)$$

Pomocou tohto vzťahu možno prepísať a aproximovať rovnosť (5.15) do nasledujúceho tvaru

$$x_t = \bar{x}(1 + \tilde{x}_t). \quad (5.17)$$

Ak teda začneme rovnicou rozdelenia produkcie (5.7)

$$y_t = c_t + i_t,$$

prepíšeme ju na tvar

$$\bar{y} e^{\tilde{y}_t} = \bar{c} e^{\tilde{c}_t} + \bar{i} e^{\tilde{i}_t}, \quad (5.18)$$

aplikáciou aproximácie Tylorovým radom máme

$$\bar{y}(1 + \tilde{y}_t) = \bar{c}(1 + \tilde{c}_t) + \bar{i}(1 + \tilde{i}_t), \quad (5.19)$$

pričom výrazy rovnovážneho stavu sa riadia identitou $\bar{y} = \bar{c} + \bar{i}$. Dosadením teda dostávame

$$\bar{y} \cdot \tilde{y}_t = \bar{c} \cdot \tilde{c}_t + \bar{i} \cdot \tilde{i}_t, \quad (5.20)$$

čo prepíšeme na tvar

$$\tilde{y}_t = \frac{\bar{c}}{\bar{y}} \tilde{c}_t + \frac{\bar{i}}{\bar{y}} \tilde{i}_t. \quad (5.21)$$

Pri rovnici charakterizujúcej produkciu (5.9) postupujeme podobne. Pri Tylorovej aproximácii však využijeme fakt, že súčin dvoch premenných aproximujeme ako

$$x_t y_t \approx \bar{x}\bar{y}(1 + \tilde{x}_t)(1 + \tilde{y}_t) \cong \bar{x}\bar{y}(1 + \tilde{x}_t + \tilde{y}_t),$$

kde výraz $\tilde{x}_t \tilde{y}_t \cong 0$. Keďže sa zaoberáme len malými percentuálnymi odchýlkami hodnôt premenných od rovnovážneho stavu, pri násobení dostávame výraz blízky 0.

Analogicky spracujeme a log-linearizujeme zvyšné rovnice nášho modelu, čím dostaneme nasledujúci systém lineárnych rovníc:

$$\tilde{y}_t = \frac{\bar{c}}{\bar{y}} \tilde{c}_t + \frac{\bar{i}}{\bar{y}} \tilde{i}_t \quad (5.22)$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{a}_t + \alpha \tilde{k}_{t-1} + (1 - \alpha) \tilde{n}_t \quad (5.23)$$

$$\tilde{k}_t = \frac{\bar{i}}{\bar{k}} \tilde{i}_t + (1 - \delta) \tilde{k}_{t-1} \quad (5.24)$$

$$\tilde{n}_t = \tilde{y}_t - \eta \tilde{c}_t \quad (5.25)$$

$$\tilde{c}_t = E_t(\tilde{c}_{t+1}) - \frac{1}{\eta} E_t(\tilde{r}_{t+1}) \quad (5.26)$$

$$\tilde{r}_t = \left(\frac{\alpha \cdot \bar{y}}{\bar{r} \cdot \bar{k}} \right) (\tilde{y}_t - \tilde{k}_{t-1}). \quad (5.27)$$

Log-linearizácia sa urobí aj pre technologický šok a_t , ktorý je špecifikovaný ako proces AR(1):

$$\tilde{a}_t = \rho \cdot \tilde{a}_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (5.28)$$

Potrebujeme ešte vyjadriť rovnovážne hodnoty premenných. Z linearizovaného modelu vidno, že v rovnici (5.22) potrebujeme vyjadriť rovnovážne hodnoty \bar{c}/\bar{y} a \bar{i}/\bar{y} , v rovnici (5.24) hodnotu \bar{i}/\bar{k} a v rovnici (5.27) potrebujeme vyčísliť $(\alpha \cdot \bar{y})/(\bar{r} \cdot \bar{k})$. Tieto rovnovážne hodnoty odvodíme z pôvodného nelinearizovaného modelu tak, že odstránime časové indexy veličín. Z eulerovej podmienky (5.11)

$$1 = \beta E_t \left[\left(\frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^{\eta} r_{t+1} \right],$$

máme v rovnovážnom stave po odstránení časových indexov výraz

$$1 = \beta E_t \left[\left(\frac{\bar{c}}{\bar{c}} \right)^{\eta} \bar{r} \right], \quad (5.29)$$

kde $\bar{c}_t = \bar{c}_{t+1} = \bar{c}$, a teda $\bar{r} = \beta^{-1}$. Keď uvažujeme ďalšiu rovnicu vyplývajúcu z eulerovej podmienky (5.10) zo základného modelu

$$r_t = \alpha \frac{y_t}{k_{t-1}} + (1 - \delta),$$

v rovnovážnom stave platí

$$\bar{r} = \alpha \frac{\bar{y}}{\bar{k}} + (1 - \delta) = \beta^{-1}. \quad (5.30)$$

To vieme ďalej upraviť na hodnotu rovnovážneho stavu, ktorú potrebujeme vyjadriť v našom log-linearizovanom modeli:

$$\frac{\alpha \bar{y}}{\bar{r} \bar{k}} = \alpha \beta \left(\frac{\beta^{-1} + \delta - 1}{\alpha} \right) = 1 - \beta(1 - \delta).$$

Z ďalších rovníc vieme vyjadriť aj ostatné potrebné hodnoty veličín v rovnovážnom stave, čím analogickým postupom dostaneme výrazy pre $\frac{\bar{c}}{\bar{y}} = 1 - \frac{\alpha \delta}{\beta^{-1} + \delta - 1}$, $\frac{\bar{i}}{\bar{y}} = \frac{\alpha \delta}{\beta^{-1} + \delta - 1}$ a $\frac{\bar{i}}{\bar{k}} = \delta$. Po dosadení týchto rovnovážnych hodnôt

do log-linearizovaného modelu popísaného rovnicami (5.22)-(5.28) tak získame výslednú podobu nášho modelového systému:

$$\tilde{y}_t = \left(1 - \frac{\alpha \delta}{\beta^{-1} + \delta - 1} \right) \tilde{c}_t + \left(\frac{\alpha \delta}{\beta^{-1} + \delta - 1} \right) \tilde{i}_t \quad (5.31)$$

$$\tilde{y}_t = \tilde{a}_t + \alpha \tilde{k}_{t-1} + (1 - \alpha) \tilde{n}_t \quad (5.32)$$

$$\tilde{k}_t = \delta \tilde{i}_t + (1 - \delta) \tilde{k}_{t-1} \quad (5.33)$$

$$\tilde{n}_t = \tilde{y}_t - \eta \tilde{c}_t \quad (5.34)$$

$$\tilde{c}_t = E_t(\tilde{c}_{t+1}) - \frac{1}{\eta} E_t(\tilde{r}_{t+1}) \quad (5.35)$$

$$\tilde{r}_t = (1 - \beta(1 - \delta))(\tilde{y}_t - \tilde{k}_{t-1}) \quad (5.36)$$

$$\tilde{a}_t = \rho \cdot \tilde{a}_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (5.37)$$

Tento model je zapísaný v štandardnom tvare ako systém lineárnych stochastických diferenčných rovníc. Premenné $\{\tilde{y}_t, \tilde{c}_t, \tilde{i}_t, \tilde{a}_t, \tilde{k}_t, \tilde{n}_t, \tilde{r}_t\}$ sú vyjadrené ako logované percentuálne odchýlky od hodnôt rovnovážneho stavu. Definujeme vektor $\mu = [\alpha \quad \beta \quad \delta \quad \eta \quad \rho]'$, ktorý obsahuje štrukturálne „deep“ parametre modelu. Po

špecifikovaní týchto parametrov možno model vyriešiť pomocou jednej z metód spomenutých v kapitole 3.

5.3 Aplikácia metódy riešenia

Na riešenie systému použijeme Uhligovu metódu popísanú v časti 3.2.2, keďže model sa dá jednoduchšie zapísať vo forme (3.34)-(3.36). Predtým si však musíme zadefinovať vektory endogénnych a exogénnych „state“ premenných a ostatných endogénnych premenných. Rovnice modelu (5.22)-(5.28) obsahujú len jednu premennú danú v čase $t-1$ a jednu exogénnu premennú. Použitím značenia z kapitoly 3 si teda zvolíme nasledujúce vektory:

$$x_t = (\tilde{k}_t), \quad z_t = (\tilde{a}_t), \quad y_t = \begin{pmatrix} \tilde{y}_t \\ \tilde{n}_t \\ \tilde{i}_t \\ \tilde{c}_t \\ \tilde{r}_t \end{pmatrix}, \quad (5.38)$$

kde x_t je 1×1 vektor endogénnych „state“ premenných, z_t je 1×1 vektor exogénnych state premenných, y_t je 5×1 vektor ostatných endogénnych premenných. Systém chceme dostať do tvaru riešiteľného Uhligovovu metódou daného rovnicami

$$0 = Ax_t + Bx_{t-1} + Cy_t + Dz_t \quad (5.39)$$

$$0 = E_t[Fx_{t+1} + Gx_t + Hx_{t-1} + Jy_{t+1} + Ky_t + Lz_{t+1} + Mz_t] \quad (5.40)$$

$$z_{t+1} = Nz_t + \varepsilon_{t+1} \quad E_t[\varepsilon_{t+1}] = 0. \quad (5.41)$$

Použitím značenia (5.38) vieme rovnice nášho modelu (5.31)-(5.37) upraviť na nasledujúci tvar

$$0 = 0x_t + 0x_{t-1} + (-1 \quad 0 \quad \psi_2 \quad \psi_1 \quad 0)y_t + 0z_t \quad (5.42)$$

$$0 = 0x_t + \alpha x_{t-1} + (-1 \quad (1-\alpha) \quad 0 \quad 0 \quad 0)y_t + 1z_t \quad (5.43)$$

$$0 = -1x_t + (1-\delta)x_{t-1} + (0 \quad 0 \quad \delta \quad 0 \quad 0)y_t + 0z_t \quad (5.44)$$

$$0 = 0x_t + 0x_{t-1} + (1 \quad -1 \quad 0 \quad -\eta \quad 0)y_t + 0z_t \quad (5.45)$$

$$0 = 0x_t + (-\psi_3)x_{t-1} + (\psi_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1)y_t + 0z_t \quad (5.46)$$

kde sme zadefinovali

$$\psi_1 = \left(1 - \frac{\alpha\delta}{\beta^{-1} + \delta - 1}\right), \quad \psi_2 = \left(\frac{\alpha\delta}{\beta^{-1} + \delta - 1}\right), \quad \psi_3 = 1 - \beta(1 - \delta). \quad (5.47)$$

Z predchádzajúceho vieme určiť matice A, B, C, D , ktoré budú mať tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 - \delta \\ 0 \\ -\psi_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \psi_2 & \psi_1 & 0 \\ -1 & (1 - \alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -\eta & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.48)$$

Rovnicu s operátorom očakávaní (5.35) upravíme na tvar (5.40), čím dostaneme

$$0 = E_t[0x_{t+1} + 0x_t + 0x_{t-1} + (0 \ 0 \ 0 \ -\eta \ 1)y_{t+1} + (0 \ 0 \ 0 \ \eta \ 0)y_t + 0z_{t+1} + 0z_t],$$

z čoho vieme určiť matice ďalšie matice:

$$F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0, \quad J = (0 \ 0 \ 0 \ -\eta \ 1), \quad K = (0 \ 0 \ 0 \ \eta \ 0), \quad L = 0, \quad a \\ M = 0.$$

Z log-linearizovanej rovnice, popisujúcej technologický šok (5.37), ktorá korešponduje so zápisom (5.41), priamo vyjadríme poslednú maticu $N = \rho$.

Po nájdení matíc $A, B, C, D, F, G, H, J, K, L, M, N$ hľadáme riešenie v tvare

$$x_t = Px_{t-1} + Qz_t \quad (5.49)$$

$$y_t = Rx_{t-1} + Sz_t. \quad (5.50)$$

Predtým však musíme zadať vstupné parametre, obsiahnuté vo vektore $\mu = [\alpha \ \beta \ \delta \ \eta \ \rho]'$, ktorý obsahuje štrukturálne „deep“ parametre modelu. Vysvetlime si ich význam: α vyjadruje podiel kapitálu na produkcii, β označuje diskontný faktor, δ určuje mieru amortizácie kapitálu, η vyjadruje koeficient relatívnej averzie k riziku, ρ označuje autokoreláciu technologického šoku. V tejto práci sa nebudeme zaoberať kalibráciou modelu. Hodnoty týchto vstupných parametrov sme prebrali z práce Briatku (2002), ktorá sa zaoberala kalibráciou základného RBC modelu pre slovenské údaje. Parametre použité pri výpočtoch sme teda zadali nasledovné:

Tabuľka 1: Odhadnuté hodnoty parametrov RBC modelu.

α	β	δ	η	ρ
0.33	0.981	0.031	1	0.95

Na výpočty sme použili zdrojový kód v MATLABE, ktorý naprogramoval Uhlig (1999), tento program je voľne stiahnuteľný na internetovej stránke⁸. Výstupom tohto programu sú matice P, Q, R, S . Pre nami zvolené parametre sme dostali tieto výsledky:

$$k_t = (0.90883)k_{t-1} + (0.21407)a_t \quad (5.51)$$

$$\begin{pmatrix} y_t \\ n_t \\ i_t \\ c_t \\ r_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00123 \\ -0.4944 \\ -1.9411 \\ 0.49315 \\ -0.04947 \end{pmatrix} k_{t-1} + \begin{pmatrix} 1.8614 \\ 1.2856 \\ 6.9055 \\ 0.5758 \\ 0.09197 \end{pmatrix} a_t \quad (5.52)$$

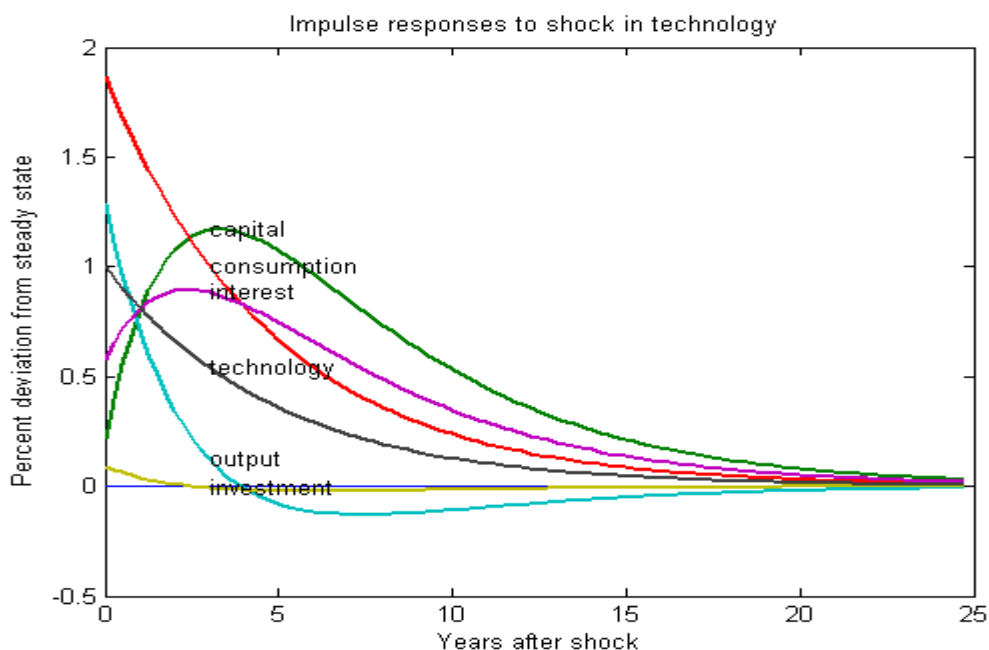
Toto riešenie je zapísané v podobe rovníc (5.49) a (5.50). Vyjadruje, v akej miere sú endogénne premenné ovplyvnené endogénnou „state“ premennou k_t a exogénnou premennou a_t . Matice P, Q, R, S môžu byť teda interpretované ako elasticity.

Je viacero spôsobov, ako sa dá naše riešenie modelu analyzovať a interpretovať. Uvažujme napríklad, že pre rovnicu (5.51) máme začiatkový kapitál približne 20% pod úrovňou rovnovážneho stavu, teda $k_{-1} = -0.2$ a predpokladáme, že nenastanú žiadne šoky ($a_t \equiv 0$). Potom $k_0 = 0.90883 \cdot (-0.2) = -0.18177$. Z toho je zrejmé, že úroveň kapitálu bude takto konvergovať k svojmu rovnovážnemu stavu, keďže jeho odchýlky sa budú znižovať. To isté sa dá spraviť aj pre ostatné premenné v rovnici (5.52). Vidíme, že pri počiatočnom $k_{-1} = -0.2$ a pri predpoklade, že nenastanú žiadne šoky, budú mať v čase 0 najväčšiu odchýlku od rovnovážneho stavu investície $i_0 = -1.9411 \cdot (-0.2) = 0.38822$ a najmenšiu produkcia $y_0 = -0.00123 \cdot (-0.2) = 0.0002$. Najrýchlejšie teda do svojho rovnovážneho stavu skonverguje produkcia.

Ďalej môžeme skúmať, ako zareagujú premenné na technologický šok. Ten do modelu zavedieme tak, že určíme $a_0 = 0.01$, $a_t = 0$ pre $t > 0$ a na začiatku je systém v rovnovážnom stave. To znamená, že v čase $t = 0$ nastala jednopercenná odchýlka technologického šoku od svojej rovnovážnej hodnoty, pre $t > 1$ je táto odchýlka rovná 0. Reakciu premenných na tento technologický šok nazývame impulse-response analýza. Reakcia premenných na tento šok sa dá jednoducho vypočítať pomocou riešenia modelu (5.51)-(5.52). Na obr.1 je znázornená impulse-response analýza pre náš

⁸ <http://www2.wiwi.hu-berlin.de/institute/wpol/html/toolkit.htm>

RBC model. Vidíme, že technologický šok spôsobil najväčšiu odchýlku v spotrebe (consumption), naopak, najmenší vplyv mal tento šok na hodnotu investícií (investment), ktorých odchýlka od rovnovážneho stavu je veľmi malá.



Obr.1 Reakcia premenných na technologický šok.

V modeli môžeme ďalej skúmať ako sa bude meniť riešenie modelu, teda matice P, Q, R, S , pri zmene vstupných parametrov modelu. Tento proces sa nazýva analýza citlivosti.

Vyriešené modely sa často používajú aj na simuláciu. Simulovaním ε_t a zadaním počiatočných hodnôt k_{-1} a a_0 vieme rekurzívne vypočítať

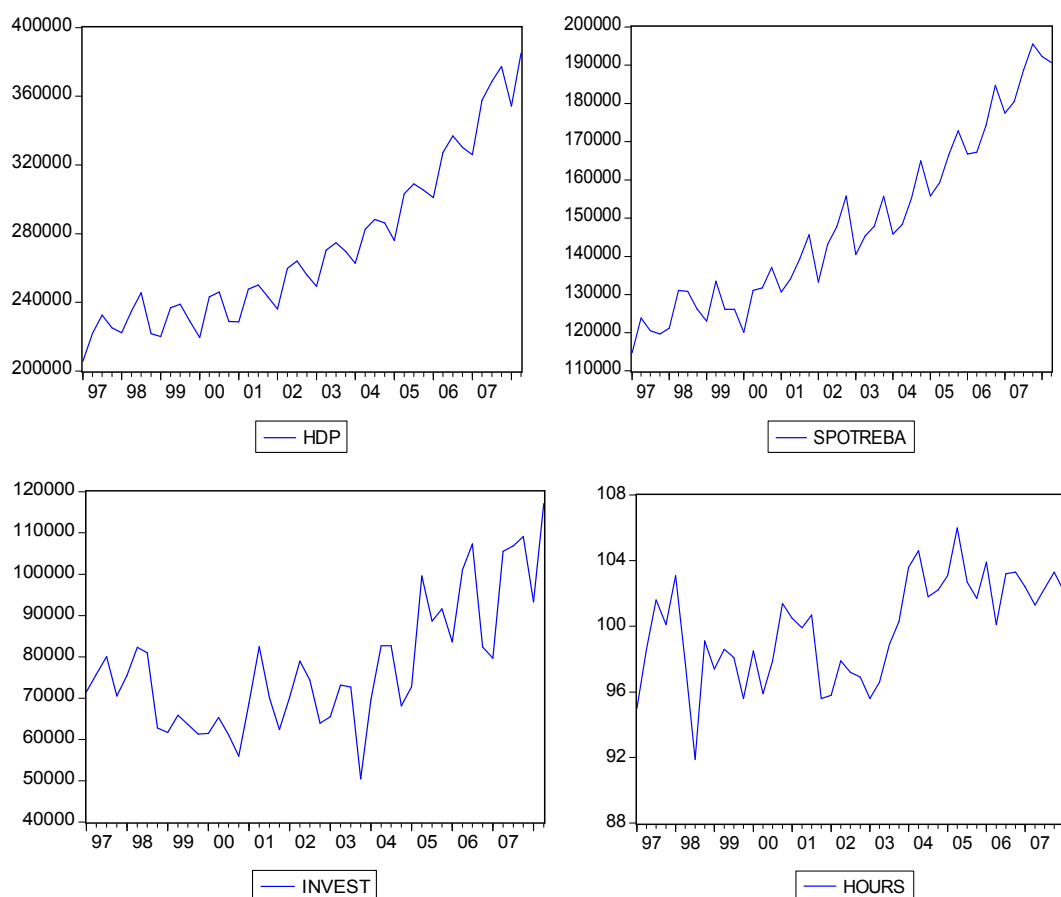
$$a_t = \rho \cdot a_{t-1} + \varepsilon_t \quad (5.53)$$

$$k_t = Pk_{t-1} + Qa_t . \quad (5.54)$$

Vzťah (5.53) je loglinearizovaná rovnica modelu popisujúca technologický šok, (5.54) je zovšeobecnený tvar (5.51) (obe rovnice popísane vyššie). Pomocou týchto vzťahov vieme dosadením do (5.52) nasimulovať aj všetky ostatné premenné. Z týchto simulovaných dát potom vieme vypočítať viacero vlastností časových radov, ako napríklad variancie a autokorelácie premenných. Tieto vlastnosti dát užitočne slúžia na vyhodnotenie, či model vie zachytiť vývoj skutočných časových radov premenných.

6 Business cycle dáta SR

Pre lepšie pochopenie metód, ilustrovaných v 4.kapitole, si ukážeme, ako fungujú v praxi⁹. Budeme pracovať s originálnymi dátami popisujúcimi vývoj základných makroekonomických veličín na Slovensku. Vzorka dát pozostáva zo štyroch časových radov: hrubého domáceho produktu, konečnej spotreby domácností, tvorby hrubého fixného kapitálu a z indexu odpracovaných hodín zamestnaných osôb¹⁰ (Obr.2). Všetky tieto premenné, okrem indexu, sú počítané v mil. Sk, popisujúce reálne hodnoty ukazovateľov slovenskej ekonomiky. Dáta sú štvrťročné, zachytávajú obdobie od 1. kvartálu 1997 po 2. kvartál 2008. Pôvodné dáta nie sú sezónne očistené, my ale budeme pracovať so sezónne očistenými radmi, kvôli lepšej funkčnosti metód¹¹. Tieto sezónne očistené dáta sme vyjadrili v logaritmovanej verzii (Obr.3).

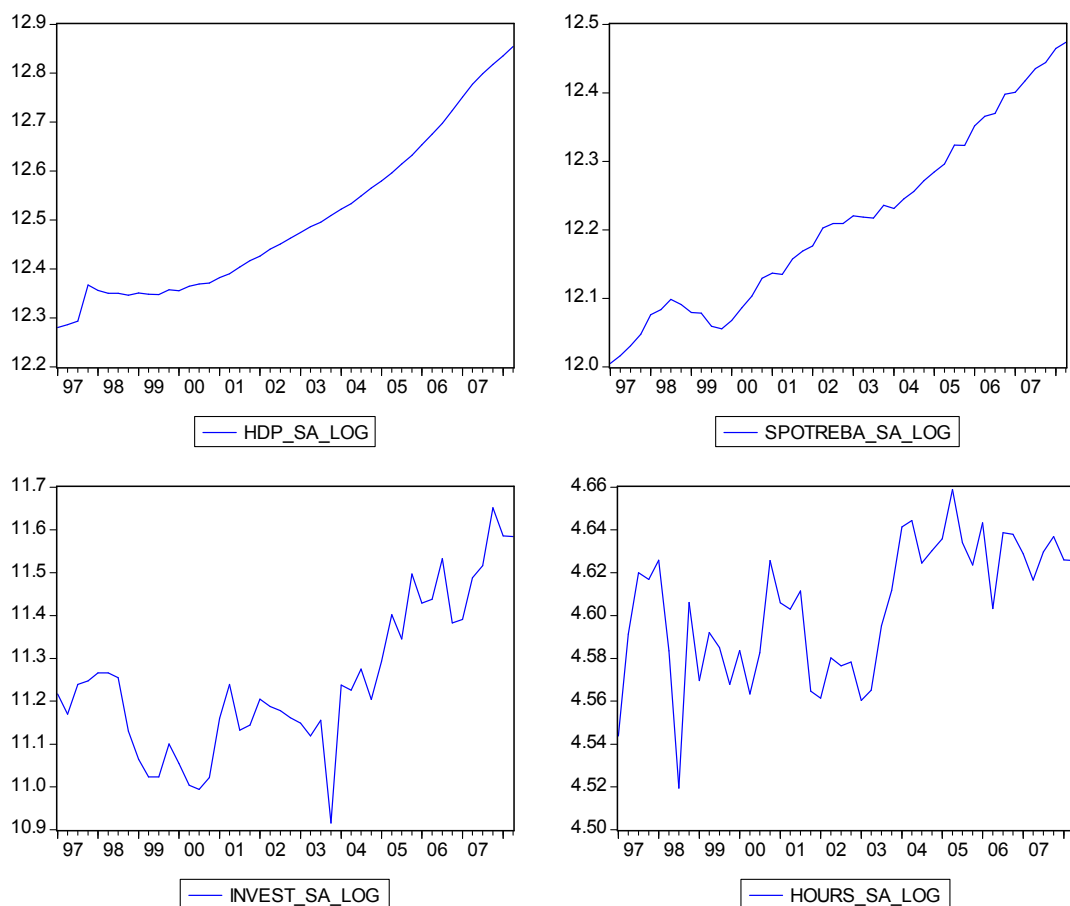


Obr.2 Dáta business cycle, bez sezónneho očistenia.

⁹ Pri práci s časovými radmi boli použité softvéry MATLAB a Eviews.

¹⁰ Zdrojom dát boli internetové databázy Štatistického úradu SR a Eurostatu.

¹¹ Na sezónne očistenie vzorky dát bol použitý softvér Eviews, zabudovaný filter X-11.



Obr.3 Dáta business cycle, sezónne očistené, logaritmované.

Ako vidno na Obr.2, v časových radoch HDP a spotreby domácností je prítomná silná sezónna zložka. Pri pozorovaniach investícií pozorujeme značne nerovnomerný vývoj, sezónnosť je však identifikovateľná. Index odpracovaných hodín sa vyvíja bez výraznejšieho vplyvu sezónnej zložky. Sezónne očistenie príslušné dáta vyhladilo a môžeme v nich ľahšie pozorovať trendový komponent (Obr.3). V rokoch 1998-1999 zaznamenávame jemný pokles HDP, spotreby aj investícií, čo zreteľne narušilo mieru rastu ekonomiky a teda aj trendovú zložku. Odpracované hodiny podľa očakávania nevykazujú trendové správanie.

6.1 Aplikácia metód na odstránenie trendu

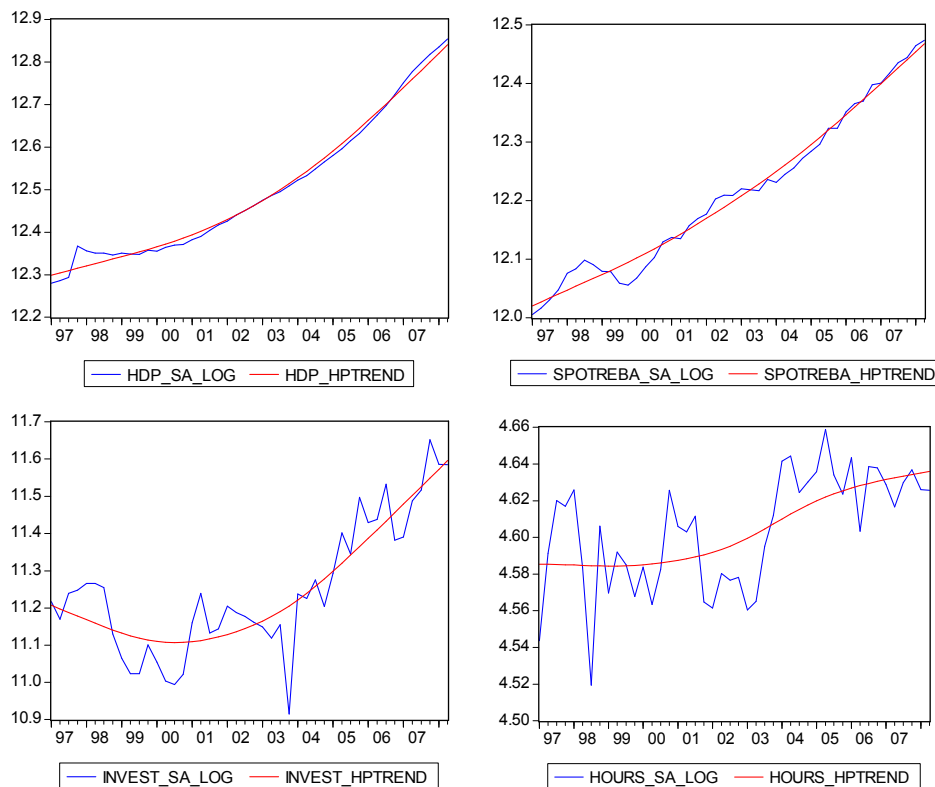
Na identifikáciu trendu použijeme najprv H-P filter s hodnotou váhového parametra $\lambda = 1600$, ktorá sa používa pri práci so štvrťročnými dátami. Odhad trendovej zložky \hat{g}_t je získaný z minimalizácie výrazu

$$\sum_{t=1}^T (\log y_t - g_t)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} [(g_{t+1} - g_t) - (g_t - g_{t-1})]^2.$$

Následne, proces odstránenia trendu dokončíme podľa vzťahu

$$\tilde{y}_t = \log y_t - \hat{g}_t.$$

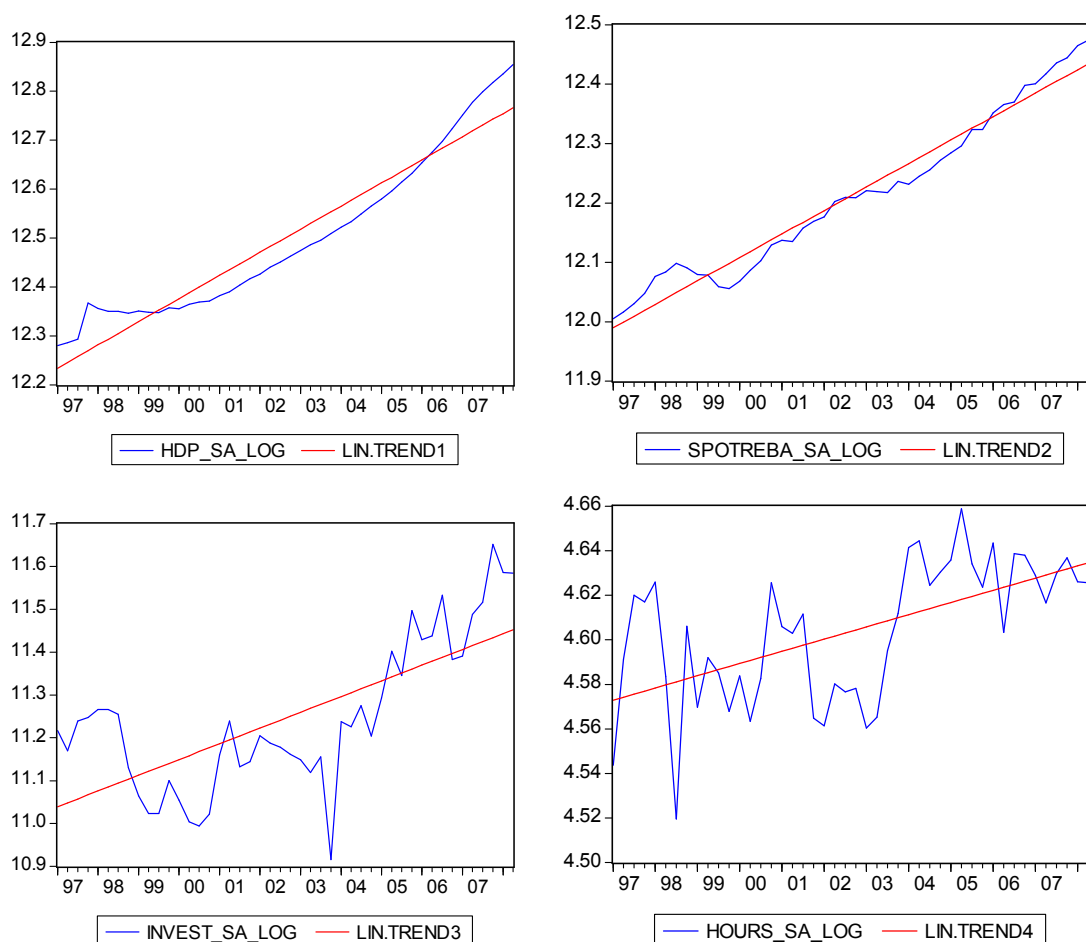
Trajektórie odhadov hodnôt \hat{g}_t pre naše dáta možno pozorovať na Obr.4. Iba poznamenáme, že v aplikáciách business cycle teórie je bežné aplikovať H-P filter na kompletnú vzorku časových radov, aj keď dáta nepreukazujú spoločnú mieru rastu. Vývoj trendových zložiek \hat{g}_t ukazuje pokles rastu HDP, spotreby aj investícií v období okolo roku 1999. Potvrďuje to aj fakt, že odhadnutá trendová zložka pre HDP a spotrebu na začiatku leží výrazne pod krivkou originálnych dát a v roku 1999 sa dostáva nad túto trajektóriu.



Obr.4 Logaritmované dáta a príslušné H-P trendy.

Teraz aplikujeme ďalšie spomenuté metódy. Tie vychádzajú z implicitného predpokladu, že dáta sledujú približne konštantnú mieru rastu. Pri metóde *detrending* sa z dát odstráni lineárny trend odhadnutý pomocou metódy najmenších štvorcov. Tieto odhadnuté lineárne trendy sú zobrazené na obr.5. Keďže sa časové rady investícií

a najmä odpracovaných hodín nevyvíjajú rovnomernou mierou rastu, ich odhadnuté lineárne trendy veľmi zle charakterizujú pôvodné dáta. To ale potvrdzuje fakt, že dáta by pre úspešnosť metódy mali splňať implicitný predpoklad.



Obr.5 Odhadnuté lineárne trendy

Na odstránenie trendu sme použijeme všetky tri metódy: detrending, diferenciáciu a H-P filter. Pre ľahšie porovnanie budeme pracovať len s časovým radom spotreby. Pri detrendingu, sme očistené dáta dostali zo vzťahu

$$\tilde{y}_t = \log y_t - \hat{\alpha}_0 - \hat{\alpha}_1 t,$$

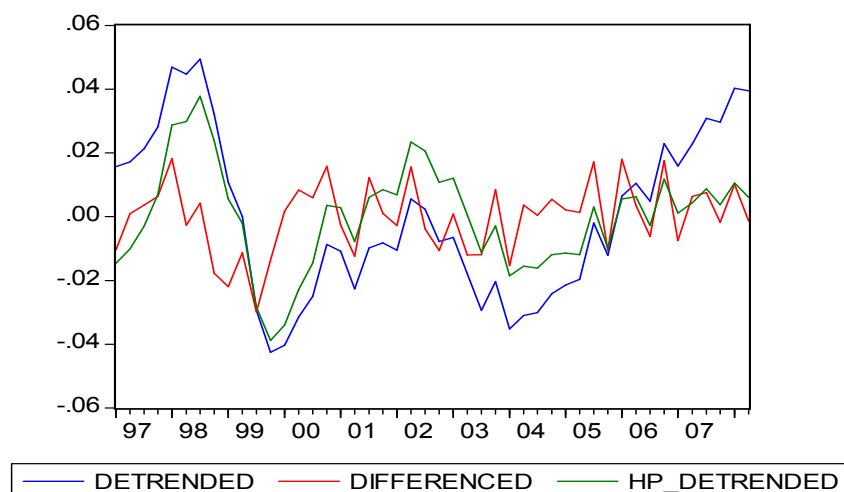
kde hodnoty $\hat{\alpha}$ sú koeficienty odhadnutého lineárneho trendu. Diferenciáciu sme aplikovali na základe vzťahu

$$\tilde{y}_t = \log y_t - \log y_{t-1} - \hat{\gamma},$$

kde $\hat{\gamma}$ je odhadnuté ako priemer z hodnôt $\log y_t - \log y_{t-1}$.

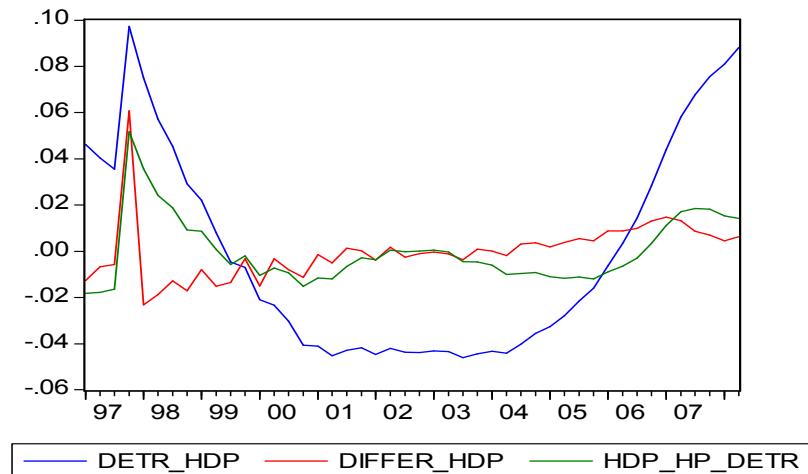
Dáta pre spotrebu domácností po odstránení trendovej zložky sú zobrazené na obr.6. Smerodajná je hodnota štandardnej odchýlky týchto očistených časových radov

pre všetky tri metódy: štandardná odchýlka pre dáta získané detrendingom je 0.0255, pre diferenciáciu 0.011 a pre H-P filter je to 0.016. Vidíme, že pri použití diferenciácie na odstránenie trendu sú výsledné dáta najmenej volatilné. Korelácia medzi detrendovanými a diferencovanými radmi je 0.253, medzi detrendovanými a H-P filtrovanými 0.772 a medzi diferencovanými a H-P filtrovanými 0.321



Obr.6 Spotreba po odstránení trendu (použitie metódy: detrending, diferenciácia, H-P filter).

Na obr.7 môžeme pozorovať údaje HDP očistené od trendovej zložky pomocou spomenutých metód. Vo vývoji časového radu získaného pomocou detrendingu dominujú na začiatku obdobia výrazne kladné odchýlky. V polovici roku 1999 nastáva zlom, kedy až po rok 2006 zaznamenávame pomerne dlhý úsek záporných odchýlok od odhadnutého trendu. Štandardná odchýlka je pri metóde detrending 0.046, pri diferenciácii 0.013 a pri H-P filtri 0.014. Korelácia medzi detrendovanými a diferencovanými radmi je 0.223, medzi detrendovanými a H-P filtrovanými 0.702 a medzi diferencovanými a H-P filtrovanými 0.351. Opäť treba poznamenať, že metóda detrending sa ukazuje ako najviac volatilná. Je to spôsobené tým, že lineárny trend nie veľmi presne popisuje správanie v prípade ak sa dáta nevyvíjajú konštantnou mierou rastu. Možným opatrením by bolo rozdelenie sledovaného obdobia na viac častí a následne konštrukcia lineárnych trendov pre tieto segmenty. Napríklad, ako vyplýva z obr.7, dáta by sme rozdelili v bode okolo roku 1999.



Obr.7 HDP po odstránení trendu (použité metódy: detrending, diferenciácia, H-P filter).

Dáta v prípade metódy diferenciácie a pri použití H-P filtra vykazujú podobné výsledky. Povaha H-P filtra je však oproti diferenciacii hladšia, čo je dané najmä tým, že pri diferenciacii sa diferencie menia v každom čase. Hladkosť H-P filtra taktiež ovplyvňuje voľba parametra λ .

6.2 Aplikácia filtrov na izoláciu cyklov

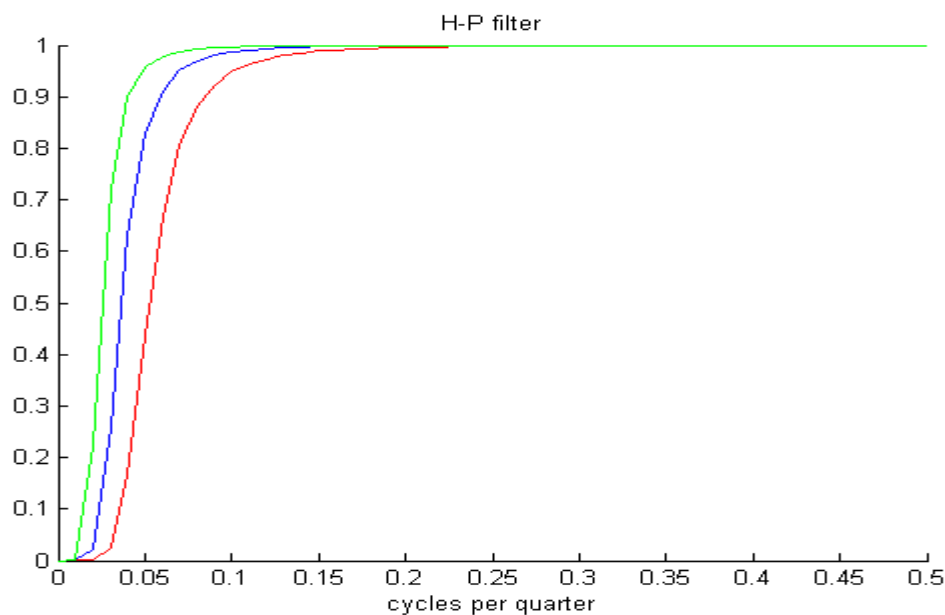
V tejto časti si ukážeme ako filtre pomáhajú eliminovať vplyvy cyklov rozličných frekvencií. Pre H-P filter sme odhadli cyklický komponent podľa vzťahu $\tilde{y}_t = \log y_t - \hat{g}_t = \hat{c}_t$, teda cyklickú zložku sme získali odstránením trendu, rovnako ako v predchádzajúcej časti. Zaujímavé je však pozrieť sa na štvorcový gain tohto filtra, ktorým zosilňuje alebo zoslabuje spektrum filtrovaných dát. Z definície gain funkcie máme

$$G(\omega) = |C(e^{-i\omega})|,$$

z čoho pre štvorcový gain H-P filtra, podľa Kinga a Rebelu, dostávame

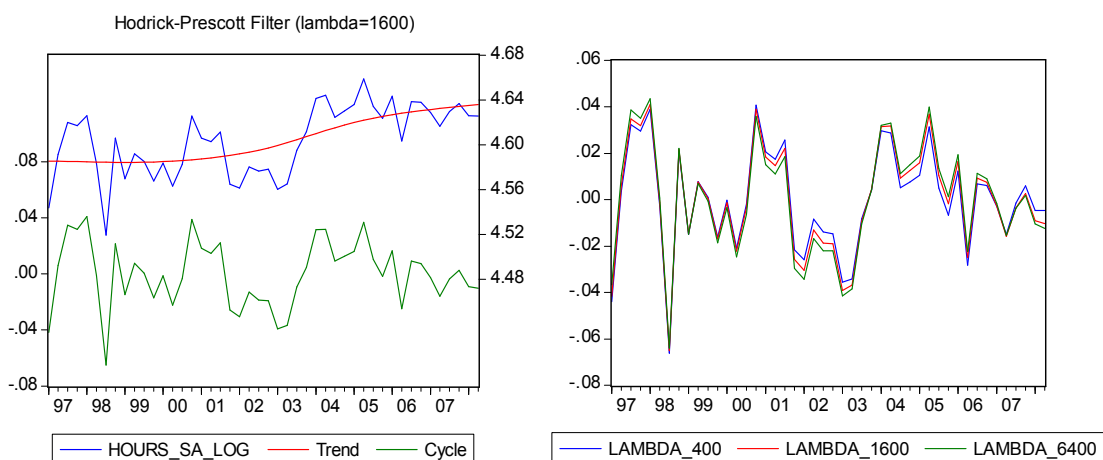
$$G(\omega)^2 = |C(\omega)|^2 = \left| \frac{4\lambda(1 - \cos \omega)^2}{1 + 4\lambda(1 - \cos \omega)^2} \right|^2.$$

Obr.8 ukazuje ako H-P filter pracuje s frekvenciami. Z vývoja štvorcového gainu sa dá pozorovať, že jeho hodnota sa s frekvenciou zväčšuje. Filter ruší cykly veľmi nízkej frekvencie, naopak zachytáva hlavne cykly vyšších frekvencií.



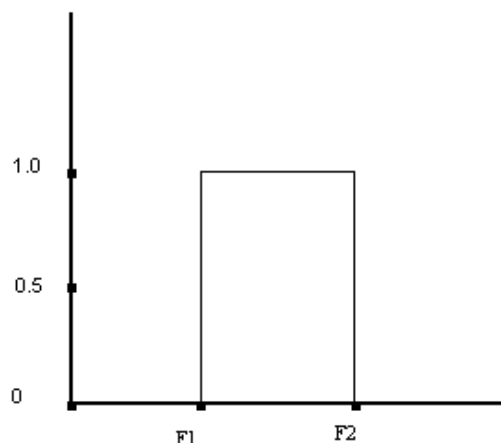
Obr.8 Štvorcový gain H-P filtra pre rôzne hodnoty λ . ($\lambda = 400$: zelená, $\lambda = 1600$: modrá, $\lambda = 6400$: červená)

Ak aplikujeme H-P filter na časový rad odpracovaných hodín výsledkom je cyklický komponent kopírujúci správanie pôvodných dát (obr.9).



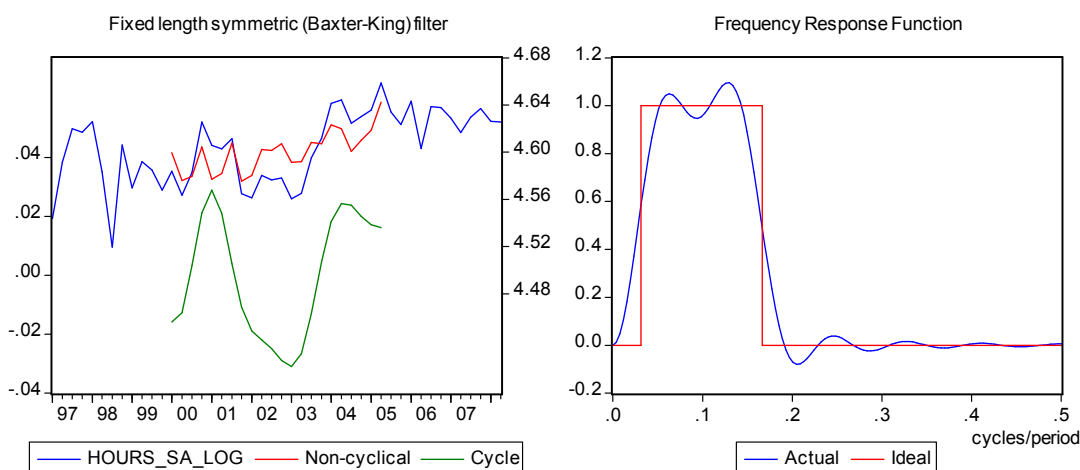
Obr.9 H-P filter aplikovaný na časový rad odpracovaných hodín

Ďalej použijeme aproximácie ideálneho band pass filtra. Ideálny filter ruší všetky frekvencie mimo stanoveného pásma, čo sa dá vyčítať z grafického zobrazenia jeho gain funkcie (obr.10).



Obr.10 Štvorcový gain ideálneho B-P filtra (F1 a F2 vymedzujú pásmo frekvencií).

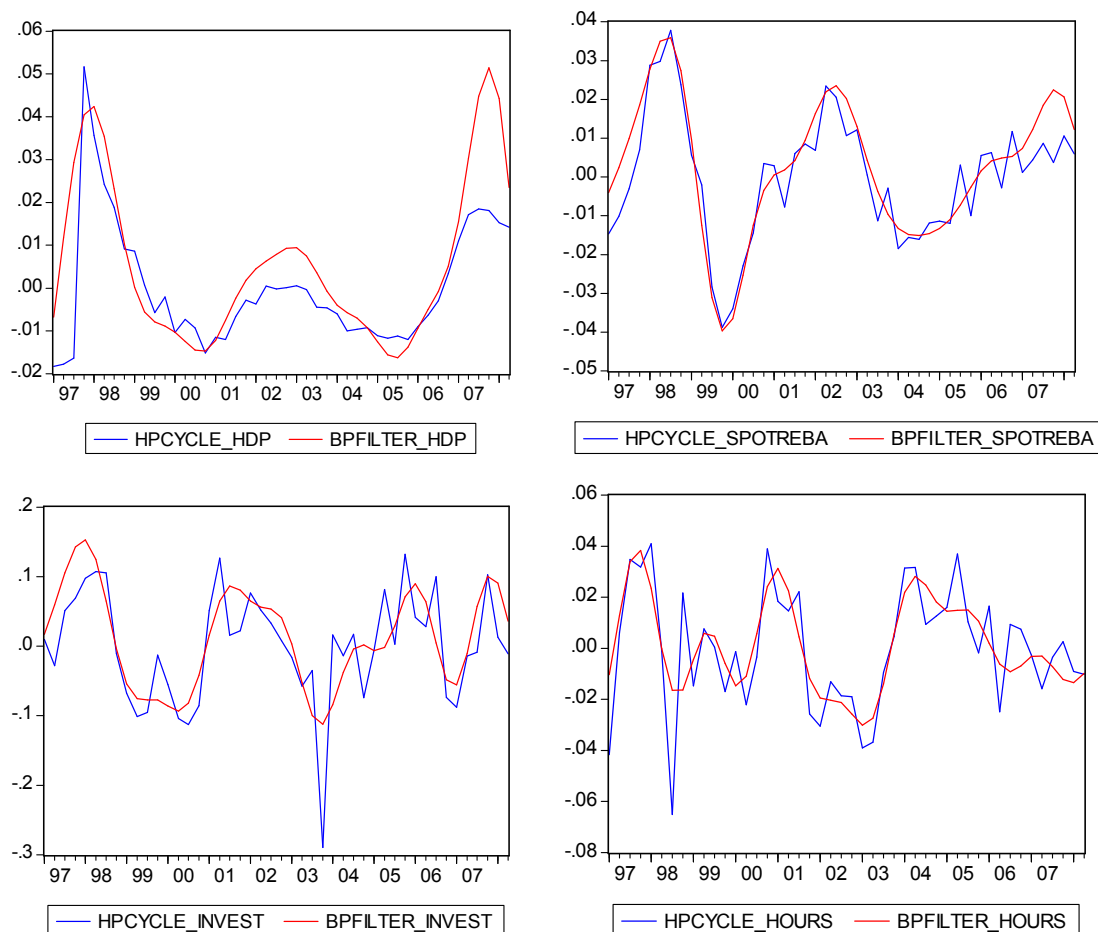
Pri aproximácii filtrom Baxtera a Kinga, autori odporúčajú pri analýze štvrt'ročných dát použiť ako vstup hodnoty $K = 12$, $p_l = 6$ a $p_u = 32$. K dispozícii máme časové rady z dĺžkou len 46 pozorovaní. Tie sa nám po aplikácii filtra skrátia na začiatku aj na konci o 12 pozorovaní (obr.11). Takto dochádza k značnej strate informácií. Na obr. 11 je takisto porovnaný štvorcový gain ideálneho a aproximovaného filtra. Baxterov a Kingov filter je konštruovaný na odstraňovanie nežiaducich nízkych a vysokých frekvencií. Tvar štvorcového gainu potvrdzuje splnenie tohto cieľa.



Obr.11 Aplikácia filtra Baxtera a Kinga na časový rad odpracovaných hodín, štvorcový gain.

Predtým ako použijeme filter Christiana a Fitzgeralda musíme z dát odstrániť trend. Podľa typu vstupných dát to vykonáme buď odstránením lineárneho trendu alebo odstránením nenulového priemeru. Tak dosiahneme pri izolovaní cyklov hodnotnejšie výsledky. Ako vstupné parametre tohto filtra musíme zadať hodnoty pre vymedzenie

pásma hľadaných frekvencií. Opäť použijeme odporúčané hodnoty pre prácu so štvrtročnými údajmi: $p_l = 6$ a $p_u = 32$.



Obr.12 Cyklické zložky získané filtrom Christiana a Fitzgeralda a HP filtrom.

Keď porovnáme cyklické zložky získané pomocou H-P filtra a pomocou band pass filtra, vidíme, že majú podobný priebeh. Pre časový rad spotreby máme štandardné odchýlky 0.0162 pre H-P filter a 0.0177 pre B-P filter. Vzájomná korelácia má hodnotu 0.93. Na obr.12 pozorujeme, že B-P filter má hladší priebeh, čo je spôsobené tým, že H-P filter ponecháva aj veľmi veľké frekvencie, zatiaľ čo B-P filter zachytáva frekvencie len zo stanoveného pásma.

Na záver môžeme povedať, že oba filtre sú uspokojivým nástrojom pre izoláciu cyklickej zložky v prípade slovenských časových radov. Pre analýzu aktivity business cycle je vhodnejší band pass filter, ktorý vie lepšie popísať frekvencie medzi 6 a 32 štvrtrokmi. Aj keď H-P filter vykazuje podobné výsledky, zanecháva vo filtrovaných dátach aj vplyv vyšších frekvencií.

Záver

Na začiatku práce sme si predstavili základnú charakteristiku DSGE modelovania. Prezentovali sme základné metódy riešenia modelu, počnúc linearizáciou, ktorá je dôležitým prípravným krokom pre implementáciu metód riešení. Detailne sme popísali postup Uhligovej metódy a metódy Blancharda a Kahna.

Na príklade jednoduchého RBC modelu sme aplikovali kroky linearizácie modelu a jeho riešenie pomocou Uhligovej metódy. Pri vyčíslení sme použili prevzaté odhady vstupných parametrov pre slovenskú ekonomiku. Riešenie sme využili na načrtnutie užitočných aplikácií, ktoré nám model ponúka. Asi najužitočnejšou bola simulácia reakcie modelovanej ekonomiky na technologický šok. V našom prípade technologický šok spôsobil najväčšiu odchýlku v spotrebe, naopak, najmenší vplyv mal tento šok na hodnotu investícií. Načrtli sme aj možnosti ďalšej analýzy riešenia modelu, konkrétne analýzu citlivosti, či simuláciu modelu.

Predstavili sme si aj dôležité prípravné kroky pri práci s dátami, odstraňovanie trendov a izoláciu cyklov. Hlavným cieľom týchto krokov je vytvoriť logický súvis medzi tým, čo popisujú dáta, a čo modeluje teoretický model. Prezentovali sme základné metódy pre odstraňovanie trendov: detrending, diferenciáciu a H-P filter. Prenikli sme do sféry frekvencií, definovali sme spektrum, a ukázali sme ako filtre pomáhajú získať cyklické zložky z dát.

Popísané metódy sme aplikovali na dáta popisujúce business cycle aktivitu v slovenskej ekonomike. Pri odstraňovaní trendov metódy vykazovali podobné výsledky, H-P filter a diferenciácia však oproti metóde detrendingu vedeli lepšie zachytiť trendovú zložku. Na izoláciu cyklickej zložky sme použili H-P filter a Band pass filter. Pre analýzu aktivity business cykce je vhodnejší Band pass filter, ktorý vedel lepšie popísať frekvencie medzi 6 a 32 štvrtrokmi. H-P filter vykazoval podobné výsledky, zanechával však vo filtrovaných dátach vplyv vyšších frekvencií.

Na záver treba povedať, že techniky DSGE modelovania sa ukázali ako užitočný nástroj pri analyzovaní business cyklov v ekonomike. Pokračovaním tejto práce by mohla byť simulácia modelu. Použitím techník na odstraňovanie trendov a izoláciu cyklov by sa dalo analyzovať ako simulovaný model popisuje skutočný vývoj ekonomiky.

Použitá literatúra

- [1] BRIATKA, L.: Home Production in RBC models. Diplomová práca. FMFI UK Bratislava, 2002.
- [2] KOWAL, P.: Optimal Filtering. Working Paper. Warsaw School of Economics, 2005
- [3] HEER, B. a MAUSSNER, A.: Dynamic General Equilibrium Modelling, Computational Methods and Applications (First Edition). Springer, Berlin 2005
- [4] KYDLAND, F. a PRESCOTT, E.: Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica* 50, 1982
- [5] ÓDOR, L.: „Štruktúrálna makroekonometria.“ NBS, Bratislava 2008
- [6] LUCAS, R.: Econometric Policy Evaluation. A critique. Camegie-Rochester Conference Series on Public Policy, 1976
- [7] ROTEMBERG, J. a WOODFORD, M.: An optimization-based econometric framework for the evaluation of monetary policy. NBER Macroeconomics Annual 12, 1997
- [8] ZEMAN, J. a SENAJ, M.: Modelovanie vývoja slovenskej ekonomiky pomocou základného DSGE modelu. IN: Biatec, ročník 16, 3/2008
- [9] SENAJ, M.: DSGE modelovanie – nová výzva pre NBS. IN: Biatec, ročník 15, 8/2007
- [10] ROMER, D.: Advanced Macroeconomics, 3rd Edition. Boston 2006
- [11] KING, R. a WATSON, M.: System reduction and solution algorithms for solving linear difference systems under rational expectations. *Computational Economics* 20, 2002
- [12] HAMILTON, J.: Time series analysis. Princeton University Press, 1994
- [13] EVERTS, M.: Band-Pass Filters. University of Bern, 2006
- [14] HODRICK, R. a PRESCOTT, E.: Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation. Discussion Paper No.451, 1981
- [15] KING, R. a REBELO, S.: Low frequency filtering and real business cycles. *Journal of Economic Dynamics and Control* 17, 1993.
- [16] CHRISTIANO, L. a FITZGERALD, T.: The Band Pass Filter. *International Economic Review* Vol.44, No.2, 2003

- [17] BAXTER, M. a KING, R.: Measuring business cycles. Aproximate Band-pass filters for economic time series. National Bureau of Economic Research, Cambridge, Working Paper No. 5022, 1995
- [18] MURRAY, C.: Cyclical properties of Baxter – King filtered time series. Review of economics and statistics, 85, 2003
- [19] HANSEN, G.: Indivisible labor and the business cycle. Journal of monetary economics, vol.16, 1985
- [20] UHLIG, H.: A toolkit for analyzing nonlinear dynamic stochastic models easily. University of Tilburg. Discussion paper 101, 1999
- [21] VAŠÍČEK, O. a MUSIL, K.: Behavior of the Czech Economy: New Open Economy Macroeconomics DSGE Model. Research Centre for Competitiveness of Czech Economy. Working Paper No.23, 2006
- [22] NELSON, C. a PLOSSER, C.: Trends and random walks in macroeconomic time series. Journal of Monetary economics, 10, 1982
- [23] SCHLICHT, E.: Estimating the smoothing parameter in tho so-called Hodrick-Prescott filter. Discussion paper 2004-2. University of Munich, 2004
- [24] McCALLUM, B.: Real business cycle models. Working Paper No. 240. National Bureau of Economic Research. Cambridge, 1988
- [25] YAKHIN, Y.: Business cycle fluctuations and the Hodrick-Prescott Filter. Working Paper. Ben-Gurion Univerity, 2007
- [26] SIMS, C.: Money, income and causality. American economic review, 62, 1972
- [27] De JONG, D. a CHETAN, D.: Structural macroeconometrics. Princeton University Press, 2006