Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Viacrozmerné úlohy RBC-typu

(Diplomová práca)

Bc. Vladimír Balla

Študijný odbor: Ekonomická a finančná matematika

Vedúci práce: Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc. Bratislava, 2010

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že diplomovú prácu som vypracoval samostatne len s využitím teoretických vedomostí a s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave 21. apríla 2010

podpis študenta

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce, Prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za všestrannú odbornú pomoc a prejavenú ochotu pri vedení práce. Ďakujem prof. Luptáčikovi za odporučenie prác, na základe ktorých sme zostavili model. Vďaka parí mojim rodičom, ktorí mi boli oporou počas celého vysokoškolského štúdia.

Abstrakt

Cieľom tejto diplomovej práce je zostavenie viacrozmernej úlohy RBC-typu spĺňajúcej overiteľné predpoklady. V práci sú zhrnuté teoretické predpoklady pre existenciu a jednoznačnosť stabilnej cesty z práce Blancharda a Kahna. Predpoklady sú odvodené v dizertačnej práci M. Zakopčana.

V práci sú zhodnotené doterajšie pokusy o vyhotovenie takéhoto modelu. Príklad, ktorý je v práci zostavený a analyzovaný vychádza z rastového modelu Mankiwa et al. [7].

Kľúčové slová: RBC("Real Bussines Cycles") model, nutné podmienky optimality, rovnovážna trojica

Obsah

Úvod

Práca je motivovaná dizertačnou prácou M. Zakopčana o lineárno-kvadratickej aproximácii RBC-modelov. Chybičkou krásy v spomínanej práci je absencia príkladu vyššej dimenzie než 1. V literatúre sme takýto príklad nenašli - vo všetkých predkladaných RBC a DSGE modeloch sa totiž dynamika redukuje na jednu rovnicu.

Cieľom diplomovej práce je vybudovať viacrozmenú úlohu optimálneho riadenia ako príklad na teóriu vybudovanú v dizertačnej práci [8] a overiť splnenie predpokladov, ktoré sú v nej zadané.

Práca je členená do piatich kapitol. V prvej a druhej kapitole sú stručne zhrnuté základné teoretické poznatky o riešení modelov. Definujeme tu rovnovážnu trojicu, popisujeme lineárno-kvadratickú aproximáciu. V závere druhej kapitoly uvádzame vety o existencii jediného riešenia pre linearizovaný a úplný model.

V tretej kapitole predstavíme predchádzajúce pokusy o formuláciu a riešenie dvojrozmerných modelov a vysvetlíme dôvody, prečo tieto pokusy stroskotali.

V štvrtej kapitole sa venujeme modelom z prác [6] a [7] a ich úprave pre naše potreby. Tu patrí poďakovanie Prof. Luptáčikovi za odporučenie týchto prác. Následne sa pokúsime o porovnanie modelu s dvojsektorovým modelom.

Jadro práce je štvrtá kapitola, v nej analyzujeme modelu z práce [7] a overuje sa, že spĺňa predpoklady z práce [8].

Kapitola 1

Riešenie RBC-modelov

Abstrakciou úloh teórie racionálnych očakávaní prišli O. J. Blanchard a Ch. M. Kahn v práci [1] k nasledovnej úlohe:

Ekonomika je opísaná dvojicou premenných $x \in \mathbb{R}^n$ (predeterminované premenné) a $p \in \mathbb{R}^m$ (nepredeterminované premenné). Žiadúci rovnovážny stav je $(\bar{x}, \bar{p})$, bez ujmy na všeobecnosti ho stotožníme s bodom $(0, 0)$. Dynamika ekonomiky v okolí rovnovážneho bodu je opísaná systémom stochastických diferenčných rovníc, ktorých linearizácia v rovnovážnom bode $\bar{x} = 0$, $\bar{p} = 0$ má tvar

$$\begin{pmatrix} x(t+1) \\ E_t p(t+1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} + z(t) \tag{1.1}$$

kde E_t je podmienené očakávanie pri známej realizácii premenných v čase t a $z(t)$ predstavuje náhodne šoky, pre ktoré platí

$$E_t z(t) = 0. \tag{1.2}$$

Pre očakávané hodnoty premenných vzhľadom na (1.2) z (1.1) vyplýva, že očakávané $\psi(t) = E_0 p(t)$ vyhovujúce deterministickému systému

$$\begin{pmatrix} x(t+1) \\ \psi(t+1) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Otázkou, ktorú si kladú autori je, za akých podmienok existuje ku každej hodnote predeterminovanej premennej $x(0)$ jediná hodnota nepredeterminovanej premennej $\psi(0)$ taká, že riešenie systému (1.3), nazývané "stabilnou cestou [1]" s počiatočnou hodnotou $(x(0), \psi(0))$ konverguje k žiadanej rovnováhe.

V [1] je odvodená nutná a postačujúca podmienka pre existenciu a jednoznačnosť stabilnej cesty. Je ňou, že stabilný priestor matice M (teda invariantný priestor matice M, zodpovedajúci časti spektra vo vnútri jednotkovej kružnice) sa prirodzenou projekciou izomorfne zobrazuje na priestor $\psi = 0$. Táto geometrická podmienka sa zle overuje a postráda zrejmú ekonomickú interpretáciu.

Úlohe nájsť ľahko overiteľnú podmienku existencie jedinej stabilnej cesty je venovaná dizertačná práca [8] a to pre triedu úloh reprezentovanú RBC modelmi. Dôležitosť týchto modelov spočíva v tom, že na ich základe sa vyvinuli "DSGE" modely, ktoré sa používajú na simulovanie dynamiky ekonomiky (napr. v NBS, práca [10]).

1.1 Jednorozmerný RBC-model

Jednou zo základných prác, v ktorých je formulovaná teória RBC modelov je [3]. Tento klasický jednorozmerný model sa zaoberá prerozdeľovaním zdrojov v ekonomike. Predpokladáme, že domácnosti majú k dispozícii jednotku produktívneho času a počiatočný kapitál $k_0 > 0$, ktorý sa amortizuje konštantnou mierou $\delta \in (0, 1)$. V každej perióde t je produkovaný jediný tovar, produkčná funkcia je:

$$y(t) = F(k(t), z(t))$$

kde premenná $k(t)$ predstavuje kapitál a $z(t)$ je technologicky šok, ktorý sa riadi sa lineárnym Markovovým procesom prvého rádu. Pre produkčnú

[1] Ekonomická interpretácia stabilnej cesty je, že ekonomické subjekty ako celok majú "dokonalé predvídanie"(perfect foresight), vďaka tomu dokážu ekonomiku vyvedenú z rovnováhy exogenným šokom do nej opäť doviesť.

funkciu sa najčastejšie používa $F(k(t), z(t)) = e^{z(t)}k(t)^{\alpha}$. Rovnice pre kapitál a technológie sú:

$$\begin{aligned} k(t+1) &= (1-\delta)k(t) + i(t) \\ z(t+1) &= \eta z(t) + \epsilon(t+1) \end{aligned}$$

kde $\epsilon(t)$ je identicky distribuovaná náhodná premenná s nulovou strednou hodnotou a konečnou varianciou.

V každej perióde sa produkcia rozdeľuje medzi bežnú spotrebu $c(t)$ a investície $i(t)$.

$$y(t) = c(t) + i(t)$$

Úlohou je maximalizovať celkový úžitok domácnosti

$$E\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(c(t))$$

kde E je operátor racionálnych očakávaní, $\beta \in (0,1)$ je diskontný faktor a funkcia užitočnosti $U : \langle 0,\infty) \to \langle 0,\infty)$ je dvakrát spojite diferencovateľná, ostro rastúca a rýdzokonkávna.

Teda máme úlohu dynamického programovania na nekonečnom časovom horizonte:

$$\begin{aligned} \max_{c(t)} \quad & E\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(c(t)) \\ & y(t) = c(t) + i(t) \\ & k(t+1) = (1-\delta)k(t) + i(t) \\ & z(t+1) = \eta z(t) + \epsilon(t+1) \\ & k(0), z(0) - \text{dané} \end{aligned}$$

Vyjadrime spotrebu a dosaďme do účelovej funkcie

$$\begin{aligned} \max_{c(t)} \quad & E\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t U(F(k(t), z(t)) - i(t)) \\ & k(t+1) = (1-\delta)k(t) + i(t) \\ & z(t+1) = \eta z(t) + \epsilon(t+1) \\ & k(0), z(0) - \text{dané} \end{aligned}$$

Označme účelovú funkciu:

$$f(k,z,u) = U(F(k(t),z(t)) - i(t))$$

Sústava rovníc pre stavové premenné má tvar:

$$\begin{pmatrix} k(t+1) \\ z(t+1) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} k(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + Bi(t)$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1-\delta & 0 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pevný bod $(\bar{k},\bar{z},\bar{i})$ tejto úlohy spĺňa:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f(\bar{k},\bar{z},\bar{i})}{\partial i} + \beta \left(\frac{\partial f(\bar{k},\bar{z},\bar{i})}{\partial k}, \frac{\partial f(\bar{k},\bar{z},\bar{i})}{\partial z} \right) (I - \beta A)^{-1} B \\ \bar{k} &= (1-\delta)\bar{k} + \bar{i} \\ \bar{z} &= \eta \bar{z} \end{aligned}$$

Predpokladajme, že takýto bod existuje a označme ho $y = (\bar{k},\bar{z},\bar{i})$. Taylorov rozvoj funkcie f v rovnovážnom bode je:

$$f(y) = f(\bar{y}) + \frac{\partial f(\bar{y})}{\partial y} y + \frac{1}{2} y^T \frac{\partial^2 f(\bar{y})}{\partial y^2} y$$

Ak nahradíme pôvodnú účelovú funkciu aproximáciou, dostaneme úlohu lineárno-kvadratického programovania. Táto úloha má tú výhodu, že optimálne riadenie je nezávislé od variancie premennej ϵ. Platí princíp ekvivalencie, ktorý nám umožňuje predpokladať, že variancia je nulová a premennú nahradiť jej strednou hodnotou a odstrániť operátor E z rovnice.

Zovšeobecnením deterministickej verzie do vyšších dimenzií dostaneme úlohu optimálneho riadenia

$$\sum \beta^t f(x(t),u(t)) \to \max$$

pri podmienkach

$$x(t+1) = F(x(t),u(t))$$

v úlohe sa predpokladá, že má rovnovážne (konštantné v čase) riešenie (optimálne riadenie) a odozvu $x(t) \equiv \bar{x},\ u(t) \equiv \bar{u}$.

K systému (1.3) dospejeme linearizáciou variančných nutných podmienok optimality po eliminovaní riadenia z podmienky maxima. $\psi(t)$ predstavuje adjungovanú premennú a úloha stabilnej cesty je teda ekvivalentná úlohe existencie jediného optimálneho riadenia, ktorého odozva vedie k rovnováhe.

Kľúčovou podmienkou existencie jedinej stabilnej sedlovej cesty odvodenej v [8] je zápornosť Hessiánu funkcie $f(x, u)$ v rovnováhe. Táto podmienka je ľahko overiteľná má aj ekonomický aspekt. Zabezpečuje, že rovnováha predstavuje isté ekonomické optimum.

Kapitola 2

Zhrnutie všeobecnej teórie

V tejto kapitole stručne popíšeme teoretické východiská, ako boli spracované M. Zakopčanom v práci [8].

Matematicky môžme problém redukovať na diskrétnu úlohu optimálneho riadenia s nekonečným časovým horizontom. Nech $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ sú otvorené množiny, $x_0 \in X$, $f \in C^3(X \times U,\ \mathbb{R})$, $F \in C^3(X \times U,\ X)$ a $\beta \in (0,1)$. Pod prípustným riadením a odozvou na riadenie rozumieme postupnosti $\{u(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ spĺňajúce

$$\begin{aligned} x(t+1) &= F(x(t), u(t)) \quad \text{pre} \quad t = 0, 1, \dots \\ x(t) &\in X \\ u(t) &\in U \end{aligned}$$

také, že suma

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(x(t), u(t))$$

konverguje. Označme $\Phi(\beta, x_0)$ množinu prípustných riadení pre danú úlohu.

Riadenie a odozvu $\{\hat{u}(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $\{\hat{x}(t)\}_{t=0}^{\infty} \in \Phi(\beta, x_0)$ nazývame optimálnym ak platí

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \geq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(x(t), u(t))$$

pre každé $\{u(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty} \in \Phi(\beta, x_0)$. Problém nájsť optimálne riadenie s počiatočnou hodnotou $x_0 \in X$ nazveme $(\mathbf{U}_{\beta,x_0})$.

Úloha je sformulovaná za viacerých predpokladov, ktoré budeme postupne uvádzať v tejto kapitole.

Predpoklad Q 1 *$D_xF(x,u)$ je regulárna pre každé $x \in X$ a $u \in U$.*

Podľa [2] a za predpokladu **Q1**, riadenie a odozva $\{\hat{x}(t)\}$, $\{\hat{u}(t)\}$ sú optimálne pre úlohu $(\mathbf{U}_{\beta,\bar{x}_0})$, ak existuje také $\{\psi(t)\}$, $\psi(t) \in \mathbb{R}^n$, $\psi(t) \neq 0$, že $u(t) = \hat{u}(t)$ a $x(t) = \hat{x}(t)$ sú riešením systému rovníc

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= F(x(t), u(t)) && (2.1)\\
0^T &= D_u f(x(t), u(t)) + \beta\psi(t+1)^T D_u F(x(t), u(t)) && (2.2)\\
\psi(t)^T &= D_x f(x(t), u(t)) + \beta\psi(t+1)^T D_x F(x(t), u(t)) && (2.3)
\end{aligned}
$$

pre každé $t = 0, 1, \ldots$ Rovnice (2.2), (2.3) nazývame podmienka maxima, adjungovaná rovnica.

Konštantné riešenie $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{\psi}) \in X \times U \times \mathbb{R}^n$ nazveme rovnovážna (extremálna) trojica a platí $x(t) \equiv \bar{x}$, $u(t) \equiv \bar{u}$, $\psi(t) \equiv \bar{\psi}$. Rovnovážna trojica je riešením systému rovníc

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= F(\bar{x}, \bar{u}) && (2.4)\\
0 &= D_u f(\bar{x}, \bar{u})^T + \beta D_u F(\bar{x}, \bar{u})^T \bar{\psi} && (2.5)\\
\bar{\psi} &= D_x f(\bar{x}, \bar{u})^T + \beta D_x F(\bar{x}, \bar{u})^T \bar{\psi} && (2.6)
\end{aligned}
$$

Predpoklad Q 2 *Existuje rovnovážna trojica $(\bar{x}_1,\ \bar{u}_1,\ \bar{\psi}_1)$ pre $(\mathbf{U}_1)$*

Bez straty na všeobecnosti predpokladajme $\bar{x} = 0$, $\bar{u} = 0$, označme $A = D_xF(0,0)$, $B = D_uF(0,0)$.

Predpoklad Q 3 *Hessian $D^2 f(0,0)$ je záporne definitný.*

Predpoklad Q 4 *Matica $(A - I)$ je regulárna.*

Teraz uvádzame ďalší predpoklad aj keď jeho platnosť už zaručujú predchádzajúce predpoklady **Q3**, **Q4**.

Predpoklad Q 5 *Matica*

$$H = \begin{pmatrix} (I-A) & -B & 0 \\ D^2_{ux}f(0,0)^T & D^2_{uu}f(0,0)^T & B^T \\ D^2_{xx}f(0,0)^T & D^2_{xu}f(0,0)^T & A^T - I \end{pmatrix}$$

je regulárna.

Táto podmienka je navyše pomerne komplikovaná na overenie, už pri dvojrozmernej úlohe, rozumej 2 riadiace a 2 stavové premenné, overujeme regularitu matice $H = (6 \times 6)$. Matica H je tvaru

$$H = \begin{pmatrix} D & 0 \\ C & -D^T \end{pmatrix}$$

H je regulárna $\Leftrightarrow$ $Hx = 0$ ak platí len pre $x = 0$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D & 0 \\ C & -D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Dx &= 0 \\ Cx - D^T y &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = C^{-1}D^T y \\ DC^{-1}D^T y &= 0 \end{aligned}$$

Čiže H je regulárna $\Leftrightarrow$ C je regulárna a D má plnú hodnosť. Regularitu matice C zaručuje záporná definitnosť $D^2 f(0,0)$ v **Q3**. Plnú hodnosť matice D zaručuje regularita $(A - I)$ v **Q4**. $D = (A - I,\ B)$, takže D má plnú hodnosť a matica H je regulárna.

Poznamenajme, že predpoklad **Q1** je prirodzený a je splnený skoro vždy. Predpoklady **Q2** a **Q3** sú kľúčové hovoria, že problém má riešenie, reprezentované ako maximum.

Existuje také okolie O bodu 1, že pre $\beta \in O$ je Hessová matica z predpokladu **Q3** v bode $\bar{x}_\beta,\ \bar{u}_\beta$ záporne definitná. Ďalej na základe β-transformácie budeme označovať $x \mapsto x - x_\beta$ a $u \mapsto u - u_\beta$.

Predpoklad Q 6 *Pre* $\beta \in O$, F_β *a* f_β *sú* C^2, $F_\beta(0,0) = 0$, $f_\beta(0,0) = 0$ *a* $(0,0,0)$ *je rovnovážna trojica pre* (U_β).

Urobme aproximáciu Taylorovým polynómom v bode $(\bar{x},\ \bar{u})$:

$$F_\beta(x,u) = A_\beta x + B_\beta u + \text{č.v.r.} \tag{2.7}$$

$$f_\beta(x,u) = f_\beta^{lq}(x,u) + \text{č.v.r.} \tag{2.8}$$

a

$$f_\beta^{lq}(x,u) = k_\beta^T x + l_\beta^T u + f_\beta^q(x,u) \tag{2.9}$$

$$f_\beta^q(x,u) = \frac{1}{2}x^T P_\beta x + \frac{1}{2}x^T Q_\beta^T u + \frac{1}{2}u^T Q_\beta x + \frac{1}{2}u^T R_\beta u \tag{2.10}$$

kde $k_\beta^T = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{u})}{\partial x}$, $l_\beta^T = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{u})}{\partial u}$, $P_\beta = \frac{\partial^2 f(\bar{x},\bar{u})}{\partial x^2}$, $Q_\beta = \frac{\partial^2 f(\bar{x},\bar{u})}{\partial x \partial u}$, $R_\beta = \frac{\partial^2 f(\bar{x},\bar{u})}{\partial u^2}$.

Úlohu s lineárne-kvadratickou účelovou funkciou, ktorá vznikne aproximáciou pôvodnej účelovej funkcie, budeme označovať ako $(\mathbf{U}_\beta^{lq})$. Uvažujeme teraz úlohu $(\mathbf{U}_\beta^{lq})$ pre $\beta \in O$, dosaďme (2.9) do rovníc (2.5) a (2.6)

$$l_\beta^T + \beta B_\beta^T \bar{\psi}_\beta = 0 \tag{2.11}$$

$$k_\beta^T + (\beta A_\beta^T - I)\bar{\psi}_\beta = 0 \tag{2.12}$$

Pre dostatočne malé O je aj matica $(\beta A_\beta^T - I)$ podľa predpokladu **Q4** regulárna. Môžme eliminovať $\bar{\psi}_\beta$, redukovať systém rovníc, dostávame podmienku

$$l_\beta = -\beta B_\beta^T (I - \beta A_\beta^T)^{-1} k_\beta$$

Dosaďme lineárno-kvadratickú aproximáciu do systému nutných podmienok (2.1), (2.2), (2.3)

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A_\beta x(t) + B_\beta u(t) + \text{č.v.r.} \\ 0 &= l_\beta + Q_\beta x(t) + R_\beta u(t) + \beta B_\beta^T(\bar{\psi}_\beta + \psi(t+1)) + \text{č.v.r.} \\ \bar{\psi}_\beta + \psi(t) &= k_\beta + P_\beta x(t) + Q_\beta u(t) + \beta A_\beta^T(\bar{\psi}_\beta + \psi(t+1)) + \text{č.v.r.} \end{aligned}$$

Transformovali sme $\psi \mapsto \psi_\beta + \psi$. Využitím vzťahov (2.11) a (2.12) sa rovnice zjednodušia na tvar

$$x(t+1) = A_\beta x(t) + B_\beta u(t) + \text{č.v.r.} \tag{2.13}$$

$$0 = Q_\beta x(t) + R_\beta u(t) + \beta B_\beta^T \psi(t+1) + \text{č.v.r.} \tag{2.14}$$

$$\psi(t) = P_\beta x(t) + Q_\beta u(t) + \beta A_\beta^T \psi(t+1) + \text{č.v.r.} \tag{2.15}$$

Z rovnice (2.14) môžme vyjadriť $u(t)$ ako implicitnú funkciu

$$u(t, x(t), \psi(t+1)) = -R_\beta^{-1} Q_\beta x(t) - \beta R_\beta^{-1} B_\beta^T \psi(t+1) + \text{č.v.r.} \tag{2.16}$$

Dosadením (2.16) do ostatných dvoch rovníc

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \mathbf{A}_\beta x(t) + \beta \mathbf{B}_\beta \psi(t+1) + \text{č.v.r.} \\ \psi(t) &= \mathbf{P}_\beta x(t) + \beta \mathbf{A}_\beta^T \psi(t+1) + \text{č.v.r.} \end{aligned}$$

kde $\mathbf{A}_\beta = (A_\beta - B_\beta R_\beta^{-1} Q_\beta),\ \mathbf{B}_\beta = -B_\beta R_\beta^{-1} B_\beta^T,\ \mathbf{P}_\beta = (P_\beta - Q_\beta R_\beta^{-1} Q_\beta)$.

Predpoklad Q 7 *Matica $\mathbf{A}_1$ je regulárna.*

Veta 2.0.1 *Ak $\{\hat{x}(t)\}$, $\{\hat{u}(t)\}$ sú optimálne riadenie a odozva, potom existuje $\{\hat{\psi}(t)\}$ také, že $\hat{x}(t)$, $\hat{u}(t)$ je riešením systému rovníc*

$$x(t+1) = [\mathbf{A}_\beta - \mathbf{B}_\beta (\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \mathbf{P}_\beta] x(t) + \mathbf{B}_\beta (\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \psi(t) + \textit{č.v.r.} \tag{2.17}$$

$$\psi(t+1) = -\frac{1}{\beta} (\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \mathbf{P}_\beta x(t) + \frac{1}{\beta} (\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \psi(t) + \textit{č.v.r.} \tag{2.18}$$

a $\hat{u}(t)$ je dané vzťahom (2.16), kde $\mathbf{A}_\beta = (A_\beta - B_\beta R_\beta^{-1} Q_\beta)$,
$\mathbf{B}_\beta = -B_\beta R_\beta^{-1} B_\beta^T,\ \mathbf{P}_\beta = (P_\beta - Q_\beta R_\beta^{-1} Q_\beta)$ a $x(t) = \hat{x}(t),\ u(t) = \hat{u}(t)$.

Označme riešenie tohto systému $x(t, x(0), \psi(0))$, $\psi(t, x(0), \psi(0))$ s počiatočnou podmienkou $(x(0), \psi(0))$. Poznamenajme, že nutné podmienky optimality sú nezávisle od k_β, l_β.

Predpoklad Q 8 *Dvojica matíc (A_1, B_1) je stabilizovateľná.*

Dvojica matíc (A, B), kde matica A je typu $n \times n$ a matica B je typu $n \times m$, sa nazýva stabilizovateľná ak existuje matica Z taká, že všetky vlastné čísla matice $(A + BZ)$ sú vo vnútri jednotkovej kružnice.

Stabilizovateľnosť matíc možno tiež formulovať v termínoch kontrolovateľných vlastných čísel. Vlastné číslo λ matice A je nekontrolovateľné ak existuje riadkový vektor $w \neq 0$ taký, že $wA = \lambda w$ a súčasne $wB = 0$. Dvojica (A, B) je stabilizovateľná vtedy a len vtedy ak všetky nestabilné vlastné čísla (A, B) sú kontrolovateľné [5].

Poznamenajme, že ak $n = m$ a $rank\ B = n$, potom dvojica matíc (A, B) je stabilizovateľná.

Označme M_β maticu systému rovníc (2.17) a (2.18)

$$M_\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_\beta - \mathbf{B}_\beta(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}\mathbf{P}_\beta & \mathbf{B}_\beta(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \\ -\frac{1}{\beta}(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1}\mathbf{P}_\beta & \frac{1}{\beta}(\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} \end{pmatrix}$$

Matica M typu $(2n \times 2n)$ je symplektická, ak spĺňa podmienku $M^T \Omega M = \Omega$, kde

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

a I je jednotková matica typu $n \times n$.

Vlastné hodnoty symplektickej matice vystupujú v recipročných pároch. Ak λ je vlastná hodnota, potom aj $1/\lambda$ je vlastná hodnota matice M. Označme:

$$E_1 = \{(x(0), \psi(0)) | (x(t), \psi(t)) \to (0, 0) \text{ pre } t \to \infty\} \tag{2.19}$$

kde $(x(t), \psi(t))$ je riešenie systému rovníc (2.17) a (2.18) pre $\beta = 1$ s počiatočným bodom $(x(0), \psi(0))$.

Teraz uvedieme vety o existencii a jednoznačnosti riešenia pre linearizovaný a úplný model. Vety uvádzame bez dôkazu.

Veta 2.0.2 *Spektrum matice M_1 neobsahuje vlastné číslo v absolútnej hodnote rovné 1. Existuje jediná matica L_1 typu $(n \times n)$, taká že pre priestor definovaný v* (2.19) *platí*

$$E_1^S = \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \psi = L_1 x\}$$

Pre dostatočne malé okolie O definujeme

$$E_\beta^S = \{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \psi = L_\beta x\}$$

kde $L_1 \to L_\beta$ a $\beta \in O$.

Veta 2.0.3 *Pre $\beta \in O$ existuje jediné optimálne riadenie a odozva $\{(\hat{x}(t),\ \hat{u}(t))\}$ pre problém $(\mathbf{U}^{lq}_{\beta,x_0})$.*

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= Z_\beta \hat{x}(t) \\ \hat{x}(t+1) &= (A_\beta + B_\beta Z_\beta)\hat{x}(t) \end{aligned}$$

kde

$$Z_\beta = -[R_\beta^{-1} Q_\beta + R_\beta^{-1} B_\beta^T (\mathbf{A}_\beta^T)^{-1} (L_\beta - \mathbf{P}_\beta)].$$

A naviac $\{(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\} \to\ (0,0)$ pre $t \to \infty$.

Definujeme hodnotovú funkciu $V_\beta(x(0))$:

$$V_\beta(x(0)) = \sup_{s_k, s_h} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f((k(t), h(t)), (s_k(t), s_h(t)))$$

Veta 2.0.4 *Hodnotová funkcia je*

$$V_\beta(x(0)) = k_\beta^T (I - \beta A)^{-1} x(0) + x(0)^T W_\beta x(0)^T$$

kde

$$W_\beta = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (A_\beta^T + Z_\beta^T B_\beta^T)^t (P_\beta + 2Q_\beta^T Z_\beta + Z_\beta^T R_\beta Z_\beta)(A_\beta + Z_\beta B_\beta)^t$$

A pre úplný problém máme

Veta 2.0.5 *Pre dostatočne malé x(0) existuje jediné optimálne riadenie pre úplnú úlohu a platí*

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= Z_\beta \hat{x}(t) + \check{c}.v.r \\ \hat{x}(t+1) &= (A_\beta + B_\beta Z_\beta)\hat{x}(t) + \check{c}.v.r \end{aligned}$$

a hodnotová funkcia je

$$V_\beta^{loc}(x_0) = k_\beta^T (I - \beta A)^{-1} x(0) + x(0)^T W_\beta x(0)^T + \check{c}.v.r$$

Poznamenajme, že pre úplný problém nie je všeobecne dokázané, že extremálne riešenie je aj optimálne.

Kapitola 3

Dvojsektorový model ekonomiky

V tejto kapitole opíšeme pokusy o viacrozmerné modely, ktoré by spĺňali predpoklady z kapitoly 2. Na túto tému bola publikovaná diplomová práca M. Zámečníka Nonlineár Theory of Rational Expectations [9], na ktorú nadviazal M. Hriňák svojou dizertačnou prácou Viacrozmerná modelová úloha teórie racionálnych očakávaní [4].

Ekonomika pozostáva z dvoch výrobných sektorov a rozlišujeme kapitály, ktoré sú investované do týchto sektorov. Kapitál investovaný v čase t označíme $k_1(t),\ k_2(t)$ a produkciu sektorov $y_1(t),\ y_2(t)$. Produkcia závisí od investovaného kapitálu a produkcie druhého sektora, na modelovanie produkcie použijeme Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= d_1 k_1(t)^{\alpha_1} y_2(t)^{\alpha_2} \\
y_2(t) &= d_2 k_2(t)^{\beta_1} y_1(t)^{\beta_2}
\end{aligned}
$$

kde $d_1,\ d_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ sú kladné konštanty. Z týchto rovníc vyjadríme $y_1(t),\ y_2(t)$

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= c_1 k_1(t)^{\gamma_1} k_2(t)^{\gamma_2} \\
y_2(t) &= c_2 k_1(t)^{\sigma_1} k_2(t)^{\sigma_2}
\end{aligned}
$$

kde $c_1,\ c_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \sigma_1,\ \sigma_2$ sú kladné konštanty.

Bez odvodenia uveďme stavové rovnice pre časový vývoj kapitálu

$$\begin{aligned} k_1(t+1) &= (1-\delta_1)k_1(t) + g(t)(1-s(t))(y_1(t)+y_2(t)) \\ k_2(t+1) &= (1-\delta_2)k_2(t) + (1-g(t))(1-s(t))(y_1(t)+y_2(t)) \end{aligned}$$

kde $\delta_1,\ \delta_2$ je amortizácia kapitálu. $s(t),\ g(t)$ sú riadiace premenné, $s(t)$ je podiel celkovej produkcie určený na spotrebu, $1-s(t)$ predstavuje celkové investície do ekonomiky v čase t, $g(t)$ a $(1-g(t))$ určuje podiel investícií smerujúcich do sektoru ekonomiky k_1, respektíve k_2.

Cieľom je maximalizovať diskontovanú celkovú užitočnosť zo spotreby na nekonečnom časovom horizonte

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c(t)) = \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(s(t)(y_1(t)+y_2(t))$$

kde $\beta,\ 0 \le \beta \le 1$ je diskontný faktor, $c(t)$ je spotreba a $U : \langle 0,\infty) \to \langle 0,\infty)$ je funkcia užitočnosti. Ako funkcia užitočnosti bola použitá kvadratická funkcia tvaru

$$U(c) = ac - bc^2 \qquad \text{pre každé } c \in (\epsilon, K)$$

kde $a,\ b,\ K$ a ϵ sú kladné konštanty.

3.1 Analýza modelu

Analýzou modelu získavame niekoľko zaujímavých vzťahov, avšak analyticky nevieme nájsť presné riešenie. Autor dokázal redukovať systém nutných podmienok na trojrozmerný systém nelineárnych rovníc o troch neznámych. Na vyriešenie systému potom použil linearizáciu a následne problém riešil numericky v programe Mathematica.

Našou analýzou získavame niekoľko zaujímavých vzťahov. Dôležitý výsledok je rovnosť adnjungovaných premenných

$$\bar{\psi}_1 = \bar{\psi}_2$$

hovorí o rovnosti tieňových cien kapitálu. Ďalej vieme určiť časť investícií $\bar{g}$ smerujúce do $\bar{k}_1$

$$\bar{g} = \frac{\delta_1 \bar{k}_1}{\delta_1 \bar{k}_1 + \delta_2 \bar{k}_2}$$

Investície sú rozdelené v pomere, ktorý zodpovedá pomeru celkovej amortizácie, kapitálu v jednotlivých sektoroch

$$\frac{\bar{g}}{1-\bar{g}} = \frac{\delta_1 \bar{k}_1}{\delta_2 \bar{k}_2}.$$

Ďalší zaujímavý záver analýzy je

$$D_{k_1}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) = \delta_1$$
$$D_{k_2}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) = \delta_2$$

To znamená, že derivácia celkovej produkcie podľa k_1 je rovná amortizácií tohto kapitálu. Tu zisťujeme prečo nie je systém analyticky riešiteľný, tieto rovnice sú nelineárne a musia sa riešiť numericky.

Poznamenajme, že tento model nespĺňa predpoklady uvedené v kapitole 2, konkrétne predpoklad **Q4** matica druhých derivácií nie je záporne definitná, presnejšie táto matica nie je regulárna.

3.2 Úprava modelu podľa Hriňáka

Vo svojej dizertačnej práci sa M. Hriňák [4] pokúsil riešiť problém degenerácie tohto modelu. Upravil účelovú funkciu modelu pridaním takzvaného penalizačného člena:

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [U(c(t)) + P(t)]$$

kde $P(t)$ je penalizačný člen v tvare

$$P(t) = [p(t)(1-p(t)) + q(t)(1-q(t))](y_1(t) + y_2(t))$$

$p(t)$, $q(t)$ zodpovedajú investíciam do jednotlivých sektorov ekonomiky. Penalizačný člen vyjadruje potrebu zachovania nenulovej produkcie v oboch sektoroch ekonomiky.

Model sa touto úpravou stal komplikovanejší, preto bola funkcia užitočnosti volená ako lineárna, čo je však z hľadiska ekonomických aplikácií neakceptovateľné. Pridaním penalizačného člena sa podarilo splniť teoretické predpoklady. Avšak tento model stále nie je analyticky riešiteľný. Autor následne riešil problém a existencia rovnovážneho riešenia bola potvrdená numericky.

Kapitola 4

Modely

V tejto kapitole uvedieme dva modely publikované v prácach [6] a [7], kedže tieto modely sú spojité musíme spraviť viacero úprav aby sme ich mohli použiť.

4.1 Model Lucas

Najprv sa zamerajme na model publikovaný v práci [6]. Robert E. Lucas sa zaoberá neoklasickým modelom rastu, model zahŕňa viacero premenných ako zmeny technológií, pre nás je dôležitý fyzický a ľudský kapitál.

Výhodou modelu je, že je sformulovaný ako úloha optimálneho riadenie je však spojitý.

$$
\begin{aligned}
\max \int_0^\infty \quad & e^{-\rho t} \quad \left[\frac{N(t)}{1-\sigma}(c(t)^{1-\sigma}-1)\right] \mathrm{d}t \\
\dot{K}(t) \quad &= \quad AK(t)^\alpha [u(t)h(t)N(t)]^{1-\alpha} h(t)^\gamma - N(t)c(t) \\
\dot{h}(t) \quad &= \quad h(t)\delta[1-u(t)]
\end{aligned}
$$

Pre naše účely urobíme jednoduchú diskretizáciu a upravíme model, nezahrnieme doň pre nás irelevantné premenné ako sú technológie alebo rast populácie.

$$\begin{aligned}
\max \sum_{t=0}^{\infty} & \quad \beta^t \quad \frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \\
k(t+1) &= k(t)^{\alpha}[u(t)h(t)]^{1-\alpha}h(t)^{\gamma} - c(t) + k(t) \\
h(t+1) &= h(t)\delta[1-u(t)] + h(t)
\end{aligned}$$

kde stavové premenné $k(t)$, $h(t)$ predstavujú fyzický, respektíve ľudský kapitál, riadiace premenná $u(t)$ určuje efektívnu prácu, $1-u(t)$ čas potrebný na akumuláciu ľudského kapitálu a $c(t)$ určuje veľkosť spotreby.

4.2 Analýza modelu

Rovnovážne riešenie spĺňa systém rovníc:
Stavové rovnice:

$$\begin{aligned}
\bar{k} &= \bar{k}^{\alpha}[\bar{u}\bar{h}]^{1-\alpha}\bar{h}^{\gamma} - \bar{c} + \bar{k} \\
\bar{h} &= \bar{h}\delta[1-\bar{u}] + \bar{h}
\end{aligned}$$

Adjungované rovnice:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_k &= 0 + \beta\bar{\psi}_k[\alpha\bar{k}^{\alpha-1}(\bar{u}\bar{h})^{1-\alpha}\bar{h}^{\gamma} + 1] \\
\bar{\psi}_h &= 0 + \beta\bar{\psi}_k[(1-\alpha+\gamma)\bar{k}^{\alpha}\bar{u}^{(1-\alpha)}\bar{h}^{-\alpha+\gamma}] + \beta\bar{\psi}_h[\delta(1-\bar{u}) + 1]
\end{aligned}$$

Podmienka maxima:

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{c}^{(-\sigma)} - \beta\bar{\psi}_k \\
0 &= 0 + \beta\bar{\psi}_k[(1-\alpha)\bar{k}^{\alpha}(\bar{u}\bar{h})^{-\alpha}\bar{h}^{1+\gamma}] - \beta\bar{\psi}_h[\bar{h}\delta]
\end{aligned}$$

Pozrime sa na stavové rovnice, z rovnice pre ľudský kapitál máme

$$0 = \bar{h}\delta[1-\bar{u}]$$

teda $\bar{u} = 1$ riešenie leží na hranici množiny.

Tento model teda nevyhovuje našej analýze. Predpokladali sme, že množina prípustných riadení je otvorená. Nevadilo by, že táto množina je uzavretá, ak by rovnovážne riešenie ležalo vo vnútri množiny. Preto nebudeme ďalej pokračovať v analýze tohto modelu.

4.3 Model Mankiw

V tejto časti popíšeme model publikovaný v práci [7]. M. G. Mankiw, D. Romer, D. M. Weil pridávajú do Solowho modelu akumuláciu ľudského kapitálu. Tento model sa javí ako jednoduchší a prístupnejší kvalitatívnej analýze.

Keďže je tento model spojitý, urobíme jeho diskretizáciu a viacero úprav potrebných na sprehľadnenie modelu. Z modelu si požičiame stavové rovnice popisujúce zmeny fyzického $k(t)$ a ľudského kapitálu $h(t)$.

$$\dot{k}(t) = s_k y(t) - (n + g + \delta)k(t)$$
$$\dot{h}(t) = s_h y(t) - (n + g + \delta)h(t)$$

kde s_k je časť príjmu investovaná do fyzického kapitálu a s_h je časť investovaná do ľudského kapitálu. V [7] sa predpokladá, že s_k, s_h sú konštantné v čase. My budeme $s_k(t)$, $s_h(t)$ považovať za riadiace premenné, $\delta \in (0, 1)$ označuje mieru amortizácie a n, g rast pracovnej sily a technológii. V našom modeli budeme predpokladať nulový rast pracovnej sily a technológii ($n = 0,\ g = 0$). Na modelovanie príjmu použijeme Cobb–Douglasovu produkčnú funkciu $y(t) = \Phi(k(t), h(t)) = k(t)^{\alpha_1} h(t)^{\alpha_2}$. Predpokladáme klesajúce výnosy z rozsahu, to jest $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$.

Jednoduchou diskretizáciou $\dot{k}(t) = k(t + 1) - k(t)$ a podobne pre ľudský kapitál $\dot{h}(t)$ získavame stavové rovnice diskrétneho modelu

$$k(t + 1) = (1 - \delta)k(t) + s_k(t)\Phi(k(t), h(t))$$
$$h(t + 1) = (1 - \delta)h(t) + s_h(t)\Phi(k(t), h(t))$$

s ohraničeniami na riadiace premenné

$$\begin{aligned} 0 &\leq s_k(t), s_h(t) \\ 1 &\geq s_k(t) + s_h(t) \end{aligned}$$

zaručujúce nezápornosť investícii do fyzického, ľudského kapitálu a ziskové hospodárenie, súčet investícii nesmie byť vyšší ako je príjem. Stavové rovnice hovoria o pohybe kapitálu v čase. V $t+1$-vej perióde máme amortizovaný kapitál z prechádzajúcej periódy navýšený o časť príjmu investovaného do kapitálu v čase t. Čas t bude nadobúdať diskrétne hodnoty dané nezápornými číslami.

Úlohou optimálneho riadenie je maximalizovať diskontovanú celkovú užitočnosť na nekonečnom časovom horizonte

$$\max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U[\Phi(k(t), h(t))(1 - s_k(t) - s_h(t))]$$

kde β, $0 \leq \beta \leq 1$ je diskontný faktor. $U : \langle 0, \infty) \rightarrow \langle 0, \infty)$ je funkcia užitočnosti, našou úlohou je maximalizovať užitočnosť z príjmu po odrátaní investícií.

4.4 Porovnanie modelov

Pokúsme sa o porovnanie modelov, konkrétne porovnáme dvojsektorový model a model Mankiw. Ešte raz napíšme účelové funkcie a stavové rovnice oboch týchto modelov.

Dvojsektorový model ekonomiky:

- Účelová funkcia

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(s(t)(y_1(t) + y_2(t))$$

- Stavové rovnice

$$\begin{aligned} k_1(t+1) &= (1-\delta_1)k_1(t) + g(t)(1-s(t))(y_1(t) + y_2(t)) \\ k_2(t+1) &= (1-\delta_2)k_2(t) + (1-g(t))(1-s(t))(y_1(t) + y_2(t)) \end{aligned}$$

Model Mankiw:

- Účelová funkcia

$$\max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U[\Phi(k(t), h(t))(1 - s_k(t) - s_h(t))]$$

- Stavové rovnice

$$k(t+1) = (1-\delta)k(t) + s_k(t)\Phi(k(t), h(t))$$
$$h(t+1) = (1-\delta)h(t) + s_h(t)\Phi(k(t), h(t))$$

Porovnajme účelové funkcie oboch modelov. Dvojsektorový model maximalizuje spotrebu $s(t)$ z oboch sektorov ekonomiky, $s(t)$ je riadiaca premenná, určuje časť celkovej produkcie $(y_1(t) + y_2(t))$ pripadajúcu na spotrebu. Tak isto model Mankiw maximalizuje spotrebu. Člen $(1-s_k(t)-s_h(t))$ predstavuje úlohu riadiace premennej $s(t)$ z dvojsektorového modelu a určuje spotrebu ako časť produkcie, ktorá nie je investovaná.

Stavové rovnice pre dynamiku kapitálu tak isto vyzerajú veľmi podobne. Kapitál v ďalšej perióde je rovný amortizovanému kapitálu, ku ktorému pripočítame investície, ako časť z celkovej produkcie. Stavové premenné modelov sa dajú vzájomne substituovať

$$1 - s_k(t) - s_h(t) = s(t)$$
$$s_h(t) = g(t)(1 - s(t))$$

Rozdiel je v modelovaní celkovej produkcie. Súčet produkcie oboch sektorov v dvojsektorovom modeli nahrádza celková produkcia ekonomiky.

$$y_1(t) + y_2(t) = \Phi(k(t), h(t)).$$

Kapitola 5

Analýza Modelu Mankiw

Napíšme si rovnice diskrétneho modelu ako úlohu optimálneho riadenia:

$$\begin{aligned}
\max_{s_k,s_h}\sum_{t=1}^{\infty} &\quad \beta^t \quad U[\Phi(k(t),h(t))(1-s_k(t)-s_h(t))] \\
k(t+1) &= (1-\delta)k(t)+s_k(t)\Phi(k(t),h(t)) \\
h(t+1) &= (1-\delta)h(t)+s_h(t)\Phi(k(t),h(t)) \\
0 &\leq s_k(t), s_h(t) \\
1 &\geq s_k(t)+s_h(t)
\end{aligned}$$

Na sprehľadnenie textu a lepšiu čitateľnosť rovníc spravíme nasledovne zjednodušenie zápisu, pre funkciu užitočnosti

$$U[\Phi(k(t),h(t))(1-s_k(t)-s_h(t))] \quad = \quad U[\cdot]$$

a podobne pre produkciu $\Phi(k,h)$

$$\Phi(k(t),h(t)) \quad = \quad \Phi(\cdot)$$

Podľa teórie overíme splnenie predpokladu **Q1** $D_xF(x,u)$ je regulárna pre každé $x \in X$ a $u \in U$. A potom môžme formulovať nutné podmienky optimality na základe kapitoly 2.
Matica

$$D_xF(x,u) = \begin{pmatrix} 1-\delta+s_kD_k\Phi(k,h) & s_kD_h\Phi(k,h) \\ s_hD_k\Phi(k,h) & 1-\delta+s_hD_h\Phi(k,h) \end{pmatrix}$$

je regulárna pre $\delta \neq 1$.

Stavové rovnice majú tvar

$$\begin{aligned} k(t+1) &= (1-\delta)k(t) + s_k(t)\Phi(k(t),h(t)) \\ h(t+1) &= (1-\delta)h(t) + s_h(t)\Phi(k(t),h(t)) \end{aligned}$$

adjungované rovnice

$$\begin{aligned} \psi_k(t) &= U'[\cdot]D_k\Phi(\cdot)(1-s_k(t)-s_h(t)) \\ &+ \beta\psi_k(t+1)[(1-\delta)+s_k(t)D_k\Phi(\cdot)] \\ &+ \beta\psi_h(t+1)s_h(t)D_k\Phi(\cdot) \\ \psi_h(t) &= U'[\cdot]D_h\Phi(\cdot)(1-s_k(t)-s_h(t)) \\ &+ \beta\psi_k(t+1)s_k(t)D_h\Phi(\cdot) \\ &+ \beta\psi_h(t+1)[(1-\delta)+s_h(t)D_h\Phi(\cdot)] \end{aligned}$$

podmienka maxima

$$\begin{aligned} 0 &= -U'[\cdot]\Phi(\cdot) + \beta\psi_k(t+1)\Phi(\cdot) \\ 0 &= -U'[\cdot]\Phi(\cdot) + \beta\psi_h(t+1)\Phi(\cdot). \end{aligned}$$

Rovnovážna trojica je riešením systému rovníc:
Stavové rovnice sú:

$$\bar{k} = (1-\delta)\bar{k} + \bar{s}_k\bar{\Phi}(\cdot) \tag{5.1}$$

$$\bar{h} = (1-\delta)\bar{h} + \bar{s}_h\bar{\Phi}(\cdot) \tag{5.2}$$

Podmienka maxima:

$$0 = -\bar{U}'[\cdot]\bar{\Phi}(\cdot) + \beta\bar{\psi}_k\bar{\Phi}(\cdot) \tag{5.3}$$

$$0 = -\bar{U}'[\cdot]\bar{\Phi}(\cdot) + \beta\bar{\psi}_h\bar{\Phi}(\cdot) \tag{5.4}$$

Adjungované rovnice:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_k[1-\beta(1-\delta) &- \beta\bar{s}_kD_k\bar{\Phi}(\cdot)] - \bar{\psi}_h\beta\bar{s}_hD_k\bar{\Phi}(\cdot) \\ &= \bar{U}'[\cdot]D_k\bar{\Phi}(\cdot)(1-\bar{s}_k-\bar{s}_h) \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_h[1-\beta(1-\delta) &- \beta\bar{s}_hD_h\bar{\Phi}(\cdot)] - \bar{\psi}_k\beta\bar{s}_kD_h\bar{\Phi}(\cdot) \\ &= \bar{U}'[\cdot]D_h\bar{\Phi}(\cdot)(1-\bar{s}_k-\bar{s}_h) \end{aligned} \tag{5.6}$$

kde $\bar{U}[\cdot] = U[\Phi(\bar{k}, \bar{h})(1 - \bar{s}_k - \bar{s}_h)]$ a $\bar{\Phi}(\cdot) = \Phi(\bar{k}, \bar{h})$.

Úpravou rovníc (5.1), (5.2) a ich následným predelením dostávame prvý dôležitý výsledok

$$\frac{\bar{k}}{\bar{h}} = \frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_h}. \tag{5.7}$$

Pomer fyzického a ľudského kapitálu v ekonomike rovný pomeru investícii do kapitálu.

Rovnice (5.3), (5.4) sú totožné, čiže adjungované premenné $\bar{\psi}_k$, $\bar{\psi}_h$ sa rovnajú, označíme $\bar{\psi}$. Takže aj systém rovníc sa nám redukuje na päť rovníc o piatich neznámych premenných. Adjungovaná premenná má tvar

$$\bar{\psi}_k = \bar{\psi}_h = \bar{\psi} = \frac{U'[\Phi(\bar{k}, \bar{h})(1 - \bar{s}_k - \bar{s}_h)]}{\beta}. \tag{5.8}$$

Adjungované premenné $\bar{\psi}_k$, $\bar{\psi}_h$ sa ekonomicky interpretujú ako tieňové ceny.

Keďže $\bar{\psi}_k = \bar{\psi}_h = \bar{\psi}$ adjungované rovnice (5.5), (5.6) môžme upraviť na tvar

$$\begin{aligned} \bar{\psi}[1 - \beta(1-\delta) - \beta D_k\bar{\Phi}(\cdot)(\bar{s}_k + \bar{s}_h)] &= \bar{U}'[\cdot]D_k\bar{\Phi}(\cdot)(1 - \bar{s}_k - \bar{s}_h) \\ \bar{\psi}[1 - \beta(1-\delta) - \beta D_h\bar{\Phi}(\cdot)(\bar{s}_k + \bar{s}_h)] &= \bar{U}'[\cdot]D_h\bar{\Phi}(\cdot)(1 - \bar{s}_k - \bar{s}_h). \end{aligned}$$

Po dosadení rovnosti(5.8) získavame

$$1 - \beta(1-\delta) = \beta D_k\bar{\Phi}(\cdot) \tag{5.9}$$

$$1 - \beta(1-\delta) = \beta D_h\bar{\Phi}(\cdot) \tag{5.10}$$

čiže $D_k\bar{\Phi}(\cdot) = D_h\bar{\Phi}(\cdot)$. Potom

$$\begin{aligned} D_k\Phi(\bar{k}, \bar{h}) &= D_h\Phi(\bar{k}, \bar{h}) \\ \alpha_1\bar{k}^{\alpha_1 - 1}\bar{h}^{\alpha_2} &= \alpha_2\bar{k}^{\alpha_1}\bar{h}^{\alpha_2 - 1} \\ \frac{\bar{k}}{\bar{h}} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \end{aligned}$$

Pomer fyzického a ľudského kapitálu a pomer investícií zo vzťahu (5.7) je rovný pomeru konštánt α_1, α_2 z Cobb-Douglesovej produkčnej funkcie.

$$\frac{\bar{s}_k}{\bar{s}_h} = \frac{\bar{k}}{\bar{h}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Využitím tohto pomeru môžme z rovníc (5.9) a (5.10) vypočítať hodnoty stavových premenných $\bar{k}$, $\bar{h}$.

$$\bar{k} = \alpha_1 \left[\frac{1-\beta(1-\delta)}{\beta\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}} \right]^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2-1}} \tag{5.11}$$

$$\bar{h} = \alpha_2 \left[\frac{1-\beta(1-\delta)}{\beta\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}} \right]^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2-1}} \tag{5.12}$$

Teraz nám už nič nebráni pri výpočte hodnoty riadiacej premennej $\bar{s}_k$, $\bar{s}_h$. Hodnoty získame zo stavových rovníc (5.1), (5.2).

$$\begin{aligned} \bar{s}_k &= \alpha_1 \frac{\beta\delta}{1-\beta(1-\delta)} \\ \bar{s}_h &= \alpha_2 \frac{\beta\delta}{1-\beta(1-\delta)} \end{aligned}$$

Spočítali sme rovnovážnu trojicu, tento výsledok je však degenerovaný. Pri overovaní predpokladov ako boli uvedene v kapitole 2 zistíme, že nie sú splnené. Konkrétne požadujeme regularitu matice $D^2 f((\bar{k},\bar{h}),(\bar{s}_k,\bar{s}_h))$ v predpoklade **Q3**. Kedže $D_{s_k} f((k,h),(s_k,s_h)) = D_{s_h} f((k,h),(s_k,s_h))$, matica $D^2 f((\bar{k},\bar{h}),(\bar{s}_k,\bar{s}_h))$ má dva zhodné riadky, teda nie je regulárna.

5.1 Úprava Modelu

V tejto časti si predstavíme úpravu účelovej funkcie, ktorou zabezpečíme splnenie predpokladov.

Problém je, že matica druhých derivácií účelovej funkcie nie je regulárna, lebo derivácie podľa s_k, s_h sú zhodné. Tento problém vyriešime pridaním penalizačného člena do pôvodnej účelovej funkcie.

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U[\Phi(k(t),h(t))(1-s_k(t)-s_h(t)) + V(s_h(t))\Phi(k(t),h(t))]$$

kde

$$V(s_h(t)) = -\varepsilon s_h^2(t)$$

Penalizačný člen $V(s_h(t))\Phi(k(t), h(t)$ nie je len matematickým vyriešením problému, ale má aj ekonomickú interpretáciu. Predstavuje náklady spojené s akumuláciou ľudského kapitálu. Akumulácia ľudského kapitálu, štúdium, je často nákladný proces a niekedy neprináša želané výsledky. Nová účelová funkcia má tvar:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U[\Phi(k(t), h(t))(1 - s_k(t) - s_h(t) - \varepsilon s_h^2(t))]$$

Člen $\varepsilon > 0$ upravuje výšku týchto nákladov na ľudský kapitál. Aby úloha mala zmysel upravíme ohraničenie na riadenie

$$1 - s_k(t) - s_h(t) - \varepsilon s_h^2(t) > 0.$$

Tento predpoklad môžme ľahko zabezpečiť voľbou $\varepsilon > 0$. Poznamenajme, že pre $\varepsilon = 0$ dostávame pôvodnú úlohu, kde nie sú žiadne náklady na zvyšovanie kapitálu.

5.2 Analýza Modelu

Budeme sa opäť zaoberať rovnovážnym riešením modelu. Úprava sa týka len účelovej funkcie, stavové rovnice pre pohyb kapitálu ostanú bez zmeny. Zmenia sa adjungované rovnice a tak isto aj podmienka maxima. Nezmenili sme podobu stavových rovníc, nezmení sa nám ani pomer (5.7), ktorý sme odvodili na základe stavových rovníc (5.1), (5.2).

Podmienka maxima pre upravený model má tvar

$$\begin{aligned} 0 &= -\bar{U}'[\cdot]\bar{\Phi}(\cdot) + \beta\bar{\psi}_k\bar{\Phi}(\cdot) \\ 0 &= -\bar{U}'[\cdot]\bar{\Phi}(\cdot)(1 + 2\varepsilon\bar{s}_h) + \beta\bar{\psi}_h\bar{\Phi}(\cdot). \end{aligned}$$

Tu už nedochádza k rovnosti adjungovaných premenných ako v predchádzajúcom prípade

$$\bar{\psi}_k = \frac{\bar{U}'[\cdot]}{\beta} \tag{5.13}$$

$$\bar{\psi}_h = \frac{\bar{U}'[\cdot](1 + 2\varepsilon\bar{s}_h)}{\beta}. \tag{5.14}$$

Zmenili sa aj adjungovaná rovnice, do oboch rovníc pribudne člen, ktorý vzniká pri derivácií penalizačného člena

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_k[1-\beta(1-\delta) &- \beta\bar{s}_k D_k\bar{\Phi}(\cdot)] - \bar{\psi}_h\beta\bar{s}_h D_k\bar{\Phi}(\cdot)\\ &= \bar{U}'[\cdot]D_k\bar{\Phi}(\cdot)(1-\bar{s}_k-\bar{s}_h-\varepsilon\bar{s}_h^2)\\ \bar{\psi}_h[1-\beta(1-\delta) &- \beta\bar{s}_h D_h\bar{\Phi}(\cdot)] - \bar{\psi}_k\beta\bar{s}_k D_h\bar{\Phi}(\cdot)\\ &= \bar{U}'[\cdot]D_h\bar{\Phi}(\cdot)(1-\bar{s}_k-\bar{s}_h-\varepsilon\bar{s}_h^2)\end{aligned}$$

Dosaďme $\bar{\psi}_k$, $\bar{\psi}_h$ zo vzťahu (5.13) a (5.14) do oboch rovníc

$$\begin{aligned}\bar{U}'[\cdot][1 &- \beta(1-\delta) - \beta D_k\bar{\Phi}(\cdot)(\bar{s}_k+\bar{s}_h+2\varepsilon\bar{s}_h^2)]\\ &= \beta\bar{U}'[\cdot]D_k\bar{\Phi}(\cdot)(1-\bar{s}_k-\bar{s}_h-\varepsilon\bar{s}_h^2)\\ \bar{U}'[\cdot][1 &- \beta(1-\delta) - \beta D_h\bar{\Phi}(\cdot)(\bar{s}_k+\bar{s}_h+2\varepsilon\bar{s}_h^2)] + \bar{U}'[\cdot]2\varepsilon\bar{s}_h[1-\beta(1-\delta)]\\ &= \beta\bar{U}'[\cdot]D_h\bar{\Phi}(\cdot)(1-\bar{s}_k-\bar{s}_h-\varepsilon\bar{s}_h^2)\end{aligned}$$

všetky členy obsahujú výraz $\bar{U}'[\cdot]$, úpravou získavame nasledovný systém, ale ten už nemá explicitné riešenie pre $\bar{k}$, $\bar{h}$

$$[1-\beta(1-\delta)] - \beta(1+\varepsilon\bar{s}_h^2)D_k\bar{\Phi}(\cdot) = 0 \tag{5.15}$$

$$(1+2\varepsilon\bar{s}_h)[1-\beta(1-\delta)] - \beta(1+\varepsilon\bar{s}_h^2)D_h\bar{\Phi}(\cdot) = 0 \tag{5.16}$$

My už poznáme rovnovážne riešenie $\bar{k}$, $\bar{h}$ pre $\varepsilon = 0$. Označme $\bar{k}_\varepsilon$, $\bar{h}_\varepsilon$ riešenie pre $\varepsilon > 0$, presné riešenie síce vypočítať nevieme, ale vieme ho aproximovať Taylorovým polynómom. Využitím vety o implicitnej funkcií vieme vypočítať derivácie $\frac{\partial\bar{k}_\varepsilon}{\partial\varepsilon}$, $\frac{\partial\bar{h}_\varepsilon}{\partial\varepsilon}$. Potom pomocou Taylorovnho polynómu vypočítame hodnoty $\bar{k}_\varepsilon$, $\bar{h}_\varepsilon$

$$\bar{k}_\varepsilon = \bar{k} + \varepsilon\frac{\partial\bar{k}_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \text{č.v.r.} \tag{5.17}$$

$$\bar{h}_\varepsilon = \bar{h} + \varepsilon\frac{\partial\bar{h}_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + \text{č.v.r.} \tag{5.18}$$

Pre dôkaz existencie riešenia systému rovníc (5.15) a (5.16) použijeme vetu o implicitnej funkcii. Označme

$$G(k,h,\varepsilon) = \begin{pmatrix} [1-\beta(1-\delta)] - \beta(1+\varepsilon\bar{s}_h^2)D_k\Phi(\cdot) \\ (1+2\varepsilon\bar{s}_h)[1-\beta(1-\delta)] - \beta(1+\varepsilon\bar{s}_h^2)D_h\Phi(\cdot) \end{pmatrix}$$

Potom (5.15) a (5.16) sú ekvivalentné rovnici $G(k,h,\varepsilon)=0$. Ďalej označme $\mathrm{d}G(\bar{k},\bar{h},0)=(\frac{\partial G(k,\bar{h},0)}{\partial k}|_{k=\bar{k}},\ \ \frac{\partial G(\bar{k},h,0)}{\partial h}|_{h=\bar{h}})$.

Vypočítajme jednotlivé parciálne derivácie funkcie $G(k,h,\varepsilon)$ v rovnovážnom bode.

$$\left.\frac{\partial G(\bar{k},\bar{h},\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\begin{pmatrix} -\bar{s}_h^2\beta D_k\bar{\Phi}(\cdot) \\ 2\bar{s}_h[1-\beta(1-\delta)]-\bar{s}_h^2\beta D_h\bar{\Phi}(\cdot)\end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial G(k,\bar{h},0)}{\partial k}\right|_{k=\bar{k}}=\begin{pmatrix} -\beta D_{kk}^2\bar{\Phi}(\cdot) \\ -\beta D_{kh}^2\bar{\Phi}(\cdot)\end{pmatrix}$$

$$\left.\frac{\partial G(\bar{k},h,0)}{\partial h}\right|_{h=\bar{h}}=\begin{pmatrix} -\beta D_{kh}^2\bar{\Phi}(\cdot) \\ -\beta D_{hh}^2\bar{\Phi}(\cdot)\end{pmatrix}$$

Zostavíme $\mathrm{d}G(\bar{k},\bar{h},0)$ a vypočítame $\mathrm{d}G^{-1}(\bar{k},\bar{h},0)$.

$$\mathrm{d}G^{-1}(\bar{k},\bar{h},0)=\frac{1}{\det(\mathrm{d}G(\bar{k},\bar{h},0))}\begin{pmatrix} -\beta D_{hh}^2\bar{\Phi}(\cdot) & \beta D_{kh}^2\bar{\Phi}(\cdot) \\ \beta D_{kh}^2\bar{\Phi}(\cdot) & -\beta D_{kk}^2\bar{\Phi}(\cdot)\end{pmatrix}$$

kde $\det(\mathrm{d}G(\bar{k},\bar{h},0))=\beta^2 D_{hh}^2\bar{\Phi}(\cdot)D_{kk}^2\bar{\Phi}(\cdot)-\beta^2[D_{kh}^2\bar{\Phi}(\cdot)]^2\neq 0$.

Pretože $G(\bar{k},\bar{h},0)=0$ a matica $\mathrm{d}G(\bar{k},\bar{h},0)$ je rerulárna podľa vety o implicitnej funkcii platí:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{k}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0} \\ \frac{\partial \bar{h}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}\end{pmatrix}=-\,\mathrm{d}G^{-1}(\bar{k},\bar{h},0)\left.\frac{\partial G(\bar{k},\bar{h},\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$$

Vypočítame derivácie

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{k}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0} &= -\bar{k}\frac{\bar{s}_h}{(\alpha_1+\alpha_2)}\left(\alpha_2-\frac{\bar{s}_h}{2}\right)+\text{č.v.r.}\\ \frac{\partial \bar{h}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0} &= -\bar{h}\frac{\bar{s}_h}{(\alpha_1+\alpha_2)}\left(1-\frac{\bar{s}_h}{2}-\alpha_1\right)+\text{č.v.r.}\end{aligned}$$

teraz už môžme vypočítať $\bar{k}_\varepsilon$, $\bar{h}_\varepsilon$ dosadením derivácií do (5.17) a (5.18).

$$\begin{aligned}
\bar{k}_\varepsilon &= \bar{k}\left[1-\varepsilon\frac{\bar{s}_h}{(\alpha_1+\alpha_2)}\left(\alpha_2-\frac{\bar{s}_h}{2}\right)\right]+\text{č.v.r.}\\
\bar{h}_\varepsilon &= \bar{h}\left[1-\varepsilon\frac{\bar{s}_h}{(\alpha_1+\alpha_2)}\left(1-\frac{\bar{s}_h}{2}-\alpha_1\right)\right]+\text{č.v.r.}
\end{aligned}$$

kde $\bar{s}_h = \alpha_2\frac{\beta\delta}{1-\beta(1-\delta)}$.

Ďalej označme $\bar{s}_{k,\varepsilon}, \bar{s}_{h,\varepsilon}$ hodnoty rovnovážneho riadenia pre $\varepsilon > 0$. Tieto hodnoty vypočítame na základe vyjadrenia stavových rovníc v rovnovážnom stave (5.1) a (5.2).

5.3 Overenie predpokladov

Teraz sa budeme venovať overeniu teoretických predpokladov z kapitoly 2. Niektoré predpoklady boli overené priamo v analýze modelu, konkrétne predpoklad **Q1** a priamo z textu vyplýva splnenie predpokladov **Q2** a **Q6**, ktoré hovoria o existencii riešenia.

Overme teraz predpoklad, kvôli ktorému sme upravovali model. Išlo o predpoklad **Q3**. Overme, že Hessian $D^2f((\bar{k},\bar{h}),(\bar{s}_k,\bar{s}_h))$ je záporne definitný. Až doteraz sme nespresnili výber účelovej funkcie, voľba nakoniec padla na logaritmickú účelovú funkciu.

$$f((k,h),(s_k,s_h)) = \ln[\Phi(k(t),h(t))(1-s_k(t)-s_h(t)-\varepsilon s_h^2(t))]$$

Matica druhých derivácií je typu

$$D^2f((k,h),(s_k,s_h)) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha_1}{k^2} & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha_2}{h^2} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{(1-s_k-s_h-\varepsilon s_h^2)^2} & \frac{-1-2\varepsilon s_h}{(1-s_k-s_h-\varepsilon s_h^2)^2} \\ \frac{-1-2\varepsilon s_h}{(1-s_k-s_h-\varepsilon s_h^2)^2} & \frac{-2\varepsilon(1-s_k-s_h-\varepsilon s_h^2)-(1+2\varepsilon s_h)^2}{(1-s_k-s_h-\varepsilon s_h^2)^2} \end{pmatrix}$$

Teda je záporne definitná, ak matice A, B sú záporne definitné. O matici A je to zrejme, spočítajme čiastkové determinanty matice B.

$$\begin{aligned}
\det(B_{1\times 1}) &= \frac{-1}{(1-s_k-s_h-\varepsilon s_h^2)^2} < 0 \\
\det(B_{2\times 2}) &= \frac{2\varepsilon}{(1-s_k-s_h-\varepsilon s_h^2)^3} > 0
\end{aligned}$$

Determinant matice B je kladný vďaka ohraničeniu na riadenie, kladnosť ľahko zabezpečíme voľbou $\varepsilon > 0$, teda $1 - s_k - s_h - \varepsilon s_h^2 > 0$. Stačilo mám ukázať zápornú definitnosť len v bode optima. My sme ju však ukázali pre všetky prípustné hodnoty, čiže matica $D^2 f((\bar{k}_\varepsilon, \bar{h}_\varepsilon), (\bar{s}_{k,\varepsilon}, \bar{s}_{h,\varepsilon}))$ je záporne definitná.

Keďže matica $D^2 f((k,h),(s_k,s_h))$ je záporne definitná pre všetky prípustné hodnoty parametrov, nemuseli sme hľadať optimálne riešenie stačilo nám ukázať jeho existenciu.

Ďalší je predpoklad **Q4** Matica $(A - I)$ je regulárna. Maticu A máme vypočítanú v analýze modelu pri overovaní predpokladu **Q1** potom

$$(A - I) = \begin{pmatrix} -\delta + \bar{s}_k D_k \Phi(\bar{k},\bar{h}) & \bar{s}_k D_h \Phi(\bar{k},\bar{h}) \\ \bar{s}_h D_k \Phi(\bar{k},\bar{h}) & -\delta + \bar{s}_h D_h \Phi(\bar{k},\bar{h}) \end{pmatrix}$$

je regulárna, ak $\delta \neq 0$.

Predpoklad **Q5** ako sme ukázali overovať nepotrebujeme. Overiť predpoklad **Q7** je triviálne. Matica $\mathbf{A}_1 = (A_1 - B_1 R^{-1} Q_1)$, kedže matica $Q = \mathbf{0}$ potom $\mathbf{A}_1 = A_1$. Matica A_1 je regulárna na základe predpokladu **Q1**.

Ostáva predpoklad **Q8** Dvojica matíc (A_1, B_1) je stabilizovateľná. Podľa teórie nám stačí ukázať, že $rank B = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} \Phi(\bar{k},\bar{h}) & 0 \\ 0 & \Phi(\bar{k},\bar{h}) \end{pmatrix}$$

Aj posledný predpoklad je úspešne splnený. Už nám neostáva nič iné, len radostne konštatovať "hurá"!

Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo zostavenie viacrozmernej úlohy RBC-typu spĺňajúcej teoretické predpoklady. Tieto predpoklady uvádzame na začiatku práce. Následne sme predstavili predchádzajúce pokusy o zostavenie modelu a formulovali dvojrozmerný model, na ktorom sme úspešne overili predpoklady. Záverečná kapitola bola venovaná analytickému riešeniu modelu.

Dvojsektorovy model formulovaný v kapitole 2, nespĺňa predpoklad **Q3** o zápornej definitnosti matice druhých derivácií účelovej funkcie. Tento nedostatok sa podarilo vyriešiť M. Hriňákovi úpravou účelovej funkcie. Avšak model sa stal natoľko komplikovaný, že musela byť použitá lineárna funkcia užitočnosti a aj potom bol model riešiteľný len numericky.

Prínosom tejto práce je, že sme zostavili viacrozmerný RBC-model. Model, ktorý sme zostavili najskôr ešte nespĺňal predpoklad **Q3**, preto sme modifikovali účelovú funkciu. Overili sme, že tento upravený model už spĺňa všetky požadované predpoklady. Nepodarilo sa nám síce získať presné extremálne riešenie, ale ukázali sme jeho existenciu a vypočítali jeho aproximáciu na základe rovnovážneho riešenia pôvodného modelu.

Literatúra

[1] Blanchard, O. J., Kahn, Ch, M., *The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations* Ekonometrica, Vol. 48, 1980

[2] Blot, J., Chebbi, K., *Discrete Time Pontryagin Principles with Infinite Horizon* Journal of Mathematical Analysis and Aplications, Vol. 246, 2000

[3] Hansen G. D., Prescot E. C., *Recursive Methods for Computing Equilibria of Business Cycles Models*, in:*Frontiers of Business Cycle research*, Cooley T. F. editor, Princeton University Press, New Jersey, 1995.

[4] Hriňák, M., *Viacrozmerná modelová úloha teórie racionálnych očakávaní*, Dizertačná práca FMFI UK, Bratislava, 2006.

[5] Kučera, V., *The Discrete Ricceti Equation of Optimal Control*, Kybernetika 8/5, 1972.

[6] Lucas, R. E., *On the Mechanics of Ekonomic Development*, Journal of Monetary Economics, Vol. 22, 1988.

[7] Mankiw, M. G., Romer, D., Weil, D. M., *A Comribution to the Empirics of Economic Growth*, The Quaterly Journal of Economics, Vol. 107, No. 2, 1992.

[8] Zakopčan, M., *Matematické spracovanie lineárne-kvadratickej aproximácie v RBC modeloch*, Dizertačná práca FMFI UK, Bratislava, 2009.

[9] Zámečník, M., *Nonlineár Theory of Rational Expectations*, Diplomová práca FMFI UK, Bratislava, 2005.

[10] Zenam, J., Senaj, M., *DSGE-Model Slovakia*, Working paper NBS, Bratislava, 2009.