

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



**ALOKÁCIA EMISNÝCH
CERTIFIKÁTOV NA ZÁKLADE
ANALÝZY EFEKTIVITY**

Diplomová práca

BRATISLAVA 2010

Bc. Tomáš Baumgartner

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



**ALOKÁCIA EMISNÝCH
CERTIFIKÁTOV NA ZÁKLADE
ANALÝZY EFEKTIVITY**

Diplomová práca

Ekonomická a finančná matematika
9.1.9 Aplikovaná matematika
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Vedúci práce: Univ.Prof.Dipl.-Ing. Dr. Mikuláš Luptáčik

BRATISLAVA 2010

Bc. Tomáš Baumgartner

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce Univ.Prof.Dipl.-Ing. Dr. Mikulášovi Luptáčikovi, za poskytnutý čas a priestor, cenné rady, názory, pripomienky, materiály a pomoc pri tvorbe tejto práce.

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som prácu vypracoval samostatne s využitím svojich poznatkov a s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave 23. apríla 2010

podpis študenta

Abstrakt

Táto diplomová práca sa zaoberá alokáciou emisných certifikátov jednotlivým výrobným jednotkám v rámci odvetvia. Jej cieľom je navrhnúť taký spôsob prerozdeľovania emisných certifikátov, ktorý by motivoval jednotlivé výrobné jednotky znižovať objem emisií, eko-efektívne jednotky odmeňoval a zároveň by znížil celkové množstvo emisií, pri istých ohraničeniach. Tieto ohraničenia by mali zohľadňovať možnosti jednotlivých výrobných jednotiek upravovať množstvo produkcie skleníkových plynov. Budeme využívať DEA modely a to hlavne upravený model centralizovanej alokácie zdrojov a taktiež modifikáciu BCC modelu, ktorý je rozšírený o neželateľné výstupy. Porovnáваме výsledky použitých modelov a poukazujeme na ich výhody a nevýhody na reálnych dátach. V práci sa okrem modelov, ktoré navrhujú istú možnosť riešenia, nachádza aj potrebná teória a niektoré dôležité informácie o momentálnom spôsobe pridelovania emisných certifikátov.

Kľúčové slová: alokácia, emisné certifikáty, eko-efektívnosť, model.

Abstract

This diploma work concerns intra-industry allocation of emission certificates to producing units. The purpose of the work is to develop an approach to emission certificates allocation, which would motivate producing units to decrease amount of emission, reward eco-efficient units and simultaneously decrease total amount of emission taking into account certain constraints. This constraints should take into account possibilities of individual producing units to modify its amount of greenhouse gases emission. We use DEA models especially modified model of centralized resource allocation and also a modification of BCC model, which is extended of undesirable outputs. We compare results of used models and discuss advantages and disadvantages concerning real data. Except models, which suggest possible solution, there is also a necessary theory in this work and some important information about recent process of emission certificates allocation.

Keywords: allocation, emission certificates, eco-efficiency, model.

Obsah

Úvod	4
1 DEA modely	6
1.1 Základné pojmy DEA	6
1.2 CCR, BCC, aditívny a SBM model	10
1.2.1 CCR model	10
1.2.2 BCC model	13
1.2.3 Aditívny model	15
1.2.4 SBM model	16
2 Rozšírenie DEA modelov o neželateľné výstupy	18
2.1 Model A	18
2.2 Model B	20
2.3 Model C	21
2.4 Model D	23
3 Model centralizovanej alokácie zdrojov	25
3.1 Radiálny model centralizovanej alokácie zdrojov	26
3.2 Non-radiálny model centralizovanej alokácie zdrojov	28
4 Kjótsky protokol a emisný obchodný systém	31
5 Modely udeľovania certifikátov s motivačným prvkom	34
5.1 Dáta	34
5.2 Aplikácia dát na model centralizovanej alokácie zdrojov	36
5.3 Aplikácia dát na model centralizovanej alokácie zdrojov s ohraničeniami	39
5.4 Aplikácia dát na model centralizovanej alokácie zdrojov s váhami	45
5.5 Aplikácia dát na model C s ohraničeniami	48
Záver	52

Úvod

V dnešnej dobe sa popri snahe zvyšovať HDP na úrovni štátov, zisk na úrovni podnikov a plat na úrovni domácností čoraz viac diskutuje, ako zachrániť prírodu okolo nás tak, aby sme ju zachovali aj pre ďalšie generácie a nespravili z našej planéty miesto, kde bude aj človeku čoraz ťažšie prežiť. Veľkým problémom dnešnej doby je globálne otepľovanie a to nie už len na enviromentálnej, ale aj na celospoločenskej úrovni. Najväčšou mierou (z hľadiska spôsobeného človekom) ku globálnemu otepľovaniu prispievajú emisie skleníkových plynov (hlavne CO_2), ktoré vytvárajú tzv. skleníkový efekt, ktorý obmedzuje spätné prepúšťanie slnečných lúčov do vesmíru a spôsobuje tým otepľovanie planéty. Jednotlivé krajiny si to začínajú vážne uvedomovať a bojovať proti globálnemu otepľovaniu. Veľkým krokom vpred bola v tomto smere konferencia v Kjóte, kde vznikol v roku 1997 záväzný dokument, pod ktorý sa do dnešného dňa podpísalo 187 krajín. Veľké očakávania smerovali taktiež k nedávnej konferencii Organizácie spojených národov ku klimatickým zmenám v Kodani, ktorá však žiadne konkrétne výsledky v oblasti znižovania CO_2 emisií nepriniesla. Európska únia si však v rámci Kjótskeho protokolu stanovila cieľ znižovať produkciu skleníkových plynov. Uskutočňuje to prostredníctvom alokácie emisných certifikátov jednotlivým odvetviam a podnikom.

Hlavným cieľom tejto diplomovej práce je nájsť taký spôsob prideľovania emisných certifikátov, ktorý by zohľadňoval efektívnosť výrobných jednotiek a neprideľoval emisné certifikáty na základe vyrobených množstiev v minulých rokoch. Tento spôsob totiž nemotivuje výrobné jednotky, aby sa snažili zefektívňovať svoju výrobu a teda aj znižovať množstvo vyrobených škodlivých emisií. Najefektívnejšie jednotky by dostali také množstvá, ktoré by boli najbližšie tým z minulého roku.

Na počítanie efektívnosti jednotlivých výrobných jednotiek budeme používať DEA modely. V druhej kapitole si predstavíme základné pojmy z DEA a taktiež základné modely, ktoré budeme ďalej rozširovať. Táto kapitola je spracovaná na základe [4,5,6]. Keďže základné DEA modely nerátajú s neželateľnými výstupmi (skleníkové plyny), je potrebné tieto modely rozšíriť.

V tretej kapitole sa oboznámime s niektorými DEA modelmi rozšírenými o neželateľné výstupy. Tretia kapitola je spracovaná pomocou [2,5]. Vo štvrtej kapitole sa venujeme modelu centralizovanej alokácie zdrojov, ktorý prináša myšlienku znižovania množstva potrebných vstupov pri výrobe pre celé odvetvie ako jeden celok. Práve tento model nám bude východiskovým modelom, pretože prináša najväčšie možné zníženie. Táto kapitola je spracovaná použitím [1,3]. V piatej kapitole sa bližšie oboznámime s momentálnou politickou situáciou ohľadom znižovania skleníkových plynov a emisného obchodného systému, ktorý minimalizuje negatívne ekonomické následky znižovania množstva neželateľných výstupov. Kapitola je spracovaná na základe [7]. V šiestej kapitole uvádzame nové, rozšírené modely centralizovanej alokácie zdrojov. Ide o model s ohraničeniami a model s váhami, pričom oba tieto modely sú ešte oproti pôvodnému modelu rozšírené o neželateľné výstupy a mierne pozmenené. Taktiež do mierne upraveného modelu C z článku [2] zavádzame ohraničenia. Tieto tri modely ako aj štvrtý (centralizovaný model alokácie zdrojov rozšírený o neželateľné výstupy) vyskúšame na dátach francúzskych cementární. V závere diplomovej práce diskutujeme výhody a nevýhody jednotlivých modelov.

Kapitola 1

DEA modely

DEA (Data Envelopment Analysis) je prostriedkom ekonomického manažmentu, ktorý slúži na určovanie efektívnosti jednotlivých producentov v rámci homogénnej skupiny. Skupina je homogénna v tom zmysle, že všetky jednotky spotrebúvajú porovnateľné vstupy a produkujú porovnateľné výstupy. DEA dokáže dobre porovnávať veličiny, ktoré je veľmi ťažké vyjadriť v peňažných jednotkách. Pomocou DEA totiž vieme vytvoriť tzv. efektívnu hranicu a určiť, ktoré jednotky sú vzhľadom na danú skupinu efektívne, určiť mieru efektívnosti ostatných jednotiek a taktiež navrhnúť prípadné zmeny tak, aby sa z neefektívnych jednotiek stali efektívne.

Počiatky DEA sa datujú do roku 1978, kedy Charnes, Cooper a Rhode v práci { Measuring the efficiency of decision making units } po prvý krát aplikovali lineárne programovanie na odhadovanie empirickej produkčnej technologickej hranice.

Táto kapitola je spracovaná pomocou [4,5,6].

1.1 Základné pojmy DEA

Majme n producentov, ktorých budeme nazývať *DMUs* (Decision Making Units), kde DMU_o bude označovať o -tú *DMU* pre $o = 1, \dots, n$. Tieto *DMUs* sú homogénne, a teda spotrebujú pri výrobe m rovnakých vstupov a vyprodukujú s rovnakých výstupov.

V najjednoduchšom prípade, keď $m = 1$ a $s = 1$ môžeme mieru efektívnosti o -tej *DMU* merať nasledovne

$$E_o = \frac{y_o}{x_o}.$$

Pod mierou efektívnosti v tomto prípade myslíme, koľko výstupov na jednotku vstupu dokáže daná produkčná jednotka vyrobiť. Ak však ani

jedna jednotka nedosahuje mieru efektívnosti 1 alebo ak ju niektoré jednotky prekročujú, tak množinu dát preškálujeme pomocou najefektívnejšej jednotky a získame tak relatívnu mieru efektívnosti, ktorú počítame nasledovne:

$$E_o = \frac{\frac{y_o}{x_o}}{\max_o \left\{ \frac{y_o}{x_o} \right\}}$$

Pod mierou efektívnosti v tomto jednoduchom prípade teda rozumieme, koľko jednotiek výstupu dokáže *DMU* vyprodukovať pomocou jednej jednotky vstupu, pričom tieto hodnoty sú preškáľované hodnotou najlepšej (v zmysle podielu výstupu a vstupu) *DMU*. Týmto spôsobom priradujeme hodnotu 1 tej *DMU*, ktorá dokáže vyrobiť najviac výstupov na jednu jednotku vstupu. Neznamená to, že daná *DMU* spotrebuje jednu jednotku vstupu na jednu jednotku výstupu, ale znamená to, že daná *DMU* je najefektívnejšia v rámci porovnáwanej homogénnej skupiny.

Vo všeobecnom prípade, teda keď m a s sa nerovná nutne 1, počítame mieru efektívnosti o -tej *DMU* nasledovne:

$$\max_{\mu \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^s} E_o(\mu, v) = \frac{\langle v, y_o \rangle}{\langle \mu, x_o \rangle} = \frac{\sum_{i=1}^s v_i y_{oi}}{\sum_{i=1}^m \mu_i x_{oi}}$$

Pričom váhy musia spĺňať podmienky:

1. $E_o(\mu, v) \leq 1 \quad \forall o$,
2. $\mu > 0, v > 0$.

Táto úloha je základnou úlohou DEA.

Takto počítaná miera efektívnosti nám zabezpečuje, že v danej skupine producentov bude aspoň jeden producent, ktorý má mieru efektívnosti 1 a tento producent sa nazýva efektívnou jednotkou. Pre ostatné *DMUs*, ktorých $E_o < 1$, sa tento podiel nazýva miera efektívnosti. Samozrejme, čím je tento podiel vyšší, *DMU* je efektívnejšia, čiže vo výrobnom postupe lepšie využíva vstupy na produkciu výstupov.

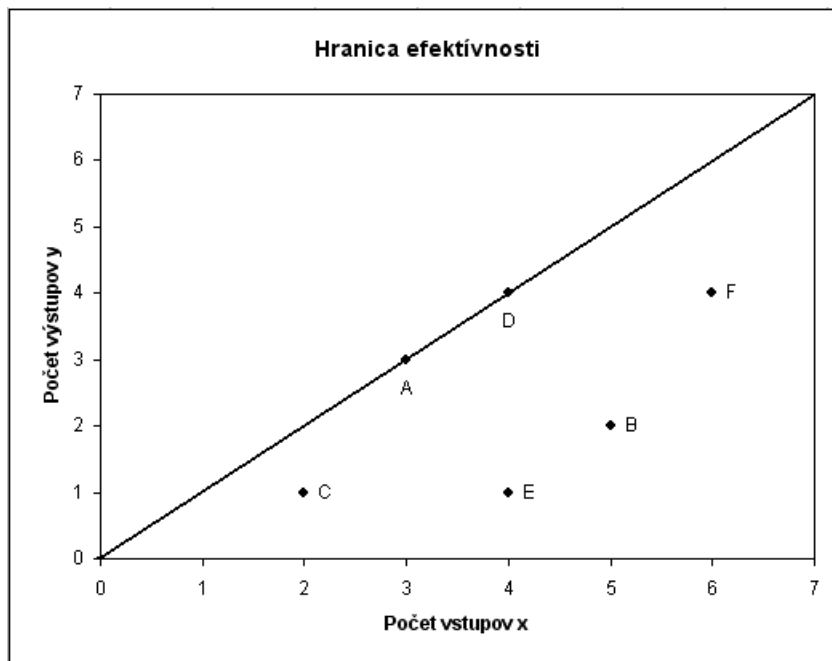
Pojmy hranica efektívnosti a hranica pseudoefektívnosti si vysvetlíme na nasledujúcom príklade.

Príklad 1.1:

Majme 6 *DMUs*. Potrebne údaje máme v nasledovnej tabuľke:

DMU	A	B	C	D	E	F
Počet vstupov x	3	5	2	4	4	6
Počet výstupov y	3	2	1	4	1	4
Miera efektívnosti	100%	40%	50%	100%	25%	66%

Keďže máme situáciu s jedným vstupom a jedným výstupom, vieme si ju zobrazit' aj graficky.

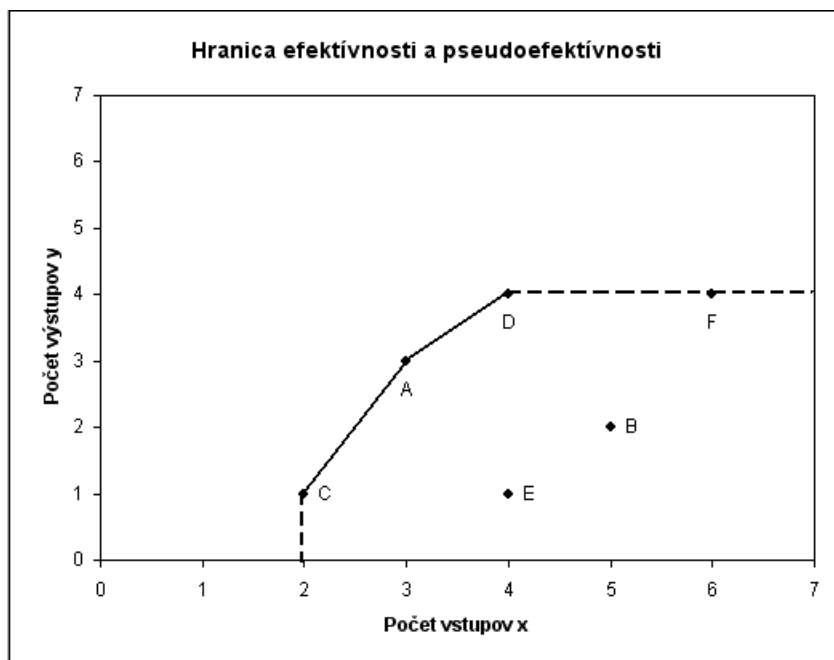


Obrázok 1.1: Hranica efektívnosti pre konštantné výnosy z rozsahu

Tento graf reprezentuje situáciu pre konštantné výnosy z rozsahu. Môžeme na ňom vidieť hranicu efektívnosti, ktorá je tvorená polpriamkou vychádzajúcou z počiatku súradnicovej sústavy a prechádzajúcou všetkými efektívnymi jednotkami. Ako vidieť už z tabuľky, efektívne sú jednotky *A* a *D* a obe sa preto nachádzajú na hranici efektívnosti. Oblasť medzi hranicou efektívnosti a kladnou časťou osi x sa nazýva množina produkčných možností. Vo vnútri tejto oblasti sa nachádzajú všetky neefektívne jednotky. Tieto dve polpriamky teda tvoria akýsi obal pre všetky *DMUs*, z čoho pochádza anglický názov Data Envelopment Analysis.

Hranica efektívnosti je zároveň referenčnou množinou pre neefektívne jednotky. Pomocou nej si dokážu vyrátať, ako sa musia zlepšiť, aby sa stali efektívnymi. Napríklad jednotka E sa stane efektívnou, ak zníži počet vstupov zo 4 na 1 pri zachovaní rovnakého počtu výstupov alebo ak zvýši počet výstupov z 1 na 4 pri zachovaní rovnakého počtu vstupov. Ďalšou možnosťou je kombinácia zníženia počtu vstupov a zároveň zvýšenia počtu výstupov, čím by sa jednotka E mohla dostať napríklad na bod $[\frac{8}{3}, \frac{7}{3}]$. Možností je však nekonečne veľa, pretože jednotka sa stane efektívnou, ak sa premietne na akýkoľvek bod na efektívnej hranici.

Ďalší graf reprezentuje tú istú situáciu, teraz však pre variabilné výnosy z rozsahu.



Obrázok 1.2: Hranica efektívnosti a pseudoefektívnosti pre variabilné výnosy z rozsahu

Na tomto grafe môžeme vidieť hranicu efektívnosti v prípade variabilných výnosov z rozsahu. Táto hranica je tvorená úsečkami CA a AD . Všetky body nachádzajúce sa na tejto hranici sú efektívne.

Môžeme si všimnúť, že v prípade variabilných výnosov z rozsahu je viac efektívnych jednotiek. Platí totiž, že ak niektorá DMU je efektívna pri predpoklade konštantných výnosov z rozsahu, tak bude efektívna aj pri predpoklade variabilných výnosov z rozsahu. Opačne to však neplatí. Pri variabilných výnosoch z rozsahu je totiž jednotka efektívna aj keď nárast výstupov

je nižší alebo vyšší na jednotku nárastu vstupov. Záleží či uvažujeme rastúce alebo klesajúce výnosy z rozsahu.

Zároveň si môžeme všimnúť hranicu pseudoefektívnosti. Tá je tvorená úsečkou s koncovými bodmi C a $[2, 0]$ a polpriamkou začínajúcou v bode D a prechádzajúcou bodom F . Bod F sa teda nachádza na hranici pseudoefektívnosti. To znamená, že je síce na hranici konvexného obalu dát, ale je zrejmé, že táto jednotka nemôže byť efektívna, keďže pri rovnakom množstve vyprodukovaných výstupov ako efektívna jednotka D , spotrebuje pri výrobe o dva vstupy viac.

1.2 CCR, BCC, aditívny a SBM model

V nasledujúcej časti sa oboznámime s niektorými základnými modelmi, na ktorých sú postavené zložitejšie modely, ktoré budeme používať v ďalšej časti diplomovej práce. Pre zjednodušenie budeme úlohy v tejto časti písať vo vektorovom tvare.

1.2.1 CCR model

CCR model je prvým DEA modelom, ktorý bol sformulovaný v roku 1978 matematikmi Charnesom, Cooperom a Rhoadesom. Tento model predpokladá konštantné výnosy z rozsahu. Najprv si odvodíme vstupne orientovaný CCR model. Základnú úlohu DEA zmeníme nasledujúcou transformáciou, ktorá bola uvedená v [6]:

$$\begin{aligned}\mu &= tu \\ v &= tv \\ t &= \frac{1}{x_o\mu}.\end{aligned}$$

Dostaneme takto úlohu lineárneho programovania:

$$\max_{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^s} v^T y_o$$

$$\begin{aligned}u^T x_o &= 1 \\ v^T y_i &\leq u^T x_i \quad \forall i = 1, \dots, n \\ u &\geq 0 \\ v &\geq 0,\end{aligned}$$

kde index o označuje aktuálne optimalizovanú jednotku.

DMU_o je efektívna v tom prípade, ak existuje také optimálne riešenie tejto úlohy, že $E_o^*(u^*, v^*) = 1$ (E označuje efektívnosť optimalizovanej jednotky, čiže vo väčšine prípadov aj hodnotu účelovej funkcie) a zároveň $u^* > 0$ a $v^* > 0$. Ak $E_o^*(u^*, v^*) < 1$ a zároveň $u^* > 0$ a $v^* > 0$, potom $E_o^*(u^*, v^*)$ sa nazýva mierou efektívnosti. DMU_o je pseudoefektívna v tom prípade, ak $E_o^*(u^*, v^*) = 1$ a zároveň neplatí, že $u^* > 0$ a $v^* > 0$. Ak $E_o^*(u^*, v^*) < 1$ a zároveň neplatí $u^* > 0$ a $v^* > 0$, potom $E_o^*(u^*, v^*)$ nazývame mierou pseudoefektívnosti.

K tomuto modelu teraz uvedieme duálnu úlohu:

$$\begin{aligned} \min_{\theta \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^n} \quad & \theta \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i & \geq y_o \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i & \leq \theta x_o \\ \lambda & \geq 0, \end{aligned}$$

pričom θ je reálne číslo a λ je n rozmerný vektor. V uvedenom vstupnom modeli minimalizujeme hodnotu θ , ktorá znižuje množstvo vstupov. Tento duálny prístup sa nazýva obáľkovým prístupom k riešeniu CCR modelu úlohy DEA.

Ako sme si vyššie ukázali, jednotlivé jednotky nemusia byť nutne efektívne napriek tomu, že ležia na hranici konvexného obalu dát. Jedná sa práve o pseudoefektívne jednotky. Budeme sa teraz snažiť do tejto duálnej úlohy zaviesť také premenné, ktoré nám pomôžu rozlíšiť medzi efektívnymi a pseudoefektívnymi jednotkami. Tieto premenné budeme nazývať doplnkové premenné alebo sklzy a budeme ich označovať $s^x \in \mathbb{R}^m$ pre vstup a $s^y \in \mathbb{R}^s$ pre výstup. Úlohu budeme teraz riešiť v dvoch fázach. V prvej fáze získame optimálnu hodnotu pre θ a zároveň pre s^x a s^y . Táto fáza rieši nasledujúcu úlohu:

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^n} \quad \theta$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - s^y &= y_o \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x &= \theta x_o \\
\lambda &\geq 0 \\
s^x &\geq 0 \\
s^y &\geq 0.
\end{aligned}$$

Už v tejto fáze vieme určiť či je jednotka efektívna alebo pseudoefektívna, alebo je neefektívna. Efektívna je v tom prípade, ak hodnota $\theta^* = 1$ a zároveň $s^x = 0$ a $s^y = 0$. Pseudoefektívna je, ak $\theta^* = 1$, ale zároveň neplatí, že $s^x = 0$ a $s^y = 0$. Ak $\theta^* \neq 1$, jednotka je neefektívna.

V druhej fáze túto optimálnu hodnotu θ^* využijeme a vypočítame také hodnoty λ , ktoré nám pomôžu premietnuť jednotky na efektívnu hranicu. V tejto úlohe budeme e chápať ako jednotkový vektor daného rozmeru. Riešime teda túto úlohu lineárneho programovania:

$$\max_{\substack{s^x \in \mathbb{R}^m, s^y \in \mathbb{R}^s, \\ \lambda \in \mathbb{R}^n}} e^T s^x + e^T s^y$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i - s^y &= y_o \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x &= \theta^* x_o \\
\lambda &\geq 0 \\
s^x &\geq 0.
\end{aligned}$$

Teraz vieme pomocou príslušných vektorov lámbed vyrátať také množstvá vstupov a výstupov pre jednotlivé *DMUs*, aby boli efektívne.

$$\begin{aligned}
x_o^* &= \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \\
y_o^* &= \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j
\end{aligned}$$

Pre každú *DMU* existujú tzv. referenčné lambdy. Sú to tie, ktoré nadobúdajú nenulové hodnoty v rámci príslušného vektora lámbed. Podľa

indexov daných λ vieme určiť, ktoré jednotky tvoria referenčné množiny pre jednotlivé *DMUs* a teda vieme povedať, na ktorú časť efektívnej hranice sa táto jednotka premietne.

Teraz si v skratke ukážeme výstupne orientovaný CCR model. Ten sa od vstupne orientovaného líši v tom, že namiesto ohraničenia na vstupy máme ohraničenie na výstupy $v^T y_o = 1$. Model potom bude vyzeráť nasledovne:

$$\begin{aligned} \min_{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^s} \quad & u^T x_o \\ v^T y_o &= 1 \\ v^T y_i &\leq u^T x_i \quad \forall i = 1, \dots, n \\ u &\geq 0 \\ v &\geq 0, \end{aligned}$$

Duálna úloha potom nadobúda tento tvar:

$$\begin{aligned} \max_{\theta \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^n} \quad & \theta \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i &\geq \theta y_o \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i &\leq x_o \\ \lambda &\geq 0, \end{aligned}$$

V tomto prípade na rozdiel od vstupne orientovaného modelu maximalizujeme hodnotu θ , ktorá zvyšuje množstvo výstupov. Analogickými úpravami ako vo vstupne orientovanom modeli vieme tento model previesť na model s doplnkovými premennými. Pre každý z týchto výstupne orientovaných modelov platia analogicky ako vo vstupne orientovaných modeloch podmienky pre efektívnosť, pseudoefektívnosť a neefektívnosť.

1.2.2 BCC model

Teraz sa bližšie pozrieme na BCC model, ktorý je obdobou CCR modelu pre variabilné výnosy z rozsahu a bol sformulovaný v roku 1984 Bankerom, Charnesom a Cooperom. Vstupne orientovaný CCR model sa teda zmení nasledovne:

$$\max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^s, \\ v_o \in \mathbb{R}}} v^T y_o - v_o$$

$$\begin{aligned}
u^T x_o &= 1 \\
v^T y_i - v_o &\leq u^T x_i \quad \forall i = 1, \dots, n \\
u &\geq 0 \\
v &\geq 0,
\end{aligned}$$

Samozrejme, znovu tu platia obdobné pravidlá pre zisťovanie efektívnosti, pseudoefektívnosti a neefektívnosti.

Duálnu úlohu taktiež môžeme skonštruovať analogicky ako pre CCR model, líšiť sa bude pridaním podmienky pre variabilné výnosy z rozsahu, čiže

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Duálna úloha teda vyzerá takto:

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^n} \theta$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i &\geq y_o \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i &\leq \theta x_o \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i &= 1 \\
\lambda &\geq 0.
\end{aligned}$$

Opäť dokážeme skonštruovať aj dvojfázovú metódu s doplnkovými premennými, ktorá nám pomôže zachytiť pseudoefektívu v duálnej úlohe a zistiť v ktorých premenných sú sklzy a taktiež určiť nové množstvá vstupov a výstupov tak, aby sa z neefektívnej, prípadne pseudoefektívnej, jednotky stala efektívna jednotka. Zisťovanie efektívnosti má opäť tie isté pravidlá, teda efektívna je vtedy, ak hodnota $\theta^* = 1$ a zároveň $s^x = 0$ a $s^y = 0$. Pseudoefektívna, ak $\theta^* = 1$, ale zároveň neplatí, že $s^x = 0$ a $s^y = 0$. Ak $\theta^* \neq 1$, jednotka je neefektívna.

Rovnako ako tomu bolo v CCR modeli, aj BCC model vieme upraviť na výstupne orientovaný. Keďže tento model sa vytvára analogicky, nebudeme ho v tejto diplomovej práci uvádzať.

1.2.3 Aditívny model

V tejto časti si predstavíme ďalší zo základných DEA modelov. Je to aditívny model, ktorý oproti CCR a BCC modelom, ktoré museli byť buď vstupne alebo výstupne orientované, dokáže kombinovať znižovanie vstupov a zvyšovanie výstupov zároveň, čo je oproti predchádzajúcim modelom výhodou. Nevýhodou tohto modelu však je to, že miera efektívnosti sa pohybuje na intervale $(-\infty, 0)$, aby sme teda pekne videli mieru efektívnosti, bude potrebné ju preškálovať do intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Tento model bol prvý krát uvedený v roku 1985 Osarnesom, Cooperom, Golanyom, Seifordom a Stutzom. Aditívny model vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned} \max_{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^s} \quad & v^T y_o - u^T x_o \\ v^T y_i - u^T x_i \quad & \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ u \quad & \geq e \\ v \quad & \geq e, \end{aligned}$$

kde e je opäť jednotkový vektor príslušnej dĺžky. *DMU* je v prípade aditívneho modelu efektívna vtedy, ak sa optimálna hodnota účelovej funkcie, teda $E_o^*(u^*, v^*) = 0$. Ako sme už spomínali, trochu horšie je to s neefektívnymi jednotkami. Vhodné by mohlo byť nasledovné preškálovanie optimálnej hodnoty účelovej funkcie: $E_o = \exp(E_o^*(u^*, v^*))$, čím dostaneme hodnotu efektívnosti v požadovanom intervale $\langle 0, 1 \rangle$.

K tejto primárnej úlohe lineárneho programovania môžeme opäť zostrojiť duálnu úlohu v tomto tvare:

$$\begin{aligned} \min_{\substack{s^x \in \mathbb{R}^m, s^y \in \mathbb{R}^s, \\ \lambda \in \mathbb{R}^n}} \quad & -(e^T s^x + e^T s^y) \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x \quad & = x_o \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i + s^y \quad & = y_o \\ \lambda \quad & \geq 0 \\ s^x \quad & \geq 0 \\ s^y \quad & \geq 0 \end{aligned}$$

V tomto základnom prípade sa váhy volia tak, že sú väčšie, nanajvýš rovné, jednotkovému vektoru. Existuje však viacero možností ako voliť váhy.

Tie sa môžu napríklad zdola ohraničiť vektormi q^x a q^y pre príslušné premenné. Tieto vektory q^x a q^y potom možno voliť napríklad ako prevrátené hodnoty štandardnej odchýlky.

Primárna úloha, ktorú sme tu pre aditívny model uviedli predpokladala konštantné výnosy z rozsahu. Stačia len malé zmeny a úloha bude formulovaná pre variabilné výnosy z rozsahu. Zmeny sú obdobné ako v prípade CCR a BBC modelov.

1.2.4 SBM model

Posledný zo základných DEA modelov, ktorý uvedieme je SBM (Slack-Based Measure) model. Tento model má v sebe výhodu aditívneho modelu, teda že ho vieme sformulovať aj ako neorientovaný model a tým zachytiť všetky zdroje neefektívnosti. Oproti klasickému aditívnemu modelu má aj tú výhodu, že mieru efektívnosti uvádza na intervale $\langle 0, 1 \rangle$. Nevýhodou však je, že vyžaduje nenulové hodnoty všetkých vstupov a výstupov pre všetky *DMUs*. Existujú však spôsoby ako sa s touto podmienkou vysporiadať. Základný tvar SBM modelu vyzerá takto:

$$\min_{\substack{s^x \in \mathbb{R}^m, s^y \in \mathbb{R}^s, \\ \lambda \in \mathbb{R}^n}} \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^x}{x_{oi}}}{1 + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{s_i^y}{y_{oi}}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i + s^x &= x_o \\ \sum_{i=1}^n y_i \lambda_i - s^y &= y_o \\ s^x &\geq 0 \\ s^y &\geq 0 \\ \lambda &\geq 0. \end{aligned}$$

Jednotka je efektívna v tom prípade, ak $E_o^* = 1$. To platí v tom prípade, ak $s^{x*} = 0$ a zároveň $s^{y*} = 0$. Ak $E_o^* \leq 1$, potom vyjadruje mieru efektívnosti. Všetky tvary tejto úlohy uvádzame pre konštantné výnosy z rozsahu. Aby táto úloha predpokladala variabilné výnosy z rozsahu, stačí opäť pridať podmienku

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Úlohu teraz prevedieme na úlohu lineárneho programovania, ktorá po úpravách a substitúciách, kde $ts^x = S^x$, $ts^y = S^y$ a $t\lambda = \Lambda$, bude mať tento tvar:

$$\min_{\substack{S^x \in \mathbb{R}^m, S^y \in \mathbb{R}^s, \\ \Lambda \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}}} t - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{S_i^x}{x_{oi}}$$

$$t + \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \frac{S_i^y}{y_{oi}} = 1$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \Lambda_i + S^x = tx_o$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \Lambda_i - S^y = ty_o$$

$$S^x \geq 0$$

$$S^y \geq 0$$

$$\Lambda \geq 0.$$

Uvedieme si ešte duálnu úlohu pre SBM model. Tá vyzerá nasledovne:

$$\max_{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^s} 1 - u^T x_o + v^T y_o$$

$$v^T y_i - u^T x_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\frac{1}{m} x_o^{-1} \leq u$$

$$(1 - u^T x_o + v^T y_o) \frac{1}{s} y_o^{-1} \leq v.$$

Kapitola 2

Rozšírenie DEA modelov o neželateľné výstupy

Klasické DEA modely, ktoré sme si doteraz predstavili, pracujú s myšlienkou vstupov, ktoré chceme minimalizovať a výstupov, ktoré chceme maximalizovať. V poslednej dobe sa však veľmi živo diskutuje otázka výstupov, ktoré chceme minimalizovať. Sú to tzv. neželateľné výstupy. Ide predovšetkým o rôzne odpady, ktoré vznikajú pri výrobe a jednak zneefektívňujú výrobu samotnú a môžu spôsobovať výrobcovi ďalšie náklady spojené s ich odstránením a jednak môžu škodiť životnému prostrediu. My sa budeme zaoberať tými, ktoré majú negatívny dopad na životné prostredie a to predovšetkým skleníkovými plynmi, ktoré sú hlavným dôvodom globálneho otepľovania.

Merat' finančné dopady neželateľných výstupov na životné prostredie by bolo veľmi náročné a zrejme aj nejednoznačné. Z toho dôvodu sa ako dobrý nástroj na porovnávanie javia práve DEA modely a to konkrétne v takej podobe, ktorá by zachytávala tzv. eko-efektívnosť. Eko-efektívnosť je v zásade efektívnosť jednotlivých výrobných jednotiek tak, ako tomu bolo v prípade základných modelov, avšak rozšírená o zachytávanie neželateľných výstupov, ktoré znižujú eko-efektívnosť danej jednotky. Všetky modely, ktoré si uvedieme vychádzajú zo základného CCR modelu.

Tejto téme sa venoval článok [2], pomocou ktorého túto kapitolu spracovávame. Pre zjednodušenie budeme úlohy v tejto časti písať vo vektorovom tvare.

2.1 Model A

Majme n homogénnych $DMUs$, pričom každá z nich spotrebuje m vstupov, ktoré budeme označovať x a produkuje k želateľných výstupov, ktoré

budeme označovať y^g a l neželateľných výstupov, ktoré budeme označovať y^b . Tieto označenia budú rovnako platiť aj v modeloch B, C a D.

Model A uvažuje neželateľné výstupy ako výstupy, ale prideluje im negatívne váhy. Snaží sa teda maximalizovať rozdiel medzi želateľnými a neželateľnými výstupmi a minimalizovať vstupy a vyzera nasledovne:

$$\max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^k, \\ w \in \mathbb{R}^l}} \frac{v^T y_o^g - w^T y_o^b}{u^T x_o}$$

$$\begin{aligned} \frac{v^T y_i^g - w^T y_i^b}{u^T x_i} &\leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ u &> 0 \\ v &> 0 \\ w &> 0, \end{aligned}$$

kde u , v a w sú váhy príslušných rozmerov a index o označuje práve optimalizovanú jednotku. V tomto modeli, ako aj v modeloch B a C, pre koncepčný model platí, že DMU_o je efektívna práve vtedy, keď $E_o^*(u^*, v^*, w^*) = 1$, inak označuje mieru efektivity.

Teraz koncepčný model prevedieme na úlohu matematického programovania, ktorá vyzera nasledovne:

$$\max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^k, \\ w \in \mathbb{R}^l}} v^T y_o^g - w^T y_o^b$$

$$\begin{aligned} u^T x_o &= 1 \\ v^T y_i^g - w^T y_i^b &\leq u^T x_i \quad \forall i = 1, \dots, n \\ u &\geq 0 \\ v &\geq 0 \\ w &\geq 0, \end{aligned}$$

a príslušná duálna úloha bude mať potom tento tvar:

$$\min_{\substack{s^x \in \mathbb{R}^m, s^{y^g} \in \mathbb{R}^k, \\ s^{y^b} \in \mathbb{R}^l, \lambda \in \mathbb{R}^n, \\ \theta \in \mathbb{R}}} \theta - \epsilon \mathbf{1}^T (s^x + s^{y^g} + s^{y^b})$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x &= \theta x_o \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^b + s^{y^b} &= y_o^b \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^g - s^{y^g} &= y_o^g \\
\lambda &\geq 0 \\
s^x &\geq 0 \\
s^{y^g} &\geq 0 \\
s^{y^b} &\geq 0 \\
\epsilon &> 0,
\end{aligned}$$

kde s^x , s^{y^g} a s^{y^b} sú sklzy, ϵ je dostatočne malé číslo a $\mathbf{1}$ označuje jednotkový vektor príslušnej dĺžky.

DMU_o je efektívna v tom prípade, ak hodnota účelovej funkcie sa rovná 1, tým pádom hodnota sklzov je 0 vo všetkých prípadoch. V opačnom prípade sa táto hodnota nazýva miera efektívnosti.

2.2 Model B

Model B sa od modelu A odlišuje tým, že neželateľné výstupy uvažuje ako vstupy a snaží sa teda maximalizovať želateľné výstupy a minimalizovať súčet vstupov a neželateľných výstupov. Konceptný model B potom vyzerá takto:

$$\begin{aligned}
&\max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^k, \\ w \in \mathbb{R}^l}} \frac{v^T y_o^g}{u^T x_o + w^T y_o^b} \\
\frac{v^T y_i^g}{u^T x_i + w^T y_i^b} &\leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \\
u &> 0 \\
v &> 0 \\
w &> 0,
\end{aligned}$$

Primárna úloha matematického programovania vyzerá nasledovne:

$$\max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^k, \\ w \in \mathbb{R}^l}} v^T y_o^g$$

$$\begin{aligned}
u^T x_o + w^T y_o^b &= 1 \\
v^T y_i^g &\leq u^T x_i + w^T y_i^b \quad \forall i = 1, \dots, n \\
u &\geq 0 \\
v &\geq 0 \\
w &\geq 0,
\end{aligned}$$

a duálna úloha takto:

$$\min_{\substack{\theta \in \mathbb{R}, \\ s^x \in \mathbb{R}^m, s^{y^g} \in \mathbb{R}^k, \\ s^{y^b} \in \mathbb{R}^l, \lambda \in \mathbb{R}^n}} \theta - \epsilon \mathbf{1}^T (s^x + s^{y^g} + s^{y^b})$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x &= \theta x_o \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^b + s^{y^b} &= \theta y_o^b \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^g - s^{y^g} &= y_o^g \\
\lambda &\geq 0 \\
s^x &\geq 0 \\
s^{y^g} &\geq 0 \\
s^{y^b} &\geq 0 \\
\epsilon &> 0.
\end{aligned}$$

2.3 Model C

V modeli C maximalizujeme rozdiel medzi želateľnými výstupmi a vstupmi a minimalizujeme neželateľné výstupy. Je teda obdobný ako model A, pričom sú vymenené vstupy a neželateľné výstupy. Tento model bude pre nás neskôr zohrávať dôležitú úlohu, pretože duálna úloha tohto modelu je postavená tak, že znižuje neželateľné výstupy, čo je práve ten spôsob, akým chceme zvyšovanie eko-efektívnosti dosiahnuť. Konceptný model C bude teda vyzeráť nasledovne:

$$\max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^k, \\ w \in \mathbb{R}^l}} \frac{v^T y_o^g - u^T x_o}{w^T y_o^b}$$

$$\begin{aligned} \frac{v^T y_i^g - u^T x_i}{w^T y_i^b} &\leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ u &> 0 \\ v &> 0 \\ w &> 0, \end{aligned}$$

Z koncepčného modelu odvodíme primárnu úlohu matematického programovania, ktorá bude vyzeráť takto:

$$\max_{\substack{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^k, \\ w \in \mathbb{R}^l}} v^T y_o^g - u^T x_o$$

$$\begin{aligned} w^T y_o^b &= 1 \\ v^T y_i^g - u^T x_i &\leq w^T y_i^b \quad \forall i = 1, \dots, n \\ u &\geq 0 \\ v &\geq 0 \\ w &\geq 0, \end{aligned}$$

a duálna úloha k danej primárnej úlohe bude mať tento tvar:

$$\min_{\substack{s^x \in \mathbb{R}^m, s^{y^g} \in \mathbb{R}^k, \\ s^{y^b} \in \mathbb{R}^l, \lambda \in \mathbb{R}^n, \\ \theta \in \mathbb{R}}} \theta - \epsilon \mathbf{1}^T (s^x + s^{y^g} + s^{y^b})$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x &= x_o \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^b + s^{y^b} &= \theta y_o^b \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^g - s^{y^g} &= y_o^g \\ \lambda &\geq 0 \\ s^x &\geq 0 \\ s^{y^g} &\geq 0 \\ s^{y^b} &\geq 0 \\ \epsilon &> 0. \end{aligned}$$

2.4 Model D

Tento model je akoby prevráteným modelom B, pričom si treba uvedomiť, že účelovú funkciu v tomto prípade nemaximalizujeme, ale naopak minimalizujeme. Minimalizujeme teda súčet vstupov a neželateľných výstupov a maximalizujeme želateľné výstupy. V tomto modeli platí tak ako v predchádzajúcich modeloch, že DMU_o je efektívna práve vtedy, keď $E_o^*(u^*, v^*, w^*) = 1$, inak je to už s mierou efektívnosti. Tá je totiž prevrátenou hodnotou hodnoty účelovej funkcie

Koncepčný model D má teda nasledovný tvar:

$$\min_{\substack{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^k, \\ w \in \mathbb{R}^l}} \frac{u^T x_o + w^T y_o^b}{v^T y_o^g}$$

$$\begin{aligned} \frac{u^T x_i + w^T y_i^b}{v^T y_i^g} &\leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \\ u &> 0 \\ v &> 0 \\ w &> 0, \end{aligned}$$

primárna úloha tento:

$$\min_{\substack{u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^k, \\ w \in \mathbb{R}^l}} u^T x_o + w^T y_o^b$$

$$\begin{aligned} v^T y_o^g &= 1 \\ u^T x_i + w^T y_i^b &\leq v^T y_i^g \quad \forall i = 1, \dots, n \\ u &\geq 0 \\ v &\geq 0 \\ w &\geq 0, \end{aligned}$$

a duálna úloha k danej primárnej úlohe bude mať tento tvar:

$$\max_{\substack{s^x \in \mathbb{R}^m, s^{y^g} \in \mathbb{R}^k, \\ s^{y^b} \in \mathbb{R}^l, \lambda \in \mathbb{R}^n, \\ \theta \in \mathbb{R}}} \theta + \epsilon \mathbf{1}^T (s^x + s^{y^g} + s^{y^b})$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s^x = x_o$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^b + s^{y^b} = y_o^b$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^g - s^{y^g} = \theta y_o^g$$

$$\lambda \geq 0$$

$$s^x \geq 0$$

$$s^{y^g} \geq 0$$

$$s^{y^b} \geq 0$$

$$\epsilon > 0.$$

Kapitola 3

Model centralizovanej alokácie zdrojov

V klasickej úlohe DEA modelov vystupuje n *DMU*s, ktoré sa snažia maximalizovať svoju efektívnosť a každá zvlášť sa premieta na hranicu efektívnosti. V skutočnosti však existujú situácie, kedy viac organizačných jednotiek spadá pod jednu centrálnu jednotku tzv. *CDM* (Central Decision Maker), ktorý chce maximalizovať efektívnosť všetkých jednotiek ako jedného celku. Príkladom takejto situácie sú napr. bankové pobočky, nemocnice, univerzitné katedry, ale aj napr. členské štáty určitej medzinárodnej organizácie alebo organizačné jednotky spadajúce pod určitý regulačný úrad. Tento *CDM* sa popri rešpektovaní efektívnosti jednotlivých jednotiek snaží o celkovú maximalizáciu výstupov a minimalizáciu nákladov. Ide teda istým spôsobom o centralizované rozhodovanie, ktoré zabezpečí väčšiu efektívnosť v rámci daného celku, ako by tomu bolo, keby sa každá *DMU* rozhodovala sama.

Uvedieme si dva modely, ktoré riešia túto situáciu, kedy chceme optimalizovať viacero jednotiek ako jeden celok. Prvý z nich hľadá radiálne zníženie celkovej spotreby každého vstupu a druhý hľadá zníženie každého vstupu zvlášť podľa dopredu zadanej preferenčnej štruktúry. Prvý model budeme nazývať radiálny model centralizovanej alokácie zdrojov a druhý non-radiálny model centralizovanej alokácie zdrojov. V oboch prípadoch je zaručené, že celkové množstvo výstupu sa nezníži. Oba modely sú teda vstupne orientované a v oboch prípadoch budeme uvažovať variabilné výnosy z rozsahu.

V tejto kapitole vychádzame z článku [1]. V tejto kapitole budeme úlohy písať v skalárovom tvare.

3.1 Radiálny model centralizovanej alokácie zdrojov

Tento model bude pozostávať z dvoch fáz. V prvej fáze budeme hľadať rovnomerné znižovanie všetkých vstupov, zatiaľ čo v druhej fáze budeme hľadať zvyšovanie ľubovoľného výstupu alebo znižovanie ľubovoľného vstupu, alebo obe zároveň. Takto sa nám podarí zefektívniť všetky jednotky ako jeden celok namiesto zefektívňovania jednotlivých *DMUs*. Všetky *DMUs* sú teda na efektívnu hranicu premietané zároveň.

Nech $j, r = 1, 2, \dots, n$ sú indexy pre jednotlivé *DMUs*, $i = 1, 2, \dots, m$ sú indexy vstupov, $k = 1, 2, \dots, p$ výstupov. x_{ij} označuje množstvo vstupu i spotrebované jednotkou j a y_{kj} označuje množstvo výstupu k vyprodukovaného jednotkou j . θ označuje radiálne zníženie celkového vstupu a s_i a t_k príslušné doplnkové premenné.

Prvá fáza teda rieši túto úlohu lineárneho programovania:

$$\begin{aligned} \min_{\theta, \lambda} \theta \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} &\leq \theta \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad \forall i \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &\geq \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 \quad \forall r \\ \lambda &\geq 0. \end{aligned}$$

V druhej fáze použijeme optimálnu hodnotu θ^* a budeme maximalizovať súčet sklzov a hľadať optimálne hodnoty λ .

$$\max_{\lambda, s_i, t_k} \sum_{i=1}^m s_i + \sum_{k=1}^p t_k$$

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} &= \theta^* \sum_{j=1}^n x_{ij} - s_i \quad \forall i \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &= \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k \\ \lambda &\geq 0 \\ s_i &\geq 0 \quad \forall i \\ t_k &\geq 0 \quad \forall k. \end{aligned}$$

Dostali sme takto vektor lámdb, ktorý premieta dané *DMUs* na efektívnu hranicu. Nové hodnoty vstupov a výstupov vypočítame pre každú *DMU_r* nasledovne:

$$\begin{aligned} x_{ir}^* &= \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* x_{ij} \quad \forall i, \\ y_{kr}^* &= \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* y_{kj} \quad \forall k. \end{aligned}$$

Mohlo by sa zdať, že ak už niektorá jednotka je efektívna, tak sa premietne na seba samú. V tomto prípade, kedy premietame všetky *DMUs* zároveň, sa však často stane, že efektívne jednotky sa premietnu na iný bod na efektívnej hranici.

Pre lepšie znázornenie tohto modelu si uvedieme jednoduchý príklad.

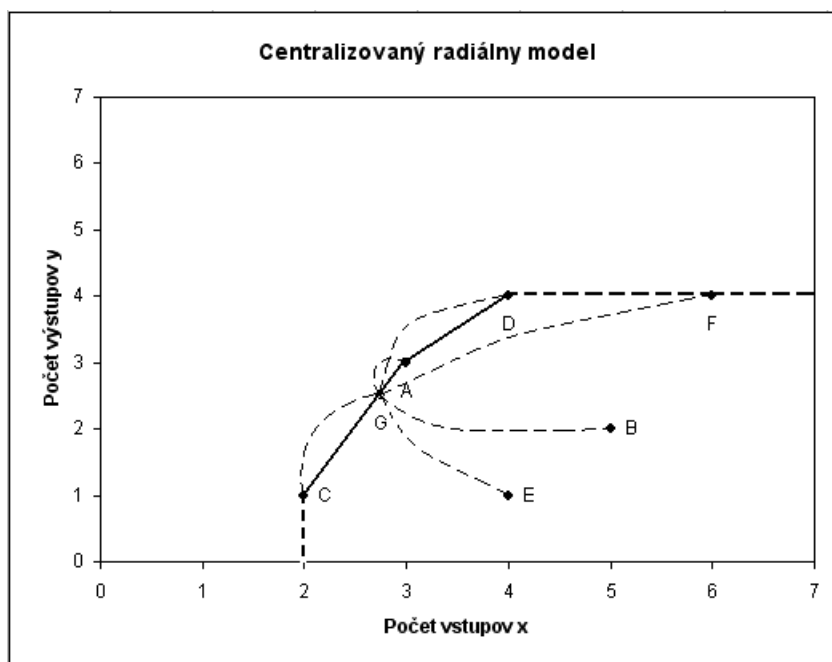
Príklad 3.1:

Majme 6 *DMUs*, ktoré sú zhodné s tými v príklade 1.1. Potrebné údaje máme v nasledovnej tabuľke:

DMU	A	B	C	D	E	F
Počet vstupov x	3	5	2	4	4	6
Počet výstupov y	3	2	1	4	1	4

Keďže máme situáciu s jedným vstupom a jedným výstupom, vieme si ju zobrazit' aj graficky.

Na grafe si môžeme všimnúť, že všetky *DMUs* sa premietli do jedného bodu so súradnicami $x = 2,75$ a $y = 2,5$, nazvali sme ho *G*, ktorý leží na efektívnej hranici a všetky *DMUs* teda majú rovnaké efektívne množstvá vstupov a výstupov. Všimnime si, že celkové množstvo vstupov sa podarilo znížiť z 24 na 16,5 a množstvo výstupov ostalo nezmenené.



Obrázok 3.1: Model s 1 vstupom a 1 výstupom

3.2 Non-radiálny model centralizovanej alokácie zdrojov

Non-radiálny model je opäť dvojfázový. V prvej fáze hľadá znižovanie vstupov podľa vopred zadaných preferencií a v druhej fáze použitím optimálnej hodnoty θ opäť hľadá také lambdy, ktoré premietajú jednotlivé *DMUs* na efektívnu hranicu, opäť však znižujú súčet vstupov všetkých *DMUs* ako jedného *CDM*.

Nech w_i sú vopred zadané preferenčné váhy a θ_i redukčný faktor pre jednotlivé vstupy, potom prvá fáza non-radiálneho modelu bude mať tento tvar:

$$\min_{\lambda, \theta} \sum_{i=1}^m w_i \theta_i$$

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} &\leq \theta_i \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad \forall i \\
\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &\geq \sum_{r=1}^n y_{kr} \quad \forall k \\
\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 \quad \forall r \\
\lambda &\geq 0
\end{aligned}$$

a druhá fáza bude riešiť nasledovnú úlohu:

$$\max_{\lambda, t_k} \sum_{k=1}^p t_k$$

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} &= \theta_i^* \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad \forall i \\
\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} &= \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k \quad \forall k \\
\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 \quad \forall r \\
\lambda &\geq 0 \\
t_k &\geq 0 \quad \forall k.
\end{aligned}$$

V non-radiálnom modeli nie sú potrebné doplnkové premenné pre vstupy, pretože už v prvej fáze sme všetky možné redukcie eliminovali.

Rovnako ako v radiálnom modeli môžeme nájsť nové hodnoty vstupov a výstupov, ktoré premietajú každú DMU_r na efektívnu hranicu.

$$\begin{aligned}
x_{ir}^* &= \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* x_{ij} \quad \forall i, \\
y_{kr}^* &= \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* y_{kj} \quad \forall k.
\end{aligned}$$

V tomto modeli, ako sme už spomínali, môže nastať situácia, kedy sa v záujme celkového zníženia vstupov zvýšia vstupy pre niektorú jednotku. Ak chceme tejto situácii predísť, je potrebné zahrnúť doplňujúce ohraňenie $\theta_i \leq 1 \quad \forall i$.

Model centralizovanej alokácie zdrojov preukazuje dobré výsledky v tom zmysle, že celkové množstvo vstupov je skutočne nižšie, ako keď sa každá *DMU* rozhoduje samostatne. Zaujímavá je však iná vec. V radiálnom modeli sú totiž všetky jednotky premietané do toho istého bodu na efektívnej hranici bez toho, že to model implicitne predpokladá. Táto vlastnosť už pre nás nie je až taká výhodná. Dané výsledky a úvahy budú podrobnejšie rozobrané v ďalšej časti diplomovej práce.

Kapitola 4

Kjótsky protokol a emisný obchodný systém

V tejto kapitole, si objasníme ako je v európskej únii ukotvená snaha znižovať objemy skleníkových plynov a iných škodlivých emisií, ktorá vychádza predovšetkým z Kjótskeho protokolu. Povieme si aj niečo k emisnému obchodnému systému a na príklade si ukážeme jeho výhodnosť. Táto kapitola je spracovaná pomocou údajov z internetovej stránky [7].

Kjótsky protokol k rámcovému dohovoru OSN o zmene klímy je dokument, ktorý vznikol v roku 1997 v japonskom Kjóte a do platnosti vstúpil v roku 2005. Doteraz bol podpísaný 187 krajinami, pričom významnou výnimkou sú USA. Dôvodom vzniku tohto dokumentu sú vedecké výskumy, ktoré predpokladajú zvýšenie priemernej klímy na Zemi z $1,4^{\circ}\text{C}$ v roku 1990 na $5,8^{\circ}\text{C}$ v roku 2100, čo by malo rozsiahle a ničivé následky. Podpísané krajiny sa zaviazali znížiť objem emisií oxidu uhličitého, metánu, oxidu dusného, halogénovaných uhlíkov, perfluorovaných uhlíkov a hexafluoridu síry o 5,2% do roku 2012 v porovnaní s vyprodukovaným objemom v roku 1990. Európska únia, ktorá je producentom 22% všetkých skleníkových plynov na svete a je jedným z najväčších zástancov Kjótskeho protokolu, 31.5.2002 rozhodla, že zníži objem skleníkových plynov dokonca o 8% v porovnaní s rokom 1990 a 10.1.2007 európska komisia ohlásila, že do roku 2020 zníži emisie až o 20%. V rámci Európskej únie si každá krajina určuje Národný alokačný plán, ktorý hovorí o tom, akým spôsobom bude postupovať v jednotlivých etapách znižovania emisií. Tento plán potom musí byť odsúhlasený európskou komisiou na základe kritérií, ktoré sú súčasťou Annex III k smernici o obchode s emisiami a následne je jeho dodržiavanie kontrolované. Národné alokačné plány sa predkladajú v troch etapách. Postupne na obdobie 2005-2007, 2008-2012 a v roku 2013 začne tretia etapa. Všetky alokačné plány musia, samozrejme, dodržiavať znižovanie emisií v takom rozsahu, k

akému sa Európska únia zaviazala, avšak niektoré krajiny volia aj prísnejšie kritéria a zameriavajú sa aj na iné oblasti, ako napríklad doprava.

Európska únia v tomto záujme spustila emisný obchodný systém, ktorý povoľuje obchod s emisnými certifikátmi a tým znižuje ekonomické náklady, ktoré sa viažu so znižovaním emisií skleníkových plynov. Štúdie európskej komisie ukazujú, že emisný obchodný systém je najefektívnejší spôsob, čo sa týka minimalizácie výdavkov na dodržanie Kjótskeho protokolu. Tento cieľ môže byť podľa týchto štúdií splnený s ročnými nákladmi 3,7 mil EUR, čo je menej ako 0,1% HDP v EU, pričom bez tohto systému by boli odhadované náklady asi 6,8 mld EUR. Emisný obchodný systém sa týka šiestich kľúčových odvetví a to: energetického, oceliarskeho, cementárskeho, sklenárskeho, tehliarskeho a papiernického priemyslu a približne 12 000 rôznych tovární, čo predstavuje asi polovicu európskej produkcie CO_2 . Každá krajina teda udeľuje certifikáty jednotlivým odvetviám resp. podnikom tak, aby dodržala protokol ku ktorému sa zaviazala. Tieto firmy musia vydávať ročnú správu, ktorá preukazuje, že neprekročili množstvo certifikátov. S pridelenými certifikátmi potom následne môžu obchodovať. Ich ceny pritom nie sú pevne stanovené, ale riadia sa trhom. Firma, ktorej sa nepodarí naplniť cieľ a množstvo ňou vyprodukovaných emisií prekročí jej množstvo pridelených certifikátov, môže si tieto chýbajúce certifikáty kúpiť u spoločnosti, ktorej sa podarilo znížiť množstvo vyprodukovaných emisií oproti prideleným certifikátom, inak bude vystavená sankciám. Výhodnosť systému ukazuje nasledujúci príklad, uvedený v [7]:

Príklad 4.1:

Majme spoločnosti A a B, pričom obe produkujú 100 000 ton CO_2 emisií ročne. Každá z nich dostane od vlády certifikáty v objeme 95 000 ton. Obe spoločnosti musia znížiť množstvo produkovaných emisií. Na konci roka musia preukázať, že vlastnia väčšie, nanaajvýš rovnaké, množstvo certifikátov ako vypúšťajú emisií, inak budú vystavené pokute 40 EUR za každý chýbajúci certifikát počas rokov 2005-2007 a 100 EUR počas 2008-2012. Obe spoločnosti majú dve možnosti, ako sa s tým vysporiadať, ak nechcú platiť pokutu. Buď znížia množstvá emisií alebo si chýbajúce certifikáty zakúpia. Budú teda vyhodnocovať, ktorá z týchto možností je pre nich ekonomicky výhodnejšia.

Povedzme, že cena za certifikáty odpovedajúce jednej tоне je 10 EUR. Spoločnosť A má náklady na zníženie množstva emisií o jednu tonu vo výške 5 EUR a spoločnosť B vo výške 15 EUR. Pre spoločnosť A je teda výhodnejšie znížiť množstvo emisií a znížiť ich dokonca o 10 000 ton. Pre spoločnosť B je však naopak výhodnejšie zakúpiť si chýbajúce množstvo certifikátov. Spoločnosť A teda stratí na znížení množstva produkovaných emisií

50 000 EUR, ale predajom zvyšných certifikátov rovnakú sumu získa. Táto spoločnosť teda na tom zostane po finančnej stránke rovnako. Bez emisného obchodného systému by bola v strate 25 000 EUR. Spoločnosť B minie 50 000 EUR na nákup chýbajúcich certifikátov. Bez emisného obchodného systému by však bola v strate až 75 000 EUR.

Kritike však môže byť vystavený systém pridelovania emisných certifikátov jednotlivým továrňam. Certifikáty sa totiž často udeľujú na základe princípu starého otca a chýba im teda motivačný prvok. Ide o taký princíp, kedy továrne dostávajú certifikáty na základe množstva vyprodukovaných emisií v uplynulom roku. Takýmto spôsobom však nie sú zvýhodnené továrne, ktoré pracujú najviac eko-efektívne a továrňam sa nevyplatí znižovať počet emisií, pretože by ich v ďalšom roku dostali menej. Snahou vlád by malo byť, aby sa továrne snažili zefektívniť svoju výrobu a takýmto spôsobom znižovali množstvo produkovaných emisií vzhľadom na veľkosť výroby, čo by samozrejme prispelo aj k absolútnemu znižovaniu množstva emisií. V praktickej časti sa snažíme hľadať práve taký mechanizmus udeľovania emisných certifikátov, ktorý by obsahoval tento motivačný prvok a zvýhodňoval tak továrne, ktoré sa najviac dokázali priblížiť k hranici efektívnosti. Ide teda o akýsi pokus nastolenia spravodlivosti do spôsobu pridelovania emisných certifikátov.

Kapitola 5

Modely udeľovania certifikátov s motivačným prvkom

V poslednej časti diplomovej práce si najprv predstavíme dáta, ktoré budeme používať a následne tieto dáta otestujeme na viacerých modeloch. Keďže chceme navrhnúť efektívny spôsob alokácie emisných certifikátov, ktorý by motivoval jednotlivé výrobné jednotky k znižovaniu produkcie CO_2 emisií (skleníkových plynov vo všeobecnosti), čo je vlastne cieľ, s ktorým vznikol Kjótsky protokol, budeme modelovaním pozorovať, ako efektívne jednotlivé *DMUs* využívajú svoje vstupy na produkciu želateľných výstupov pri čo najmenšom objeme neželateľných výstupov. Ako nástroj na to nám budú slúžiť DEA modely, ktoré dokážu dobre porovnávať tieto jednotky s rovnakými vstupmi a výstupmi v rámci jedného celku. Zdá sa nám totiž rozumná myšlienka pridelovania takého množstva certifikátov, ktoré zodpovedá počtu neželateľných výstupov, ktoré premieta danú jednotku na efektívnu hranicu. Týmto spôsobom by sme totiž zabezpečili, že by pridelovanie certifikátov bolo spravodlivejšie, keďže by zohľadňovalo to, ako efektívne sú jednotlivé továrne. Zároveň by ich to motivovalo zefektívniť svoju výrobu, čo znamená znižovať množstvo neželateľných výstupov, odmeňovalo by efektívnejšie továrne a zmizol by prvok momentálneho spôsobu udeľovania certifikátov.

5.1 Dáta

V našom výskume budeme pracovať s údajmi 34 francúzskych cementární. Tieto dáta sú voľne dostupné, pochádzajú z databázy CEMBUREAU, čo je Európske združenie výrobcov cementu a spĺňajú naše požiadavky, teda obsahujú jeden vstup, jeden želateľný a dva neželateľné výstupy, z ktorých jeden budeme zanedbávať. Ďalšou výhodou je, že 34 cementární je už dosta-

točný počet na porovnávanie. Vstupom do našich modelov bude teplota, ktorá je potrebná na výrobu cementu, meraná v MMBtu. Ako želateľný výstup budeme uvažovať objem vyprodukovaného cementu v 1000 tonách. Neželateľné výstupy máme hneď dva. Prvý je CO_2 emisie, ktoré sú rovnako ako druhý neželateľný výstup, škvára, uvádzané v 1000 tonách. Nás však budú zaujímať iba CO_2 emisie, keďže škvára nie je predmetom Kjótskeho protokolu. Všetky tieto údaje sú zobrazené v tabuľke 5.1.

Cementáreň	Teplota v MMBtu	Množstvo cementu v 1000 t	Množstvo emisií v 1000 t	Množstvo škváry v 1000 t
Saint-Piere-la-Cour	3027	1230	755	1014
Heming	2109	844	549	706
Couvrot	2354	1074	541	736
Montalieu	2239	870	518	685
Airvault	2343	1074	516	687
Le Teil	1844	745	462	617
La Malle	1999	662	441	586
Martres	1965	599	407	494
Origny	1843	623	399	528
Cormeilles	1720	541	389	431
Lexos	1466	583	375	491
Beucaire	1465	614	354	490
Lumbres	2107	468	349	377
La Couronne	1283	523	345	430
Grave-de-Peille	1460	580	344	456
Bussac	1373	307	331	460
Havre-Saint-Vigor	1086	430	290	364
Port-la-Nouvelle	955	388	256	320
Rochefort	979	375	255	328
Xeuilley	1088	405	251	319
Beffes	1130	479	249	331
Altkirch	954	375	248	319
Contes	1173	340	242	294
Saint-Egreve	940	400	235	315
Dannes	953	33	210	239
Val-d'Azergues	901	334	201	264
Crechy	728	310	196	244
Frangey	800	272	190	235
Villiers-au-Bonin	732	276	177	245
Ranville	774	338	170	227
Pont-a-vendin	594	135	101	106
Chambery	376	160	92	126
Cruas	330	135	80	110
La Perelle	236	75	52	59

Obrázok 5.1: Údaje francúzskych cementární

5.2 Aplikácia dát na model centralizovanej alokácie zdrojov

Pri aplikácii dát na konkrétny model by nám ako prvé mohlo napadnúť použiť jeden zo základných modelov DEA napr. CCR model, ktorý by bol tak ako v článku [2] rozšírený o neželateľné výstupy. My sa však popri zefektívnení udeľovania certifikátov snažíme znižovať celkové množstvo pridelených certifikátov. Z tohoto dôvodu sa ako dobrý javí model centralizovanej alokácie zdrojov, ktorý sme si predstavili v kapitole 4. Vtedy bol však tento model v tvare, kde neuvažoval neželateľné výstupy. Práve tento nedostatok sa teraz pokúsime odstrániť a zahrnúť do tohto modelu aj neželateľné výstupy. Zároveň bol pôvodný model centralizovanej alokácie zdrojov vstupne orientovaný. My ho však pozmeníme a budeme využívať výstupne orientovaný model, ktorý podobne ako model C z článku [2] uvažuje vstupy a želateľné výstupy ako výstupy a neželateľné výstupy uvažuje ako vstupy. Z dvoch modelov centralizovanej alokácie zdrojov budeme používať ten radiálny, pretože uvažujeme iba jeden neželateľný výstup, ktorý chceme minimalizovať.

Nech $j, r = 1, 2, \dots, n$ sú indexy pre jednotlivé *DMUs*, $i = 1, 2, \dots, u$ sú indexy vstupov, $k = 1, 2, \dots, m$ želateľných výstupov a $l = 1, 2, \dots, p$ neželateľných výstupov. x_{ij} označuje množstvo vstupu i spotrebované jednotkou j , y_{kj}^g označuje množstvo želateľného výstupu k vyprodukovaného jednotkou j a y_{lj}^b označuje množstvo neželateľného výstupu l vyprodukovaného jednotkou j . θ označuje radiálne zníženie celkového vstupu a s_i, t_k^g a t_l^b príslušné doplnkové premenné.

Prvá fáza upraveného modelu centralizovanej alokácie zdrojov bude vyzerať nasledovne:

$$\begin{aligned} & \min_{\lambda, \theta} \theta \\ & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{lj}^b \leq \theta \sum_{j=1}^n y_{lj}^b \quad \forall l \\ & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj}^g \geq \sum_{r=1}^n y_{kj}^g \quad \forall k \\ & \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{r=1}^n x_{ij} \quad \forall i \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r \end{aligned}$$

$$\lambda \geq 0.$$

V druhej fáze využijeme optimálnu hodnotu θ^* a počítame túto úlohu lineárneho programovania:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda, s_i, t_k^g, t_l^b} \quad & \sum_{i=1}^u s_i + \sum_{k=1}^m t_k^g + \sum_{l=1}^p t_l^b \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{lj}^b &= \theta^* \sum_{j=1}^n y_{lj}^b - t_l^b \quad \forall l \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj}^g &= \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k^g \quad \forall k \\ \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} &= \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i \\ \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} &= 1 \quad \forall r \\ \lambda &\geq 0 \\ s_i &\geq 0 \quad \forall i \\ t_k^g &\geq 0 \quad \forall k \\ t_l^b &\geq 0 \quad \forall l. \end{aligned}$$

Teraz môžeme pomocou optimálneho vektora lámabd určiť hodnoty jednotlivých vstupov a výstupov tak, aby premietali každú DMU_r na efektívnu hranicu:

$$\begin{aligned} x_{ir}^* &= \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* x_{ij} \quad \forall i, \\ y_{kr}^{g*} &= \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* y_{kj}^g \quad \forall k, \\ y_{lr}^{b*} &= \sum_{j=1}^n \lambda_{jr}^* y_{lj}^b \quad \forall l. \end{aligned}$$

Hodnoty y_{lr}^{b*} by sme potom použili ako optimálne množstvo certifikátov udelené danej továrni. V tabuľke 5.2 sú zobrazené jednotlivé množstvá vstupov, žiadúcich a nežiadúcich výstupov, ktoré sú efektívne pri použití nami upraveného radiálneho modelu centralizovanej alokácie pre údaje francúzskych cementární.

Keď porovnáme tieto výsledky s pôvodnými množstvami vstupov a výstupov, môžeme si všimnúť viaceré pozitívne vlastnosti modelu. V pôvodnej podobe bol súčet vstupov, ktoré všetky továrne potrebovali 45326 MMBtu, pričom pri použití radiálneho modelu toto číslo kleslo až na 37832 MMBtu. Súčet jednotlivých želateľných výstupov ostal nezmenený a celkové množstvo neželateľných výstupov kleslo z pôvodných 10570 (v tis.) ton na 8319,5 (v tis.) ton. To znamená, že celé odvetvie dokáže pracovať efektívnejšie a rovnaké množstvo želateľného výstupu je možné produkovať pri oveľa nižšom množstve vstupov a neželateľných výstupov. Celkové množstvo neželateľných výstupov sa nám podarilo znížiť až o 21,29%. Pre zaujímavosť môžeme ešte uviesť, že v prvej fáze nám vyšlo $\theta = 0,7871$, čo znamená, že pôvodne bola miera efektívnosti všetkých firiem ako celku 78,71% a hodnoty doplnkových premenných v tomto modeli vyšli $s = 7494,1$, $t^g = 8,8415e - 11$ a $t^b = 1,5378e - 12$.

Zaujímavé sú však iné výsledky, ktoré už neukazujú náš model natoľko dobre. Už príklad 3.1 v kapitole 3 mohol byť v tomto smere výstrahou. Vektory λ sú totiž pre každú továreň totožné. Všetky lambdy sú nulové okrem $\lambda_5 = 0.2159$ a $\lambda_{30} = 0.7841$, ktoré tvoria tú istú referenčnú množinu pre všetky továrne. Týmito referenčnými cementárňami sú Airvault a Ranville. Z tohto dôvodu sa všetky cementárne premietnu na to isté miesto na efektívnej hranici a budú im teda pridelené rovnaké efektívne množstvá vstupov a výstupov a preto by podľa nami upraveného radiálneho centralizovaného modelu mali mať pridelené rovnaké množstvo emisných certifikátov tak, ako je to vidieť v tabuľke 5.2. Je však otázne či je realizovateľný takýto postup. Zabezpečuje síce minimalizáciu nežiadúcich výstupov, ale na druhej strane je ekonomicky neprijateľné, aby sme prideliť najväčšej továrni Saint-Piree-la-Cour, ktorá produkuje pôvodne 755 (v tis.) ton emisií rovnaké množstvo emisných certifikátov ako najmenšej cementárni La Perelle, ktorá produkuje 52 (v tis.) ton emisií. Tento postup by totiž tieto cementárne netrestal (resp. neodmeňoval) za neefektívnosť (resp. efektívnosť) výroby, ale za veľkosť výroby, čo by veľké cementárne položilo a malé bezdôvodne a neprimerane zvýhodnilo. Zároveň by sa tým strácal motivačný prvok, ktorý je v našom návrhu prerozdelenia certifikátov kľúčový. Ako totiž vidno z tabuľky 5.3, cementáreň Saint-Piree-la-Cour je na rozdiel od cementárne Pont-a-Vendin eko-efektívna. V tabuľke 5.2 však vidíme, že Saint-Piree-la-Cour dostane výrazne menej certifikátov ako minulý rok, naopak Pont-a-Vendin dostane certifikátov viac. Je teda potrebné nájsť iný mechanizmus ako tieto certifikáty prerozdeliť.

	Teplota v MMBtu	Množstvo cementu v 1000 t	Množstvo emisií v 1000 t
Saint-Piree-la-Cour	1112,70	496,88	244,69
Heming	1112,70	496,88	244,69
Couvrot	1112,70	496,88	244,69
Montalieu	1112,70	496,88	244,69
Airvault	1112,70	496,88	244,69
Le Teil	1112,70	496,88	244,69
La Malle	1112,70	496,88	244,69
Martres	1112,70	496,88	244,69
Origny	1112,70	496,88	244,69
Cormeilles	1112,70	496,88	244,69
Lexos	1112,70	496,88	244,69
Beaucaire	1112,70	496,88	244,69
Lumbres	1112,70	496,88	244,69
La Couronne	1112,70	496,88	244,69
Grave-de-Peille	1112,70	496,88	244,69
Bussac	1112,70	496,88	244,69
Havre-Saint-Vigor	1112,70	496,88	244,69
Port-la-Nouvelle	1112,70	496,88	244,69
Rochefort	1112,70	496,88	244,69
Xeuilley	1112,70	496,88	244,69
Beffes	1112,70	496,88	244,69
Altkirch	1112,70	496,88	244,69
Contes	1112,70	496,88	244,69
Saint-Egreve	1112,70	496,88	244,69
Dannes	1112,70	496,88	244,69
Val-d'Azergues	1112,70	496,88	244,69
Crechy	1112,70	496,88	244,69
Frangey	1112,70	496,88	244,69
Villiers-au-Bonin	1112,70	496,88	244,69
Ranville	1112,70	496,88	244,69
Pont-a-Vendin	1112,70	496,88	244,69
Chambery	1112,70	496,88	244,69
Cruas	1112,70	496,88	244,69
La Perelle	1112,70	496,88	244,69

Obrázok 5.2: Upravený model centralizovanej alokácie

5.3 Aplikácia dát na model centralizovanej alokácie zdrojov s ohraničeniami

Možnosťou, ako zamedziť predchádzajúcemu prípadu, kedy bolo všetkým cementárňam pridelené rovnaké množstvo emisných certifikátov, by mohlo byť zaviesť do upraveného radiálneho centralizovaného modelu isté ohraničenia. Tie by zabezpečili to, že množstvá neželateľných výstupov a tým pádom

aj udelených certifikátov by sa nemohli meniť o viac alebo menej ako o určitú stanovenú hranicu. Túto hranicu by sme chceli stanoviť tak, aby model zohľadňoval eko-efektívnosť *DMUs*. Eko-efektívnejšie *DMUs* by mali užší interval, v ktorom by sa nové množstvá neželateľných výstupov pohybovali. V tom prípade by im nemohlo byť udelené nižšie množstvo emisných certifikátov ako vopred stanovené dolné ohraničenie. Tie jednotky, ktoré nie sú natoľko eko-efektívne a majú väčšiu rezervu, by mali širší interval. To by zabezpečovalo, že množstvo certifikátov im môže byť znížené výraznejšie.

V prvej fáze tohto modelu budeme teda počítat eko-efektívnosť jednotlivých *DMUs* pomocou modelu C, ktorý sme uviedli v kapitole 3, upraveného pre variabilné výnosy z rozsahu. Táto úprava je presne uvedená v časti 6.4 tejto diplomovej práce. Podľa výsledkov potom rozdelíme všetky *DMUs* do 4 kategórií. Tie, ktorých efektívnosť bude v intervale $\langle 0; 0,7 \rangle$ budú mať pridelené $H = 1,15$ a $D = 0,85$, v intervale $(0,7; 0,8)$ budú mať pridelené $H = 1,1$ a $D = 0,9$, v intervale $(0,8; 0,9)$ budú mať pridelené $H = 1,07$ a $D = 0,93$ a tie z intervalu $(0,9; 1)$ budú mať $H = 1$ a $D = 1$. Samozrejme, nastavenie počtu kategórií, intervalov ich rozdelenia ako aj samotných ohraničení H a D môže byť predmetom dlhšej diskusie a pri iných využitíach tohto modelu môže byť rozdielne. V našom prípade toto rozdelenie rešpektuje požiadavku, aby sme žiadnej cementárni neznížili množstvo certifikátov o viac ako 15%, pretože by to pre ňu mohlo byť príliš likvidačné.

Po nájdení vektorov ohraničení ich môžeme zaviesť do upraveného modelu centralizovanej alokácie, ktorého prvá fáza bude v tom prípade vyzerat nasledovne:

$$\begin{aligned}
& \min_{\lambda, \theta} \theta \\
& \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{lj}^b \leq \theta \sum_{j=1}^n y_{lj}^b \quad \forall l \\
& \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj}^g \geq \sum_{r=1}^n y_{kj}^g \quad \forall k \\
& \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} \leq \sum_{r=1}^n x_{ij} \quad \forall i \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{lj}^b \leq H_r y_{lr}^b \quad \forall r, l \\
& \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{lj}^b \geq D_r y_{lr}^b \quad \forall r, l
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r$$

$$\lambda \geq 0.$$

Druhá fáza má tento tvar:

$$\max_{\lambda, s_i, t_k^g, t_l^b} \sum_{i=1}^u s_i + \sum_{k=1}^m t_k^g + \sum_{l=1}^p t_l^b$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{lj}^b = \theta^* \sum_{j=1}^n y_{lj}^b - t_l^b \quad \forall l$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj}^g = \sum_{r=1}^n y_{kr} + t_k^g \quad \forall k$$

$$\sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \sum_{r=1}^n x_{ir} - s_i \quad \forall i$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{lj}^b \leq H_r y_{lr}^b \quad \forall r, l$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{lj}^b \geq D_r y_{lr}^b \quad \forall r, l$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r$$

$$\lambda \geq 0$$

$$s_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$t_k^g \geq 0 \quad \forall k$$

$$t_l^b \geq 0 \quad \forall l.$$

Nové hodnoty vstupov a výstupov potom vypočítame rovnako ako v predchádzajúcom prípade.

V tabuľkách 5.3 a 5.4 sú uvedené hodnoty eko-efektívnosti, príslušnosti k jednotlivým kategóriám cez vyjadrenie najväčšieho možného zníženia množstva certifikátov na základe ohraničení, nové hodnoty jednotlivých vstupov a výstupov a taktiež percentuálne zníženie množstva emisií oproti pôvodným údajom po aplikovaní modelu s ohraničeniami na údaje francúzskych cementárni pre všetky *DMUs*.

Aj v tomto prípade sa podarilo znížiť celkový počet vstupov z pôvodných 45326 MMBtu na 39043 MMBtu. Počet želateľných výstupov ostal

opäť nezmenený a celkový počet neželateľných výstupov sa podarilo znížiť z 10570 (v tis.) ton emisií na 9773,3 (v tis.) ton. V každom rozmere sa nám podarilo dosiahnuť lepšie, nanajvýš rovnaké, výsledky, ako boli pôvodné. Celé odvetvie teda zefektívnilo svoju výrobu a podarilo sa nám aj znížiť celkové množstvo emisií o 7,5371%. Keďže cieľom Európskej únie je 8%-né zníženie, náš výsledok je veľmi dobrý. Môžeme si opäť uviesť hodnoty jednotlivých premenných. $\theta = 0.9246$, $s = 6282,6$, $t^g = 1,4165e - 8$ a $t^b = 7,6568e - 13$, z čoho môžeme opäť vidieť mieru efektívnosti 92,46%. Vďaka obmedzeniam sú už teraz hodnoty jednotlivých λ rozdielne. Všimnime si teraz jednotlivé referenčné cementárne. Pre cementárne Saint-Piree-la-Cour, Couvrot, Pont-a-Vendin, Chambéry a Cruas sú referenčné len ony samé. Pre prvých 22 cementární (neuvažujúc Saint-Piree-la-Cour a Couvrot) sú referenčnými Couvrot, La Couronne a Crechy. Pre ďalších 6 cementární sú to cementárne Chambéry a Crechy. Pre cementáreň Pont-a-Vendin sú referenčnými cementárne Chambéry a Craus. Tieto rozdiely vo vektoroch λ sa pozitívne prejavili aj v efektívnych množstvách vstupov a výstupov, ktoré už nie sú rovnaké. To je samozrejme pozitívny výsledok, keďže sa nám podarilo eliminovať nedostatok pôvodného modelu. Jednotlivým cementárňam tak udelíme rôzne množstvá emisných certifikátov.

Za povšimnutie stojí to, že keď si pozrieme percentuálne zníženie objemu emisií, tak tieto čísla presne zodpovedajú maximálnej novej miere zníženia podľa ohraničení. To potom vyvoláva otázku, načo zbytočne zložito počítať množstvo certifikátov cez upravený radiálny centralizovaný model, keď nám stačí určiť jednotlivé kategórie a pomocou spodnej hranice prideliť cementárňam množstvo certifikátov na základe minuloročných výsledkov. Pri inak zvolených ohraničeniach však už tieto množstvá nevychádzajú rovnako ako pri pre násobení spodnou hranicou (môžeme si to všimnúť na obrázku 5.5, kde H označuje spodnú hranicu maximálneho možného zníženia a KAT znamená výsledky pre aktuálny vektor ohraničení podľa stanovených kategórií, pričom všetky hodnoty v tabuľke predstavujú percentuálne zníženie množstva certifikátov pri daných ohraničeniach) a inak tomu môže byť aj pri rozdielnych dátach. Prínosom tohto modelu je to, že cementárne skutočne dostali počet certifikátov udelený na základe eko-efektívnosti a zároveň sme zamedzili príliš drastickému znižovaniu medzi dvomi nasledujúcimi obdobiami. Prínosom je taktiež to, že štát nemusí dávať cementárskemu odvetviu vopred zvolenú čiastku, ktorú si jednotlivé podniky medzi sebou rozdelia, ale dokáže na základe tohto modelu vypočítať, aké množstvo udeliť pre toto odvetvie.

	Eko-efektívnosť	Najväčšie povolené percentuálne zníženie
Saint-Piree-la-Cour	1,000	0
Heming	0,743	10
Couvrot	0,954	0
Montalieu	0,811	7
Airvault	1,000	0
Le Teil	0,782	10
La Malle	0,731	10
Martres	0,719	10
Origny	0,762	10
Cormeilles	0,682	15
Lexos	0,760	10
Beaucaire	0,847	7
Lumbres	0,662	15
La Couronne	0,745	10
Grave-de-Peille	0,825	7
Bussac	0,472	15
Havre-Saint-Vigor	0,735	10
Port-la-Nouvelle	0,756	10
Rochefort	0,735	10
Xeuilley	0,803	7
Beffes	0,949	0
Altkirch	0,756	10
Contes	0,706	10
Saint-Egreve	0,847	7
Dannes	0,792	10
Val-d'Azergues	0,837	7
Crechy	0,803	7
Frangey	0,739	10
Villiers-au-Bonin	0,803	7
Ranville	1,000	0
Pont-a-Vendin	0,781	10
Chambery	1,000	0
Cruas	1,000	0
La Perelle	1,000	0

Obrázok 5.3: Upravený model centralizovanej alokácie s ohraňčeniami

	Teplota v MMBtu	Množstvo cementu v 1000 t	Množstvo emisií v 1000 t	Percentuálne zníženie množstva certifikátov
Saint-Piree-la-Cour	3027,000	1230,000	755,000	0
Heming	2114,518	955,493	494,100	10
Couvrot	2354,000	1074,000	541,000	0
Montalieu	2051,532	924,362	481,740	7
Airvault	2229,048	1012,977	516,000	0
Le Teil	1718,335	760,530	415,800	10
La Malle	1624,059	714,547	396,900	10
Martres	1473,834	642,013	366,300	10
Origny	1439,113	625,443	359,100	10
Cormeilles	1305,241	562,611	330,650	15
Lexos	1336,930	577,307	337,500	10
Beucaire	1298,648	559,561	329,220	7
Lumbres	1153,016	493,687	296,650	15
La Couronne	1214,035	520,976	310,500	10
Grave-de-Peille	1256,283	540,131	319,920	7
Bussac	1086,879	464,550	281,350	15
Havre-Saint-Vigor	1000,374	426,955	261,000	10
Port-la-Nouvelle	871,934	371,726	230,400	10
Rochefort	868,178	370,118	229,500	10
Xeuilley	884,595	377,150	233,430	7
Beffes	949,860	405,182	249,000	0
Altkirch	841,907	358,885	223,200	10
Contes	819,412	349,275	217,800	10
Saint-Egreve	822,539	350,612	218,550	7
Dannes	704,308	299,904	189,000	10
Val-d'Azergues	697,302	296,918	186,930	7
Crechy	681,563	290,212	182,280	7
Frangey	643,385	273,942	171,000	10
Villiers-au-Bonin	621,757	264,726	164,610	7
Ranville	640,000	272,500	170,000	0
Pont-a-Vendin	371,783	157,708	90,900	10
Chambery	376,000	160,000	92,000	0
Cruas	330,000	135,000	80,000	0
La Perelle	236,000	75,000	52,000	0

Obrázok 5.4: Upravený model centralizovanej alokácie s ohraňeniami

cementaren	H=20	H=25	H=30	H=50	H=200	KAT	2*KAT	3*KAT	bez ohr.
Saint-Piree-la-Cour	20,000	25,000	30,000	46,111	65,205	0,000	0,000	0,000	67,590
Herning	20,000	24,302	27,219	41,979	53,060	10,000	20,000	28,923	55,430
Couvrot	20,000	24,291	27,164	41,730	52,385	0,000	0,000	0,000	54,770
Montalieu	20,000	24,258	26,994	40,981	50,316	7,000	14,000	19,927	52,762
Airvault	20,000	24,255	26,979	40,913	50,127	0,000	0,000	0,000	52,579
Le Teil	20,000	24,166	26,533	38,686	44,334	10,000	20,000	28,719	47,036
La Malle	20,000	24,126	26,340	37,504	41,668	10,000	20,000	28,658	44,514
Martres	20,000	24,052	25,987	34,990	36,733	10,000	20,000	28,545	39,879
Origny	20,000	24,033	25,893	34,265	35,444	10,000	20,000	28,515	38,674
Cormeilles	20,000	24,007	25,768	33,273	33,756	15,000	30,000	43,291	37,097
Lexos	20,000	23,970	25,577	31,713	31,239	10,000	20,000	28,415	34,749
Beucaire	20,000	23,906	25,243	28,943	27,091	7,000	14,000	19,404	30,878
Lumbres	20,000	23,890	25,153	28,199	26,031	15,000	30,000	42,952	29,888
La Couronne	20,000	23,876	25,078	27,579	25,161	10,000	20,000	28,263	29,075
Grave-de-Pelle	20,000	23,873	25,058	27,420	24,940	7,000	14,000	19,355	28,869
Bussac	20,000	23,825	24,784	25,222	21,955	15,000	30,000	42,624	26,075
Havre-Saint-Vigor	20,000	23,631	23,474	16,373	10,865	10,000	20,000	27,815	15,623
Port-la-Nouvelle	20,000	23,341	20,983	6,234	-0,345	10,000	20,000	26,980	4,417
Rochefort	20,000	23,327	20,866	5,888	-0,702	10,000	20,000	26,924	4,042
Xeuilley	20,000	23,266	20,361	4,473	-2,147	7,000	14,000	18,556	2,513
Beffes	20,000	23,231	20,085	3,746	-2,880	0,000	0,000	0,000	1,730
Altkirch	20,000	23,212	19,941	3,377	-3,250	10,000	20,000	26,374	1,334
Contes	20,000	23,066	18,981	1,096	-5,507	10,000	20,000	25,580	-1,112
Saint-Egreve	20,000	22,768	17,640	-1,728	-8,230	7,000	14,000	18,161	-4,124
Dannes	20,000	17,097	10,764	-13,488	-18,589	10,000	20,000	16,491	-16,520
Val-d'Azergues	20,000	13,603	7,489	-18,451	-22,417	7,000	14,000	12,201	-21,737
Crechy	20,000	11,441	5,489	-21,372	-24,794	7,000	14,000	10,274	-24,843
Frangey	20,000	8,631	2,919	-24,995	-28,046	10,000	20,000	8,179	-28,785
Villiers-au-Bonin	20,000	1,917	-3,291	-32,849	-37,290	7,000	14,000	1,542	-38,244
Ranville	20,000	-1,997	-6,992	-36,733	-42,163	0,000	0,000	0,000	-43,936
Pont-a-Vendin	20,000	-25,000	-30,000	-50,000	-75,280	10,000	20,000	-30,000	-142,269
Chambery	20,000	-25,000	-30,000	-50,000	-85,109	0,000	0,000	0,000	-165,970
Cruas	20,000	-25,000	-30,000	-50,000	-112,533	0,000	0,000	0,000	-205,865
La Perelle	0,000	-25,000	-30,000	-50,000	-200,000	0,000	0,000	0,000	-370,561

Obrázok 5.5: Výsledky modelu pre rôzne ohraňovania

5.4 Aplikácia dát na model centralizovanej alokácie zdrojov s váhami

Predstavíme si teraz ďalšiu možnosť, pomocou ktorej budeme chcieť dosiahnuť čo možno najväčšie zníženie celkového množstva emisií, ktoré by však zároveň zohľadňovalo efektívnosť jednotlivých cementární. Súčet všetkých pridelených certifikátov z radiálneho modelu, ktorý zabezpečuje maximálne možné efektívne zníženie emisií by sme brali ako balík, ktorý prerozdělíme

jednotlivým cementárňam na základe vhodne zvolených váh. Ako rozumné sa javí určiť váhy ako pomer efektívnej hodnoty neželateľných výstupov jednotlivých cementární k celkovej sume efektívneho množstva neželateľných výstupov z modelu C z kapitoly 2, ktorý však mierne upravíme pre variabilné výnosy z rozsahu. V prvej fáze budeme počítať túto úlohu lineárneho programovania pre každú cementáreň:

$$\min_{\theta, \lambda, s, t^g, t^b} \theta - \epsilon \mathbf{1}^T (s + t^g + t^b)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + s &= x_o \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^b + t^b &= \theta y_o^b \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^g - t^g &= y_o^g \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i &= 1 \\ \lambda &\geq 0 \\ s &\geq 0 \\ t^g &\geq 0 \\ t^b &\geq 0 \\ \epsilon &> 0. \end{aligned}$$

Následne vypočítame efektívne množstvá neželateľných výstupov pre jednotlivé cementárne pomocou príslušných vektorov lámdb týmto spôsobom:

$$y_o^{b*} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^* y_j^b.$$

Ak už poznáme tieto množstvá, môžeme ich použiť na výpočet váh (označíme ich v) pre každú cementáreň tým, že vypočítame jej podiel na celkovom efektívnom množstve neželateľných výstupov takto:

$$v_i = \frac{y_i^{b*}}{\sum_{j=1}^n y_j^{b*}} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Nakoniec pomocou vypočítaných váh určíme množstvá emisných certifikátov (označíme ich c) pre všetky cementárne:

$$c_i = K v_i \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

kde K je konštanta, ktorá sa rovná výslednému súčtu všetkých neželateľných výstupov z radiálneho centralizovaného modelu bez ohraničení, čo je v našom prípade $K = 8319,5$.

Tento postup by tak mal maximálne znížiť množstvo emisií, keďže rozdeľované množstvo je počítané centralizovaným modelom, s ohľadom na efektívnosť jednotlivých cementární, pretože jednotlivé váhy sú počítané pomocou upraveného modelu C. V tabuľke 5.6 vidíme efektívne množstvá neželateľných výstupov z modelu C, váhy pre jednotlivé *DMUs*, aké množstvá certifikátov by sme cementárňam prideliť použitím tohto modelu a percentuálne zníženie pridelených certifikátov oproti pôvodnému množstvu neželateľných výstupov.

Keďže celkové množstvo prerozdelených certifikátov ostáva rovnaké ako v prípade radiálneho centralizovaného modelu, napriek tomu, že ho prerozdelujeme jednotlivým cementárňam oveľa spravodlivejšie, je otázne či si so znížením neželateľných výstupov na úrovni 21,2914% (pre celok) dokážu poradiť všetky cementárne. Niektoré budú musieť totiž ich množstvo radikálne znížiť. Všimnime si napríklad cementáreň Bussac, ktorá bude musieť znížiť množstvo emisií z pôvodných 331 (v tis.) ton až na 152,5871, čo je až viac ako o 50%. Taktiež cieľom Európskej únie nie je až také drastické znižovanie emisií skleníkových plynov.

	Efektívne množstvá neželateľných výstupov	Váhy	Množstvo certifikátov	Percentuálne zníženie množstva certifikátov
Saint-Piree-la-Cour	755,000	0,0887	738,051	2,245
Heming	407,875	0,0479	398,718	27,374
Couvrot	516,000	0,0606	504,416	6,762
Montalieu	420,098	0,0494	410,667	20,721
Airvault	516,000	0,0606	504,416	2,245
Le Teil	361,334	0,0425	353,222	23,545
La Malle	322,315	0,0379	315,079	28,553
Martres	292,698	0,0344	286,127	29,698
Origny	303,981	0,0357	297,157	25,525
Cormeilles	265,432	0,0312	259,473	33,297
Lexos	285,177	0,0335	278,775	25,660
Beucaire	299,750	0,0352	293,021	17,226
Lumbres	231,114	0,0272	225,926	35,265
La Couronne	256,970	0,0302	251,201	27,188
Grave-de-Peille	283,766	0,0333	277,396	19,362
Bussac	156,091	0,0183	152,587	53,901
Havre-Saint-Vigor	213,250	0,0251	208,463	28,116
Port-la-Nouvelle	193,505	0,0227	189,161	26,109
Rochefort	187,394	0,0220	183,187	28,162
Xeuilley	201,497	0,0237	196,974	21,524
Beffes	236,285	0,0278	230,981	7,237
Altkirch	187,394	0,0220	183,187	26,134
Contes	170,940	0,0201	167,103	30,949
Saint-Egreve	199,147	0,0234	194,676	17,159
Dannes	166,411	0,0196	162,675	22,536
Val-d'Azergues	168,205	0,0198	164,429	18,194
Crechy	157,437	0,0185	153,903	21,478
Frangey	140,388	0,0165	137,236	27,770
Villiers-au-Bonin	142,183	0,0167	138,991	21,474
Ranville	170,000	0,0200	166,184	2,245
Pont-a-Vendin	78,920	0,0093	77,148	23,615
Chambery	92,000	0,0108	89,935	2,245
Cruas	80,000	0,0094	78,204	2,245
La Perelle	52,000	0,0061	50,833	2,245

Obrázok 5.6: Upravený radiálny centralizovaný model s váhami

5.5 Aplikácia dát na model C s ohraničeniami

Nedostatky predchádzajúceho modelu s váhami by sme mohli odstrániť zavedením ohraničení do modelu C, ktoré by zabezpečili, že by sme neudelili cementárňam také váhy, ktoré by spôsobovali neúnosné zníženie množstva certifikátov. Prvá fáza tohto modelu by potom vyzerala nasledovne:

$$\min_{\theta, \lambda, s, t^g, t^b} \theta - \epsilon \mathbf{1}^T (s + t^g + t^b)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^b + t^b &= \theta y_o^b \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^g - t^g &= y_o^g \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^b &\leq H y_o^b \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^b &\geq D y_o^b \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i &= 1 \\
\lambda &\geq 0 \\
s &\geq 0 \\
t^g &\geq 0 \\
t^b &\geq 0 \\
\epsilon &> 0.
\end{aligned}$$

Voľba ohraňení by záležala na tom, aké maximálne možné zníženie emisných certifikátov by sme pokladali pre cementárne za únosné. V tomto prípade volíme $H = 1,1$ a $D = 0,9$.

Efektívne množstvá neželateľných výstupov ako aj váhy a samotné množstvá emisných certifikátov by sa už počítali rovnakým spôsobom. Diskutovať by sa dalo ešte o určení koeficientu K , ktorý by sa dal nastaviť tak, aby predstavoval množstvo certifikátov z minulého roka, znížené o 8%, čiže $K=9724,4$. V tabuľkách 5.7 a 5.8 môžeme vidieť efektívne množstvá neželateľných výstupov podľa modelu C s ohraňeniami, percentuálne zníženie neželateľných výstupov po zavedení ohraňení, váhy pre každú *DMU*, udelené množstvo certifikátov a aká by bola percentuálna zmena v množstve certifikátov pre jednotlivé *DMUs*. Môžeme si všimnúť, že tie *DMUs*, ktorých efektívne množstvo certifikátov pri modeli C bez ohraňení bolo menšie ako 90% z pôvodného množstva, dosiahli práve spodnú hranicu, čiže 10%-nú zmenu efektívneho množstva emisií. Naopak, tie, ktorých efektívne množstvo certifikátov pri modeli C bez ohraňení bolo väčšie ako 90%, dosiahli práve také množstvo ako v modeli bez ohraňení. Výhodou tohto modelu je možnosť určiť, o koľko má celé odvetvie znížiť množstvo emisií. Nevýhodou však je, že všetky *DMUs*, ktorých eko-efektívnosť je menšia ako 0,9 dosahujú spodné ohraňenie. Tým pádom jednotky, ktoré by mali napr. efektívnosť 0,1 sú

oproti tým, čo by mali 0,89 veľmi zvýhodnené.

	Efektívne množstvá neželateľných výstupov	Zníženie množstva emisíí	Váhy
Saint-Piree-la-Cour	755,000	0,00	0,0777
Heming	494,100	10,00	0,0508
Couvrot	516,000	4,62	0,0531
Montalieu	466,200	10,00	0,0480
Airvault	516,000	0,00	0,0531
Le Teil	415,800	10,00	0,0428
La Malle	396,900	10,00	0,0408
Martres	366,300	10,00	0,0377
Origny	359,100	10,00	0,0369
Cormeilles	350,100	10,00	0,0360
Lexos	337,500	10,00	0,0347
Beaucaire	318,600	10,00	0,0328
Lumbres	314,100	10,00	0,0323
La Couronne	310,500	10,00	0,0319
Grave-de-Peille	309,600	10,00	0,0318
Bussac	297,900	10,00	0,0306
Havre-Saint-Vigor	261,000	10,00	0,0268
Port-la-Nouvelle	230,400	10,00	0,0237
Rochefort	229,500	10,00	0,0236
Xeuilley	225,900	10,00	0,0232
Beffes	236,285	5,11	0,0243
Altkirch	223,200	10,00	0,0230
Contes	217,800	10,00	0,0224
Saint-Egreve	211,500	10,00	0,0218
Dannes	189,000	10,00	0,0194
Val-d'Azergues	180,900	10,00	0,0186
Crechy	176,400	10,00	0,0181
Frangey	171,000	10,00	0,0176
Villiers-au-Bonin	159,300	10,00	0,0164
Ranville	170,000	0,00	0,0175
Pont-a-Vendin	90,900	10,00	0,0094
Chambery	92,000	0,00	0,0095
Cruas	80,000	0,00	0,0082
La Perelle	52,000	0,00	0,0053

Obrázok 5.7: Model C s ohraňčeniami

	Množstvo certifikátov	Zníženie množstva certifikátov
Saint-Piree-la-Cour	755,281	-0,037
Heming	494,284	9,967
Couvrot	516,192	4,586
Montalieu	466,373	9,967
Airvault	516,192	-0,037
Le Teil	415,955	9,967
La Malle	397,048	9,967
Martres	366,436	9,967
Origny	359,234	9,967
Cormeilles	350,230	9,967
Lexos	337,625	9,967
Beaucaire	318,718	9,967
Lumbres	314,217	9,967
La Couronne	310,615	9,967
Grave-de-Peille	309,715	9,967
Bussac	298,011	9,967
Havre-Saint-Vigor	261,097	9,967
Port-la-Nouvelle	230,486	9,967
Rochefort	229,585	9,967
Xeuilley	225,984	9,967
Beffes	236,373	5,071
Altkirch	223,283	9,967
Contes	217,881	9,967
Saint-Egreve	211,579	9,967
Dannes	189,070	9,967
Val-d'Azergues	180,967	9,967
Crechy	176,466	9,967
Frangey	171,064	9,967
Villiers-au-Bonin	159,359	9,967
Ranville	170,063	-0,037
Pont-a-Vendin	90,934	9,967
Chambery	92,034	-0,037
Cruas	80,030	-0,037
La Perelle	52,019	-0,037

Obrázok 5.8: Model C s ohraničeniami

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo nájsť spôsob prerozdelenia emisných certifikátov, ktorý by motivoval jednotlivé výrobné jednotky zefektívňovať svoju výrobu. Zároveň cieľom Európskej únie je 8%-né zníženie skleníkových plynov, ktoré by nebolo pre priemyselnú výrobu likvidačné. V praktickej časti diplomovej práce sme mali za cieľ nájsť model, ktorý by spájal tieto dve požiadavky. V teoretickej časti bolo cieľom spísať potrebnú teóriu na pochopenie zložitejších modelov.

V prvej (teoretickej) časti diplomovej práce sme sa zoznámili s pojmami a základnými modelmi DEA. Niektoré jednoduché úlohy sme riešili aj graficky. Zaoberali sme sa tiež rozšírením základných modelov o neželateľné výstupy a predstavili sme si model centralizovanej alokácie zdrojov ako základný model, z ktorého budeme vychádzať.

V ďalšej časti sme si predstavili ciele Európskej únie v oblasti znižovania emisií, základné fungovanie Emisného obchodného systému a momentálnu situáciu ohľadom spôsobu pridelovania emisných certifikátov.

V poslednej (praktickej) časti diplomovej práce sme najprv upravili a na dáta aplikovali model centralizovanej alokácie zdrojov, pretože tento model hľadá najväčšie možné zníženie neželateľných výstupov pre celé odvetvie a zároveň premieta všetky *DMUs* na efektívnu hranicu. Stretli sme sa však dvoma problémami. Model síce premietol všetky *DMUs* na efektívnu hranicu, premietol ich však do jedného bodu, čím sa stratila schopnosť odmeňovať cementárne na základe efektivity, keďže by sme všetkým pridelili presne rovnaké množstvo. Niektoré neefektívne cementárne teda dostali dokonca viac certifikátov, ako minulý rok vyprodukovali neželateľných výstupov a niektoré efektívne práve naopak. Taktiež celkové množstvo, o ktoré sa znížil objem emisií CO_2 bolo výrazne vyššie, ako je naším cieľom.

Z toho dôvodu sme sa rozhodli rozšíriť tento model a zaviesť ohraničenia, ktoré by zabezpečovali pridelenie emisných certifikátov jednotlivým *DMUs* v určitom intervale, ktorý by na jednej strane zohľadňoval ich eko-efektívnosť a na druhej strane by zamedzoval príliš veľkému zníženiu množstva certifikátov, ktoré by cementáreň nebola schopná zniesť. Výhodou tohto modelu teda je,

že cementárne majú motiváciu zvyšovať svoju eko-efektívnosť, keďže tá sa priamo zohľadňuje pri určovaní ohraničení. V rámci týchto ohraničení model ešte hľadá maximálne možné zníženie množstva certifikátov pre celé odvetvie. Keď nastavíme ohraničenia tak, že budú zvládnuteľné pre všetky jednotky, nemusíme nutne požadovať 8%-né zníženie. V našom prípade sa nám však podarilo približne túto hranicu dosiahnuť. Výhodou tohto modelu je aj to, že pôvodný radiálny model centralizovanej alokácie zdrojov premieta jednotky na hranicu efektívnosti.

Pre zaujímavosť sme si ešte uviedli centralizovaný model s váhami. Váhy sa vypočítali z upraveného modelu C, ktorý obsahoval neželateľné výstupy. Tento model bol zrejme najspravodlivejší v zmysle zohľadnenia efektívnosti jednotlivých *DMUs*, taktiež zabezpečoval najväčšie možné zníženie neželateľných výstupov v rámci odvetvia. Výraznými nevýhodami však bolo, že požadované celkové zníženie bolo príliš veľké a taktiež udeľovanie certifikátov iba na základe efektívnosti jednotlivých cementární bez ohraničení by bolo pre niektoré príliš likvidačné.

Zavedením ohraničení do modelu C a prerozdelením certifikátov nie cez radiálny model, ale pevne stanoveného množstva, ktoré bolo o 8% nižšie ako pôvodné množstvo neželateľných výstupov sme odstránili nedostatky predošlého modelu. Tento model má však aj isté nevýhody, ktoré už boli spomenuté. Pevným stanovením ohraničení totiž nerozlišuje medzi jednotkami, ktoré ho prekročia iba o málo a tými, ktoré ho prekročia výrazne. Taktiež prerozdeľovaním pevného množstva sa stráca minimalizácia emisií skleníkových plynov v rámci odvetvia, ktoré by mohlo za vhodne zvolených ohraničení dosiahnuť aj výraznejšie ako 8%-né.

Zo všetkých uvedených modelov nám podľa výsledkov najlepšie vychádza upravený radiálny model centralizovanej alokácie s ohraničeniami. Presné nastavenie všetkých parametrov ako napr. rozdelenie cementární do jednotlivých kategórií alebo ohraničenia pre tieto kategórie by vyžadovalo hlbšiu diskusiu v rámci možností daných odvetví.

Literatúra

- [1] Lozano S., Vila G. *Centralized Resource Allocation Using Data Envelopment Analysis*. Journal of Productivity Analysis 22, 2004. s. 143-161.
- [2] Korhonen P., Luptáčik M. *Eco-efficiency analysis of power plants: AN extension of data envelopment analysis*. European Journal of Operational Research 154, 2004. s. 437-446.
- [3] Korhonen P., Syrjänen M. *Resource Allocation Based on Efficiency Analysis*. Management Science 50, 8, ABI/INFORM Global, 2004. s. 1134-1144.
- [4] Halická M. *Prednášky k predmetu DEA modely* Bratislava: FMFI UK, 2007.
- [5] Lennerová V. *DEA modely a meranie eko-efektívnosti*. Diplomová práca. Bratislava: FMFI UK, 2008. s. 55.
- [6] Charnes A., Cooper W.W. *Programming with linear fractional functionals*. Naval Research Logistics Quarterly 9, 1962. s. 181-185.
- [7] http://ec.europa.eu/environment/climat/emission/index_en.htm.

Príloha

Vstupné dáta:

```
%vstup - teplo
input=[3027;2109;2354;2239;2343;1844;1999;1965;1843;1720;1466;
1465;2107;1283;1460;1373;1086;955;979;1088;1130;954;1173;940;953;
901;728;800;732;774;594;376;330;236];
```

```
%želateľný výstup - cement
doutput=[1230;844;1074;870;1074;745;662;599;623;541;583;614;468;
523;580;307;430;388;375;405;479;375;340;400;330;334;310;272;276;
338;135;160;135;75];
```

```
%neželateľný výstup - emisie CO2
undoutput=[755;549;541;518;516;462;441;407;399;389;375;354;349;
345;344;331;290;256;255;251;249;248;242;235;210;201;196;190;177;
170;101;92;80;52];
```

```
n=length(input); %počet DMUs
```

Program pre upravený centralizovaný radiálny model:

```
%funkcia pre 1. fázu
function[theta]=Radial1(input,doutput,undoutput)

%nastavenie potrebných hodnôt
n=length(input); %počet DMUs
for e=0:(n*n-1)
    yb(e+1)=undoutput(mod(e,n)+1); %vektor neželateľných výstupov
end
for e=0:(n*n-1)
    yg(e+1)=doutput(mod(e,n)+1); %vektor želateľných výstupov
end
```

```

for e=0:(n*n-1)
    x(e+1)=input(mod(e,n)+1); %vektor vstupov
end
SUCETyb=sum(undoutput);
SUCETyg=sum(doutput);
SUCETx=sum(input);

%nastavenie účelovej funkcie
f=[1;zeros(n*n,1)];

%nastavenie nerovníc Ax<=b
A=[-SUCETyb yb;
    0 -yg;
    0 x];
b=[0;-SUCETyg;SUCETx];

%nastavenie rovníc Aeq*x=beq
for i=1:n
    Aeq(i,((i-1)*n+2):((i*n)+1))=1; %zabezpečenie podmienky pre
    %variabilné výnosy z rozsahu
end
beq=ones(n,1);

%nastavenie dolných ohraničení pre optimalizované premenné
lb=[-inf;zeros(n*n,1)];

%výpočet úlohy LP a potrebnej hodnoty theta
[optlin,efektivita,exitflag,lpoutput]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb);
theta=optlin(1);

%funkcia pre 2. fázu
function[s,tg,tb,lambda]=Radial2(input,doutput,undoutput,theta)

%nastavenie potrebných hodnôt
n=length(input); %počet DMUs
for e=0:(n*n-1)
    yb(e+1)=undoutput(mod(e,n)+1); %vektor neželateľných výstupov
end
for e=0:(n*n-1)
    yg(e+1)=doutput(mod(e,n)+1); %vektor želateľných výstupov
end

```

```

for e=0:(n*n-1)
    x(e+1)=input(mod(e,n)+1); %vektor vstupov
end
SUCETyb=sum(undoutput);
SUCETyg=sum(doutput);
SUCETx=sum(input);

%nastavenie účelovej funkcie
f=[-1;-1;-1;zeros(n*n,1)];

%nastavenie rovníc Aeq*x=beq
pomAeq1=[0 0 1 yb;
          0 -1 0 yg;
          1 0 0 x];
for i=1:n
    pomAeq2(i,((i-1)*n+4):((i*n)+3))=1; %zabezpečenie podmienky
    %pre variabilné výnosy z rozsahu
end
Aeq=[pomAeq1;pomAeq2];
beq=[theta*SUCETyb;SUCETyg;SUCETx;ones(n,1)];

%nastavenie dolných ohraničení pre optimalizované premenné
lb=zeros(n*n+3,1);

%výpočet úlohy LP a potrebných hodnôt doplnkových premenných a lámdb
[optlin,efektivita,exitflag,lpoutput]=linprog(f,[],[],Aeq,beq,lb);
s=optlin(1);
tg=optlin(2);
tb=optlin(3);
pomlambda1=optlin(4:n*n+3);
for i=1:n
    for j=1:n
        pomlambda2(i,j)=pomlambda1(n*(i-1)+j);
    end
end
lambda=pomlambda2';

%výpočet 1. a 2. fázy upraveného radiálneho centralizovaného modelu
[theta]=Radial1(input,doutput,undoutput)
[s,tg,tb,lambda]=Radial2(input,doutput,undoutput,theta)

```

```

%výpočet efektívnych hodnôt
for i=1:n
    for j=1:n
        input_pom(j)=lambda(j,i)*input(j);
        doutput_pom(j)=lambda(j,i)*doutput(j);
        undoutput_pom(j)=lambda(j,i)*undoutput(j);
    end
    input_new(i)=sum(input_pom);
    doutput_new(i)=sum(doutput_pom);
    undoutput_new(i)=sum(undoutput_pom);
end

%percentuálne poklesy v počte udelených certifikátov
for i=1:n
    z(i)=100*(1-(undoutput_new(i)/undoutput(i)));
end
z

```

Program pre upravený centralizovaný radiálny model s váhami:

```

%funkcia pre model C
function [theta_pom,syg_pom,sx_pom,syb_pom,lambda]=
CCR_C_1vystup(input,doutput,undoutput,o)

%nastavenie potrebných hodnôt pre počítanú jednotku
xo=input(o);
ygo=doutput(o);
ybo=undoutput(o);
n=length(input);
eps=0.00001;

%nastavenie účelovej funkcie
f=[1;-eps;-eps;-eps;zeros(n,1)];

%nastavenie rovníc  $Aeq*x=beq$ 
Aeq=[0 -1 0 0 doutput';
     0 0 1 0 input';
     -ybo 0 0 1 undoutput';
     0 0 0 0 ones(1,n) %zabezpečenie podmienky pre variabilné
     %výnosy z rozsahu
     ];
beq=[ygo;xo;0;1];

```

```

%nastavenie dolných ohraničení pre optimalizované premenné
lb=[-inf;zeros(n+3,1)];

%výpočet úlohy LP a potrebných hodnôt thety, doplnkových
%premenných a lámdb
[optlin,fval,exitflag,lpoutput]=linprog(f,[],[],Aeq,beq,lb);
theta_pom=optlin(1);
syg_pom=optlin(2);
sx_pom=optlin(3);
syb_pom=optlin(4);
lambda=optlin(5:n+4);

%výpočet efektívnych hodnôt pre model C
for o=1:n
    [theta_pom,syg_pom,sx_pom,syb_pom,lambda]=
    CCR_C_1vystup(input,doutput,undoutput,o);
    theta(o)=theta_pom;
    syg(o)=syg_pom;
    sx(o)=sx_pom;
    syb(o)=syb_pom;
    lambda;
    input_new(o)=lambda'*input;
    doutput_new(o)=lambda'*doutput;
    undoutput_new(o)=lambda'*undoutput;
end;

theta;
syg;
sx;
syb;
input_new=input_new';
doutput_new=doutput_new';
undoutput_new=undoutput_new';

%výpočet váh
sum_undoutput_new=sum(undoutput_new);
v=undoutput_new/sum_undoutput_new;
sum(v)

%výpočet udeľovaných certifikátov, kde sa váhy prenasobujú súčtom

```

```
%efektívnych množstiev z upraveného radiálneho centralizovaného modelu
c=(8.3195e+003)*v
```

```
%výpočet jednotlivých kategórií pre upravený radiálny centralizovaný
%model s ohraničeniami
```

```
for i=1:n
z(i)=100*(1-(undoutput_new(i)/undoutput(i)));
if z(i)<10
    H(i)=0;
end
if z(i)>=10 && z(i)<20
    H(i)=7;
end
if z(i)>=20 && z(i)<30
    H(i)=10;
end
if z(i)>=30
    H(i)=15;
end
end
z;
theta;
H;
```

```
%percentuálne poklesy v počte udelených certifikátov
```

```
for i=1:n
    z(i)=100*(1-(c(i)/undoutput(i)));
end
z
```

Program pre upravený radiálny model centralizovanej alokácie s ohraničeniami:

```
%funkcia pre 1. fázu
```

```
function[theta]=RadialCCR1(input,doutput,undoutput)
```

```
%nastavenie potrebných hodnôt
```

```
n=length(input); %počet DMUs
```

```
for e=0:(n*n-1)
```

```
    yb(e+1)=undoutput(mod(e,n)+1); %vektor neželateľných výstupov
```

```
end
```

```
for e=0:(n*n-1)
```



```

    yg(e+1)=doutput(mod(e,n)+1); %vektor želatelných výstupov
end
for e=0:(n*n-1)
    x(e+1)=input(mod(e,n)+1); %vektor vstupov
end
SUCETyb=sum(undoutput);
SUCETyg=sum(doutput);
SUCETx=sum(input);

%zavedenie ohraničení, ktoré boli pridelené podľa kategórií vypočítaných
%v programe pre upravený centralizovaný radiálny model s váhami
H=[0;10;0;7;0;10;10;10;10;15;10;7;15;10;7;15;10;10;10;7;0;10;10;7;
10;7;7;10;7;0;10;0;0;0];
for i=1:n
    HO(i)=(1+H(i)/100)*undoutput(i);
    DO(i)=(1-H(i)/100)*undoutput(i);
end

%nastavenie účelovej funkcie
f=[1;zeros(n*n,1)];

%nastavenie nerovníc Ax<=b
Apom1=[-SUCETyb yb;
        0 -yg;
        0 x];
for i=1:n
    Apom2(i,((i-1)*n+2):((i*n)+1))=undoutput; %nastavenie vektoru
    %pre horné ohraničenia
end
for i=1:n
    Apom3(i,((i-1)*n+2):((i*n)+1))=-undoutput; %nastavenie vektoru
    %pre dolné ohraničenia
end
A=[Apom1;Apom2;Apom3];
b=[0;-SUCETyg;SUCETx;HO';-DO'];

%nastavenie rovníc Aeq*x=beq
for i=1:n
    Aeq(i,((i-1)*n+2):((i*n)+1))=1; %zabezpečenie podmienky
    %pre variabilné výnosy z rozsahu
end

```

```

beq=ones(n,1);

%nastavenie dolných ohraničení pre optimalizované premenné
lb=[-inf;zeros(n*n,1)];

%výpočet úlohy LP a potrebnej hodnoty theta
[optlin,efektivita,exitflag,lpoutput]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb);
theta=optlin(1);

%funkcia pre 2. fázu
function[s,tg,tb,lambda]=RadialCCR2(input,doutput,undoutput,theta)

%nastavenie potrebných hodnôt
n=length(input); %počet DMUs
for e=0:(n*n-1)
    yb(e+1)=undoutput(mod(e,n)+1); %vektor neželateľných výstupov
end
for e=0:(n*n-1)
    yg(e+1)=doutput(mod(e,n)+1); %vektor želateľných výstupov
end
for e=0:(n*n-1)
    x(e+1)=input(mod(e,n)+1); %vektor vstupov
end
SUCETyb=sum(undoutput);
SUCETyg=sum(doutput);
SUCETx=sum(input);

%zavedenie ohraničení, ktoré boli pridelené podľa kategórií vypočítaných
%v programe pre upravený centralizovaný radiálny model s váhami
H=[0;10;0;7;0;10;10;10;10;15;10;7;15;10;7;15;10;10;10;7;0;10;10;7;
10;7;7;10;7;0;10;0;0;0];
for i=1:n
    HO(i)=(1+H(i)/100)*undoutput(i);
    DO(i)=(1-H(i)/100)*undoutput(i);
end

%nastavenie účelovej funkcie
f=[-1;-1;-1;zeros(n*n,1)];

%nastavenie nerovníc Ax<=b
for i=1:n

```

```

    Apom1(i,((i-1)*n+4):((i*n)+3))=undoutput;
end
for i=1:n
    Apom2(i,((i-1)*n+4):((i*n)+3))=-undoutput;
end
A=[Apom1;Apom2];
b=[HO';-DO'];

%nastavenie rovníc Aeq*x=beq
pomAeq1=[0 0 1 yb;
         0 -1 0 yg;
         1 0 0 x];
for i=1:n
    pomAeq2(i,((i-1)*n+4):((i*n)+3))=1; %zabezpečenie podmienky
    %pre variabilné výnosy z rozsahu
end
Aeq=[pomAeq1;pomAeq2];
beq=[theta*SUCETyb;SUCETyg;SUCETx;ones(n,1)];

%nastavenie dolných ohraničení pre optimalizované premenné
lb=zeros(n*n+3,1);

%výpočet úlohy LP a potrebných hodnôt doplnkových premenných a lámdb
[optlin,efektivita,exitflag,lpoutput]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb);
s=optlin(1);
tg=optlin(2);
tb=optlin(3);
pomlambda1=optlin(4:n*n+3);
for i=1:n
    for j=1:n
        pomlambda2(i,j)=pomlambda1(n*(i-1)+j);
    end
end
lambda=pomlambda2';

%výpočet 1. a 2. fázy upraveného radiálneho centralizovaného modelu
%s ohraničeniami
[theta]=RadialCCR1(input,doutput,undoutput)
[s,tg,tb,lambda]=RadialCCR2(input,doutput,undoutput,theta)

%výpočet efektívnych hodnôt

```

```

for i=1:n
    for j=1:n
input_pom(j)=lambda(j,i)*input(j);
doutput_pom(j)=lambda(j,i)*doutput(j);
undoutput_pom(j)=lambda(j,i)*undoutput(j);
    end
    input_new(i)=sum(input_pom);
    doutput_new(i)=sum(doutput_pom);
    undoutput_new(i)=sum(undoutput_pom);
end

%percentuálne poklesy v počte udelených certifikátov
for i=1:n
z(i)=100*(1-(undoutput_new(i)/undoutput(i)));
end
z

```

Program pre model C s ohraničeniami:

```

%funkcia pre model C s ohraničeniami
function [theta_pom,syg_pom,sx_pom,syb_pom,lambda]=
CCR_ohranicenia(input,doutput,undoutput,o)

%nastavenie potrebných hodnôt a ohraničení pre počítanú jednotku
xo=input(o);
ygo=doutput(o);
ybo=undoutput(o);
n=length(input);
eps=0.00001;
HO=1.1;
DO=0.9;

%nastavenie účelovej funkcie
f=[1;-eps;-eps;-eps;zeros(n,1)];

%nastavenie nerovníc  $A*x \leq b$ 
A=[0 0 0 0 undoutput';
    0 0 0 0 -undoutput'];
b=[HO*ybo;-DO*ybo];

%nastavenie rovníc  $Aeq*x=beq$ 
Aeq=[0 -1 0 0 doutput'];

```

```

    0 0 1 0 input';
    -ybo 0 0 1 undoutput';
    0 0 0 0 ones(1,n) %zabezpečenie podmienky
    %pre variabilné výnosy z rozsahu
    ];
beq=[ygo;xo;0;1];

%nastavenie dolných ohraničení pre optimalizované premenné
lb=[-inf;zeros(n+3,1)];

%výpočet úlohy LP a potrebných hodnôt thety, doplnkových premenných a lámdb
[optlin,fval,exitflag,lpoutput]=linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb);
theta_pom=optlin(1);
syg_pom=optlin(2);
sx_pom=optlin(3);
syb_pom=optlin(4);
lambda=optlin(5:n+4);

%výpočet efektívnych hodnôt pre model C s ohraničeniami
for o=1:n
    [theta_pom,syg_pom,sx_pom,syb_pom,lambda]=
    CCR_ohranicenia(input,doutput,undoutput,o);
    theta(o)=theta_pom;
    syg(o)=syg_pom;
    sx(o)=sx_pom;
    syb(o)=syb_pom;
    lambda;
    input_new(o)=lambda'*input;
    doutput_new(o)=lambda'*doutput;
    undoutput_new(o)=lambda'*undoutput;
end;

theta;
syg;
sx;
syb;
input_new=input_new';
doutput_new=doutput_new';
undoutput_new=undoutput_new';

%výpočet váh

```

```

sum_undoutput_new=sum(undoutput_new);
v=undoutput_new/sum_undoutput_new;
sum(v)

%výpočet udelovaných certifikátov
c=(9.7244e+003)*v

%percentuálne poklesy v efektívnych množstvách neželateľných výstupov
for i=1:n
z1(i)=100*(1-(undoutput_new(i)/undoutput(i)));
end
z1
%percentuálne poklesy v počte udelených certifikátov
for i=1:n
z2(i)=100*(1-(c(i)/undoutput(i)));
end
z2

```