

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Diplomová práca

Bratislava 2010

Bc. Zuzana Boušková



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

ODHADOVANIE OKAMŽITEJ ÚROKOVEJ MIERY Z VÝNOSOVÝCH KRIVIEK

Diplomová práca

Bc. Zuzana Boušková

9.1.9 Aplikovaná matematika
Ekonomická a finančná matematika

Vedúci práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

BRATISLAVA 2010

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcej diplomovej práce RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD. za jej odborné vedenie, pripomienky a podnety, ktoré výraznou mierou prispeli ku skvalitneniu obsahu práce. Tiež ďakujem svojej rodine za ich trpezlivosť a podporu počas štúdia.

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že diplomovú prácu som vypracovala samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 23. 4. 2010

.....

Boušková

Abstrakt

V predloženej diplomovej práci sa venujeme odhadovaniu okamžitej úrokovej miery, pomocou Vašíčkovho modelu. V práci používame na kalibráciu modifikáciu dvojfázovej metódy publikovanej v článku [1]. Cieľom práce je zistiť, na ktorú z úrokových mier dostupných na trhu sa odhadovaná úroková miera najviac podobá. Aplikáciou našej metódy na skutočné úrokové miery, sme prišli k záveru, že ako okamžitú úrokovú mieru pre Vašíčkov model je vhodné brať 3-mesačnú úrokovú sadzbu v prípade slovenských aj európskych dlhopisov.

Kľúčové slová: Vašíčkov model, výnosová krivka, odhady parametrov, dvojfázová metóda, short-rate modely

Abstrakt

The present diploma thesis is dedicated to the estimation of the instantaneous interest rate by Vašíček model. The modification of the two-phase method published in article [1] is using to calibrate Vasicek model. The main goal of this thesis is to determine which of the rates available on the market, the estimated interest rate most closely resembles. Applying our method to real data, we came to the conclusion that as an immediate interest rate for Vašíček model is appropriate to take 3-month interest rate in case of Slovak and European bonds.

Kľúčové slová: Vašíček model, yield curve, estimates of parameters, two-phase method, short-rate models

Obsah

Úvod	2
1 Základné pojmy	4
1.1 Deriváty úrokovej miery	4
1.2 Výnosové krivky	5
2 Modely okamžitej úrokovej miery	8
2.1 Stochastické procesy	8
2.2 Prehľad short-rate modelov	10
2.3 Oceňovanie dlhopisov ako derivátov úrokovej miery	13
3 Vašíčkov model	15
3.1 Podmienené rozdelenie okamžitej úrokovej miery vo Vašíčkovom modeli	15
3.2 Pravdepodobnosť záporných úrokových mier	17
3.3 Citlivosť modelu na parametre	18
3.3.1 Citlivosť na parameter κ	18
3.3.2 Citlivosť na parameter σ	19
3.3.3 Citlivosť na parameter θ	19
3.4 PDR pre Vašíčkov model a citlivosť ceny dlhopisu na parametre . . .	20
3.4.1 Odvodenie PDR pre Vašíčkov model	20
3.4.2 Citlivosť ceny dlhopisu na parametre κ, θ, σ	22
3.5 Výnosové krivky počítané Vašíčkovým modelom	23
3.5.1 Limita výnosových kriviek a ich priebehy	24
3.5.2 Citlivosť výnosových kriviek na parametre θ, κ, σ	24
4 Kalibrácia jednofaktorového modelu úrokovej miery	27
4.1 Redukcia parametrov Vašíčkovho modelu	27
4.2 Kalibrácia modelu	28
4.2.1 Prvá fáza	28
4.2.2 Druhá fáza	30

4.3	Aplikácia na simulované dáta	31
4.4	Existencia optimálnych hodnôt parametrov ϱ, ξ	32
5	Aplikácia na reálne dáta	36
5.1	Dlhopisy EMU (2003)	38
5.2	Slovenské dlhopisy (2006)	39
	Záver	50
	Literatúra	51

Úvod

V tejto diplomovej práci sa budeme zaoberať jednofaktorovým Vašíčkovým modelom, ktorý patrí medzi najpoužívannejšie modely okamžitej úrokovej miery (tzv. short-rate modely). Pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice tieto modely modelujú pohyb okamžitej úrokovej miery, ktorá predstavuje začiatok výnosovej krivky. V modeloch formulovaných pomocou vývoja okamžitej úrokovej miery sa pri štatistickej analýze často skúmajú úrokové miery s dlhšou maturitou. Pri skúmaní výnosových kriviek potom vzniká problém, ako interpretovať tieto výnosové krivky. Ak 3-mesačnú úrokovú mieru vyhlásime za okamžitú, čo je úroková miera na 3 mesiace na výnosovej krivke? Ktoré úrokové miery môžeme použiť na kalibráciu? A mnoho iných. Preto budeme okamžitú úrokovú mieru tiež považovať za nepozorovateľnú a budeme ju odhadovať z výnosových kriviek.

Na odhadovanie použijeme upravenú dvojfázovú metódu na odhad parametrov jednofaktorového Vašíčkovho modelu publikovanú v článku Calibration of one factor interest rate models. Autormi článku sú D. Ševčovič a A. Urbánková Csajková. Ako vstupné dáta vezmeme trhové výnosové krivky z nejakého časového obdobia. Tie použijeme v prvej fáze na nájdenie parametrov, ktoré minimalizujú sumu štvorcov odchýlok teoretických a pozorovaných výnosových kriviek. V druhej fáze potom nájdeme hodnoty okamžitej úrokovej miery, ktoré minimalizujú sumu štvorcov odchýlok teoretických a pozorovaných výnosových kriviek pre každý deň. Tieto dva kroky opakujeme.

Samotná práca je členená na päť kapitol. Prvá kapitola je venovaná stručnému úvodu do teórie dlhopisov a výnosových kriviek. Čitateľ sa stručne oboznámi s pojmami ako dlhopis, krátkodobá úroková miera, výnosová krivka, s ktorými budeme ďalej pracovať.

Úvod druhej kapitoly je venovaný teórii stochastických procesov. Oboznámime sa s pojmami Wienerovho procesu, Brownovho pohybu. Definujeme Itóov integrál a sformulujeme Itóovu lemu a izometriu. Ďalej predstavíme jednofaktorové a dvojfaktorové modely okamžitej úrokovej miery. V závere druhej kapitoly odvodíme diferenciálnu rovnicu na výpočet ceny dlhopisu vo všeobecnom jednofaktorovom modeli.

V tretej kapitole sa budeme venovať Vašíčkovmu modelu, nakoľko všetky ďalšie výpočty budú robené práve pre tento model. Stručne odvodíme podmienené rozdelenie úrokových mier modelu. Budeme sa venovať aj otázke pravdepodobnosti nadobúdania záporných hodnôt úrokových mier. Vyriešime parciálnu diferenciálnu rovnicu pre výpočet ceny dlhopisu pre tento model a pozrieme sa ako ovplyvní zmena hodnoty niektorého parametra samotný model, cenu dlhopisu a výšku a tvar výnosovej krivky.

Následne sa v štvrtej kapitole budeme venovať kalibrácii modelu na simulovaných dátach. Podrobne vysvetlíme spomínanú upravenú dvojfázovú metódu. Záver kapitoly je venovaný otázke existencie optimálnych hodnôt hľadaných parametrov.

V piatej kapitole budeme aplikovať našu metódu na reálne dáta zo sadzieb na medzibankovom trhu. Pokúsime sa odhadnúť parametre Vašíčkovho modelu, ale predovšetkým nás bude zaujímať na ktorú zo skutočných úrokových mier sa bude naša odhadnutá krivka podobáť - či na overnight, týždňovú, mesačnú alebo inú úrokovú mieru. Pozrieme sa tiež na to, ako sa nám podarí našou metódou odhadnúť výnosové krivky, keďže výnosové krivky a úroková miera sú nerozlučne spojené.

Kapitola 1

Základné pojmy

V tejto kapitole zadefinujeme základné pojmy, ktoré budeme v tejto práci používať. Predstavíme niektoré deriváty odvodené od úrokovej miery. Vysvetlíme pojmy okamžitá úroková miera a výnosové krivky, od ktorých sa bude táto práca ďalej odvíjať. Podrobnejšie informácie o témach tejto kapitoly je možné nájsť v knihách [3], [2], ktoré slúžili ako podklad k tejto kapitole.

1.1 Deriváty úrokovej miery

V posledných desaťročiach môžeme sledovať prudký nárast obchodovania s finančnými derivátmi odvodenými od úrokovej miery na finančných trhoch po celom svete. V súčasnosti tieto obchody tvoria dokonca väčšinu všetkých uskutočnených obchodov. Medzi najznámejšie deriváty patria dlhopisy, swapy, capy, floory a ďalšie.

Dlhopis (angl. bond) je dohoda, v ktorej sa predávajúci zaväzuje, že v pevne stanovenom čase zaplatí kupujúcemu danú sumu peňazí. Dlhopisy delíme na kupónové (coupon bonds) a bezkupónové (zero coupon bonds). V prípade kupónového dlhopisu kupujúci navyše pravidelne dostáva od predávajúceho v dohodnutých obdobiach úrok (tzv. kupón). Nakoľko kupónové dlhopisy je možné chápať ako portfólio bezkupónových dlhopisov, budeme sa v tejto práci zaoberať výlučne bezkupónovými dlhopismi.

Akú cenu musí dnes zaplatiť kupujúci, ktorý chce kúpiť dlhopis s nominálnou hodnotou 1 euro a dobou splatnosti o jeden rok? Je zrejmé, že 1 euro dnes sa nerovná 1 euro o rok. Ten, kto si chce dnes kúpiť dlhopis s nominálnou hodnotou 1 euro, musí kupujúcemu zaplatiť niečo menej ako 1 euro. Rozdiel medzi sumou, ktorú kupujúci dostane a zaplatí musí byť rovný hodnote úroku zo zaplatenej ceny.

Cenu bezkupónového dlhopisu $P(t, T)$ s nominálnou hodnotou 1 vypočítame zo vzťahu

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad (1.1)$$

kde t je dnešný dátum, T je čas vypršania dlhopisu alebo maturita a $R(t, T)$ označuje spojitý úrok na obdobie od t do T .

Swap je dohoda medzi dvoma stranami A a B kontraktu. Ide v ňom o výmenu toku meniacich sa platieb závisiacich od úrokovej miery za tok konštantných platieb. Situáciu si môžeme predstaviť tak, že strana A sa zaviazala platiť strane B fixný úrok r^* z dohodnutej sumy, ktorú môžeme považovať za rovnú jednej. Strana B sa naopak zaviazala platiť strane A z dohodnutej sumy plávajúci úrok r . Tento kontrakt firmy využívajú najmä keď si chcú požičať finančnú hotovosť. Firma, ktorá má splácať fixný úrok ho považuje za príliš vysoký. Druhá firma môže dostať fixný úrok za výhodnejších podmienok. Napokon sa teda dohodnú, že si platby vymenia. V praxi si strany nevymieňajú celé výšky platieb, ale len čistý rozdiel týchto platieb.

Cap je dohoda o ohraničení úrokových platieb, ktorá umožňuje kupujúcej strane v stanovených termínoch požadovať od predávajúceho rozdiel medzi trhovou úrokovou mierou a realizačnou cenou kontraktu. Slúži na poistenie proti vysokej úrokovej miere. Jednu platbu nazývame caplet. Z toho vyplýva, že cap je súbor capletov.

Floor je derivát na presne opačnom princípe ako cap. Majiteľ kontraktu dostane platbu vtedy, ak je trhová úroková miera nižšia než stanovená realizačná cena. Z tohto dôvodu sa floor používa na zabezpečenie voči poklesu úrokovej miery. Jednu platbu nazývame floorlet. Podobne ako v prípade capu je floor súborom floorletov.

1.2 Výnosové krivky

Tak ako existujú rôzne druhy derivátov úrokových mier, rozlišujeme aj rôzne druhy samotných úrokových mier. Tie je možné v zásade rozdeliť do dvoch hlavných skupín - na úrokové sadzby na medzibankovom trhu (interbank rates) a sadzby na vládne dlhopisy (government rates). Interbank rates predstavujú úrok, pri ktorom si banky vymieňajú vklady medzi sebou. Ako príklad môžeme uviesť LIBOR (London Inter-Bank Offered Rate) či EURIBOR (Euro InterBank Offered Rate).

Časová štruktúra úrokových mier (angl. term structure of interest rates, yield curve) vyjadruje závislosť úrokovej miery od maturity dlhopisu. Keďže bezkupónový dlhopis sľubuje vyplatenie stanovenej sumy v presne určenom čase v budúcnosti, pomer nominálnej hodnoty k súčasnej cene definuje okamžitú úrokovú mieru pre dobu splatnosti dlhopisu. Tá predstavuje poplatok za používanie peňazí od súčasnosti až do času T . Ak vezmeme dlhopisy s rôznymi maturitami môžeme týmto spôsobom vytvoriť krivku úrokových mier. Úrokové miery nám teda definujú tzv. časovú štruktúru úrokových mier.

Krivka časovej štruktúry úrokových mier môže nadobúdať rôzne tvary, ako môžeme vidieť na obrázku 1.1. Je preto prirodzené opýtať sa, čo podmieňuje tvar výnosovej krivky. Existuje niekoľko teórií, ktoré sa pokúšajú vysvetliť tvary výnosových kriviek. Medzi najznámejšie patria

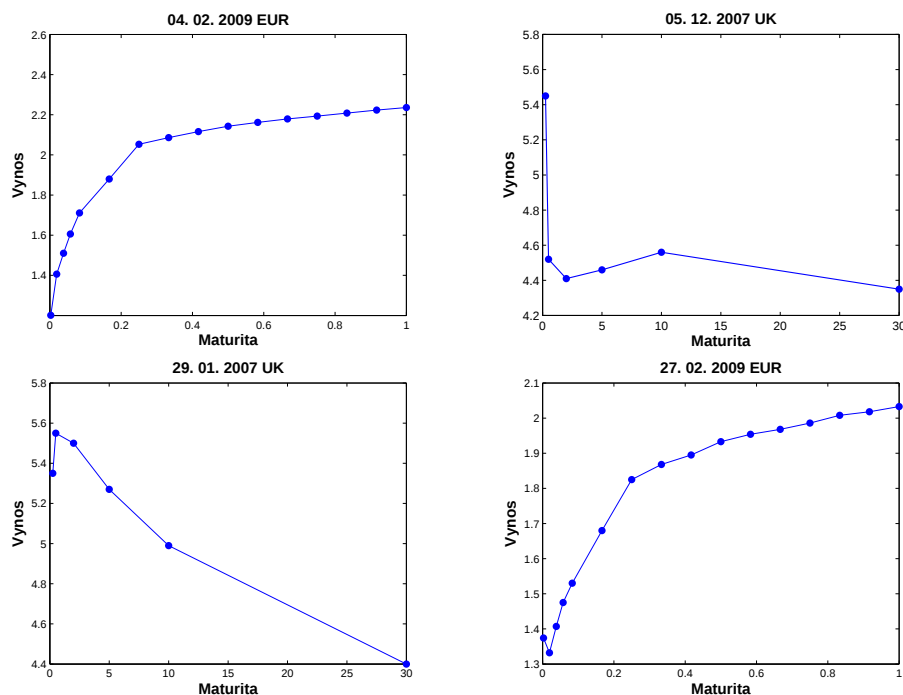
- teória očakávaní,
- teória rozdelenia trhu,

- teória likvidity.

Teória očakávaní (expectation theory) hovorí, že dlhodobé úrokové sadzby by mali odrážať očakávané budúce hodnoty krátkodobých úrokových sadzieb.

Podľa **teórie rozdelenia trhu** (market segmentation theory) nemusí byť žiaden vzťah medzi krátkodobými, strednodobými a dlhodobými úrokovými mierami. Predstavme si veľkého investora, ako napr. veľký penzijný fond, ktorý investuje do dlhopisov s určitou maturitou a nemusí sa rozhodovať medzi maturitami. To znamená, že krátkodobá úroková miera je determinovaná ponukou a dopytom na trhu s krátkodobými dlhopismi. Strednodobá úroková miera je podmienená ponukou a dopytom na strednodobom trhu, atď.

Teóriu likvidity (liquidity preference theory) si môžeme vysvetliť pomocou termínovaných vkladov v bankách. Ľudia, ktorí banke "požičajú" peniaze iba na jeden rok, t.j. uložia svoje peniaze na jednoročný termínovaný účet dostanú zvyčajne nižší ročný úrok, ako ľudia, ktorí banke "požičajú" peniaze na dlhšie časové obdobie. Je to dané tým, že ľudia chcú mať radšej hotovosť. Banky sa ich preto snažia motivovať k odkladaniu peňazí na dlhšie obdobie vyšším úrokom. Aplikovaním teórie likvidity môže prísť k situácii, že forwardová úroková miera je väčšia než očakávaný výnos bezkupónového dlhopisu. To je tiež v súlade s empirickými pozorovaniami, nakoľko výnosová krivka býva skôr rastúca než klesajúca. Podrobnejšie sa týmito teóriami zaoberali autori článkov [4],[5].



Obr. 1.1: Výnosové krivky zo 4. 2. 2009 EUR, 5. 12. 2007 UK, 29. 1. 2007 UK, 27. 2. 2009 EUR

Výnos $R(t, T)$ odvodený z ceny bezkupónového dlhopisu, ktorý vyplatí jednotkovú sumu, v čase t pre čas do splatnosti T môžeme zo vzťahu (1.1) vyjadriť nasledovne:

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}, \quad (1.2)$$

To znamená, že ak poznáme ceny dlhopisov vieme určiť časovú štruktúru úrokových mier a naopak.

Krátkodobá úroková miera alebo tiež short-rate (ozn. $r_t = R(t, t)$) predstavuje začiatok výnosovej krivky. Matematicky ju môžeme odvodiť nasledovne (podľa [3]): Ak sa v čase posunieme len o veľmi krátky čas Δt , môžeme vzťah (1.2) napísať v tvare

$$R(t, t + \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} \ln P(t, t + \Delta t). \quad (1.3)$$

Následne využijeme fakt, že $P(t, t) = 1$ vďaka čomu rovnicu (1.3) môžeme upraviť na nasledovný tvar

$$R(t, t + \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} [\ln P(t, \Delta t) - \ln P(t, t)]. \quad (1.4)$$

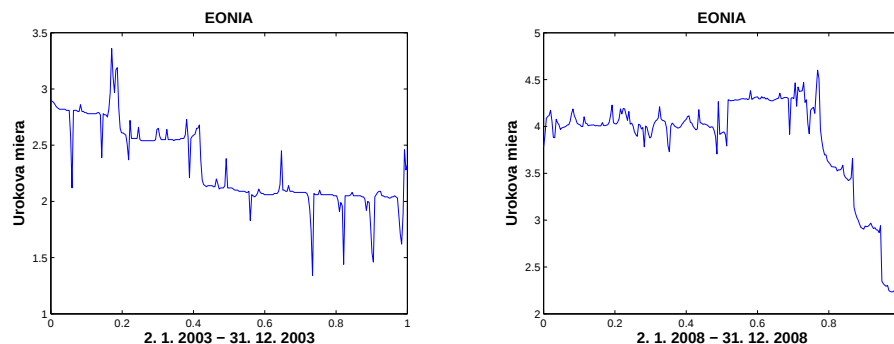
Ak $\Delta t \rightarrow 0$, potom

$$r_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} -\frac{\ln P(t, \Delta t) - \ln P(t, t)}{\Delta t}. \quad (1.5)$$

Zo vzťahu (1.5) a definície derivácie vyplýva, že

$$r_t = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, t). \quad (1.6)$$

Keďže sa týka iba začiatku krivky časovej štruktúry úrokových mier, máme o výnosovej krivke iba neúplnú informáciu. Modelom, ktoré pomocou okamžitej úrokovej miery odhadujú výnosové krivky sa hovorí short-rate modely. Budeme sa im venovať v nasledujúcej kapitole. Predstavu o priebehu okamžitej úrokovej miery si môžeme urobiť z obrázka 1.2.



Obr. 1.2: Grafy zobrazujú priebeh okamžitej úrokovej miery - naľavo je zobrazená EONIA z roku 2003 a napravo je EONIA z roku 2008

Kapitola 2

Modely okamžitej úrokovej miery

Modelmi okamžitej úrokovej miery, short-rate modelmi, modelujeme pomocou okamžitej úrokovej miery výnosové krivky.

V nasledujúcej kapitole sa budeme zaoberať modelmi pre opis okamžitej úrokovej miery. Najskôr v časti 2.1 definujeme základné pojmy stochastického kalkulu, ktoré budeme následne ďalej používať. Vysvetlíme, aké sú to jednofaktorové a viacfaktorové modely a predstavíme niekoľko najpoužívanějších modelov. V poslednej časti tejto kapitoly sa zameriame na odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu derivátu vo všeobecnom modeli okamžitej úrokovej miery.

2.1 Stochastické procesy

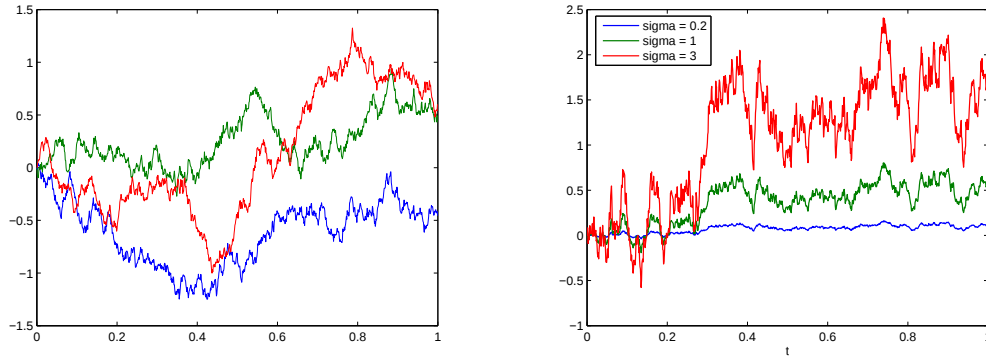
Základným nástrojom na popísanie stochastického vývoja ceny aktíva sú tzv. Markovove procesy (pomenované podľa ruského matematika Andreja Markova). Pri odvodzovaní parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu derivátu okamžitej úrokovej miery sa používa práve jeden z mnohých typov Markovovských procesov, a to Wienerov proces. Zovšeobecnením Wienerovho procesu je Brownov pohyb, ktorý si spolu so spomenutým Wienerovým procesom v tejto časti definujeme. Ďalej uvedieme Itóovu lemu, ktorá je často využívaná vo finančnej matematike, Itóov integrál a Itóovu izometriu.

Stochastický proces je t -parametrický systém náhodných premenných $\{X(t), t \in I\}$, kde I je interval alebo diskretná množina indexov.

Markovov proces je taký stochastický proces, pre ktorý platí, že ak je daná hodnota $X(s)$, tak budúce hodnoty $X(t)$ pre $t > s$ môžu závisieť iba od hodnoty $X(s)$, nie od predchádzajúcich hodnôt procesu.

V nasledujúcej definícii definujeme Brownov pohyb a Wienerov proces podľa [2]:

Definícia 2.1.1. *Brownov pohyb $X(t), t \geq 0$ je t -parametrický systém náhodných veličín, pričom*

Obr. 2.1: Realizácie Wienerovho procesu a Brownovho pohybu s $\mu = 0$

1. všetky prírastky $X(t+\Delta) - X(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a disperziou (alebo aj varianciou) $\sigma^2\Delta$,
2. pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ sú prírastky $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, $\dots$, $X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa bodu 1,
3. $X(0) = 0$.

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ nazývame Wienerov proces.

Realizácie Brownovho pohybu s parametrom $\mu = 0$ sú zobrazené na obrázkoch 2.1. Na ľavom obrázku je znázornený Wienerov proces. Na pravom obrázku je znázornený Brownov pohyb s parametrami $\sigma = 0, 2$, $\sigma = 1$ a $\sigma = 3$. Vidíme, že pridaním parametra σ začal proces oscilovať okolo nuly. Pritom platí, čím väčšia hodnota parametra σ , tým väčšia oscilácia.

Itôova lema dáva odpoveď na otázku, či je možné zostaviť stochastickú diferenciálnu rovnicu opisujúcu vývoj ľubovoľnej hladkej funkcie $f(x, t)$, pričom premenná x je riešením zadanej stochastickej diferenciálnej rovnice. Budeme ju používať v poslednej časti tejto kapitoly pri odvodení parciálnej diferenciálnej rovnice ceny dlhopisu vo všeobecnom modeli okamžitej úrokovej miery. Znie nasledovne (podľa [2]):

Lema 2.1.2. *Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x, t) dt + \sigma(x, t) dw,$$

kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw. \quad (2.1)$$

Itóov integrál a Itóovu izometriu využijeme v tretej kapitole pri odvodení pravdepodobnostného rozdelenia okamžitej úrokovej miery vo Vašíčkovom modeli. Definícia Itóovho integrálu je podobná definícii Riemann-Stieltesovmu integrálu funkcií reálnej premennej [2].

Definícia 2.1.3. *Nech pre merateľnú funkciu $f : (0, t) \rightarrow \mathbb{R}$ platí $\int_0^t f^2(\tau) d\tau < \infty$. Potom integrál*

$$\int_0^t f(\tau) dw(\tau) := \lim_{\nu \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)(w(\tau_{i+1}) - w(\tau_i)),$$

kde $\nu = \max(\tau_{i+1} - \tau_i)$ je norma delenia $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t$ intervalu $(0, t)$ a konvergencia sa chápe podľa pravdepodobnosti, sa nazýva Itóov integrál.

Na záver tejto časti ešte uvedieme lemu známu ako Itoóva izometria [2].

Lema 2.1.4. *Nech pre merateľnú funkciu $f : (0, t) \rightarrow \mathbb{R}$ platí $\int_0^t f^2(\tau) d\tau < \infty$. Potom existuje Itóov integrál $\int_0^t f(\tau) dw(\tau)$, ktorý predstavuje normálne rozdelenú náhodnú premennú s rozdelením $N(0, \sigma^2(t))$, kde $\sigma^2(t) = \int_0^t f^2(\tau) d\tau$. To znamená, že platia identity*

$$E\left(\int_0^t f(\tau) dw(\tau)\right) = 0,$$

$$E\left(\left[\int_0^t f(\tau) dw(\tau)\right]^2\right) = \int_0^t f^2(\tau) d\tau.$$

Posledná identita sa nazýva Itóova izometria.

2.2 Prehľad short-rate modelov

Jednofaktorové modely modelujú vývoj okamžitej úrokovej miery pomocou jedného náhodného faktora. V týchto modeloch sa predpokladá, že okamžitú úrokovú mieru možno charakterizovať pomocou riešenia stochastickej diferenciálnej rovnice. Tá môže mať vo všeobecnosti nasledujúci tvar

$$dr = \mu(t, r) dt + \sigma(t, r) dw,$$

kde dw sú prírastky Wienerovho procesu. Ako vidíme, proces sa skladá z dvoch častí - deterministickej a stochastickej. Deterministická časť procesu $\mu(t, r) dt$ určuje trend. Volatilita $\sigma(t, r) dw$ určuje charakter náhodných fluktuácií v okolí trendovej zložky.

Najčastejšie sa drift volí v tvare $\mu(t, r) = \kappa(\theta - r)$, kde parametre κ, θ sú kladné konštanty. Hovoríme, že takýto proces má vlastnosť mean-reverting. Premenná r je v každom čase priťahovaná ku konštante θ . To znamená, ak je hodnota r veľká, vlastnosť mean-reversion spôsobí, že drift bude záporný. V prípade, že je hodnota r nízka, vlastnosť mean-reverting naopak zaručí, že drift bude kladný. Takáto voľba má aj svoje ekonomické opodstatnenie. Ak sú úrokové miery príliš vysoké, ekonomika sa

Model	Stochastická rovnica pre r	$r > 0$
Vašíček	$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma dw$	N
CIR	$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma\sqrt{r} dw$	A
Dothan	$dr = \sigma r dw$	A
Exponenciálny Vašíčkov	$d \ln r = \kappa(\ln \theta - \ln r) dt + \sigma dw$	A
Hull-White	$dr = \kappa(\theta(t) - r) dt + \sigma dw$	N

Tabuľka 2.1: Prehľad jednofaktorových modelov úrokových mier

začne spomaľovať a klesne dopyt. Dôsledkom toho je pokles úrokovej miery. Ak sú úrokové miery nízke, zvyšujú sa investície a úrokové miery následne pomaly rastú. Parameter θ preto nazývame limitnou úrokovou mierou. Parameter κ určuje rýchlosť návratu okamžitej úrokovej miery k jej limitnej hodnote. Volatilita sa často modeluje ako závislá od mocniny r . Následne po dosadení do rovnice (2.2) dostávame tvar stochastického procesu

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma r^\gamma dw. \quad (2.2)$$

Prvýkrát sa takýmito modelmi zaoberali Chan, Karolyi, Longstaff a Sanders v článku [14]. V tabuľke (2.1) je uvedený prehľad niekoľkých jednofaktorových modelov. Okrem stochastickej rovnice sme v nej uviedli, či model nadobúda iba nezáporné hodnoty úrokovej miery ($r > 0$).

Vašíčkov model má tvar diferenciálnej rovnice

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sigma dw, \quad (2.3)$$

kde r sleduje Orstein-Uhlenbeckov mean-reverting proces. Tento model patrí k historicky prvým short-rate modelom a vďaka svojej jednoduchosti k často používaným nástrojom na modelovanie okamžitej úrokovej miery. Autorom modelu je český matematik Oldřich Vašíček a publikoval ho v článku [8] v roku 1977. Nevýhodou tohto modelu je fakt, že pripúšťa záporné hodnoty úrokovej miery. Je to z dôvodu, že ak je úroková miera blízka nule, volatilita je stále rovná tej istej konštante a proces sa môže s nenulovou pravdepodobnosťou dostať do záporných hodnôt, čo sa v reálnom svete nemôže stať. Napriek tomu je tento model veľmi populárny vďaka svojej jednoduchosti a faktu, že rovnicu pre oceňovanie dlhopisu vieme riešiť explicitne. Tomuto modelu sa budeme podrobnejšie venovať v nasledujúcej kapitole, nakoľko sa v tejto práci budeme zaoberať výlučne týmto modelom.

Cox-Ingersoll-Ross model s diferenciálnou rovnicou tvaru

$$dr = \kappa(\theta - r) dt + \sqrt{r}\sigma dw \quad (2.4)$$

je model, v ktorom volatilita už nie je konštantná, ale úmerná odmocnine z r . Stochastický proces, v ktorom je stochastický člen dw násobený odmocninou danej veličiny sa nazýva Besselov odmocninový proces. Tento model už nepripúšťa možnosť výskytu záporných hodnôt okamžitej úrokovej miery. Ak by r bolo nulové, tak volatilita bude

nulová a r bude rásť vďaka driftovej časti. Navyše, ak platí Fellerova podmienka $2\kappa\theta/\sigma^2 > 1$, proces dosiahne nulu s pravdepodobnosťou nula. Autormi tohto modelu sú Cox, Ingersoll, Ross, ktorí svoj model publikovali v článku [9] v roku 1985.

Ďalším používaným modelom je **Dothanov model**. Je popísaný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr = \sigma r dw. \quad (2.5)$$

Dothan svoj model publikoval v roku 1978 v článku [11]. V rovnici úplne vynechal driftový člen. Vďaka podmienenému lognormálnemu rozdeleniu $r(t)$ eliminoval problém záporných úrokových mier, ktorý mal Vašíčkov model. Dothanov model je podľa [5] v literatúre jediným lognormálnym modelom, pre ktorý vieme nájsť explicitné riešenie pre cenu dlhopisu.

Exponenciálny Vašíčkov model podľa [4] predpokladá, že logaritmus okamžitej úrokovej miery sleduje Ornstein-Uhlenbeckov proces. Jeho diferenciálna rovnica má tvar

$$d \ln r = \kappa(\ln \theta - \ln r) dt + \sigma dw. \quad (2.6)$$

V takto definovanom modeli máme zaručené, že hodnota r bude vždy kladná.

Hull-White model bol publikovaný v roku 1990. Autori sa v článku [10] pokúsili o rozšírenie Vašíčkovho modelu, ktoré by poskytlo presný fit vstupnej výnosovej krivky. Výsledkom je model v tvare stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dr = (\theta(t) - ar) dt + \sigma dw, \quad (2.7)$$

kde a a σ sú konštanty. Ak z modelu vyjmem a pred zátvorku dostaneme diferenciálnu rovnicu

$$dr = a \left(\frac{\theta(t)}{a} - r \right) dt + \sigma dw. \quad (2.8)$$

Z tohto tvaru môžeme vidieť, že Hull-Whitov model je vlastne Vašíčkov model s od času závislou premennou θ .

Ďalšou veľkou skupinou sú viacfaktorové modely. Patria sem napr. aj **dvojfaktorové modely**. Tie vychádzajú z myšlienky, že okamžitá úroková miera je funkciou dvoch faktorov, ktoré môžeme označiť ako x , y . Teda $r = r(x, y)$, pričom stochastická diferenciálna rovnica pre faktor x môže byť závislá od faktora y a naopak. Patria sem napr. modely v ktorých je úroková miera súčtom dvoch faktorov $r = x + y$. Tieto môžeme interpretovať ako trendovú a špekulatívnu časť. Konkrétne môžeme uviesť Vašíčkov dvojfaktorový model. Ten je definovaný stochastickými diferenciálnymi rovnicami

$$\begin{aligned} dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1) dt + \sigma_1 dw_1 \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2) dt + \sigma_2 dw_2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dvojfaktorový CIR model je definovaný stochastickými diferenciálnymi rovnicami

$$\begin{aligned} dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1) dt + \sigma_1 \sqrt{r_1} dw_1 \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2) dt + \sigma_2 \sqrt{r_2} dw_2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Medzi dvojfaktorové modely tiež patria modely, v ktorých stochastická rovnica pre okamžitú úrokovú mieru závisí od iných veličín na trhu. Príkladom pre túto situáciu bolo Slovensko pred vstupom do eurozóny, kedy hodnoty našich úrokových mier boli z časti závislé aj od vývoja eura, ktorého vývoj mal tiež stochastický charakter. Viacfaktorovými modelmi sa ale v práci zaoberať nebudeme. Podrobnejšie informácie o týchto a ďalších modeloch môže čitateľ získať napr. v [4], [5], a [7].

2.3 Oceňovanie dlhopisov ako derivátov úrokovej miery

Uvažujme všeobecný model (2.2). Pre tento model odvodíme podľa [2] parciálnu diferenciálnu rovnicu ceny diskontného bezkupónového dlhopisu P so splatnosťou v čase T . Predpokladáme, že táto cena závisí iba od aktuálnej hodnoty okamžitej úrokovej miery r , času t a času expirácie T . Teda, že platí $P = P(r, t, T)$. Použitím Itôovej lemy 2.1.2 odvodíme stochastickú diferenciálnu rovnicu pre P :

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw \quad (2.11)$$

$$= \mu_B(r, t) dt + \sigma_B(r, t) dw, \quad (2.12)$$

kde $\mu_B(r, t)$ označuje drift a $\sigma_B(r, t)$ volatilitu.

V ďalšom kroku zostrojíme portfólio z dlhopisov s dvomi rôznymi maturitami T_1 , T_2 . Dlhopis so splatnosťou T_1 budeme mať v portfóliu len jeden, kým dlhopisov so splatnosťou T_2 budeme mať Δ kusov. Označme hodnotu takéhoto portfólia π . Je zrejmé, že π je definované vzťahom

$$\pi = P(r, t, T_1) + \Delta P(r, t, T_2) \quad (2.13)$$

a zmena hodnoty portfólia $d\pi$ je potom daná vzťahom

$$d\pi = dP(r, t, T_1) + \Delta dP(r, t, T_2) \quad (2.14)$$

$$= (\mu_B(r, t, T_1) + \Delta \mu_B(r, t, T_2))dt + (\sigma_B(r, t, T_1) + \Delta \sigma_B(r, t, T_2))dw. \quad (2.15)$$

Ak zvolíme

$$\Delta = -\frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)}, \quad (2.16)$$

stochastická časť bude nulová a získame bezrizikové portfólio. Aby sme vylúčili možnosť arbitráže, musí sa výnos takéhoto portfólia rovnať okamžitej bezrizikovej úrokovej miere r , t.j. $d\pi = r\pi dt$ a teda deterministická časť sa rovná

$$\mu_B(r, t, T_1) - \frac{\sigma_B(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_2)} \mu_B(r, t, T_2) = r\pi.$$

Dosadením vzťahov (2.13),(2.16) a následnými úpravami dostaneme rovnosť

$$\frac{\mu_B(r, t, T_1) - rP(r, t, T_1)}{\sigma_B(r, t, T_1)} = \frac{\mu_B(r, t, T_2) - rP(r, t, T_2)}{\sigma_B(r, t, T_2)}.$$

Nakoľko maturity T_1 a T_2 boli ľubovoľné, musí táto rovnosť platiť pre každý čas splatnosti T a nemôže závisieť od maturity dlhopisu. Z tohto dôvodu musí existovať taká funkcia $\lambda(r, t)$, že platí

$$\lambda(r, t) = \frac{\mu_B(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\sigma_B(r, t, T)} \quad (2.17)$$

pre ľubovoľnú maturitu T . Funkcia λ sa nazýva trhovú cenu rizika. Ak dosadíme do rovnice (2.17) funkcie μ_B , σ_B z rovnice (2.12) dostaneme hľadanú parciálnu diferenciálnu rovnicu ceny diskontného bezkupónového dlhopisu $P(r, t, T)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r, t) - \lambda(r, t)\sigma(r, t))\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2(r, t)\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad (2.18)$$

s koncovou podmienkou

$$P(r, T, T) = 1,$$

pre každé $r > 0$.

Týmto sme odviedli diferenciálnu rovnicu na výpočet ceny dlhopisu vo všeobecnom jednofaktorovom modeli.

Kapitola 3

Vašíčkov model

Vašíčkov model časovej štruktúry úrokových mier patrí do triedy jednofaktorových modelov, spomínaných v predchádzajúcej kapitole. Bol navrhnutý českým matematikom O. Vašíčkom. Umožňuje nájsť explicitné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre ceny dlhopisov. Vďaka svojej jednoduchosti patrí k často používaným modelom. Konštantná volatilita v tomto modeli neumožňuje dokonale zachytiť niektoré tvary výnosových kriviek. To je nevýhodou použitia tohto modelu, rovnako ako to, že pripúšťa zápornosť úrokových mier.

V tejto kapitole odvodíme podmienené rozdelenie pravdepodobnosti okamžitej úrokovej miery v jednofaktorovom Vašíčkovom modeli a riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice ceny bezkupónového dlhopisu. Zároveň sa budeme venovať otázke záporných úrokových mier a citlivosti modelu na zmenu niektorého zo vstupných parametrov.

3.1 Podmienené rozdelenie okamžitej úrokovej miery vo Vašíčkovom modeli

Ako sme už uviedli v kapitole 2, jednofaktorový Vašíčkov model je definovaný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dr = \kappa(\theta - r) ds + \sigma dw, \quad (3.1)$$

kde κ , θ , σ sú kladné konštanty. V tejto časti odvodíme podmienené rozdelenie úrokových mier vo Vašíčkovom modeli. Budeme teda odvádzať rozdelenie $r_{t+\Delta t}$ pri danej štartovacej hodnote r_t podľa [2]. Vezmime rovnicu (3.1) vyjadrujúcu vývoj úrokovej miery a vynásobme ju výrazom $e^{\kappa s}$. Dostaneme rovnicu:

$$e^{\kappa s} dr = e^{\kappa s} \kappa(\theta - r) ds + e^{\kappa s} \sigma dw. \quad (3.2)$$

Použitím Itóovej lemy pre funkciu $f(r, s) = e^{\kappa s} r$ dostaneme vzťah pre diferenciál

$$d(e^{\kappa s} r_s) = e^{\kappa s} [\kappa(\theta - r) ds + \sigma dw] + \left(\kappa e^{\kappa s} r + 0 \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt \quad (3.3)$$

$$= [\kappa \theta e^{\kappa s} ds - \kappa e^{\kappa s} r dt + e^{\kappa s} \sigma dw] + \kappa e^{\kappa s} r dt \quad (3.4)$$

$$= (\kappa \theta e^{\kappa s}) ds + e^{\kappa s} \sigma dw. \quad (3.5)$$

Integrovaním výrazu (3.5) od času t po čas $t + \Delta t$ dostaneme

$$e^{\kappa(t+\Delta t)} r_{t+\Delta t} - e^{\kappa t} r_t = \kappa \theta \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} ds + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s \quad (3.6)$$

$$= (e^{\kappa(t+\Delta t)} - e^{\kappa t}) \theta + \sigma \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s. \quad (3.7)$$

Z toho napokon dostávame nasledovný vzťah pre $r_{t+\Delta t}$:

$$r_{t+\Delta t} = e^{-\kappa \Delta t} r_t + (1 - e^{-\kappa \Delta t}) \theta + \sigma e^{-\kappa(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s. \quad (3.8)$$

Podmienené rozdelenie $r_{t+\Delta t}$ pri danej štartovacej hodnote r_t je normálne. Podmienená stredná hodnota a variancia sa dajú potom vyjadriť nasledovne

$$E(r_{t+\Delta t} | r_t) = e^{-\kappa \Delta t} r_t + (1 - e^{-\kappa \Delta t}) \theta, \quad (3.9)$$

$$Var(r_{t+\Delta t} | r_t) = \sigma^2 e^{-2\kappa(t+\Delta t)} Var \left(\int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s \right) \quad (3.10)$$

$$= \sigma^2 e^{-2\kappa(t+\Delta t)} E \left(\left[\int_t^{t+\Delta t} e^{\kappa s} dw_s \right]^2 \right). \quad (3.11)$$

Aplikovaním Itóovej izometrie na vzťah (3.11) dostaneme

$$Var(r_{t+\Delta t} | r_t) = \sigma^2 e^{-2\kappa(t+\Delta t)} \int_t^{t+\Delta t} (e^{\kappa s})^2 ds \quad (3.12)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa \Delta t}). \quad (3.13)$$

Teda sme dostali

$$r_{t+\Delta t} | r_t \sim N(e^{-\kappa \Delta t} r_t + (1 - e^{-\kappa \Delta t}) \theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-2\kappa \Delta t})). \quad (3.14)$$

Podmienené rozdelenia úrokových mier pre Vašíčkov model sa dajú odvodiť aj inými prístupmi, napr. použitím Fokker-Planckovej rovnice. Túto metódu môže čitateľ nájsť napr. v [2] alebo [4].

Euribor	Parametre modelu			Pravdepodobnosť	
2003	κ	σ	θ	$P_{\text{o deň}}$	$P_{\text{o rok}}$
1.Q	105,8537	0,1876	0,0276	$7,2058 \cdot 10^{-6}$	0,0162
2.Q	18,9268	0,0976	0,0242	$2,9293 \cdot 10^{-16}$	0,0635
3.Q	228,404	0,2005	0,0206	$8,1838 \cdot 10^{-5}$	0,0140
4.Q	167,276	0,2380	0,0201	$7,6540 \cdot 10^{-4}$	0,0612

Tabuľka 3.1: Pravdepodobnosti nadobudnutia záporných hodnôt pre EURIBOR 2003 s $r_0 = 0,05$

3.2 Pravdepodobnosť záporných úrokových mier

V úvode kapitoly sme spomenuli, že nevýhodou Vašíčkovho modelu je, že s nenulovou pravdepodobnosťou môže short-rate nadobúdať záporné hodnoty. Je to ale skutočne taký významný problém? V tejto časti sa preto budeme podrobnejšie venovať tejto otázke. Uvedieme vzťah na výpočet pravdepodobnosti, že úroková miera nadobúda záporné hodnoty. Na parametroch odhadnutých z reálnych dát ukážeme, aká veľká je pravdepodobnosť nadobudnutia záporných hodnôt short-rate. Ukážeme tiež, ako sa táto pravdepodobnosť mení v čase.

Pravdepodobnosť, že hodnota úrokovej miery $r_{t+\Delta t}$ bude menšia ako nula, je daná vzťahom

$$P(r_{t+\Delta t} < 0) = P\left(N\left(e^{-\kappa\Delta t}r_t + (1 - e^{-\kappa\Delta t})\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t})\right) < 0\right) = \quad (3.15)$$

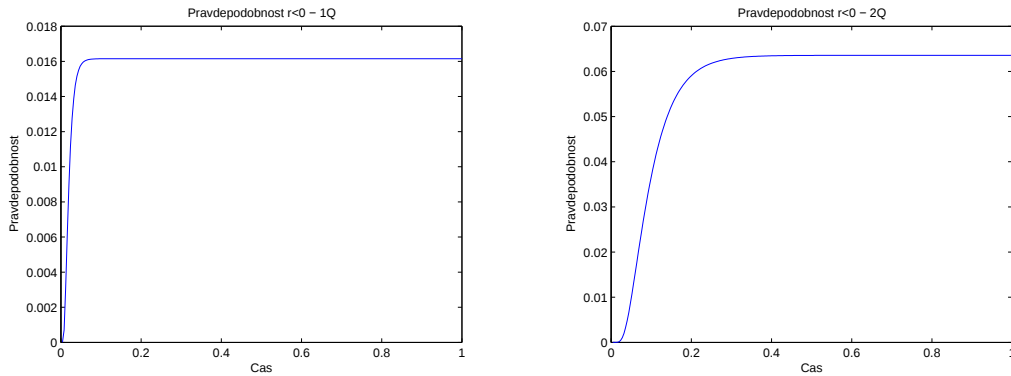
$$= P\left(N(0, 1) < \frac{-e^{-\kappa\Delta t}r_t - (1 - e^{-\kappa\Delta t})\theta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t})}}\right) = \quad (3.16)$$

$$= \Phi\left(\frac{-e^{-\kappa\Delta t}r_t - (1 - e^{-\kappa\Delta t})\theta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa\Delta t})}}\right), \quad (3.17)$$

kde Φ je distribučná funkcia normalizovaného normálneho rozdelenia $N(0, 1)$. Zo vzťahu (3.17) vidíme, že pre $\Delta t \rightarrow \infty$ dostaneme limitnú pravdepodobnosť rovnú

$$\Phi\left(\frac{-\theta}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}}}\right). \quad (3.18)$$

V tabuľke 3.1 sú vypočítané pravdepodobnosti pre parametre odhadnuté z kvartálnych dlhopisov Európskej menovej únie z roku 2003, ktoré sme prevzali z práce [15]. Za počiatočnú hodnotu sme vzali $r_0 = 0.05$. Vypočítali sme pravdepodobnosti, že hodnota short-rate o deň bude menšia ako nula, a o rok bude menšia ako nula. Ako



Obr. 3.1: Priebeh pravdepodobnosti nadobudnutia zápornej hodnoty úrokovej miery v čase pre EURIBOR 2003

môžeme vidieť, pravdepodobnosť, že úroková miera zajtra nadobudne zápornú hodnotu pri daných parametroch je prakticky nulová. Pravdepodobnosť, že úroková miera o rok bude mať zápornú hodnotu je pri tých istých parametroch už vyššia - do 10 percent. Na obrázku 3.1 je zachytený priebeh hodnoty pravdepodobnosti v závislosti od času. Vidíme, že pravdepodobnosť nám s rastúcim časom tiež rastie, až sa napokon ustáli na limitnej hodnote.

3.3 Citlivosť modelu na parametre

V tejto časti budeme analyzovať vplyv parametrov na Vašíčkov model pri simulovaní okamžitej úrokovej miery. Bude nás zaujímať ako ovplyvní priebeh celého procesu zmena hodnoty jedného parametra. Rovnakou otázkou sa zaoberali aj S. Zeytun a A. Gupta v práci [6]. Táto časť vychádza práve z tohto článku.

3.3.1 Citlivosť na parameter κ

Vezmime diskretnú verziu Vašíčkovho modelu (použijeme Eulerovu metódu)

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \kappa(\theta - r(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}w_{i+1}. \quad (3.19)$$

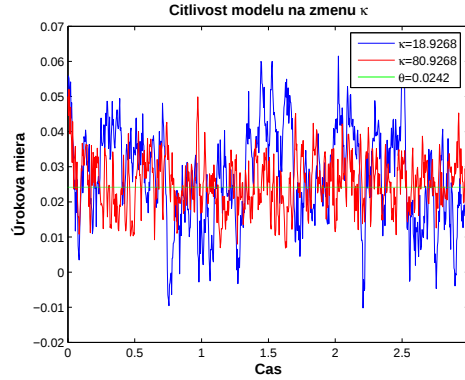
Ak zmeníme κ o δ^κ potom náš diskretizovaný model bude mať tvar

$$r^\kappa(t_{i+1}) = r(t_i) + (\kappa + \delta^\kappa)(\theta - r(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}w_{i+1}, \quad (3.20)$$

kde úroková miera r^κ je miera v modeli s novou hodnotou $\kappa = \kappa + \delta^\kappa$. Teda zmena v short-rate o jednu jednotku v čase je daná vzťahom

$$\Delta^\kappa r(t_{i+1}) = r^\kappa(t_{i+1}) - r(t_{i+1}) = \delta^\kappa(\theta - r(t_i))\Delta t. \quad (3.21)$$

Zo vzťahu (3.21) vyplýva, že ak κ vzrastie, tak nasledujúca hodnota short-rate vzrastie o $\delta^\kappa(\theta - r(t_i))\Delta t$, ak súčasná hodnota short-rate je pod úrovňou dlhodobého priemeru.

Obr. 3.2: Citlivosť Vašíčkovho modelu na zmenu parametra κ

Naopak poklesne o $\delta^\kappa(\theta - r(t_i))\Delta t$, ak je súčasná hodnota short-rate nad úrovňou dlhodobého priemeru. Z toho vyplýva, že zmena parametra κ nemá v dlhodobom horizonte vplyv na short-rate, iba ovplyvňuje čas, za ktorý sa hodnota úrokovej miery ustáli na hodnote dlhodobého priemeru. Vplyv zmeny parametra κ si môžeme všimnúť na obrázku 3.2.

3.3.2 Citlivosť na parameter σ

Vplyv zmeny parametra σ na vývoj Vašíčkovho modelu odvodíme rovnakým spôsobom ako v predchádzajúcej časti. Zmena σ o δ^σ dáva rovnicu tvaru

$$r^\sigma(t_{i+1}) = r(t_i) + \kappa(\theta - r(t_i))\Delta t + (\sigma + \delta^\sigma)\sqrt{\Delta t}w_{i+1}, \quad (3.22)$$

kde úroková miera r^σ je miera v modeli s novou hodnotou $\sigma = \sigma + \delta^\sigma$. Potom zmena short-rate o jednu jednotku v čase je daná vzťahom

$$\Delta^\sigma r(t_{i+1}) = \delta^\sigma \sqrt{\Delta t} w_{i+1}. \quad (3.23)$$

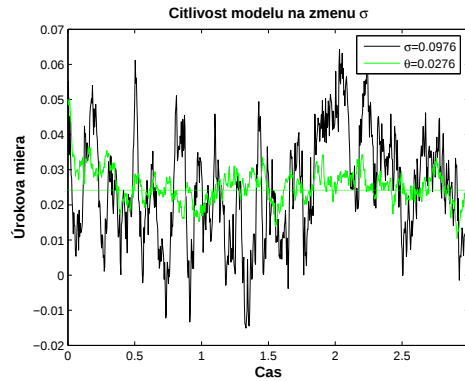
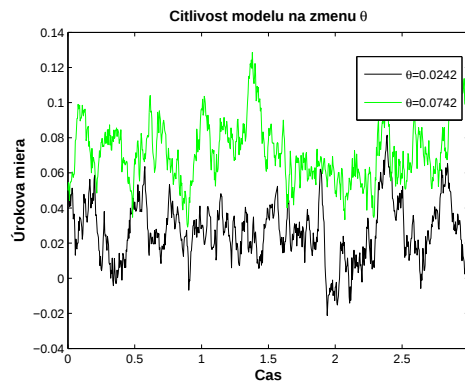
Vidíme, že veľkosť zmeny je závislá aj od náhodného člena. Pretože sa jedná o Wienerov proces, v dlhodobom horizonte efekt zmeny σ neovplyvňuje očakávanú hodnotu úrokovej miery, ale zvyšuje veľkosť fluktuácií. Výsledky môžeme opäť vidieť aj na obrázku 3.3. Čím je hodnota σ väčšia, a tým väčšia je veľkosť fluktuácií a naopak.

3.3.3 Citlivosť na parameter θ

Opäť použijeme ten istý postup ako pri parametroch κ , σ . Zmena θ o δ^θ dáva rovnicu

$$r^\theta(t_{i+1}) = r(t_i) + \kappa((\theta + \delta^\theta) - r(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}w_{i+1}, \quad (3.24)$$

kde úroková miera r^θ je miera v modeli s novou hodnotou $\theta = \theta + \delta^\theta$. Následne dostaneme rovnicu zachytávajúcu zmenu úrokovej miery o jednu jednotku v čase

Obr. 3.3: Citlivosť Vašíčkovho modelu na zmenu parametra σ Obr. 3.4: Citlivosť Vašíčkovho modelu na zmenu parametra θ

závislú od zmeny parametra θ

$$\Delta^\theta r(t_{i+1}) = \delta^\theta \kappa \Delta t. \quad (3.25)$$

Z rovnice (3.25) vyplýva, že zvýšenie hodnoty θ vedie následne k zvýšeniu hodnoty short-rate. Zníženie hodnoty θ vedie k zníženiu hodnoty okamžitej úrokovej miery. Hodnota parametra θ je teda dôležitá pri odhadovaní modelu, čo môžeme vidieť aj na obrázku 3.4.

3.4 PDR pre Vašíčkov model a citlivosť ceny dlhopisu na parametre

3.4.1 Odvodenie PDR pre Vašíčkov model

V tejto časti odvodíme formulku na oceňovanie dlhopisov použitím Vašíčkovho modelu. Postupovať budeme ako v [2]. V predchádzajúcej kapitole sme odvodili parciálnu diferenciálnu rovnicu ceny dlhopisu P so splatnosťou v čase T pre všeobecný

model. Tu namiesto všeobecných premenných dosadíme drift a volatilitu z modelu (3.1). Trhová cena rizika bude konštantná $\lambda(r, t) = \lambda$. Namiesto času t a času do expirácie T si zavedieme novú veličinu $\tau = T - t$. Túto je možné interpretovať ako čas, ktorý ešte ostáva do splatnosti. Následne funkcia ceny dlhopisu $P(r, \tau)$ spĺňa parciálnu diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma) \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (3.26)$$

s terminálovou podmienkou

$$P(r, 0) = 1 \text{ pre každé } r > 0.$$

Riešenie budeme hľadať v tvare

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}, \quad (3.27)$$

pričom funkcie A, B budú spĺňať začiatočné podmienky

$$A(0) = 1,$$

$$B(0) = 0.$$

Túto úlohu teraz vyriešime. Najprv vypočítame parciálne derivácie, ktoré vystupujú v rovnici (3.26)

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = (\dot{A} - A\dot{B}r) e^{-Br},$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -ABe^{-Br},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = AB^2e^{-Br}.$$

Následným dosadením do parciálnej rovnice (3.26) dostaneme

$$(\dot{A} - A\dot{B}r) e^{-Br} - AB(\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma) e^{-Br} + AB^2e^{-Br} \frac{\sigma^2}{2} - A r e^{-Br} = 0.$$

Ďalej združíme tie členy, ktoré obsahujú r a tie, ktoré r neobsahujú

$$\left(\dot{A} - AB(\kappa\theta - \lambda\sigma) + AB^2 \frac{\sigma^2}{2} \right) + rA(\dot{B} + \kappa B - 1) = 0.$$

Táto rovnosť platí iba v prípade, ak obe zátvorky sú identicky nulové, teda že

$$\dot{A} - AB(\kappa\theta - \lambda\sigma) + AB^2 \frac{\sigma^2}{2} = 0, \quad (3.28)$$

$$\dot{B} + \kappa B - 1 = 0. \quad (3.29)$$

Rovnica (3.29) je obyčajná lineárna diferenciálna rovnica, ktorej riešenie pri počiatkovej podmienke

$$B(0) = 0$$

má tvar

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{\kappa\tau}}{\kappa}. \quad (3.30)$$

Keď poznáme funkciu B , vieme vypočítať aj funkciu A

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \left[B(\kappa\theta - \lambda\sigma) - B^2 \frac{\sigma^2}{2} \right] A \\ \frac{\dot{A}}{A} &= B(\kappa\theta - \lambda\sigma) - B^2 \frac{\sigma^2}{2} \end{aligned}$$

integrovaním rovnice následne dostaneme

$$\ln A = \int \frac{d \ln A}{d\tau} = \int \left(B(\kappa\theta - \lambda\sigma) - B^2 \frac{\sigma^2}{2} \right) d\tau.$$

dosadením funkcie (3.30), vypočítaním integrálu a využitím podmienky $A(0) = 1$ dostaneme

$$\ln A(\tau) = (B(\tau) - \tau) \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma\lambda}{\kappa} \right) - \frac{\sigma^2 B(\tau)^2}{4\kappa}. \quad (3.31)$$

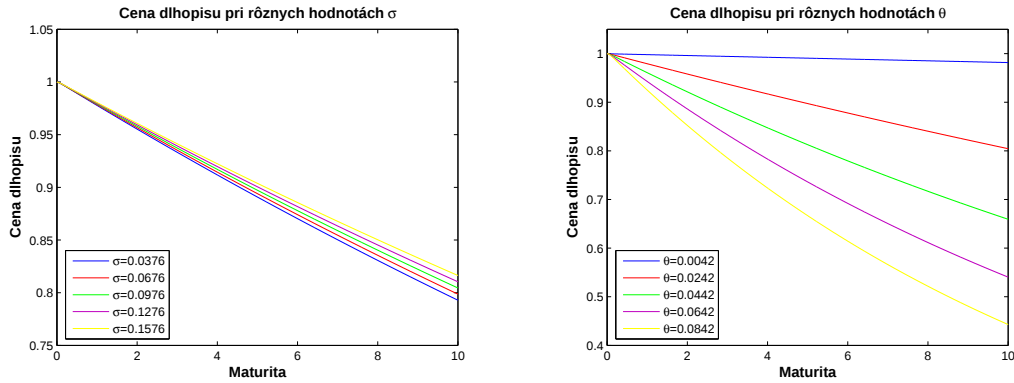
3.4.2 Citlivosť ceny dlhopisu na parametre κ , θ , σ

V predchádzajúcej časti sme odvodili PDR pre výpočet ceny dlhopisu pomocou Vašíčkovho modelu. V tejto a nasledujúcich dvoch častiach sa opäť vrátíme k myšlienke článku [6] a preskúmame vplyv zmeny hodnoty parametrov κ , θ , σ na cenu dlhopisu. Nakoľko nie je triviálne odvodiť presné vzťahy medzi zmenou ceny dlhopisu a zmenou hodnoty parametrov budeme podobne ako v článku [6] analyzovať vplyv na základe obrázkov. Postupne budeme meniť hodnotu vybraného parametra, kým ostatné parametre budú pevne dané.

Ako môžeme vidieť na obrázku 3.5 nárast hodnoty parametra θ vedie k poklesu ceny dlhopisu. Pozor ale treba dávať pri veľmi nízkych hodnotách θ . V tomto prípade môže byť cena dlhopisu väčšia než 1, čo je spôsobené tým, že Vašíčkov model môže nadobúdať aj záporné hodnoty short-rate.

Na ľavej strane obrázka 3.5 je zobrazený vplyv parametra σ na cenu dlhopisu P . Vidíme, že čím nižšia je hodnota σ , tým nižšia je aj hodnota P . Čím vyššia je hodnota σ , tým vyššia je hodnota P . Opäť si treba všimnúť, že cena dlhopisu môže nadobúdať aj hodnotu vyššiu ako 1, čo je oveľa pravdepodobnejšie pri vyšších hodnotách parametra σ .

Nakoniec analyzujeme zmenu vplyvu parametra κ na cenu dlhopisu P , ktorá je zobrazená na obrázkoch 3.6. Na obrázkoch je zachytená zmena ceny dlhopisu pri rôznych hodnotách konštanty σ . Z obrázkov je zrejmé, že s rastúcou hodnotou parametra κ , klesá cena dlhopisu. Vidíme, že pri vyšších hodnotách parametra σ je vyššia pravdepodobnosť, že cena dlhopisu bude väčšia ako 1 aj pri vyšších hodnotách parametra κ . Pri väčšej hodnote σ je zároveň nárast ceny dlhopisu pri zmene κ výraznejší.



Obr. 3.5: Vplyv zmeny parametrov σ , θ na cenu dlhopisu. Červenou farbou sú zobrazené hodnoty $\sigma = 0,0005$, $\theta = 0,0006$. Zelenou farbou hodnoty $\sigma = 0,1005$, $\theta = 0,1006$.

3.5 Výnosové krivky počítané Vašíčkovým modelom

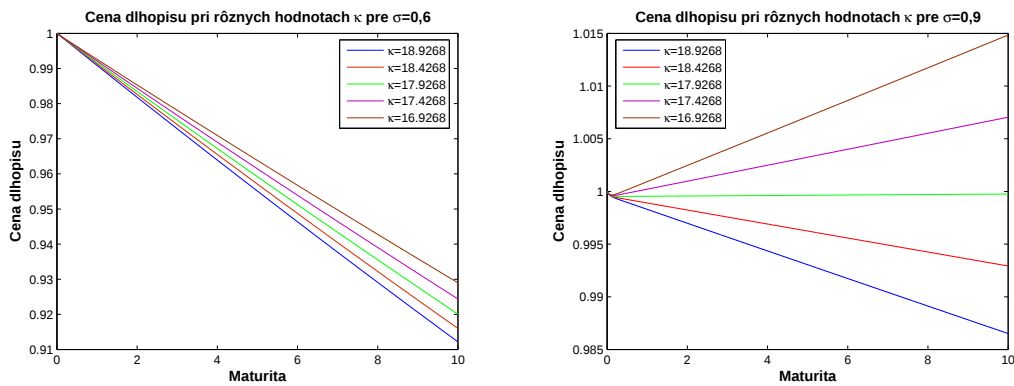
Dosadením vzťahu (3.27) do rovnice (1.2) dostaneme vzťah pre výpočet časovej štruktúry úrokových mier podľa Vašíčkovho modelu v tvare

$$R(r, t, t + \tau) = -\frac{\ln P(r, \tau)}{\tau}, \quad (3.32)$$

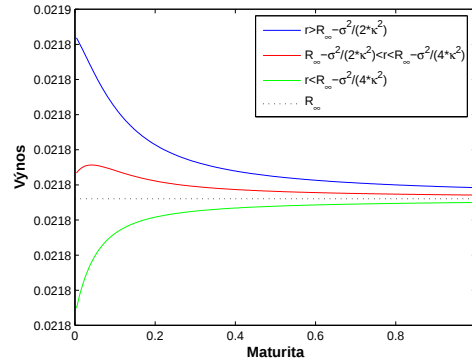
ktorý môžeme upraviť do tvaru

$$R(r, t, t + \tau) = \frac{-\ln A + Br}{\tau}. \quad (3.33)$$

Tým sme odvodili vzťah, pomocou ktorého vieme na základe parametrov odhadnutých z Vašíčkovho modelu a počiatočnej hodnoty r_0 vypočítať hodnoty časovej štruktúry úrokových mier.



Obr. 3.6: Vplyv zmeny parametra κ na cenu dlhopisu v závislosti od parametra σ .



Obr. 3.7: Tvary výnosových kriviek, ktoré je možné získať z Vašíčkovho modelu.

3.5.1 Limita výnosových kriviek a ich priebehy

Ako vidíme na obrázku 3.7 výnosová krivka môže mať rôzne tvary, pričom sa ale vždy blíži k nejakej limitnej hodnote. Spočítajme teraz hodnotu tejto limity. Dosadením vzťahov (3.31), (3.30) do rovnice (3.33) dostaneme

$$R(r, t, t + \tau) = \left(1 - \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau}\right) \left(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right) + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} \frac{(1 - e^{-\kappa\tau})}{\tau} + \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa\tau} r. \quad (3.34)$$

Potom pre limitu platí

$$R_\infty = \lim_{\tau \rightarrow \infty} R(r, t, t + \tau) = \left(\theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right). \quad (3.35)$$

To znamená, že hodnota časovej štruktúry úrokových mier konverguje k limitnej hodnote R_∞ . Podľa [4] je aj samotný tvar výnosovej krivky závislý od limitnej hodnoty R_∞ nasledovne

- ak $r \leq R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\kappa^2}$, tak výnosová krivka je rastúca,
- ak $r \geq R_\infty + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$, tak výnosová krivka je klesajúca,
- ak $R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\kappa^2} < r < R_\infty + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$, tak výnosová krivka je najprv rastúca a potom klesajúca.

Tieto podmienky publikoval Vašíček v roku 1977 v článku [8].

3.5.2 Citlivosť výnosových kriviek na parametre θ , κ , σ

V predchádzajúcich častiach sme sa zaoberali aj tým ako sa zmení cena dlhopisu či model, ak sa hodnota niektorého z parametrov zmení. V tejto časti sa zame- riame na

to, ako sa zmení tvar výnosovej krivky, ak sa zmení hodnota niektorého z parametrov.

Čo sa stane, ak sa hodnota niektorého parametra zmení, pričom hodnota r ostane zachovaná? Tvar novej krivky bude závisieť, od toho do ktorého z nových intervalov r patrí. Ak $r \leq R_\infty^\theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa^2}$ krivka bude rastúca. Ak $r \geq R_\infty^\theta - \frac{\sigma^2}{4\kappa^2}$ krivka bude klesajúca. Inak bude najprv rastúca, potom klesajúca. Z toho vyplýva, že správnou voľbou parametrov vieme dosiahnuť rôzne priebehy výnosových kriviek vychádzajúcich z danej hodnoty short-rate.

Okrem tvaru výnosovej krivky sa zmenia aj hodnoty výnosov dosiahnutých počítaním s novými parametrami. Ako môžeme vidieť na obrázkoch 3.8, ak parameter θ vzrastie, posunie sa výnosová krivka nahor. Ak jeho hodnota klesne posunie sa krivka nadol. Pozrime sa ešte, ako závisí limita výnosových kriviek od zmeny θ . V prípade ak sa hodnota θ zmení o δ dostaneme novú limitnú hodnotu danú vzťahom

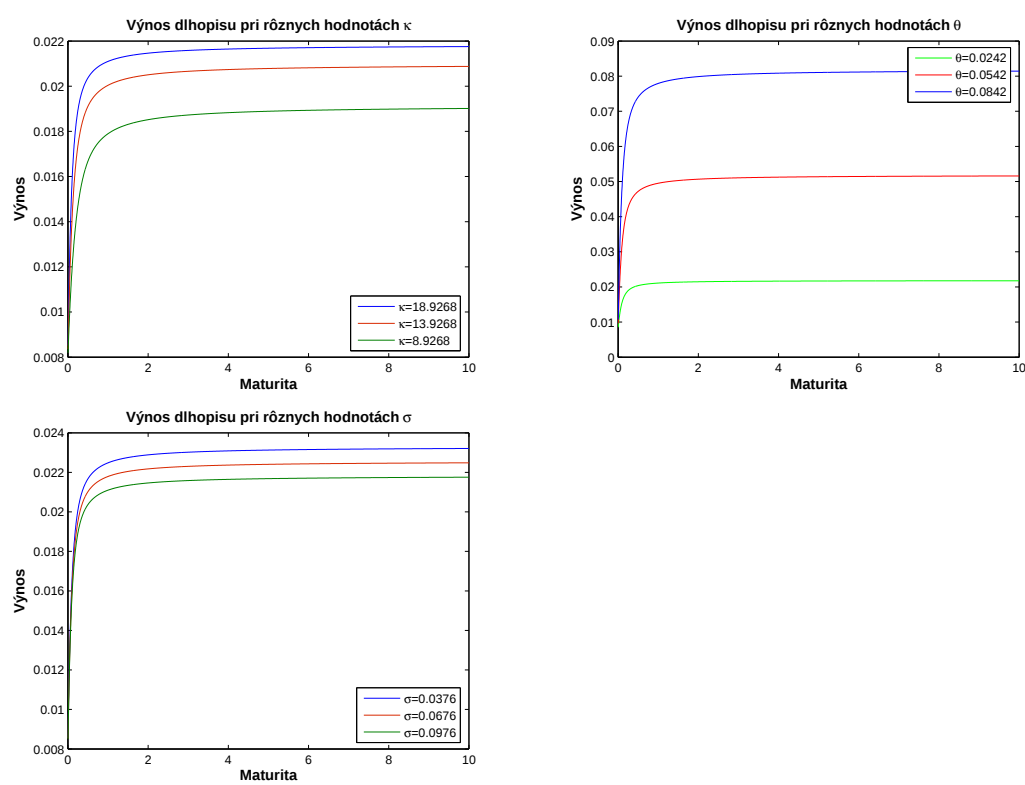
$$R_\infty^\theta = (\theta + \delta^\theta) - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}, \quad (3.36)$$

kde R_∞^θ je limita výnosových kriviek s novým parametrom $\theta = \theta + \delta^\theta$. Z toho vyplýva, že pre zmenu limity platí

$$\Delta^\theta R_\infty = \delta^\theta. \quad (3.37)$$

Teda, ak hodnota θ vzrastie, vzrastie aj limitná hodnota. V prípade poklesu θ , klesne aj limitná hodnota.

Ukážky správania sa limitnej hodnoty vzhľadom na parametre sú na obrázku(3.8. Vplyv zmeny hodnôt parametrov κ , σ nie je jednoznačný a závisí od hodnôt ostatných parametrov. Na obrázku 3.8 vidíme zmenu limitnej hodnoty, ak sú všetky parametre vstupujúce do rovnice kladné. V tom prípade sa so zvýšením hodnoty σ , zníži limitná hodnota. Zo zvýšením hodnoty κ sa zvýši aj limitná hodnota.

Obr. 3.8: Citlivosť výnosovej krivky na zmeny parametrov θ , κ , σ .

Kapitola 4

Kalibrácia jednofaktorového modelu úrokovej miery

V tejto kapitole predstavíme dvojfázovú metódu pre kalibráciu jednofaktorového Vašíčkovho modelu úrokovej miery. Táto metóda je úpravou metódy z článku [1] od D. Ševčoviča a A. Urbánkovej Csajkovej.

Kapitola bude rozčlenená na štyri časti. V prvej časti sa budeme venovať redukcii parametrov Vašíčkovho modelu. V druhej časti podrobne popíšeme obe fázy spomenutej dvojfázovej metódy, pričom urobíme podrobnejšie výpočty, ktoré sú v článku [1] len naznačené. Aplikáciou na simulované dáta sa budeme zaoberať v tretej časti. V poslednej časti se budeme zaoberať otázkami existencie optimálnych hodnôt parametrov ϱ a ξ .

4.1 Redukcia parametrov Vašíčkovho modelu

Hlavnou myšlienkou dvojfázovej metódy je transformácia zo štyroch pôvodných parametrov na tri transformované parametre, v ktorých by mala mať prvá fáza metódy jednoznačné riešenie.

Ako sme už uviedli v 3. kapitole, v prípade Vašíčkovho modelu vieme nájsť explicitné riešenie PDR tvaru $P(\tau, r) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}$, kde $\tau = T - t \in [0, T]$ je čas zostávajúci do splatnosti dlhopisu a funkcie A, B majú tvar

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa},$$
$$A(\tau) = \exp \left[(B(\tau) - \tau) \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma\lambda}{\kappa} \right) - \frac{\sigma^2 B(\tau)^2}{4\kappa} \right].$$

Keďže porovnávaním teoretických a skutočných výnosových kriviek nie sme schopní odhadnúť všetky pôvodné parametre $\kappa, \theta, \sigma, \lambda$, zavedieme transformované parametre

β, ϱ, ξ :

$$\beta = e^{-\kappa}, \quad \xi = \theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} - \frac{\sigma\lambda}{\kappa}, \quad \varrho = \frac{\sigma^2}{4\kappa}. \quad (4.1)$$

Tieto už budeme vedieť odhadnúť. Potom funkcie A, B môžeme použitím transformovaných parametrov vyjadriť v tvare

$$B(\tau) = -\frac{1 - \beta^\tau}{\ln \beta}, \quad (4.2)$$

$$A(\tau) = \exp(\xi(B(\tau) - \tau) - \varrho B^2(\tau)). \quad (4.3)$$

Je dôležité si uvedomiť, že v modeli predpokladáme kladnosť pôvodných parametrov κ, θ, σ . Z tohto dôvodu musia nové premenné spĺňať nasledovné ohraňenia:

$$0 < \beta < 1, \quad \varrho > 0.$$

4.2 Kalibrácia modelu

Ako sme už spomenuli, v tejto časti budeme kalibrovať dvojfázovú metódu, ktorá je úpravou metódy z článku [1]. V prvej fáze budeme minimalizovať váženú sumu štvorcov rozdielov odhadnutej výnosovej krivky a výnosovej krivky zo skutočných dát. V tejto fáze budeme hľadať optimálne hodnoty transformovaných parametrov. V druhej fáze potom pre každý deň minimalizujeme váženú sumu štvorcov odchýlok skutočných a odhadovaných výnosových kriviek. Tým nájdeme optimálnu hodnotu okamžitej úrokovej miery pre parametre z prvej fázy. Tieto dve fázy budeme opakovať.

4.2.1 Prvá fáza

Táto časť je prvým krokom kalibrácie. Metóda je popísaná v článku [1], pričom my v tejto časti podrobnejšie odvodíme výpočet hodnôt optimálnych parametrov. Minimalizáciou účelovej funkcie sa pokúsime nájsť optimálne hodnoty parametrov β, ϱ , a ξ . Za účelovú funkciu si vezmeme funkciu, ktorá bude minimalizovať vážený súčet štvorcov rozdielov hodnôt skutočnej a odhadnutej výnosovej krivky

$$U(\beta, \xi, \varrho) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_j^i - \tilde{R}_j^i)^2 \tau_j^2, \quad (4.4)$$

kde $\{R_j^i, j = 1, \dots, m\}$ je množina skutočných výnosov, $\{\tilde{R}_j^i, j = 1, \dots, m\}$ je množina odhadnutých výnosov, $i = 1, \dots, n$ je počet dní, m je počet maturít a τ_j je čas zostávajúci do splatnosti dlhopisu. Hodnoty R_j^i zodpovedajú úrokovým mieram pre diskontný dlhopis v čase τ_j . R_0^i je okamžitá úroková miera pre i -ty deň. Váhami sú v tomto prípade časy τ_j . Poznamenajme, že voľbou váh τ_j^2 zabezpečíme väčšiu zhodu odhadovaných a skutočných úrokových mier s dlhšou maturitou. Toto by sa malo

prejaviť najmä pri dlhopisoch na dlhšie časové obdobie napr. 20 rokov. Ak mesačná úroková sadzba bude mať váhu $\frac{1}{144}$, 20-ročná bude mať váhu 400. Hodnota váženého priemeru bude teda viac ovplyvnená hodnotou 20-ročnej úrokovej sadzby.

Položme $\tau_0 = 0$. Následne môžeme účelovú funkciu podľa [1] prepísať do tvaru

$$U(\beta, \xi, \varrho) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m ((\tau_j E(R_j) - B_j E(R_0) + \ln A_j)^2 + D(\tau_j R_j - B_j R_0)), \quad (4.5)$$

kde $E(X_j)$ a $D(X_j)$ označujú strednú hodnotu a disperziu vektora $X_j = \{X_j^i, i = 1, \dots, n\}$. V prvom kroku budeme minimalizovať túto účelovú funkciu. Pracovať budeme s redukovanými parametrami z predchádzajúcej časti. Ak budeme hľadať riešenie rovnice $\frac{\partial U}{\partial \varrho} = 0$, dostaneme

$$0 = \sum_{j=1}^m (\tau_j E(R_j) - B_j E(R_0) + \xi(B_j - \tau_j) - \varrho B_j^2) B_j^2.$$

Z toho dostaneme, že optimálne ϱ^{opt} Vašíčkovho modelu má tvar

$$\varrho^{opt} = \frac{\sum_{j=1}^m (\tau_j E(R_j) - B_j E(R_0) + \xi(B_j - \tau_j)) B_j^2}{\sum_{j=1}^m B_j^4}. \quad (4.6)$$

Opäť riešením $\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0$ vieme vyjadriť aj ξ^{opt}

$$\xi^{opt} = -\frac{\sum_{j=1}^m (\tau_j E(R_j) - B_j E(R_0) - \varrho B_j^2)(B_j - \tau_j)}{\sum_{j=1}^m (B_j - \tau_j)^2}. \quad (4.7)$$

Riešme teraz tieto dve lineárne rovnice pre optimálne hodnoty ϱ^{opt} a ξ^{opt} . Z (4.6) dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=1}^m (\tau_j E(R_j) - B_j E(R_0) + \xi^{opt}(B_j - \tau_j)) B_j^2}{\sum_{j=1}^m B_j^4} &= \varrho^{opt} \\ \sum_{j=1}^m (\tau_j E(R_j) - B_j E(R_0) + \xi^{opt}(B_j - \tau_j)) B_j^2 &= \varrho^{opt} \sum_{j=1}^m B_j^4 \\ \sum_{j=1}^m \xi^{opt}(B_j - \tau_j) B_j^2 &= \varrho^{opt} \sum_{j=1}^m B_j^4 - \sum_{j=1}^m (\tau_j E(R_j) - B_j E(R_0)) B_j^2 \\ \xi^{opt} &= \frac{\varrho^{opt} \sum_{j=1}^m B_j^4 - \sum_{j=1}^m (\tau_j E(R_j) - B_j E(R_0)) B_j^2}{\sum_{j=1}^m (B_j - \tau_j) B_j^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Kvôli prehľadnosti zavedieme nasledujúce označenie:

$$C_j = \tau_j E(R_j) - B_j E(R_0),$$

$$D_j = B_j - \tau_j.$$

Teraz dosadíme (4.8) do (4.7) a vyjadríme ϱ^{opt} :

$$-\frac{\sum_{j=1}^m (C_j - \varrho^{opt} B_j^2) D_j}{\sum_{j=1}^m D_j^2} = \frac{\varrho^{opt} \sum_{j=1}^m B_j^4 - \sum_{j=1}^m C_j B_j^2}{\sum_{j=1}^m D_j B_j^2},$$

$$\frac{\sum_{j=1}^m \varrho B_j^2 D_j}{\sum_{j=1}^m D_j^2} - \frac{\varrho^{opt} \sum_{j=1}^m B_j^4}{\sum_{j=1}^m D_j B_j^2} = \frac{\sum_{j=1}^m C_j D_j}{\sum_{j=1}^m D_j^2} - \frac{\sum_{j=1}^m C_j B_j^2}{\sum_{j=1}^m D_j B_j^2}.$$

A nakoniec vyjadríme samotné ϱ^{opt} :

$$\varrho^{opt} = \frac{\sum_{j=1}^m C_j D_j \sum_{j=1}^m D_j B_j^2 - \sum_{j=1}^m C_j B_j^2 \sum_{j=1}^m D_j^2}{(\sum_{j=1}^m B_j^2 D_j)^2 - \sum_{j=1}^m B_j^4 \sum_{j=1}^m D_j^2} \quad (4.9)$$

Teraz je jasné, že oba parametre sú závislé iba od parametra β . Funkciu U nám teda stačí minimalizovať iba v závislosti od tohto parametra a ďalšie dva potom dopočítame na základe vzťahov (4.9), (4.8).

4.2.2 Druhá fáza

V druhej fáze budeme pomocou odhadnutých parametrov ϱ^{opt} , β^{opt} , ξ^{opt} hľadať optimálne hodnoty okamžitej úrokovej miery, ktorá bude slúžiť ako vstup pre prvú fázu ďalšej iterácie. Budeme minimalizovať účelovú funkciu U_2 , ktorá je definovaná samostatne pre každý deň vzťahom

$$U_2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (R_{ij} - \tilde{R}_{ij})^2 \tau_j^2, \quad (4.10)$$

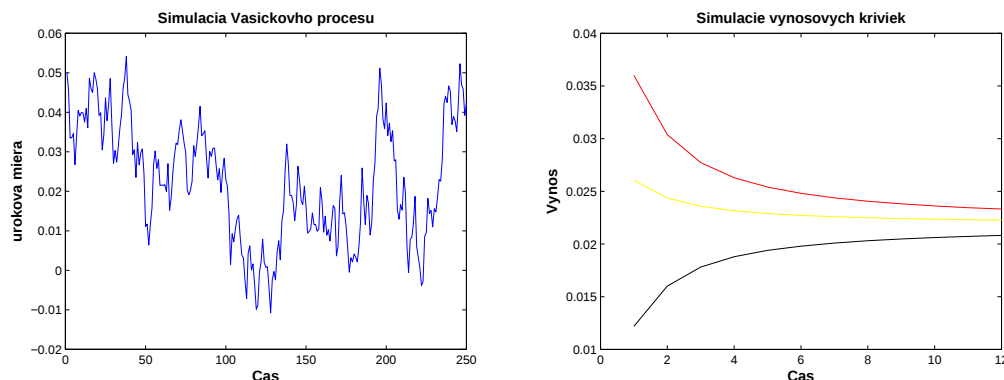
kde $\{R_j^i, j = 1, \dots, m\}$ je množina skutočných výnosov, $\{\tilde{R}_j^i, j = 1, \dots, m\}$ je množina odhadnutých výnosov, m je počet maturít a τ_j je čas zostávajúci do splatnosti dlhopisu.

Riešením rovnice $\frac{\partial U}{\partial r_0} = 0$ dostaneme

$$0 = \sum_{j=1}^m [(\tau_j E(R_j) + \ln A)(-B_j) + B_j^2 r_0],$$

a následne

$$r_0^{opt} = -\frac{\sum_{j=1}^m (\tau_j E(R_j) + \ln A)(-B_j)}{\sum_{j=1}^m B_j^2}. \quad (4.11)$$



Obr. 4.1: Simulácia vývoja úrokovej miery a výnosových kriviek pomocou Vašíčkovho modelu s parametrami: $\kappa = 18,9268$, $\sigma = 0,0976$, $\theta = 0,0242$, $\lambda = 0,4574$.

4.3 Aplikácia na simulované dáta

Na overenie funkčnosti nami navrhnutej metódy použijeme simulované dáta. Uvedieme preto postup na simulovanie dát z Vašíčkovho modelu.

Nech je daná ľubovoľná začiatočná hodnota r_0 , časový krok Δt , a parametre κ , θ , σ a λ . Následne generujeme r_t , pričom využívame poznatok z časti 3.1 o podmienenom rozdelení úrokových mier vo Vašíčkovom modeli. V našom prípade sme začiatočnú hodnotu zvolili $r_0 = 0,05$ a parametre $\kappa = 18,9268$, $\sigma = 0,0976$, $\theta = 0,0242$, $\lambda = 0,4574$. Hodnoty parametrov sme prevzali z [15]. Dáta sme generovali pre obdobie 63 dní - čo zodpovedá približne štvrtroku. Následne sme k hodnotám okamžitej úrokovej miery pre každý deň vypočítali teoretické výnosy pre 12 splatností (1 mesiac, 2 mesiace, ..., 1 rok). Ukážky priebehu takto generovaného procesu sú zachytené na obrázku 4.1 spolu s ukážkami výnosových kriviek.

Vstupom pre algoritmus je matica zložená zo štartovacej hodnoty short-rate a výnosov pre mesiace 1 - 12. Štartovať budeme z dvoch rôznych hladín. Z $-0,05$ hladiny short-rate a z hladiny 0,1. Cieľom je zistiť, či je rozdiel, ak štartujeme pod odhadovanou hodnotou alebo nad odhadovanou hodnotou.

Významnú úlohu zohráva kritérium zastavenia optimalizačného algoritmu. Je dôležité určiť takú hranicu, aby sme dostali čo najpresnejší odhad, ale zároveň aby sme nečakali na výsledky príliš dlho. My sme si zvolili kritérium nasledovne: Rozdiel absolútnych hodnôt skutočnej a odhadovanej short-rate musí byť menší ako 10^{-2} . Toto kritérium sme zvolili, aby sme zistili, či odhadnutá short-rate konverguje k skutočnej. Takéto kritérium nie je vhodné na praktickú implementáciu algoritmu, nakoľko skutočnú hodnotu short-rate nepoznáme. Preto sme museli zvoliť iné kritérium pre reálne dáta. Rozhodli sme sa spustiť algoritmus naraz z dvoch štartovacích hladín - z nuly a z hodnoty 0,1. Algoritmus sa zastaví, ak bude rozdiel medzi odhadovanými krivkami short-rate menší ako 10^{-6} .

Po zastavení algoritmu dostaneme odhady transformovaných parametrov, ktoré nájdeme v tabuľke 4.1. Vidíme, že odhad parametra ξ , je na štyri desatinné miesta zhodný so skutočným parametrom. Podobne môžeme povedať, že aj odhad β je

Parametre	Odhadnuté		Skutočné
	Štart 0, 1	Štart 0	
β	0,0001	0,0001	$6 \cdot 10^{-9}$
ϱ	-0,0721	-0,0464	0,0001
ξ	0,0219	0,0218	0,0218
U	$2,19 \cdot 10^{-9}$	$2,15 \cdot 10^{-9}$	—

Tabuľka 4.1: Skutočné a odhadnuté transformované parametre β, ϱ, ξ pre simulované dáta.

dobrý, pretože aj hodnota tohoto parametra sa blíži k nule rovnako ako hodnota skutočného parametra. Problémom je len záporná hodnota parametra ϱ . Takýto odhad je neprípustný. Minimálne hodnoty funkcie U v priebehu algoritmu postupne klesali až k hodnotám 10^{-9} , čo môžeme vidieť na obrázkoch 4.3 spolu s vývojom hodnôt odhadovaných parametrov v priebehu algoritmu.

Na obrázku 4.2 sú zobrazené priebehy odhadovaných a skutočných výnosových kriviek. Naľavo sú zobrazené priebehy vývoja odhadovaných kriviek úrokových mier. Jedna krivka zodpovedá vždy stej iterácii. Modrou farbou sú zobrazené odhadované krivky zo štartovacej hladiny 0,1, zelenou zo štartovacej hladiny -0,05. Na pravej strane je znázornená posledná odhadnutá krivka a skutočné krivky úrokových mier. Ako môžeme vidieť z obrázka, odhadovaná krivka sa najviac tvarom podobá na mesačnú krivku úrokových mier.

Výnosovými krivkami sa pri simulovaných dátach nemá význam zaoberať, nakoľko nám odhad parametra ϱ vyšiel záporný. Záporné ϱ znamená, že aj hodnota pôvodného parametra κ je záporná. Tým by sme dostali proces so záporým driftom, ak je hodnota short-rate menej ako θ a s kladným driftom, ak je hodnota short-rate viac ako θ , čo nemá zmysel.

4.4 Existencia optimálnych hodnôt parametrov ϱ, ξ

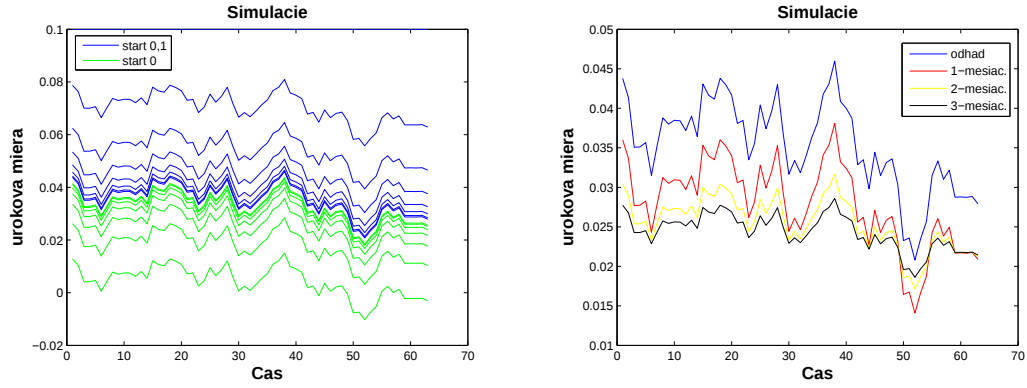
Majme odhad $\beta \in (0, 1)$. Optimálne hodnoty parametrov ξ, ϱ dopočítame pomocou explicitných vzorcov (4.8) a (4.9). Tie sú v tvare zlomku. Vzniká tu preto otázka, či vieme zaručiť, že menovateľ nie je nula.

Najskôr sa pozrime na parameter ξ . Odhad tohoto parametra má podľa (4.8) v menovateli $\sum_{j=1}^m (B_j - \tau_j) B_j^2$. Chceme overiť, či platí

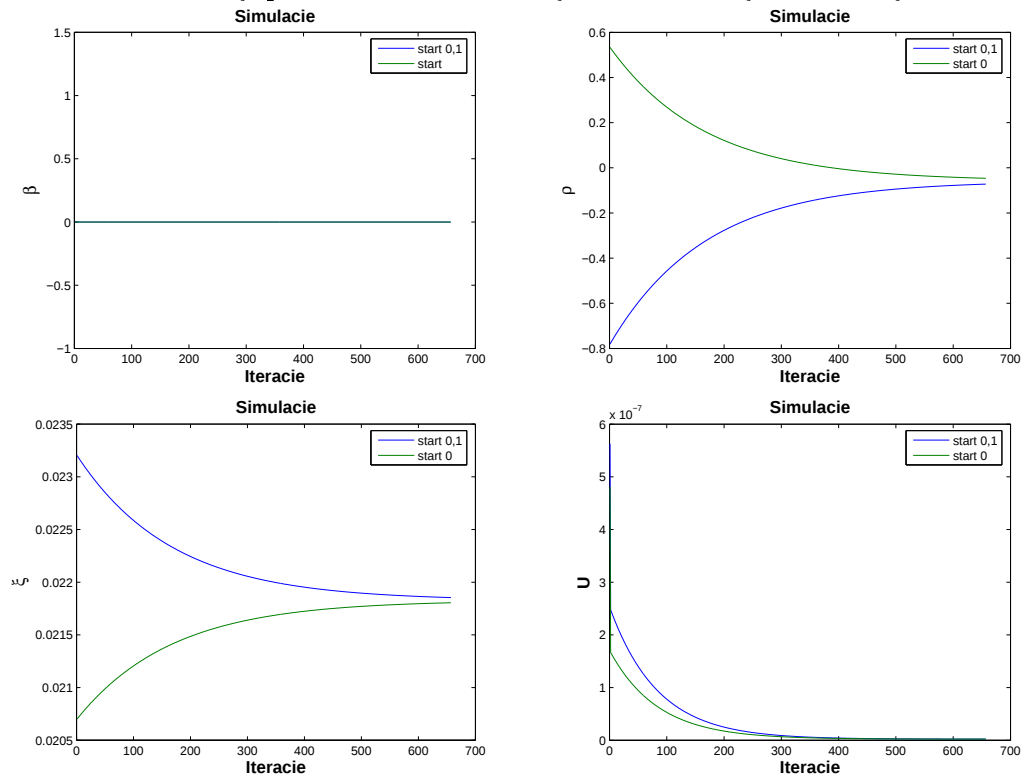
$$\sum_{j=1}^m (B_j - \tau_j) B_j^2 \neq 0.$$

Funkcia $B(\tau)$ sa v pôvodných premenných rovná $\frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}$, pričom $\kappa > 0, \tau > 0$. To znamená, že je nenulová pre $\forall \tau > 0$. Z čoho máme, že

$$B_j^2 > 0. \quad (4.12)$$



Obr. 4.2: Grafy priebehov odhadovaných a skutočných úrokových mier.

Obr. 4.3: Ukážky priebehov odhadovaných parametrov β, ϱ, ξ a minimálnych hodnôt účelovej funkcie U .

Definujme teraz funkciu $F_1(\tau) = B(\tau) - \tau$. Pre túto funkciu platí nasledovné

$$F_1(0) = B(0) - 0 = 0,$$

$$\dot{F}_1(\tau) = \dot{B}(\tau) - 1 = e^{-\kappa\tau} - 1 < 0.$$

Z toho vyplýva, že $F_1(\tau) < 0$ pre $\tau > 0$ a teda že

$$B_j - \tau_j < 0. \quad (4.13)$$

Tým sme ukázali, že každý sčítanec v sume $\sum_{j=1}^m (B_j - \tau_j) B_j^2$ je záporný. Preto aj celá suma je záporná a nerovná sa nule.

Teraz sa pozrime bližšie na parameter ϱ . Odhad parametra ϱ má podľa vzorca (4.9) v menovateli $(\sum_{j=1}^m B_j^2 D_j)^2 - \sum_{j=1}^m B_j^4 \sum_{j=1}^m D_j^2$. Z Cauchyho nerovnosti vyplýva, že

$$\left(\sum_{j=1}^m B_j^2 D_j\right)^2 \leq \sum_{j=1}^m B_j^4 \sum_{j=1}^m D_j^2, \quad (4.14)$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy a len vtedy, keď

$$B_j^2 = k D_j \text{ pre } j = 1, \dots, m \quad (4.15)$$

a pre nejakú konštantu k . Teda $B_j^2 = k(B_j - \tau_j)$. Keďže sme ukázali, že $B_j^2 > 0$ a súčasne podľa (4.13) $B_j - \tau_j < 0$, aby rovnosť (4.15) platila, tak konštanta k musí byť záporná.

Ostáva ešte vyriešiť otázku, či pre nejaké konštanty $\kappa > 0$, $k < 0$ a pre maturity $\tau_1, \dots, \tau_m$ môže platiť

$$B^2(\tau_j) - k(B(\tau_j) - \tau_j) = 0 \text{ pre } j = 1, \dots, m. \quad (4.16)$$

V tom prípade - pri použití takýchto maturít a získaní takéhoto odhadu parametra κ (resp. transformovaného parametra β) - by sme vo vzorci pre výpočet ϱ dostali nulu v menovateli. Definujme preto funkciu $F_2(\tau) = B^2(\tau)(B(\tau) - \tau)$. Pýtame sa, či sa môže rovnať nule v m bodoch. Podľa Rolleho vety, ak F_2 nadobúda v dvoch nulových funkčných hodnotu, tak v nejakom bode medzi nimi má nulovú deriváciu. Teda ak platí 4.16, tak $\dot{F}_2(\tau) = 0$ v aspoň $m - 1$ bodoch. Počítajme teda deriváciu:

$$\begin{aligned} \dot{F}_2(\tau) &= 2B(\tau)\dot{B}(\tau) - k(\dot{B}(\tau) - 1) = \\ &= 2\frac{(1 - e^{-\kappa\tau})}{\kappa}e^{-\kappa\tau} - k(e^{-\kappa\tau} - 1) = \\ &= \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau})(2e^{-\kappa\tau} + \kappa k). \end{aligned}$$

Vidíme, že $\dot{F}_2(\tau)$ sa rovná nule nanajvýš v jednom bode

$$\tau = -\frac{1}{\kappa} \ln \left(-\frac{\kappa k}{2} \right).$$

Keďže $\kappa > 0$, $k < 0$ tak logaritmus je definovaný. Môže sa však stať, že $-\frac{\kappa k}{2} > 1$.

V tomto prípade $-\frac{1}{\kappa} \ln \left(-\frac{\kappa k}{2} \right) < 0$, a teda $\dot{F}_2(\tau) \neq 0$ pre $\tau > 0$. V každom prípade však platí, že $\dot{F}_2(\tau)$ sa nemôže rovnať nule vo viac ako jednom bode. Ak je teda $m \geq 3$, tak (4.16) nemôže platiť. To znamená, že ak pri kalibrácii použijeme úrokové miery s troma maturitami, výraz pre odhad ϱ nemôže mať v menovateli nulu, bez ohľadu na to, ako nám vyjde odhad β .

Na záver ešte spomeňme ďalšie otázky, ktorými je potrebné sa pri skúmaní existencie odhadov v budúcnosti zaoberať:

- existencia optimálnej hodnoty β , keďže sme v prvej časti ukázali, že β je z otvoreného intervalu $(0, 1)$,
- kedy vieme zaručiť kladnosť parametra ϱ , pretože v prvej časti tejto kapitoly sme ukázali, že má platiť $\varrho > 0$,
- či vieme kladnosť ϱ zaručiť voľbou nejakej podmienky na skúmané dáta.

Kapitola 5

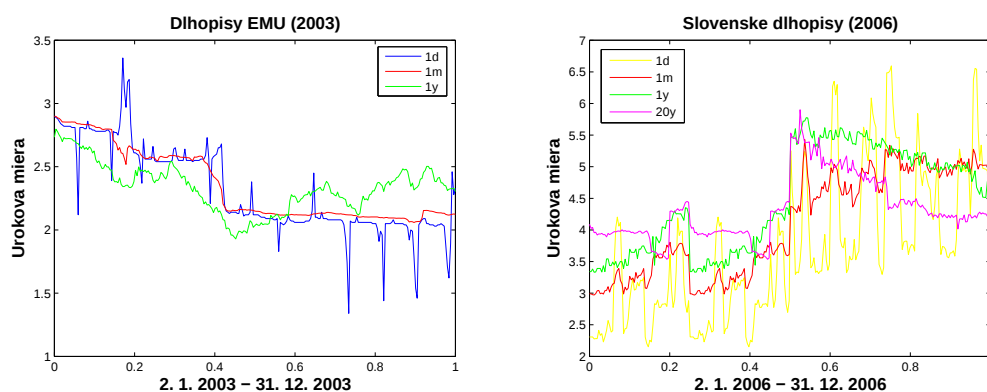
Aplikácia na reálne dáta

V tejto kapitole aplikujeme navrhnutú metódu na reálne trhové dáta. Kalibrovať budeme výnosy z európskej menovej únie a slovenské dlhopisy. Do kalibrácie zahrnieme údaje z roku 2003 pre európske a z roku 2006 pre slovenské dlhopisy. Rok 2003 sme vybrali z dôvodu, že aj podkladový článok [1] pracoval s dátami roku 2003. Rovnako, ako v článku [1], sme dáta rozdelili na kvartáli. Nakoľko EURIBOR je udávaný iba za obdobie jedného roka, rozhodli sme sa skúmať našu metódu aj na slovenských dlhopisoch, ktoré sú až na obdobie 20 rokov.

EURIBOR (Euro InterBank Offered Rate) [13] je medzibanková referenčná sadzba v rámci hospodárskej a menovej únie, ktorá bola zavedená v roku 1999. Počíta sa ako vážený priemer sadzieb zúčastnených bánk. Je to sadzba, za ktorú sú euro termínové vklady ponúkané jednou bankou inej banke na medzibankovom trhu. Zverejňovaná je o 11:00 SEČ. Výpočtom a zverejňovaním Euriboru bola poverená spoločnosť Thomson-Reuters. Deskriptívne štatistiky sú uvedené v tabuľke 5.1. Dáta sú voľne dostupné na internetovej stránke www.euribor.org. Priebeh 1-dňovej, mesačnej a 12-mesačnej úrokovej miery je znázornený na obrázku 5.1.

	1Q		2Q	
	Priemer	Odchýlka	Priemer	Odchýlka
1d	2,766	0,187	2,441	0,198
1m	2,744	0,115	2,422	0,185
1r	2,543	0,140	2,234	0,188
	3Q		4Q	
	Priemer	Odchýlka	Priemer	Odchýlka
1d	2,065	0,117	2,007	0,164
1m	2,126	0,009	2,106	0,025
1r	2,201	0,104	2,363	0,082

Tabuľka 5.1: Priemery a štandardné odchýlky (v %) pre vybrané maturity európskych dlhopisov roku 2003 podľa štvrťrokov.



Obr. 5.1: Grafy priebehu dennej, mesačnej a 12-mesačnej úrokovej sadzby na dlhopisy EMU z roku 2003 vľavo a dennej, mesačnej, ročnej a 20-ročnej úrokovej sadzby na slovenské dlhopisy z roku 2006 vpravo.

Prejdime k samotnej kalibrácii modelu. Bude nás zaujímať ako model odhaduje krátkodobú úrokovú mieru. Cieľom je zistiť, na ktorú z na trhu dostupných úrokových sadzieb sa bude odhadovaná krivka podobáť - či na overnight, týždňovú, mesačnú alebo inú úrokovú sadzbu. Taktiež nás bude zaujímať, či dostaneme rovnaké výsledky pre dáta s maturitami do jedného roka a pre dáta s maturitami aj väčšími ako jeden rok. Budeme si tiež všímať, aké sú odhadované hodnoty transformovaných parametrov β , ξ , ρ a aký je ich vývoj počas priebehu algoritmu. Nakoniec sa zameriame na výnosové krivky. Pozrieme sa, aké tvary nadobúdajú výstupy z modelu a porovnáme

	1Q		2Q	
	Priemer	Odchýlka	Priemer	Odchýlka
1d	2,881	0,572	3,690	0,928
1m	3,330	0,276	3,875	0,346
1r	3,728	0,328	4,528	0,270
5r	3,860	0,296	4,650	0,242
10r	3,938	0,216	4,621	0,194
20r	3,973	0,233	4,753	0,174
	3Q		4Q	
	Priemer	Odchýlka	Priemer	Odchýlka
1d	4,371	1,067	4,639	0,838
1m	4,726	0,283	5,026	0,114
1r	5,470	0,121	4,996	0,209
5r	5,275	0,278	4,356	0,144
10r	5,103	0,290	4,310	0,146
20r	5,051	0,295	4,284	0,106

Tabuľka 5.2: Priemery a štandardné odchýlky (v %) pre vybrané maturity slovenských dlhopisov roku 2006 podľa štvrťrokov.

Q	β		ρ		ξ	
	Štart 0, 1	Štart 0	Štart 0, 1	Štart 0	Štart 0, 1	Štart 0
1.	0,999	0,999	-23,72	-23,68	$3,3 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^5$
2.	0,999	0,999	-26,06	-38,69	$3,9 \cdot 10^5$	$9,5 \cdot 10^5$
3.	0,999	0,999	-22,64	-32,21	$4,2 \cdot 10^5$	$9,7 \cdot 10^5$
4.	0,999	0,999	-20,33	-20,31	$3,8 \cdot 10^5$	$3,7 \cdot 10^5$

Tabuľka 5.3: Odhady transformovaných parametrov z kvartálnych dát európskych dlhopisov roku 2003

ich s reálnymi výnosovými krivkami. Ako sme spomenuli v štvrtej kapitole dôležitú úlohu v našom algoritme zohráva voľba kritéria zastavenia. Pri aplikácii na reálnych dátach sme sa rozhodli sputiť algoritmus naraz z dvoch rôznych hladín - z nulovej a z 0,1. Program zastavíme, ak absolútna hodnota rozdielu medzi odhadovanými hodnotami úrokových mier oboch hladín je menšia ako 10^{-6} .

5.1 Dlhopisy EMU (2003)

V tejto časti kapitoly si predstavíme výsledky, ktoré sme dosiahli aplikovaním našej metódy na kvartálne dáta EURIBORU z roku 2003. Najskôr sa budeme venovať odhadom short-rate a parametrov pre každý kvartál osobitne, až potom sa budeme venovať výnosovým krivkám.

1. Kvartál: Vývoj odhadovanej short-rate môžeme vidieť v ľavej časti z obrázka 5.2, pričom jedna krivka zodpovedá vždy stej iterácii programu. Zelenou farbou je zobrazená odhadovaná short-rate so štartom z nulovej hladiny. Modrou farbou je zobrazená odhadovaná short-rate so štartom z hladiny 0,1. Toto farebné označenie budeme používať aj pri ostatných obrázkoch priebehov short-rate. Napravo sú zobrazené skutočné priebehy over-nightu, mesačnej a 3-mesačnej úrokovej miery. Porovnaním ľavého a pravého obrázka prideme k záveru, že naša odhadovaná short-rate sa najviac podobá na 3-mesačnú úrokovú sadzbu. Vývoj hodnôt odhadovaných parametrov je zobrazený na obrázku 5.3, hodnoty parametrov dosiahnuté v poslednej iterácii sú v tabuľke 5.3. Môžeme vidieť, že hodnoty všetkých parametrov sa držia na hodnote nula. Ako prvý sa začíná meniť parameter β , ktorý postupne rastie až k hodnote 0,9998. V okamihu, kedy sa hodnota β ustáli v okolí jednej, sa začínajú oscilovať hodnoty zvyšných dvoch parametrov.

2. Kvartál: Na obrázkoch 5.4 a 5.5 môžeme opäť pozorovať vývoj odhadovanej short-rate a odhadovaných parametrov. Odhadovaná short-rate sa najviac ponáša opäť na trojmesačnú úrokovú sadzbu. Priebeh odhadovaných parametrov je podobný ako v prvom kvartáli. Iba parameter ρ počítaný zo štartovacej hladiny nula sa najskôr z nuly dostáva do kladných hodnôt a potom sa "prehupne do záporných hodnôt". Hodnoty parametrov dosiahnuté v poslednej iterácii sú v tabuľke 5.3.

Q	β		ρ		ξ	
	Štart 0, 1	Štart 0	Štart 0, 1	Štart 0	Štart 0, 1	Štart 0
1.	0,900	0,900	0,0007	0,0007	0,038	0,038
2.	0,954	0,954	-0,0007	-0,0007	0,065	0,065
3.	0,999	0,999	-0,4935	-0,4923	$1,4 \cdot 10^4$	$1,4 \cdot 10^4$
4.	0,894	0,894	-0,0011	-0,0011	0.045	0,045

Tabuľka 5.4: Odhady transformovaných parametrov z kvartálnych slovenských dlhopisov roku 2006

3. Kvartál: Simulácie vývoja úrokovej miery a odhadovaných parametrov za 3. kvartál roku 2003 sú zobrazené na obrázkoch 5.6 a 5.7. Vidíme, že v tomto prípade sa odhadovaná úroková miera nepodobá na žiadnu zo skutočných úrokových mier na obrázku. Väčšiu pozornosť treba venovať vývoju odhadovaných parametrov. Odhadovaný parameter β nadobúda znovu hodnoty blízke jednej. Zmena nastala v priebehu zvyšných dvoch parametrov. Kým v predchádzajúcich dvoch kvartáloch nie je viditeľné, že by sa hodnoty odhadovaných parametrov ρ a ξ ustálili na konkrétnej úrovni, v tomto kvartáli sa to zmenilo.

4. Kvartál: Výsledky, ktoré sme dosiahli na dátach zo 4.-tého kvartálu sú veľmi podobné kvartálu tretiemu. Odhadovaná short-rate sa nepodobá žiadnej zo zobrazených úrokových sadzieb. Odhady všetkých parametrov sa, ako v predchádzajúcom prípade, ustálili na určitej hodnote pri štarte z nulovej hladiny. Grafické výsledky sú na obrázkoch 5.8 a 5.9 a numerické v tabuľke 5.3.

Výnosové krivky: Nakoľko bola odhadovaná hodnota parametra ρ v každom kvartáli záporná, musíme odhady vyhlásiť za neprípustné. Nie je preto možné pre tieto dáta nakresliť výnosové krivky. Aby bolo možné skúmať aj výnosové krivky, je potrebné zaoberať sa úpravou metódy tak, aby sme nedostali záporné odhady ρ .

5.2 Slovenské dlhopisy (2006)

V tejto časti tejto kapitoly rozoberieme výsledky dosiahnuté aplikáciou našej metódy na slovenské dlhopisy z roku 2006. Dáta sme si opäť rozdelili na kvartáli, takže aj výsledky rozoberieme samostatne pre každý kvartál. Záver tejto časti bude opäť venovaný analýze odhadovaných výnosových kriviek. Deskriptívne štatistiky sú v tabuľke 5.2. Priebehy vybraných úrokových sadzieb sú na obrázku 5.1.

1. Kvartál: V ľavej časti obrázka 5.10 môžeme vidieť vývoj odhadovanej short-rate. Jedna farebná krivka zodpovedá vždy stej iterácii. Zelenou farbou sú zakreslené odhady dosiahnuté zo štartovacej hladiny 0. Modrou farbou sú znázornené odhady dosiahnuté zo štartovacej hladiny 0,1. Napravo môžeme pozorovať priebehy nami odhadnutej úrokovej miery, overnight, týždennej, mesačnej a 3-mesačnej úrokovej

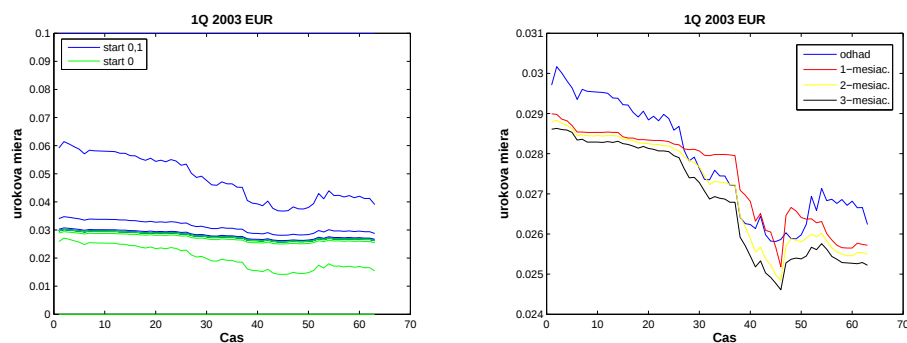
miery. Ako vidíme z obrázka, odhadovaná úroková miera sa najviac svojim priebehom podobá na trojmesačnú úrokovú mieru. Na obrázku 5.11 sú znázornené priebehy hodnôt odhadovaných parametrov počas priebehu programu. Presné hodnoty parametrov dosiahnuté v poslednej iterácii sú v tabuľke 5.4. Treba si všimnúť zmenu v priebehu parametrov ϱ , ξ oproti európskym dlhopisom z roku 2003, ktoré sme analyzovali v predchádzajúcej časti. V tomto prípade nedochádza k oscilácii týchto parametrov, ale majú pekný jednoduchý priebeh a konvergujú k určitej hodnote. Nakoniec sú všetky hodnoty parametrov kladné.

2. Kvartál: Na obrázkoch 5.12 a 5.13 sú zobrazené priebehy odhadovaných parametrov a odhadovanej úrokovej miery za druhý kvartál. Na obrázku 5.12 vľavo je zobrazený tvar odhadovanej short-rate vždy po 100 iteráciách, vpravo je vykreslená odhadovaná úroková miera a skutočné úrokové miery. Vidíme, že naša odhadnutá short-rate sa najviac podobá na trojmesačnú úrokovú mieru. V tabuľke 5.4 sú presné odhady parametrov. U parametrov ϱ , ξ opäť neprišlo k oscilácii hodnôt ako tomu bolo v prípade európskych dát.

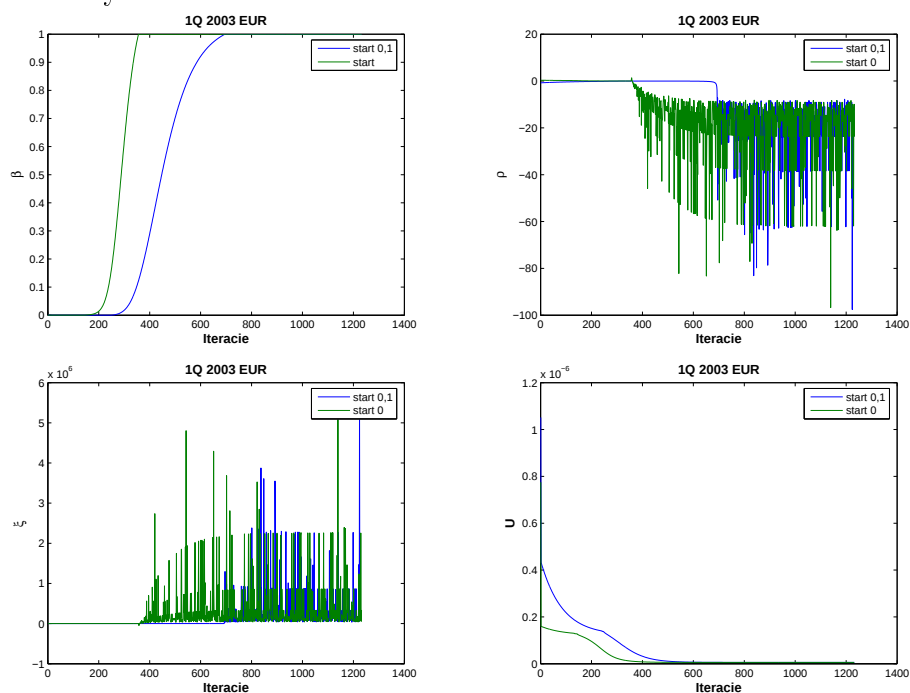
3. Kvartál: Na obrázkoch 5.14 a 5.15 sú znázornené priebehy odhadov v treťom kvartáli. Odhadovaná úroková miera sa v tomto kvartáli svojím tvarom najviac podobá na trojmesačnú úrokovú mieru. V tabuľke 5.4 vidíme, že hodnota parametra β dosiahla na rozdiel od prvých dvoch kvartálov hodnotu takmer rovnú jednej. Aj výsledná hodnota ϱ je po prvýkrát záporná a hodnota parametra ξ je veľmi vysoká až 10^4 . Napriek tomu minimálna hodnota účelovej funkcie dosiahla hodnotu rádovo 10^{-5} , kým v predchádzajúcich štvrtrokoch to bolo 10^{-4} .

4. Kvartál: V poslednom štvrtroku roku 2006 prišlo k zlepšeniu v odhadoch parametrov oproti predchádzajúcemu štvrtroku. Ako vidíme v tabuľke 5.4 odhad parametra ϱ je iba $-0,001$, čo stále nespĺňa pôvodný predpoklad ale je to hodnota bližšia k nule. Vývoj hodnôt odhadovaných parametrov a short-rate pre tento kvartál je nakreslený na obrázkoch 5.16 a 5.17. Odhadovaná úroková miera sa znova podobá najviac na trojmesačnú úrokovú mieru.

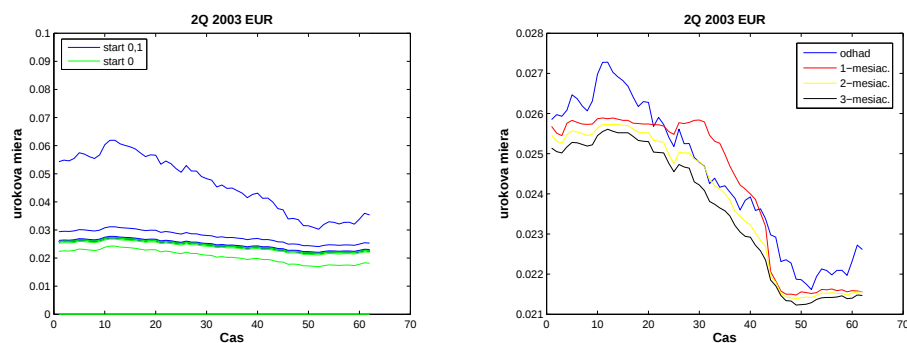
Výnosové krivky: Na obrázkoch 5.18 vpravo, sú zakreslené skutočné a odhadnuté výnosové krivky. Vľavo sú zakreslené priebehy vývoja odhadovaných výnosových kriviek vždy po tej istej iterácii. Ako vidíme, výnosová krivka odhadovaná v prvom kvartáli je najskôr rastúca a potom klesajúca. Pre ostatné štvrtroky opäť nie je možné venovať sa analýze výnosových kriviek, nakoľko odhad ϱ je znovu záporný a teda aj neprípustný.



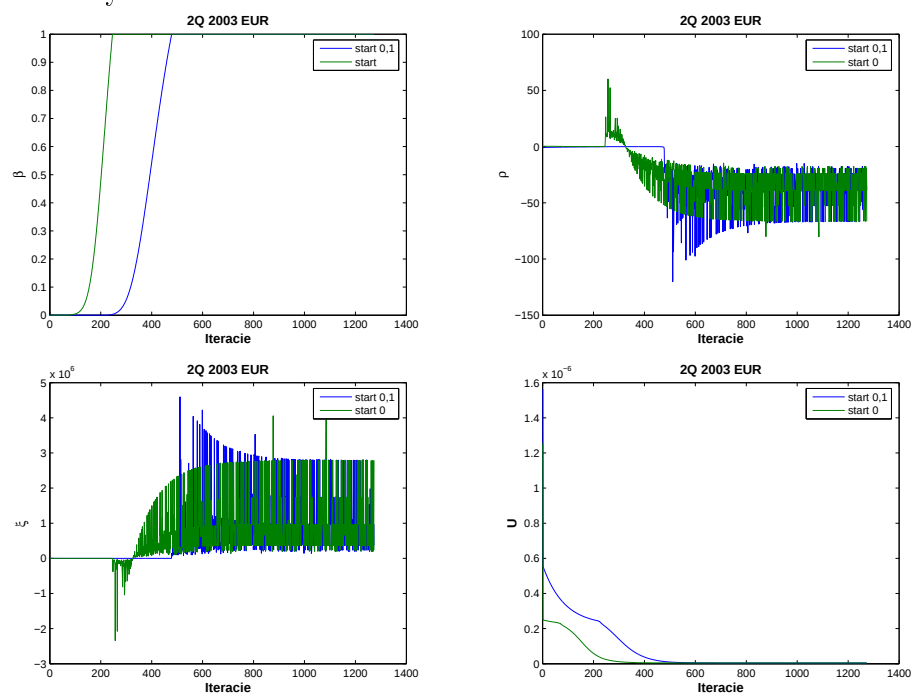
Obr. 5.2: Odhadnutá short-rate z dát európskych dlhopisov za prvý kvartál. Naľavo je priebeh odhadovanej short-rate, napravo je porovnanie priebehu odhadu so skutočnými úrokovými mierami.



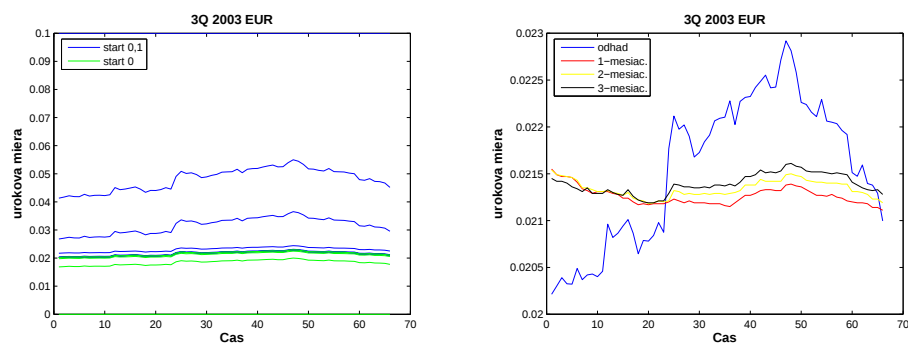
Obr. 5.3: Priebehy odhadovaných parametrov v 1. kvartáli



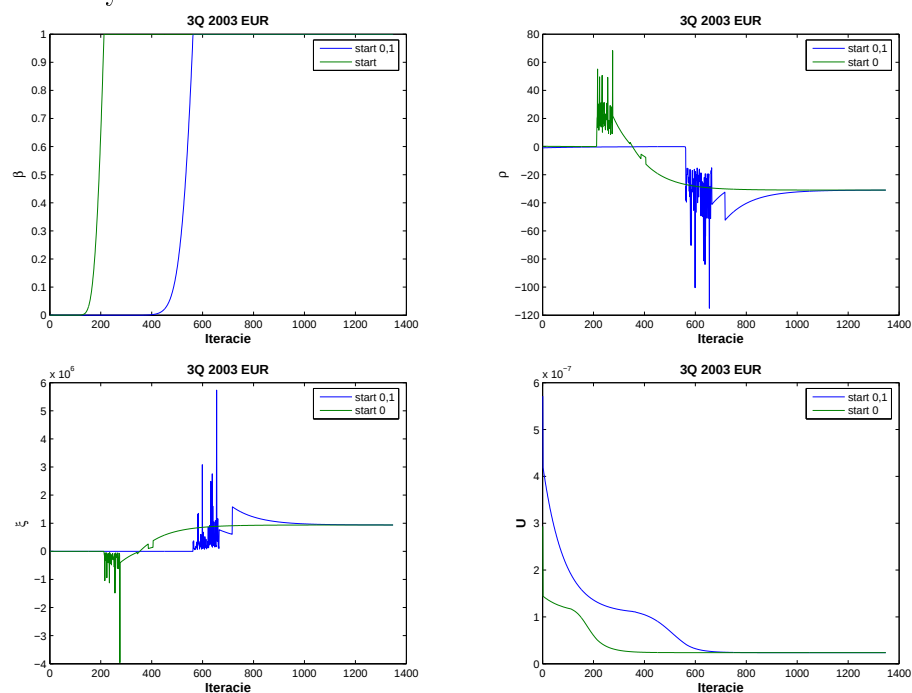
Obr. 5.4: Odhadnutá short-rate z dát európskych dlhopisov za druhý kvartál. Naľavo je priebeh odhadovanej short-rate, napravo je porovnanie priebehu odhadu so skutočnými úrokovými mierami.



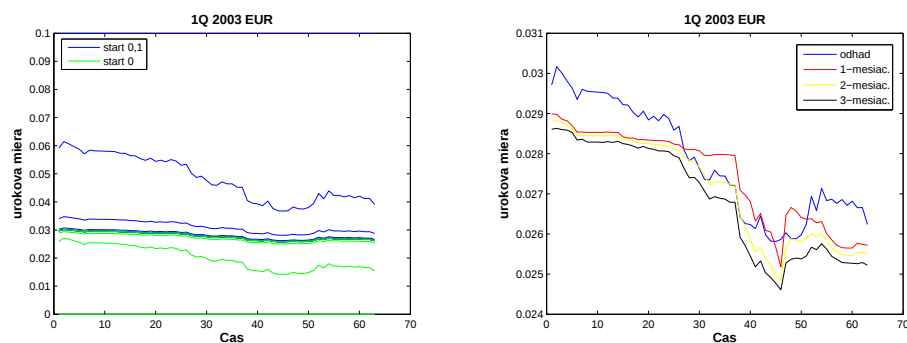
Obr. 5.5: Priebehy odhadovaných parametrov v 2. kvartáli



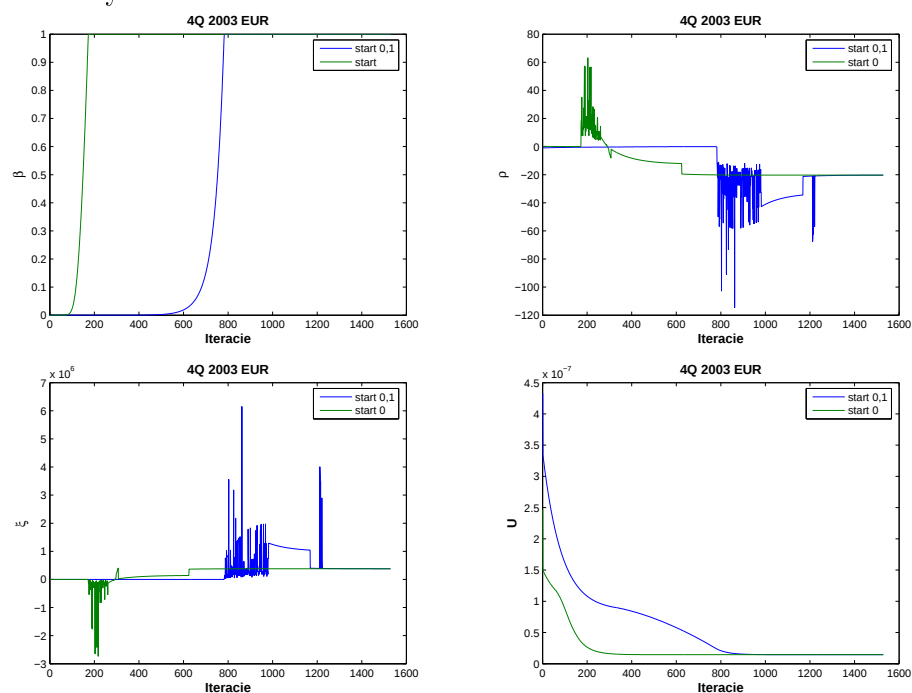
Obr. 5.6: Odhadnutá short-rate z dát európskych dlhopisov za tretí kvartál. Naľavo je priebeh odhadovanej short-rate, napravo je porovnanie priebehu odhadu so skutočnými úrokovými mierami.



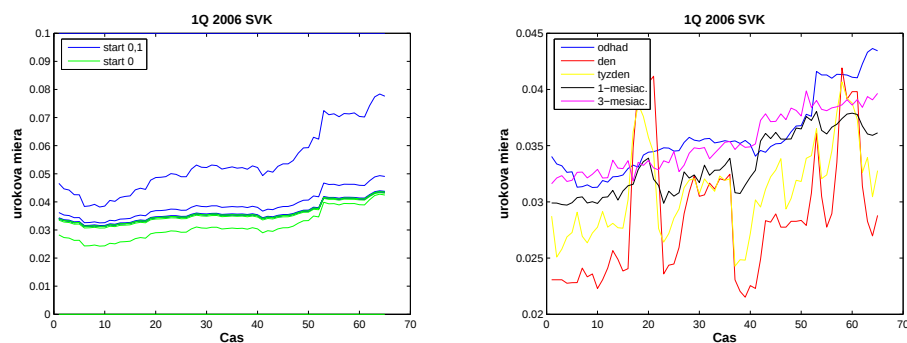
Obr. 5.7: Priebehy odhadovaných parametrov v 3. kvartáli



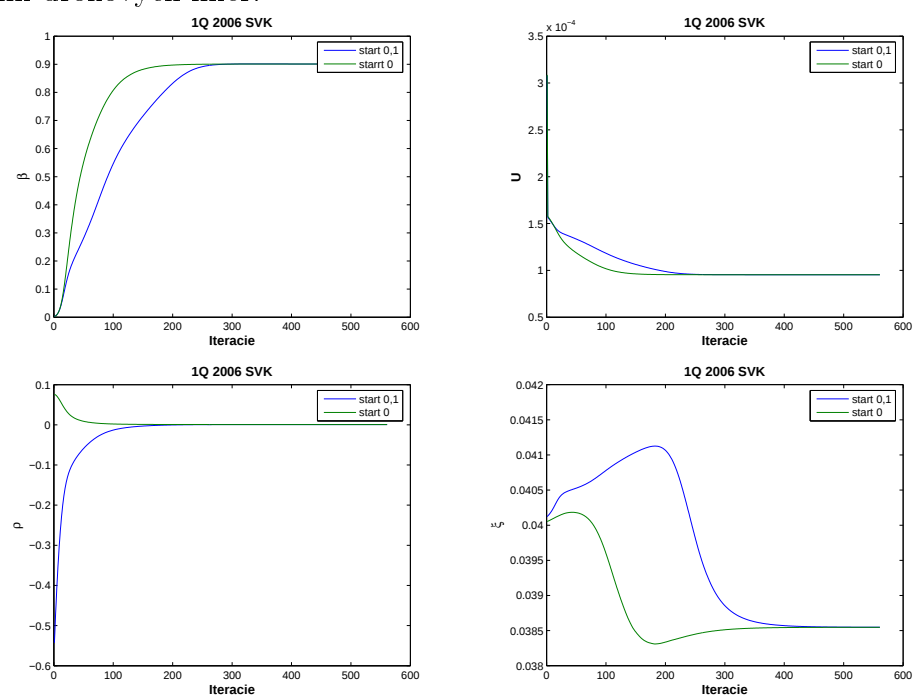
Obr. 5.8: Odhadnutá short-rate z dát európskych dlhopisov za prvý kvartál. Naľavo je priebeh odhadovanej short-rate, napravo je porovnanie priebehu odhadu so skutočnými úrokovými mierami.



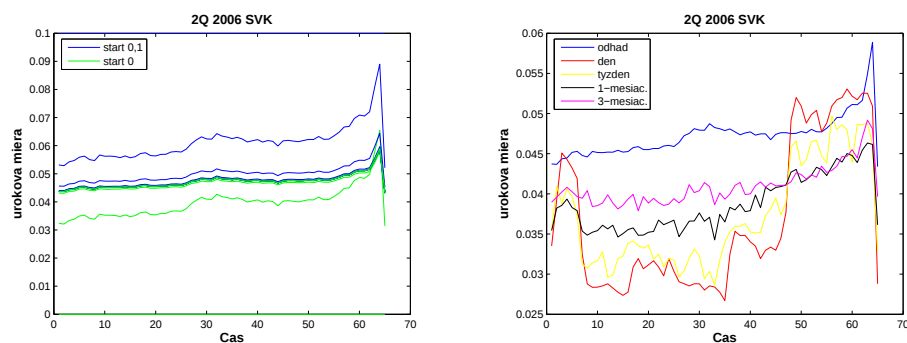
Obr. 5.9: Priebehy odhadovaných parametrov v 4. kvartáli



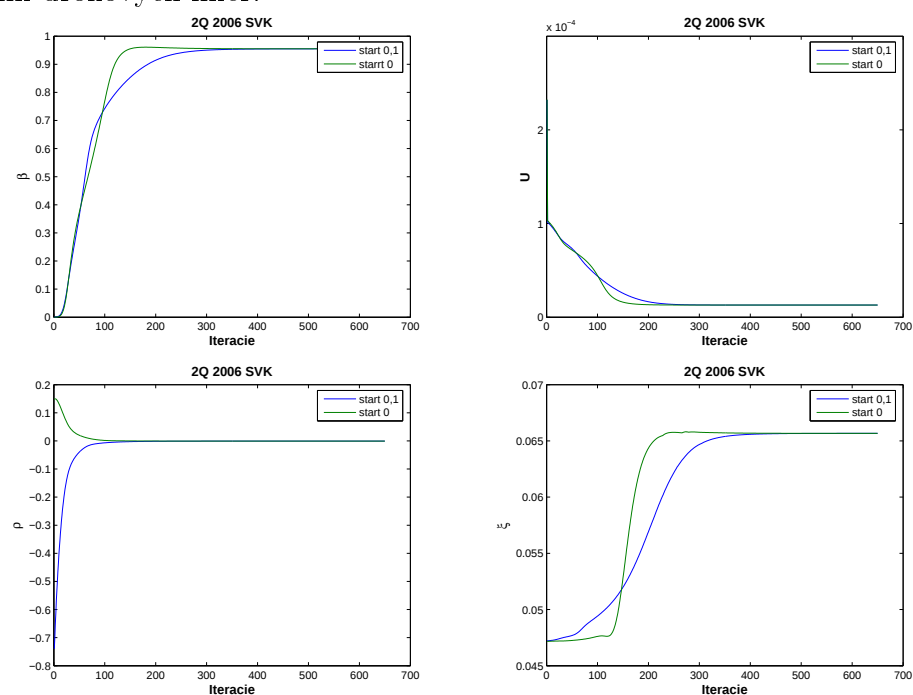
Obr. 5.10: Odhadnutá short-rate pre 1.kvartál slovenský dlhopisov z roku 2006. Naľavo je priebeh odhadovanej short-rate, napravo je porovnaný odhad so skutočnými priebehmi úrokových mier.



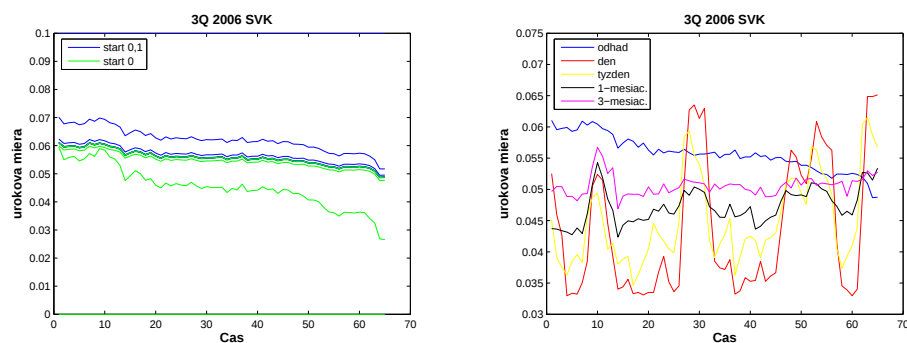
Obr. 5.11: Priebehy odhadovaných parametrov v 1. kvartáli



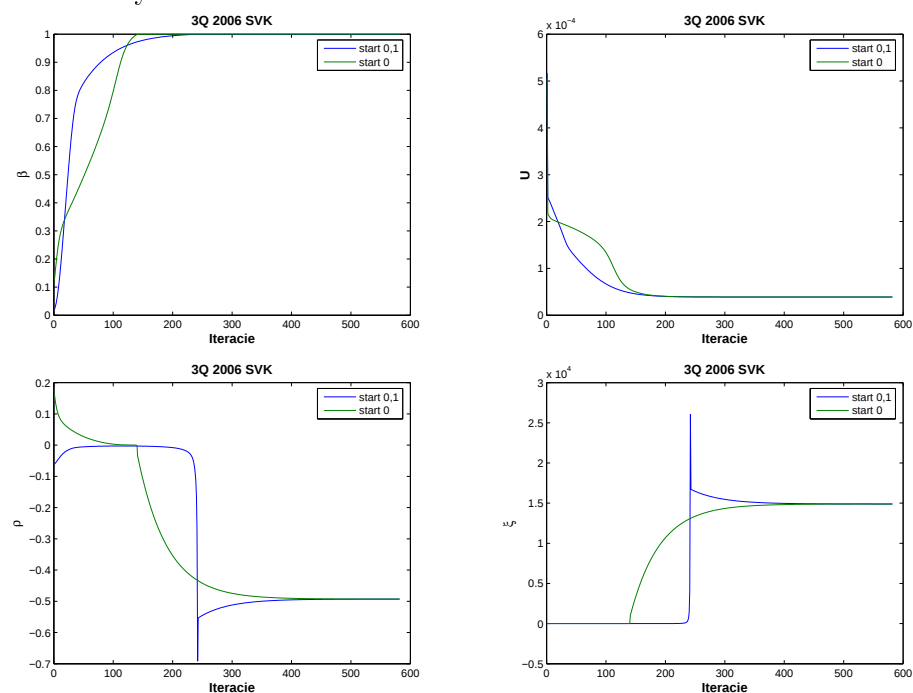
Obr. 5.12: Odhadnutá short-rate za 2.kvartál slovenských dlhopisov z roku 2006. Naľavo je priebeh odhadovanej short-rate, napravo je porovnaný odhad so skutočnými priebehmi úrokových mier.



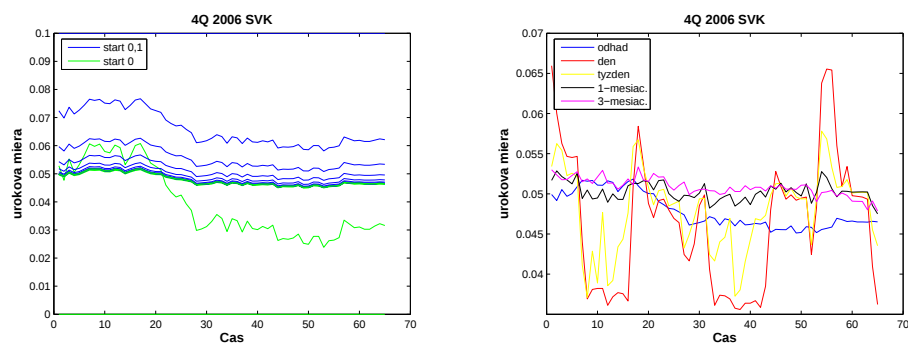
Obr. 5.13: Priebehy odhadovaných parametrov v 2. kvartáli



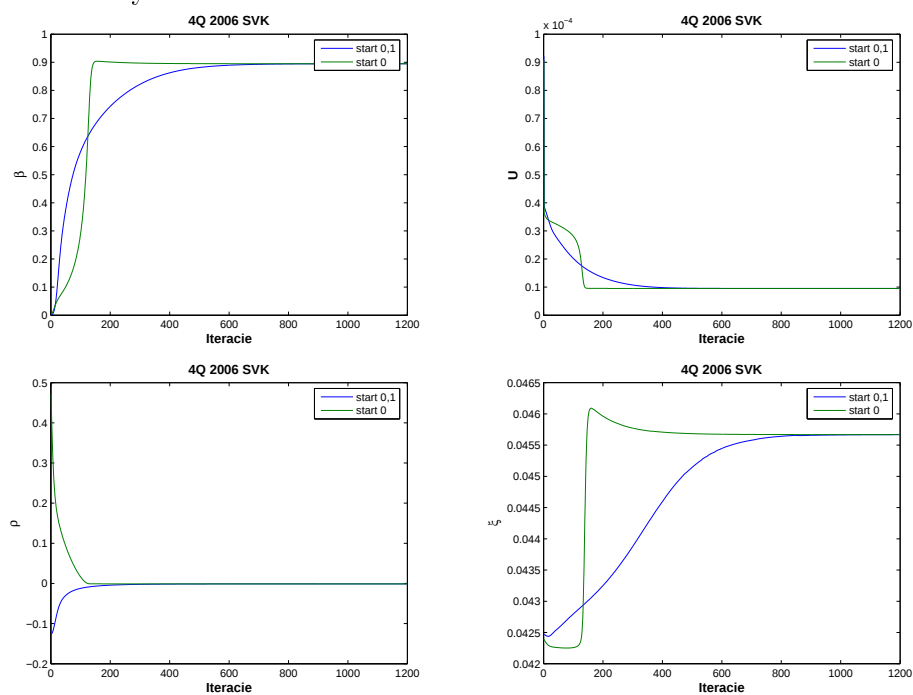
Obr. 5.14: Odhadnutá short-rate pre 3.kvartál slovenských dlhopisov roku 2006. Naľavo je priebeh odhadovanej short-rate, napravo je porovnaný odhad so skutočnými priebehmi úrokových mier.



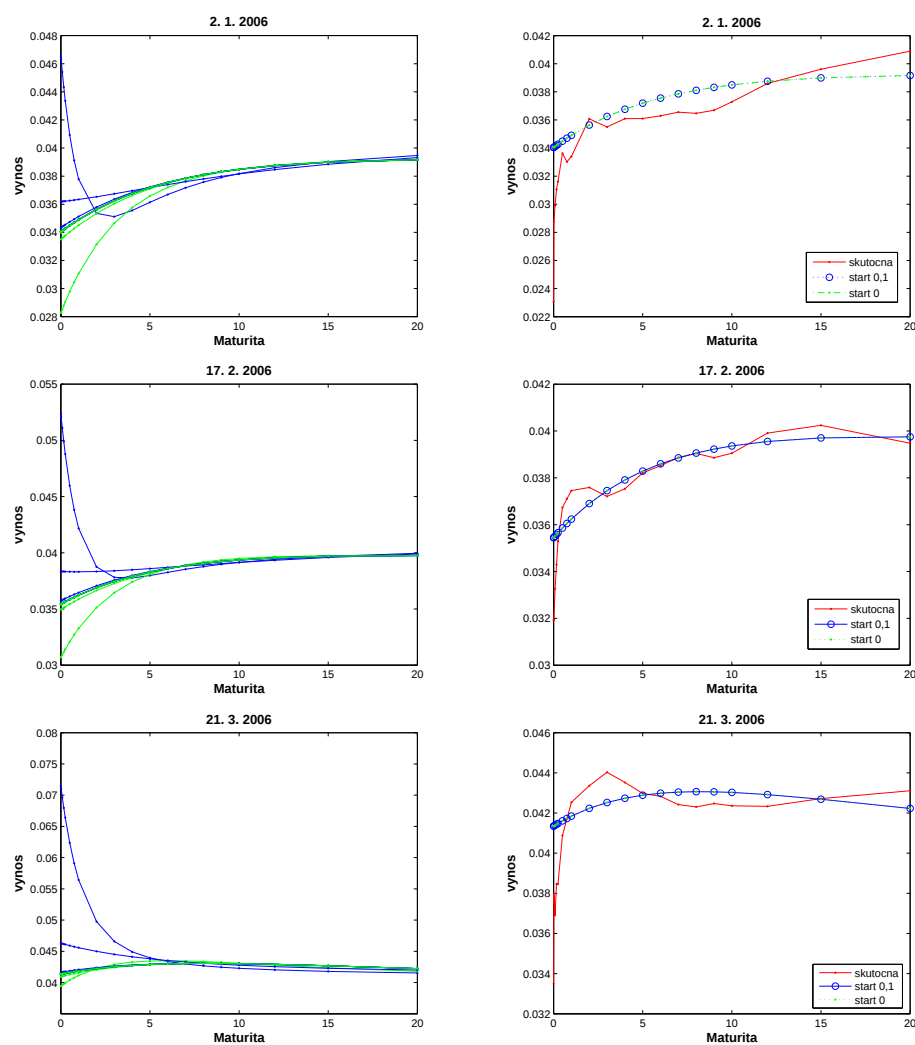
Obr. 5.15: Priebehy odhadovaných parametrov v 3. kvartáli



Obr. 5.16: Odhadnutá short-rate pre 4.kvartál slovenských dlhopisov roku 2006. Naľavo je priebeh odhadovanej short-rate, napravo je porovnaný odhad so skutočnými priebehmi úrokových mier.



Obr. 5.17: Priebehy odhadovaných parametrov v 4. kvartáli



Obr. 5.18: Odhadnuté a skutočné výnosové krivky slovenských dlhopisov (2006) pre dni: 2. 1. 2006, 17. 2. 2006 a 21. 3. 2006. Naľavo sú priebehy odhadovaných výnosových kriviek, napravo je porovnaná odhadnutá výnosová krivka so skutočnou. Zelenou farbou sú zakreslené priebehy so štartom z nuly, modrou priebehy so štartom z 0,1.

Záver

V diplomovej práci sme odhadovali okamžitú úrokovú mieru pomocou Vašíčkovho modelu. Na kalibráciu sme použili upravenú dvojfázovú metódu. Cieľom práce bolo zistiť, na ktorú z úrokových mier dostupných na trhu sa odhadovaná short-rate najviac podobá. To znamená zistiť, ktorá z reálnych úrokových mier by sa mala pri kalibrácii Vašíčkovho modelu považovať za okamžitú úrokovú mieru. Metódu sme aplikovali na európske a slovenské dlhopisy, pričom dáta sme skúmali po kvartáloch. V prípade európskych dlhopisov sme prišli k záveru, že za okamžitú úrokovú mieru by sme pri kalibrácii európskych dlhopisov z roku 2003 mali považovať trojmesačnú úrokovú mieru. K rovnakému záveru sme prišli aj v prípade slovenských dlhopisov z roku 2006.

Kalibráciou modelu sme tiež odhadovali transformované parametre modelu. Prekvapivo sa ukázalo, že pri európskych dlhopisoch z roku 2003 prišlo k oscilácii parametrov ϱ a σ . V prípade slovenských dlhopisov, ani predtým na simulovaných dátach, sa to nestalo. Preto je potrebné sa ďalej venovať tomuto problému. Hodnoty odhadované parametra ϱ nám väčšinou vyšli záporné. Takéto odhady je potrebné vyhlásiť za neprípustné, nakoľko zo záornej hodnoty parametra ϱ vyplýva záporná hodnota parametra κ . A takýto model nedáva zmysel. Z tohto dôvodu je potrebné našu metódu ďalej rozvíjať a zabezpečiť nezápornosť konečnej hodnoty odhadovaného parametra ϱ .

Porovnávali sme aj odhadnuté a skutočné výnosové krivky. Z dôvodu zápornosti parametra ϱ nebolo žiaľ možné skúmať väčšinu dát. Pre slovenské dlhopisy z roku 2006 nám ale parameter ϱ vyšiel kladný, tak sme sa venovali aspoň výnosovým krivkám z tohto kvartálu. Prišli sme k záveru, že pokiaľ je odhad parametrov prípustný, tak aj odhadované výnosové krivky pomerne dobre popisujú reálne výnosové krivky. Samozrejme, nakoľko sme pracovali s Vašíčkovým modelom, priebehy, ktoré sme mohli odhadovanými krivkami dosiahnuť nedokážu väčšinou zachytiť úplne presne tvar reálnej výnosovej krivky.

Literatúra

- [1] Ševčovič D., Urbánková Csajková A. (2004): Calibration of one factor interest rate models. Journal of ELECTRICAL ENGINEERING, Vol. 55, No. 12/s, 46-50. Dostupné na: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/sevcovic/papers/cl28.pdf>
- [2] Ševčovič D., Stehlíková B., Mikula K. (2009): Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Nakladateľstvo STU.
- [3] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V. (2005): Kapitoly z finančnej matematiky. Epos.
- [4] Kwok Y. K. (2008): Mathematical models of financial derivatives. Springer-Verlag, 2nd edition.
- [5] Hull J. C. (2002): Options, futures and other derivatives. Prentice Hall. 5th edition.
- [6] Zeytun S., Gupta A. (2007): A comparative study of the Vasicek and the CIR model of the short rate. Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik ITWM. Dostupné na: <http://www.itwm.fraunhofer.de/zentral/download/berichte/bericht124.pdf>
- [7] Brigo D., Mercurio F. (2006): Interest Rate Models – Theory and Practice. With smile, inflation and credit. Springer.
- [8] Vašíček O. (1977): An Equilibrium Characterisation of the Term Structure. Journal of Financial Economics 5: 177–188.
- [9] Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. (1985): A theory of the term structure of interest rates. Econometrica 53: 385-407.
- [10] Hull J., White A. (1990): Pricing interest rate derivative securities. Review of Financial Studies, 3, no.4: 573-592.
- [11] Dothan L.U. (1978): On the Term Structure of Interest Rates. Journal of Financial Economics 6.: 59-69.
- [12] Národná banka Slovenska, <http://www.nbs.sk>
- [13] Sadzby európskeho peňažného trhu, <http://www.euribor.org>

-
- [14] Chan K.C., Karolyi G.A., Longstaff F.S., Sanders A.B. (1992): An Empirical Comparison of Alternative Models of the Term Structure of Interest Rates. *The Journal of Finance* 47: 1209-1228.
- [15] Mlynárik M. (2009): Kalibrácia jednofaktorových modelov úrokových mier pomocou analytickej aproximácie cien dlhopisov. Diplomová práca FMFI UK. Bratislava. Dostupné na: <http://www.iam.fmph.uniba.sk/studium/efm/diplomovky/2009/index.html>