



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

EKONOMICKÉ PROSTREDIE AKO TERMODYNAMIKA

Diplomová práca

MARTINA BREZOVÁ

9.1.9 Aplikovaná matematika

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci práce: doc.RNDr. Július Vanko, PhD.

BRATISLAVA 2010

Pod'akovanie

Rada by som poďakovala doc. RNDr. Júliusovi Vankovi, PhD. za cenné pripomienky pri písaní práce a rodine a priateľom za trpezlivosť, inšpiráciu a podporu počas celého štúdia.

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som prácu vypracovala samostatne s využitím svojich poznatkov a s použitím uvedenej literatúry.

.....

Martina Brezová

Dátum kompilácie: 19. apríla 2010

Typeset in L^AT_EX

Abstrakt

BREZOVÁ, Martina: Ekonomické prostredie ako termodynamika [Diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Školiteľ: doc. RNDr. Július Vanko, PhD. Bratislava: FMFI UK, 2010.

Počet strán: 67

Diplomová práca sa zaoberá aplikáciou termodynamickej teórie na ekonomické dáta. V prvých kapitolách objasňuje spojenie medzi termodynamikou a trhovým prostredím, neskôr sa venuje výstavbe teórie celkovo, orientujúc sa hlavne na trhovú teplotu. Vybudovanú teóriu využíva práve na modelovanie fluktuácií teploty. V praktickej časti práca uplatňuje teoretické znalosti na sledovanie vývoja teploty na reálnych trhoch, pričom sa pokúša odhaliť, akým spôsobom reaguje teplota na historické krízy.

Kľúčové slová: Ekonofyzika, termodynamika, trhovú teplota.

Abstract

BREZOVÁ, Martina: Economic Environment as Thermodynamics [Diploma thesis].
Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics;
Department of Applied Mathematics and Statistics.

Supervisor: doc. RNDr. Július Vanko, PhD. Bratislava: FMPH Comenius University,
2010.

Page count: 67

The diploma thesis deals with the application of thermodynamic theory on the economic data. The first chapters explain the connection between thermodynamics and market environment, then devotes to building general theory, aiming mainly at the market temperature. This theory is then used for modeling the temperature fluctuations. The practical part of the thesis applies theoretical knowledge to the monitoring of temperature in real markets, while trying to discover how the temperature responds to the historical crises.

Keywords: Econophysics, thermodynamics, market temperature.

Obsah

1	Úvod	1
2	Ekonofyzika	3
2.1	Termodynamika a štatistická fyzika	3
2.1.1	Zákony termodynamiky	4
2.1.2	Entropia	6
3	Paralely v ekonómii	7
3.1	Entropia a teplota	7
3.1.1	Boltzmannovo rozdelenie	9
3.1.2	Migračný potenciál	10
4	Termodynamika a trh tovarov	11
4.1	Voľný trh	12
4.2	Trh s obmedzeniami	13
4.2.1	Plums & Lemons	17
4.3	Trhy so substitučnými tovarmi	18
4.4	Trh s konštantnou teplotou	19
5	Fluktuácie trhu	23
5.1	Fluktuácie v čase	26

5.2	„Tieň budúcnosti“ a kolektívne správanie na trhu	30
6	Aplikácia teórie na reálne trhové dáta	35
6.1	Použité dáta pre komoditný trh	36
6.1.1	Vlastné modelovanie trhovej teploty	38
6.2	Akciový trh	48
7	Záver	56
	Literatúra	58

Kapitola 1

Úvod

Cieľom tejto diplomovej práce je overiť, či môže mať model vytvorený na základe termodynamickéj teórie praktické uplatnenie v ekonómii. Teda, či je schopný ponúknuť informáciu, ktorú len použitím tradičných ekonomických prístupov nezískame. Na to, aby sme však boli schopní takýto model naformulovať, bude potrebné vystavať základy trhovej economickej teórie na báze termodynamiky a štatistickej fyziky. Pôjde teda o aplikáciu fyzikálnych poznatkov na ekonomické dáta, čo je predmetom štúdia ekonofyziky.

Prečo si vlastne z veľkého množstva možností, ktoré ekonofyzika poskytuje vyberáme práve termodynamiku? Aj keď podobnosť možno nie je na prvý pohľad úplne zrejmá, medzi sústavami, ktoré skúma termodynamika a trhovým prostredím existuje viacero analógií. Termodynamika skúma dianie v sústavách, ktoré obsahujú veľké množstvo častíc a ktoré popisujeme len pomocou makroskopických veličín. O jednotlivých časticiach však konkrétne informácie nepoznáme. To isté môžeme povedať aj o ekonómii, pokiaľ ide o skúmanie trhového prostredia: agentov na trhu je veľa (aj keď rádovo oveľa menej než častíc v termodynamike) a jednotlivo o nich nič nevieme. V oboch prípadoch je správanie jednotlivých častíc (agentov) náhodné, ale má určitý „vnútorný poriadok“. Ten je daný v jednom prípade maximálnou entropiou, v druhom maximálnym dobrodením (welfare) agentov na trhu. Potom sa analógia medzi peňažným príjmom (resp. peniazmi ako takými) a energiou sledovanej sústavy stáva prirodzenou voľbou a základným kameňom, na ktorom môžeme stavať [1]. Vzhľadom na to, že

termodynamika je pomerne rozsiahla vedná disciplína, značná časť práce je venovaná práve výstavbe teórie.

Konkrétne na dosiahnutie zvoleného cieľa použijeme model, ktorý pracuje s trhovou teplotou - na základe nej potom vieme povedať, či sa teplota trhu nachádza v okolí rovnovážneho stavu, alebo je či je trh prehriaty resp. podchladený. S týmto modelom trhovej teploty budeme v praktickej časti práce skúmať na historických dátach schopnosť teploty zachytiť príchod krízy, prípadne zistiť typický priebeh teploty počas nej. Aby sme získali väčší prehľad, budeme používať jednak trhy v rôznych geografických oblastiach a jednak s rôznym predmetom obchodovania.

Kapitola 2

Ekonomofyzika

Ekonomofyzika je veda stojaca na rozmedzí medzi ekonómiou a fyzikou, aplikuje myšlienky a modely pochádzajúce z fyziky na ekonomické prostredie.[2]

2.1 Termodynamika a štatistická fyzika

Termodynamika je časťou fyziky, ktorá sa zaoberá vzájomnými premenami rôznych foriem energie (hlavne premenou tepelnej energie na prácu a naopak) a dôsledkami, ktoré z nich vyplývajú [3]. Termodynamika skúma javy v sústavách obsahujúcich veľký počet častíc, ktoré významne ovplyvňujú veličiny, ako sú teplota, objem a tlak na základe štatistických predpokladov o pohybe častíc popísaných štatistickou fyzikou [4]. Termodynamické vzťahy a zákony sú formulované pomocou makroskopických veličín, ktoré charakterizujú sústavu ako celok, nezaobrá sa vlastnosťami jednotlivých častíc, ktorých stav charakterizujú mikroskopické veličiny. Klasická termodynamika opisuje správanie rovnovážnych sústav ako aj rovnovážne deje. Zaoberá sa len hnacími silami procesov, neskúma ich priebeh v závislosti od času ani ich mechanizmus [5].

Štatistická fyzika je časťou teoretickej fyziky, ktorá študuje fyzikálne objekty tvorené súborom mechanických systémov v rovnovážnom stave. Pretože počet stupňov voľnosti takýchto objektov je veľmi veľký a stavy jednotlivých systémov sa nedajú priamo pozorovať, miesto riešenia všetkých pohybových rovníc sa definuje vhodná metóda na

určenie rovnovážneho stavu pomocou počtu konfigurácií stavov jednotlivých elementov, ktoré podmieňujú stav objektu ako celku. Rovnovážny stav celkového objektu v danom časovom intervale je teda odvodený od jeho mikrostavov, ktoré sa v tomto časovom intervale uskutočnili s maximálnou frekvenciou. V danom časovom intervale prevláda makrostav, ktorý je vytvorený najväčším počtom makrostavov. Podľa použitého výrazu pre štatistickú pravdepodobnosť sú možné tri druhy štatistických metód: metóda klasickej štatistiky (s použitím Boltzmannovho alebo Gibbsovho rozdelenia), symetrická a antisymetrická metóda (obe postavené na teórii kvantovej fyziky).

2.1.1 Zákony termodynamiky

Termodynamické vzťahy môžeme odvodiť zo štyroch základných zákonov termodynamiky [6]:

- **Nultý zákon:** Ak sústavy A a B sú jednotlivo v termickej rovnováhe s treťou sústavou C, sú aj navzájom v termickej rovnováhe (tzn. všetky tri sústavy majú rovnakú teplotu).
- **Prvý zákon:** Množstvo energie v izolovanej sústave je konštantné.
- **Druhý zákon:** Nie je možné zostrojiť cyklicky pracujúci tepelný stroj, ktorý by všetku energiu prijatú vo forme tepla menil na prácu.
- **Tretí zákon:** Konečným počtom operácií nie je možné žiadnu sústavu ochladiť na absolútnu nulu.

Druhým zákonom termodynamiky je definovaná entropia, je pre tento zákon najdôležitejšou veličinou. Entropia je mierou neusporiadanosti sústavy a určuje smer priebehu samovoľných dejov v izolovanej sústave. Matematicky je entropia S definovaná vzťahom $dS = \frac{dq_{rev}}{T}$, kde T je teplota a q_{rev} je energia, ktorú sústava vratne vo forme tepla prijala od okolia, alebo okoliu odovzdala [7]. Zavedenie termodynamických potenciálov, ako závisle premenných stavových veličín (veličín, ktorých hodnota je určená len stavom, v ktorom sa sústava v danom okamihu nachádza a nezávisí od

spôsobu, akým sa do tohto stavu dostala) umožňuje vyjadriť prvý a druhý zákon termodynamiky jedinou rovnicou. Závislosť termodynamického potenciálu od vhodne zvolených nezávisle premenných veličín, ktorá je známa, poskytuje maximálnu informáciu o stave termodynamickej sústavy. Nezávisle premenné veličiny vyberáme spomedzi stavových veličín a matematicky ich vyjadrujeme exaktným diferenciálom. V najjednoduchšom prípade termodynamickým potenciálom môže byť [8]:

vnútorná energia U ako funkcia entropie S a objemu V , $U = U(S, V)$

entalpia H ako funkcia entropie S a tlaku p , $H = H(S, p)$

Helmholtzova energia A ako funkcia teploty T a objemu V , $A = A(T, V)$

Gibbsova energia G ako funkcia teploty T a tlaku p , $G = G(T, p)$

Matematické vyjadrenie prvých dvoch zákonov potom nadobúda tvar

$$dU = TdS - pdV \quad (2.1)$$

resp.

$$\begin{aligned} dH &= TdS + Vdp \\ dA &= -SdT - pdV \\ dG &= -SdT + Vdp \end{aligned} \quad (2.2)$$

Hodnoty prvých a druhých parciálnych derivácií termodynamického potenciálu podľa jeho charakteristických nezávisle premenných poskytujú informácie o stave termodynamickej sústavy, napríklad pre závislosť vnútornej energie U od entropie S a objemu V potom nadobúda tvar:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -p \quad \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T \quad (2.3)$$

Analogické vlastnosti platia aj pre ostatné potenciály. V nerovnovážnej sústave pri zvolených stálych hodnotách nezávisle premenných prebiehajú také samovoľné

nevratné deje, v dôsledku ktorých hodnota zodpovedajúceho termodynamického potenciálu sústavy klesá a po dosiahnutí rovnovážneho stavu má minimálnu hodnotu. Najpoužívanějšími termodynamickými potenciálmi sú Helmholtzova a Gibbsova energia, entalpia a vnútorná energia sa z praktických dôvodov takmer nepoužívajú.

2.1.2 Entropia

Entropia je pojmom, ktorý je definovaný nielen cez termodynamickú teóriu, ale aj pomocou štatistickej fyziky. Tá ju vníma ako množstvo „voľností“, ktoré v systéme pretrváva, potom čo sme pozorovateľné makroskopické veličiny (ako sú teplota, tlak, objem) vzali do úvahy. Pre daný stav makroskopických premenných, entropia odzrkadľuje stupeň rozloženia pravdepodobnosti nad rôznymi prípustnými mikrostavmi. Na rozdiel od makrostavu, ktorý je definovaný jednoducho pozorovateľnými priemernými hodnotami veličín, mikrostav popisuje úplné detaily systému, vrátane polohy a rýchlosti každej molekuly. Čím viac stavov je v systéme prípustných (s nezanedbateľnou pravdepodobnosťou), tým je entropia vyššia [9]. Matematickým vzťahom to možno vyjadriť ako

$$S = -k_B \sum_i P_i \ln P_i \quad (2.4)$$

kde k_B je Boltzmannova konštanta, P_i je pravdepodobnosť, že systém sa nachádza v i -tom mikrostave a sumácia beží cez všetky možné mikrostavy, ktoré sú pre systém prípustné. V systéme, kde všetky stavy sú rovnako pravdepodobné sa entropia dá vyjadriť jednou z najznámejších rovníc štatistickej termodynamiky:

$$S = k_B \ln \Omega, \quad (2.5)$$

kde Ω je štatistická váha sústavy. (Systémom s touto vlastnosťou je napríklad sústava s konštantným objemom, počtom častíc a vnútornou energiou.) Entropia sa vyjadruje v jednotkách $J \cdot K^{-1}$.

Kapitola 3

Paralely v ekonómii

Aby sme na modelovanie ekonomického prostredia mohli použiť princípy termodynamiky, musíme jednotlivým termodynamickým veličinám priradiť ekonomický význam.

Najjednoduchšie a intuitívne je nahradiť energiu ako takú peniazmi: vnútornú energiu U stotožníme s celkovým príjmom (množstvom peňazí) v ekonomike. Ďalšie analógie môžeme nájsť v stavovej rovnici ideálneho plynu $pV = nRT$ a jednoduchých ekonomických identitách (*cena tovaru* \times *množstvo tovaru* = *počet agentov na trhu* \times *priemerný príjem agenta*), a teda tlak p pre naše potreby nahradíme cenou P , objem V množstvom (objemom) tovaru na trhu V , látkové množstvo n počtom agentov na trhu N , termodynamickú teplotu T „ekonomickou teplotou“ T . Ekonomická teplota zodpovedá priemernému príjmu na jedného agenta, alebo, ak systémom je štátna ekonomika, dá sa stotožniť s HDP na hlavu [10]. Pojem entropie S je však natoľko špeciálny, že v ekonómii mu v podstate nemožno priradiť nový dostatočne vhodný význam. Ďalšie analógie získame z ekonomickej interpretácie termodynamických zákonov [11].

3.1 Entropia a teplota

Vzhľadom na to, že význam ekonomickej teploty nie je až taký jasný, pokúsime sa ho odvodiť za pomoci jednoduchého príkladu. Budeme uvažovať systém s N agen-

tami, ktorí si medzi sebou delia celkový príjem vo výške E . Predpokladajme, že existuje veľké množstvo možných rozdelení príjmu, a my ich nedokážeme všedky predpovedať. Definujeme teda pre každú možnú hodnotu E počet spôsobov rozdelenia príjmov medzi N agentmi, $n(E, N)$, ktorý sa nazýva *štatistická váha stavu* s príjmom E (stačí uvažovať celočíselné hodnoty, pretože celkový príjem sa dá vnímať ako počet najmenších a nedeliteľných peňažných jednotiek). Ďalej potrebujeme definovať koncept ekvilibria: dva systémy sú v rovnováhe (ekvilibriu), ak sa distribučná funkcia príjmu nezmení po tom, čo sa systémy dostanú do kontaktu. Teda, peňažný tok medzi systémami má absolútnu hodnotu 0. Pre náš príklad uvažujme dva systémy, jeden s celkovým príjmom E_1 a počtom agentov N_1 , druhý s príjmom E_2 a počtom agentov N_2 , ktoré necháme spolu interagovať a vytvoríme tak vlastne systém s celkovým príjmom $E_1 + E_2$ a počtom agentov $N_1 + N_2$. Zaujímať nás budú podmienky, či už nutné alebo postačujúce, ktoré platia pre rovnováhu v tomto jednoduchom systéme.

Aby sme mohli robiť základné výpočty, musíme prijať predpoklad o rozdelení pravdepodobnosti: všetky elementárne stavy rozdelenia príjmu majú rovnakú pravdepodobnosť. Pre nájdenie rovnovážneho stavu musíme nájsť maximum funkcie $n_{tot}(E_1, E_2, N_1, N_2)$, ktorá je výrazom pre štatistickú váhu celého systému. Pokiaľ nepripustíme prestup agentov z jedného systému do druhého, platí

$$n_{tot}(E_1, E_2, N_1, N_2) = n_1(E_1, N_1)n_2(E_2, N_2) \quad (3.1)$$

Ak však pripustíme tok peňazí $\Delta E_1, \Delta E_2$ medzi subsystémami, vzhľadom na to, že systémy sú v izolácii musí platiť $\Delta E_1 = -\Delta E_2$. Pre zjednodušenie výpočtu maxima zavedieme monotónnu logaritmickú transformáciu, ktorá vedie k podmienke

$$\frac{\partial \ln n_1(E_1, N_1)}{\partial E_1} = \frac{\partial \ln n_2(E_2, N_2)}{\partial E_2} \quad (3.2)$$

Systémy sú teda v rovnováhe, pokiaľ sú charakterizované rovnakým parametrom $\frac{\partial \ln n(E, N)}{\partial E}$. Tu prichádza na rad termodynamická teória: logaritmus štatistickej váhy je definovaný ako entropia, a deriváciu entropie podľa vnútornej energie poznáme:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_V = \frac{\partial \ln n(E, N)}{\partial E} = \frac{1}{T} \quad (3.3)$$

Na dosiahnutie rovnovážneho stavu teda musia interagujúce systémy dosiahnuť rovnakú teplotu. Teplotu však môžeme vypočítať, len ak poznáme entropiu. Vo fyzikálnych systémoch však entropiu poznať nemusíme, pretože teplota sa dá odmerať teplomerom. Teplomery sú špeciálne zostrojené tak, že ich stavové rovnice sú známe a kalibrované. V ekonomických systémoch funkciu teplomerov do istej miery preberajú (akciové) trhy.

3.1.1 Boltzmannovo rozdelenie

Zatiaľ sme spravili predpoklad len o rozdelení pravdepodobnosti mikrostavov celkovo, zaujímavé je však skúmať rozdelenie vzhľadom na príjmové skupiny. Pre tento prípad opäť preberieme vedomosti z termodynamiky: pokiaľ je počet častíc (agentov) fixovaný, existuje univerzálna distribučná funkcia závislá iba od teploty. Toto rozdelenie je v termodynamike často používané a nazýva sa *Boltzmannovo rozdelenie* [7]. Použiť ho však môžeme len za predpokladu, že agenti nemajú úspory a všetok svoj majetok investujú do obchodovania. V opačnom prípade je správnejšie (a bližšie k realite) požitie gama rozdelenia. [12] Pre ilustráciu uvažujme systém X s veľkým počtom agentov, z ktorého je oddelená časť Y s malým počtom agentov. Spolu majú oba systémy príjem E , takže pravdepodobnosť, že Y má príjem E_1 sa rovná pravdepodobnosti, že X má príjem $E - E_1$, teda je úmerná počtu možných stavov s týmto príjmom. Odtiaľ môžeme odvodiť pravdepodobnostný pomer:

$$\frac{Pr(E_1)}{Pr(E_2)} = \frac{n(E - E_1, N)}{n(E - E_2, N)}, \quad (3.4)$$

čo vzhľadom na definíciu entropie $S(E, N)$ môžeme preformulovať na

$$\frac{Pr(E_1)}{Pr(E_2)} = e^{S(E-E_1, N) - S(E-E_2, N)} = e^{\Delta S} \quad (3.5)$$

Pre dostatočne veľký systém X (oproti Y) sa dá použiť Taylorov rozvoj a výraz sa zjednoduší na $\frac{Pr(E_1)}{Pr(E_2)} = e^{-\frac{E_1 - E_2}{T}}$. Práve Boltzmannovo rozdelenie umožňuje pochopiť vzťah medzi priemerným príjmom agentov v systéme a ekonomickou teplotou [13]. Ak predpokladáme, že nejestvujú žiadne obmedzenia a všetky výšky príjmu sú prípustné,

tak priemerný príjem agenta je daný

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} E e^{-E/T} dE}{\int_0^{\infty} e^{-E/T} dE} = T \quad (3.6)$$

3.1.2 Migračný potenciál

V predchádzajúcom príklade sme pri interakcii systémov povolili iba pohyb peňazí, agetov sme v jednotlivých systémoch fixovali. V skutočnosti je však málo pravdepodobné, že v systéme vychýlenom z rovnováhy k pohybu agentov nedochádza. Práve migračný potenciál, ako ekvivalent chemického potenciálu, vyjadruje snahu agentov z jedného systému o prechod do druhého systému. Predpokladajme, že celkový počet agentov je $N_1 + N_2 = N$ a prechod medzi systémami je povolený. Potom pre rovnovážny stav musia platiť nasledujúce rovnosti:

$$\left. \frac{\partial S_1(N_1, E_1)}{\partial N_1} \right|_{E_1} = \left. \frac{\partial S_2(N_2, E_2)}{\partial N_2} \right|_{E_2} \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial S_1(N_1, E_1)}{\partial E_1} \right|_{N_1} = \left. \frac{\partial S_2(N_2, E_2)}{\partial E_2} \right|_{N_2} \quad (3.8)$$

Rovnosť (3.8) sa dá zjednodušiť na $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_2}$, teda zostáva v platnosti podmienka o rovnakých teplotách. Chemický potenciál je definovaný ako [14]

$$\mu = -T \left. \frac{\partial S(N, E)}{\partial N} \right|_E \quad (3.9)$$

S použitím tejto definície aj pre migračný potenciál sa dá prvá podmienka ekvilibria (3.7) interpretovať ako rovnosť migračných potenciálov. Takáto podmienka sa javí ako úplne prirodzená - v rovnováhe musí zostať počet agentov v každom zo systémov stabilný, teda aj snahy o prechod medzi systémami sa musia vyrovnávať. Kým k tomu dôjde, budú agenti prúdiť zo systému s vyšším potenciálom do systému s nižším potenciálom.

Kapitola 4

Termodynamika a trh tovarov

S definovanými podmienkami rovnováhy systémov konečne môžeme prejsť aj k trhovej rovnováhe, a teda do našich úvah zahrnieme aj tok tovarov. Trh tovarov je charakterizovaný predaným množstvom (objemom) tovarov a množstvom peňazí vynaložených na jeho kúpu. Ak zavedieme $V(t)$ ako počet jednotiek tovaru predaných na trhu za časový interval t , pričom kupujúci zaň za tento interval minú $E(t)$ peňažných jednotiek. Pokiaľ sú $V(t)$ a $E(t)$ časovo invariantné, ide o stacionárny trh, a práve ním sa budeme zaoberať. Aby sme model viac priblížili realite, môžeme zaviesť aj rôzne obmedzenia a regulácie, ale opäť budeme vyžadovať, aby sa v čase nemenili. Uvažujme teda situáciu s dvomi trhmi tovarov, ktoré môžu interagovať. Trhy sú charakterizované množstvom tovarov a peňazí V_1, E_1 resp. V_2, E_2 , nie však ľubovoľným a pri interakcii medzi nimi môže dochádzať k výmene peňazí, tovarov alebo oboch. Zvoľme celočíselný stacionárny model, v ktorom platí

$$E_n = nE_0, \quad V_m = mV_0 \quad (4.1)$$

kde V_0, E_0 sú jednotkové množstvá tovaru resp. peňazí a n a m sú dostatočne veľké; a N je počet kupujúcich. Množina prípustných stavov trhu je daná počtom spôsobov rozdelenia tovaru medzi jednotlivých kupujúcich. Aby sme model čo najviac zjednodušili, zameriame sa len na stranu kupujúcich, predajcov „skoncentrujeme“ len do jediného, ktorý však nebude môcť ovplyvniť toky prichádzajúcich tovarov. Takto sa vyhneme aj komplikáciám pri výpočtoch, pretože časť entropie, prislúchajúcu

ponukovej strane ekonomiky nemusíme uvažovať. Ďalším pojmom, ktorý nutne potrebujeme zaviesť do užívania, je cena. Ako analógiu termodynamického tlaku budeme používať marginálnu cenu, ktorú definujeme vzťahom

$$P = T \frac{\partial S}{\partial V}. \quad (4.2)$$

Marginálna cena sa neskôr ukáže byť charakteristikou, ktorá ukazuje, či interagujúce systémy sú alebo nie sú v rovnováhe.

4.1 Voľný trh

Najjednoduchšie môžeme situáciu modelovať pri voľnom trhu, kedy rozdelenie príjmu ani tovarov žiadnym spôsobom neobmedzujeme. Kupujúci takto môže za tovar zaplatiť neobmedzene nízku, ako aj neobmedzene vysokú cenu. Voľný trh robí výpočty jednoduchším, pretože rozdelenia príjmu a tovarov sú nezávislé, teda celková entropia je daná súčtom dvoch výrazov, jeden je určený len peňažným tokom, druhý len tokom tovarov. Matematicky to môžeme zapísať vzťahom

$$S(E, V) = S(E) + S(V). \quad (4.3)$$

Štatistickú váhu $g(E_n, N)$ toku E_n rozdeleného medzi N agentov vypočítame pomocou kombinatoriky [15]:

$$g(E_n, N) = \binom{N-1+n}{N-1} = \frac{(N-1+n)!}{n!(N-1)!} \quad (4.4)$$

Entropiu, ako logaritmus štatistickej váhy aproximujeme pomocou Stirlingovho vzorca [6] $S(E_n) \approx (N+n-\frac{1}{2})\ln(N+n-1) - (N-\frac{1}{2})\ln(N-1) - (n+\frac{1}{2})\ln n - \frac{1}{2}\ln(2\pi)$ Teplotu vypočítame diferencovaním podľa E :

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{E_0} \frac{\partial S(E_n)}{\partial n} \approx \frac{1}{E_0} \ln \left(\frac{N-1+n}{n} \right) \quad (4.5)$$

Pre $n \gg N$ sa dá výraz ešte zjednodušiť na $\frac{1}{T} = \frac{1}{E_0} \frac{N}{n} = \frac{N}{E}$ (Opäť dostávame, že teplota sa rovná priemernému príjmu per capita) Úplne rovnako vypočítame aj deriváciu $S(V_m)$ podľa V_m :

$$\frac{\partial S(V_m)}{\partial V_m} = \frac{1}{V_0} \frac{N}{m} = \frac{N}{V} \quad (4.6)$$

Navyše, z Maxwellových rovníc [6] vieme, že táto derivácia sa rovná $\frac{P}{T}$. Takže získavame aj rovnosť medzi jednotlivými veličinami na voľnom trhu tovarov, vo forme

$$P = T \frac{N}{V}, \quad (4.7)$$

čo znamená, že v tomto prípade sa marginálna cena P rovná priemernej cene $\frac{E}{V}$. Vo všeobecnosti je táto rovnosť porušená, pokiaľ zavedieme akékoľvek cenové reštrikcie. Ďalej si nemožno nevšimnúť silnú podobnosť so stavovou rovnicou ideálneho plynu (prakticky jediným rozdielom je neprítomnosť Boltzmannovej konštanty k). Cena, rovnako ako teplota, indikuje, či sú interagujúce systémy v rovnováhe. Tento fakt je napokon pri voľných trhoch úplne očividný. Na odvodenie môžeme použiť rovnaký spôsob ako pri teplote, len tu namiesto voľného pohybu agentov povolíme voľný pohyb tovarov medzi systémami. Zafixujeme celkový objem (tok) peňazí $E = E_1 + E_2$ a celkový objem (tok) tovarov $V = V_1 + V_2$. Ako podmienku ekvilibria potom dostaneme

$$\left. \frac{\partial S_1}{\partial E_1} \right|_{V_1} = \left. \frac{\partial S_2}{\partial E_2} \right|_{V_2} \quad \left. \frac{\partial S_1}{\partial V_1} \right|_{E_1} = \left. \frac{\partial S_2}{\partial V_2} \right|_{E_2} \quad (4.8)$$

Prvá podmienka pritom vyjadruje rovnosť teplôt v rovnováhe, druhá rovnosť marginálnych cien.

4.2 Trh s obmedzeniami

Vzhľadom na to, že trh bez obmedzení v reálnom svete ťažko nájdeme, je vhodné náš model upraviť tak, aby sme sa viac priblížili realite. Typov reštrikcií môže byť viacero - napríklad sa môže uplatniť reštrikcia na rozdelenie tovaru medzi kupujúcich a žiadny z nich nemôže nakúpiť viac ako K jednotiek tovaru. Stále však predpokladáme stacionaritu trhu a preto rozdelenie inak zostáva voľné, štatistická váha sa teda stále dá vyjadriť ako $g_N(E, V) = g_N(E) + g_N(V)$. Entropia ako jej logaritmus je potom daná súčtom $S_N(E, V) = S_N(E) + S_N(V)$. Pre určenie marginálnej ceny P potrebujeme vypočítať časť entropie danú rozdelením tovarov. Vzhľadom na prítomnosť reštrikcie to už však nie je také jednoduché. $S_N(V)$ je dané ako počet riešení úlohy

$$m = x_1 + x_2 + \dots + x_N, \quad x_i \leq K \forall i \quad (4.9)$$

v celých nezáporných číslach. Pokiaľ je však $m > KN$, úloha nemá riešenie. Ak sa m zdola približuje ku KN , tak v určitom bode začne entropia $S_N(V_m)$ klesať, čo znamená, že $\frac{\partial S(V_m)}{\partial V} = \frac{P}{T}$ sa stáva zápornou. Rozdelenie príjmov je voľné, takže teplota je kladná. Takáto reštrikcia pri dostatočne veľkom toku tovarov teda spôsobí zápornú marginálnu cenu. Pokiaľ sa systém v takomto stave dostane do kontaktu s iným, v ktorom je cena kladná, výsledkom bude „odtok“ tovarov z nášho trhu za dumpingové ceny a deštrukcia rovnováhy. Situácia sa najrýchlejšie vyrieši vonkajším zásahom, resp. úpravou reštrikcie, ale lepšie je zakročiť ešte predtým, ako marginálna cena vstúpi do záporných hodnôt. K tomu však potrebujeme aspoň aproximovať, pre akú hodnotu toku tovarov tento moment nastane, alebo vedieť rozhodnúť, či sa tak už stalo, aby bolo možné zakročiť.

Ďalším typom obmedzenia na trhu môže byť cenové ohraničenie minimálnou alebo maximálnou cenou. Výpočet entropie v tomto prípade je ešte o niečo zložitejší, záver je však rovnaký: je to vznik situácie so zápornou marginálnou cenou, dokonca ešte skôr ako v predchádzajúcom prípade. Spoločným znakom akýchkoľvek reštrikcií zavedených na trh je vznik tzv. zón latentnej nestability. Neprijemnosťou pri nich je, že ich hranice sú len sotva badateľné, ale vstup do nich znamená problémy. Pri interakcii s trhom bez obmedzení sa celý systém stáva nestabilným. Najväčším problémom však je, žiadne obmedzenie nie je úplne neškodné, pretože nemožno odhadnúť jeho dôsledky, čo sa týka nestability.

Pre zjednodušenie výpočtov uvažujme N ako počet uzavretých kontraktov, nie ako počet predajcov či kupujúcich. Potom teplota trhu sa podľa predchádzajúcich zistení dá definovať ako $T = \frac{E}{N}$. Zavedieme koncept *potenciálneho kontraktu*, ktorý znamená možnosť uzavretia dohody pri toku tovarov V_l a peňažnom toku E_k . Ďalej zjednodušíme ich prúdenie a budeme predpokladať, že tovary i peniaze prúdia iba v diskretných časových momentoch. Majme teda všetky možné potenciálne kontrakty $C(E_k, V_l)$, z ktorých sú v obchodovacom momente niektoré naplnené a iné zostávajú prázdne. Kontrakty môžu byť vyradené na základe cenového ohraničenia: ak je Q najnižšia povolená cena, tak vyradíme všetky kontrakty s $\frac{E_k}{V_l} < Q$. Na modelovanie situácie použijeme Gibbsovo grandkanonické rozdelenie [7] s parametrom λ a

na výpočet využijeme jeho vlastnosti. Pri predpoklade $N \ll nm$, kde n je celkový počet tovarových jednotiek a m je počet peňažných jednotiek môžeme aproximovať pravdepodobnosť naplnenia potenciálneho kontraktu výrazom

$$W(k, l) = \lambda e^{-\frac{E_k}{T}} = \lambda W_0(k, l) \quad (4.10)$$

S daným počtom naplnených kontraktov vieme sčítaním cez jednotlivé pravdepodobnosti nájsť parameter λ :

$$N = \lambda \sum_{l,k} W_0(k, l). \quad (4.11)$$

λ tu spĺňa funkciu veľkej partičnej funkcie z termodynamiky [4], a teda vieme že platí aj $\lambda = e^{\frac{\mu}{T}}$, kde μ je už spomínaný migračný potenciál. Dosadením za λ získame rovnosť

$$\frac{\mu}{T} = \ln \frac{N}{\sum_{k,l} W_0(k, l)} \quad (4.12)$$

Definíciu migračného potenciálu môžeme preformulovať do tvaru $\left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_{E,V} = -\frac{\mu}{T}$. Z predchádzajúcich vzťahov dokážeme integráciou vyjadriť entropiu

$$S = - \int_0^N \frac{\mu}{T} dM = - \int_0^N \ln M dM + N \ln \sum_{l,k} W_0(k, l). \quad (4.13)$$

A teda $S = N - N \ln N + N \ln \sum_{l,k} W_0(k, l)$. Ďalej pre skrátenie zápisu označme $\varphi(T, V) := \sum_{l,k} W_0(k, l)$ a pozrime sa na vlastnosti tejto funkcie. Pokiaľ je trh voľný, platí

$$\varphi(T, V) = \sum_{k=1}^n C(k) e^{\frac{kE_0}{T}} \quad (4.14)$$

kde $C(k)$ je počet uzavretých kontraktov s E_k . Keďže na trhu je celkovo m jednotiek tovaru, pre každú hodnotu E_k existuje práve m potenciálnych kontraktov, a teda $C(k) = m$. Pre zjednodušenie výpočtu predpokladajme, že n (veľkosť peňažného toku) je veľmi veľké a hornú hranicu sumácie preto nahradíme nekonečnom:

$$\varphi(T, V) = \frac{V}{V_0} \frac{1}{e^{-\frac{E_0}{T}} - 1} \quad (4.15)$$

Dosadením do rovnice pre marginálnu cenu (4.7), dostaneme už známy výsledok

$$\frac{P}{T} = \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{E,N} = N \frac{\partial}{\partial V} \ln \varphi(V, T) = \frac{N}{V} \quad (4.16)$$

Vráťme sa teraz k prípadu s cenovým ohraňčením: potom počet kontraktov C_k závisí nielen od E_k , ale aj od minimálnej ceny Q :

$$C_k(E_k, Q) = \sum_{n=1}^{\frac{kE_0}{QV_0}} 1 = \frac{kE_0}{QV_0} \quad (4.17)$$

Pri vyjadrení $\varphi(T, V)$ sa suma rozpadne na dve časti. Jedna je sumou po $k = \frac{mQV_0}{E_0}$ s C_k daným rovnosťou (4.17). Pre k vyššie sa závislosť stráca a predpokladáme, že suma peňazí použitá pri potenciálnom kontrakte postačuje na nákup ktorejkoľvek z m tovarových jednotiek.

$$\begin{aligned} \varphi(T, V) &= \sum_{k=1}^{\frac{mQV_0}{E_0}} C_k(E_k, Q) e^{-\frac{kE_0}{T}} + \sum_{k=\frac{mQV_0}{E_0}+1}^{\infty} m e^{-\frac{kE_0}{T}} \\ &= \sum_{k=1}^{\frac{QV}{E_0}} \frac{kE_0}{QV_0} e^{-\frac{kE_0}{T}} + \sum_{k=\frac{QV}{E_0}+1}^{\infty} \frac{V}{V_0} e^{-\frac{kE_0}{T}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{E_0}{QV_0} e^{-\frac{kE_0}{T}} - \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{E_0}{QV_0} e^{-\frac{jE_0}{T}} e^{-\frac{QV}{T}} \\ &= \left(\frac{E_0}{QV_0} - \frac{E_0}{QV_0} e^{-\frac{QV}{T}} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\frac{kE_0}{T}} \\ &= \frac{e^{-\frac{E_0}{T}}}{\left(e^{-\frac{E_0}{T}} - 1 \right)^2} \left(\frac{E_0}{QV_0} - \frac{E_0}{QV_0} e^{-\frac{QV}{T}} \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Takto vyjadrené φ dosadíme do výrazu pre entropiu a získame

$$\begin{aligned} \frac{P}{T} &= \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{E, N} = N \frac{\partial}{\partial V} \ln \varphi(T, V) \\ &= \frac{NQ}{T} \frac{1}{e^{\frac{QV}{T}} - 1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Je zrejmé, že obmedzenie vyvolalo veľkú zmenu - zmenila sa „štruktúra“ rovnice, hlavne postavenie teploty v nej. Pre väčšie objemy toku tovarov klesne marginálna cena pod minimálnu cenu kontraktu, čo spôsobuje, ako v prípade negatívnej ceny na voľnom trhu.

V ekvilibriu sa takto dá obchodovať len s obmedzeným množstvom tovaru. Pokiaľ $T = \frac{E}{N}$, minimálna cena je Q a $V = \frac{E}{Q} = \frac{TN}{Q}$, tak časť tovaru $V - \frac{TN}{Q}$ je neobchodovateľná.

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že kritické množstvo tovarov leží práve niekde v okolí hodnoty $\frac{TN}{Q}$. V skutočnosti je ale kritické množstvo oveľa menšie:

$$P = \frac{NQ}{e^{-\frac{QV}{T}} - 1} > Q \quad (4.20)$$

$$V_{crit} = \frac{T}{Q} \ln(N + 1) \quad (4.21)$$

pretože nie je v N lineárne, ale logaritmické. Čím je teda trh väčší, tým v porovnaní s „naivným“ očakávaním skolabuje skôr.

Vo všeobecnosti môžeme na modelovanie vývoja na trhu použiť aj zložitejšie modely, podľa toho, aké správanie agentov v budúcnosti očakávame [17].

4.2.1 Plums & Lemons

Dokonca aj dobre známy príklad z ekonomickej teórie o asymetrickej informácii sa dá vnímať ako model pre našu teóriu. V ňom jeho autor G. Akerloff uvádza dva typy ojazdených áut- tie kvalitnejšie, tzv. *plums* a tie nekvalitné, tzv. *lemons* [18]. Na trhu však je nedokonalá informácia a kupujúci vedia len o pravdepodobnosti výskytu jednotlivých typov áut, nie o tom aké auto kupujú. *Plums* majú samozrejme vyššiu hodnotu než *lemons*, ale vzhľadom na nedokonalú informáciu sa všetky autá predávajú za rovnakú cenu. To spôsobuje, že predajcom kvalitných áut sa takýto obchod nevyplatí a nekvalitné autá sú zase nadhodnotené, takže obchod je pre kupujúcich nevýhodný. Úplne najhorším scenárom potom je celkové vytlačenie *plums* z trhu, kde zostanú len *lemons*. Akerloff však ukázal skôr nemožnosť aplikovať na túto situáciu štandardné techniky hľadania ekvilibria, ako možnosť toho, že celý asymetrický trh skolabuje. Za pomoci termodynamickéj teórie to však ide.

Uvažujme teda interakciu dvoch trhov - jeden s cenovým ohraničením zdola, druhý bez neho. Za trh s ohraničením si ako špeciálny prípad vyberieme trh, na ktorom sú len dobré autá, trh bez ohraničení obsahuje tie nekvalitné. Keď necháme interagovať tieto trhy, získame presne tú istú situáciu, aká je na sledovanom trhu. Vieme, že pri určitých hodnotách parametrov toku tovarov a teploty sa marginálna cena dostáva do záporných hodnôt. A tiež vieme, že takáto situácia vyvolá kolaps trhu [10]. Bližším skúmaním podmienok tohto stavu sa dá zistiť, že kolaps v skutočnosti nastane len

pri veľmi nízkych ekonomických teplotách. Pokiaľ je teplota vyššia, trh s *lemons* je stále životaschopný (pretože existuje viac ľudí s pomerne vyšším príjmom, ktorí si môžu dovoliť riskovať) a pôvodné Akerloffove tvrdenia môžeme poopraviť. Trh s kvalitnými autami môže stáť (v závislosti od teploty) na pokraji zrútenia, ale v konečnom dôsledku k úplnému zrúteniu nemusí dôjsť. Oproti pôvodným Akerloffovým úvahám je náš model jemne odlišný - stabilita v ňom stojí a padá nie na čestnosti predávajúcich, ale na teplote trhu. Asymetria informácie zužuje zónu stability na veľmi malú veľkosť. Takže vo všeobecnosti treba zaručiť oddelenie trhov s tovarmi vysokej a nízkej kvality, inak sa trh stáva labilným.

4.3 Trhy so substitučnými tovarmi

Za špeciálnych predpokladov sa dá termodynamický model aplikovať aj na trh so substitučnými tovarmi [19]. Hlavnou výhodou tohto prístupu je, že vôbec nepoužíva funkciu užitočnosti. Nemusíme sa zaoberať jej typom a vlastnosťami, ani zavádzať do teórie nové pojmy. Najväčším nedostatkom je, že musíme poznať presnú ekvivalenciu medzi tovarmi - n jednotiek prvého tovaru je ekvivalentných m jednotkám druhého tovaru. S takýmto presným vzťahom sa dá pracovať rovnako jednoducho ako len s jediným typom tovaru. Ekvilíbrio tiež budeme hľadať rovnako ako predtým, ako stav s maximálnou entropiou. Predpokladajme teda nasledovnú situáciu na trhu: N agentov, peňažný tok E a toky tovarov A, B: V_A, V_B . Entropia je daná počtom možných spôsobov priradenia každému z agentov štvoricu $(E_{A_i}, E_{B_i}, V_{A_i}, V_{B_i})$, ktorá popisuje, koľko peňažných jednotiek minul agent i na nákup tovarov A, B ako aj zakúpené objemy. Pre systém s entropiou $S(E_A, E_B, V_A, V_B)$, o ktorom vieme, že $E_A + E_B = E$ platí

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial E_A} \delta E_A + \frac{\partial S}{\partial E_B} \delta E_B = \delta E_A \left(\frac{\partial S}{\partial E_A} - \frac{\partial S}{\partial E_B} \right) \quad (4.22)$$

Ak poznáme presnú ekvivalenciu medzi tovarmi, zavedieme „spoločnú tovarovú jednotku“ tak, že V_A^0 a V_B^0 sú si navzájom ekvivalentné. Potom celkový tok tovarov za jednotku času je $V_A = V_A^0 n_A$, $V_B = V_B^0 n_B$ a celkový tok tovarov je $V = V_A + V_B$

(v spoločných tovarových jednotkách). Na základe tohto vieme, že platí

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial V_A} \delta V_A + \frac{\partial S}{\partial V_B} \delta V_B = \delta V_A \left(\frac{\partial S}{\partial V_A} - \frac{\partial S}{\partial V_B} \right) \quad (4.23)$$

Takže máme opäť dve ekvilibriové podmienky, rovnako ako v prvom najjednoduchšom prípade. Keďže na trhu nemáme žiadne obmedzenia a vzťahy pre voľný trh už poznáme, môžeme ich použiť

$$\frac{\partial S}{\partial E_A} = \frac{1}{T_A} = \frac{N}{V_A P_A} = \frac{N}{E_A} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial S}{\partial E_B} = \frac{N}{E_B} \quad (4.25)$$

V ekvilibriu sa tieto dve derivácie rovnajú, takže spolu s informáciou $E_A + E_B = E$ to vedie k výsledku $E_A = E_B = \frac{E}{2}$. Z rovnice (4.22) zase dostávame vzťahy

$$\frac{\partial S}{\partial V_A} = \frac{N}{V_A} \quad \frac{\partial S}{\partial V_B} = \frac{N}{V_B} \quad (4.26)$$

a rovnakým spôsobom z rovnice 4.23 prídeme k záveru, že $V_A = V_B = \frac{V}{2}$. Ak sa vrátíme k pôvodnej definícii tovarových tokov, dostaneme

$$\frac{n_A}{n_B} = \frac{V_B^0}{V_A^0}, \quad (4.27)$$

teda objem tovarov zakúpených v rovnovážnom stave na voľnom trhu je nepriamo úmerný výmennej kapacite.

4.4 Trh s konštantnou teplotou

Všetky zatiaľ skúmané systémy mali spoločnú charakteristiku - bol ňou stabilný peňažný tok. Na skutočných trhoch je však veľmi ťažké určiť, ako reálne peňažný tok vyzerá. Vzhľadom na to, že veľkosť peňažných tokov neovplyvňuje rovnováhu a nedokážeme podľa nej určiť, čo sa stane, ak sa dva systémy dostanú do kontaktu, je vhodnejšie pracovať s fixovanou hodnotou pre stavovú premennú. Na získanie ďalších potrebných vzťahov použijeme *Legendrovu transformáciu* [10]. Prechodom k novým nezávislým premenným sa vzťahy linearizujú, ďalej pracujeme už so spomínanými

termodynamickými potenciálmi.

Legendrovu transformáciu diferenciálnej rovnice s nezávislými premennými (E, V) na premenné (T, V) môžeme použiť napríklad na základnú termodynamickú rovnicu

$$dE = TdS + \mu dN - PdV \quad (4.28)$$

tak za predpokladu konštantnej teploty a počtu častíc (agentov) dostávame

$$P = - \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_{T,N} + T \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_{T,N} \quad (4.29)$$

Pokiaľ Legendrovou transformáciou zavedieme funkciu $F = E - TS$, tak platí

$$P = - \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{T,N} \quad (4.30)$$

Nechajme teraz náš systém reagovať s termostatom - už nebudeme uvažovať aké peňažné toky sa v celej sústave pohybujú, vieme ale, že teplota bude konštantne T . Jediná podmienka, ktorú peňažné toky musia spĺňať je zákon zachovania peňazí. Pokiaľ sa pri konštantnej teplote zmení veľkosť tovarového toku z V_1 na V_2 , tak s tým súvisiaca zmena v peňažných tokoch sa dá vyjadriť ako

$$\int_{V_1}^{V_2} PdV = - \int_{V_1}^{V_2} \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{T,N} dV = F(V_1) - F(V_2) \quad (4.31)$$

V termodynamike nazývame funkciu F *Helmholtzova voľná energia*, my ju budeme používať pod názvom *voľný peňažný tok*. Navyše, dá sa nahliadnuť, že $F = -T \ln Z$, kde Z je partičnou funkciou systému. Odtiaľ je vidieť, že Z má zápornú hodnotu, pretože voľný peňažný tok je najväčšia možná hodnota výdavkov potrebná na zväčšenie tovarového toku. Pozrime sa ďalej na vlastnosti funkcie F . Pri interakcii s termostatom, kde celkový systém má konštantný tok peňazí platí $dE_C + dE_T = 0$ (kde jednotlivé zložky sú infinitezimálne prírastky peňažného toku v našom systéme a termostate). V rovnováhe je celková entropia systému maximálna, teda platí $dS_C + dS_T = 0$. Celková teplota systému je daná teplotou termostatu a platí $dE_T = TdS_T$. Takže

$$dE_T = -dE_C = TdS_T = -TdS_C \quad (4.32)$$

S využitím funkcie F sa to dá zapísať ako $dF_C = 0$. Dôležitým záverom je, že voľný peňažný tok dosahuje extrémnu hodnotu práve v ekvilíbriu medzi termostatom a sledovaným systémom. Navyše vieme doplniť, že ide o minimum, vzhľadom na to, že v rovnováhe má entropia maximálnu hodnotu. Ďalej nás zaujíma aj to, že rovnováhu dokážeme nájsť aj cez funkciu len partičnej funkcie. Ostatné parametre ekvilíbria vieme vyjadriť cez tzv. *Gibbsovu-Helmholtzovu rovnicu* (4.33) a rovnicu (4.34):

$$E = -T^2 \left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{V,N} \quad (4.33)$$

$$P = - \left. \frac{\partial F}{\partial V} \right|_{T,N} \quad (4.34)$$

Legendrovu transformáciu môžeme použiť aj iným spôsobom, a tak dostaneme iný typ potenciálu. Pre nezávislé premenné T a P definujeme funkciu Φ :

$$\Phi := E - TS + PV, \quad (4.35)$$

ktorá sa v termodynamike nazýva *Gibbsova energia*. Pre ňu platia nasledovné vzťahy

$$d\Phi = -SdT + VdP, \quad S = - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right|_P, \quad V = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial P} \right|_T, \quad (4.36)$$

čo implikuje

$$- \left. \frac{\partial S}{\partial P} \right|_T = \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P \quad (4.37)$$

Keďže však nepracujeme s fyzikálnymi veličinami, ale ekonomickými, potrebujeme nástroj, ktorým by sme ako fyzikálnym teplomerom mohli merať ekonomickú teplotu. Rozhodne to ale nebude rovnako jednoduché. Teplomer je totiž sústavou, ktorej parametre poznáme a na základe ľubovoľne zvolenej stupnice a znalosti parametrov dokážeme definovať absolútnu teplotu systému [10]. Namiesto toho, aby sme poznali skutočnú stavovú rovnicu platnú pre teplomer stačí vykonať niekoľko meraní. Ak si za stupnicu teplomera zvolíme ľubovoľné T_S , tak $T = T(T_S)$. Potom podľa predchádzajúcich vzťahov platí

$$\left. \frac{\partial E}{\partial P} \right|_T = T \left. \frac{\partial S}{\partial P} \right|_T = -T \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P, \quad (4.38)$$

čo sa dá vyjadriť aj za pomoci T_S

$$\left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_P = \left. \frac{\partial V}{\partial T_S} \right|_P \cdot \frac{\partial T_S}{\partial T}. \quad (4.39)$$

Po menších úpravách nakoniec dostaneme výraz

$$\frac{\partial T}{\partial T_S} = -T_S \frac{\left. \frac{\partial V}{\partial T_S} \right|_P}{\left. \frac{\partial E}{\partial P} \right|_{T_S}} \quad (4.40)$$

Výraz na pravej strane obsahuje len funkcie merateľné na zvolenej stupnici T_S , takže s ich pomocou potom dokážeme nájsť vzťah medzi ňou a skutočnou teplotou. Teraz vieme, ako na základe stupnice teplomera zistiť skutočnú teplotu, ale stále teplomer nemáme. Ak by sme chceli úplne ekvivalentný nástroj, potrebovali by sme modelový trh, ktorý by sa dal pridať ku každému skúmanému trhu a pomocou neho by sme skúmali zmeny pri určitých parametroch fixovaných. V skutočnosti je ale takmer nemožné zozbierať dáta k všetkým umelo vytvoreným podmienkam, ktoré potrebujeme na „vytvorenie“ teplomera. Namiesto toho môžeme na skúmanie trhov s obmedzením v určitých prípadoch použiť voľný trh, pretože vieme, že na ňom sa teplota rovná priemernému príjmu agenta. Opäť však je problém so správnym „nastavením“ podmienok, takže najjednoduchšou možnosťou zostáva štúdium historických dát alebo matematické modelovanie.

Kapitola 5

Fluktuácie trhu

V predošlom texte sme sa zatiaľ zaoberali len hľadaním rovnováhy. Skutočné trhy ale v skutočnosti nemusia dosiahnuť tento stav, ale budú sa pohybovať niekde v jeho blízkosti, budú okolo neho fluktuovať [21]. Tieto fluktuácie môžu byť spôsobené viacerými dôvodmi, ale my sa budeme zaoberať len dvomi: fluktuácie spôsobené špekuláciami na trhu a fluktuácie spôsobené tým, že trhy nie sú izolované. Každý trh je v konečnom dôsledku súčasťou väčšieho trhu, a aj keď je celý systém v rovnováhe, môže dôjsť (a v skutočnosti aj dochádza) k odchýlkam v jednotlivých subsystémoch.

Podľa termodynamickej teórie fluktuácií je stredná kvadratická odchýlka fluktuácií priamo úmerná $\frac{1}{\sqrt{N}}$, kde N je počet agentov na trhu. Teória fluktuácií je pre použitie v ekonomike veľmi dobrou voľbou, pretože práve fluktuácie sú na trhoch ľahko pozorovateľné. So znalosťou teórie fluktuácií dokonca môžeme určiť hodnoty niektorých veličín charakterizujúcich trh. Nesmieme však zabudnúť, že fluktuácie budú spôsobené len skúmanými faktormi, ale v skutočnosti aj aktuálnou sociálnou, politickou alebo demografickou situáciou, ktoré do modelu nevieme zahrnúť. Keďže pri skutočných dátach tieto fakty nesmieme ignorovať, musíme časové úseky kde dochádza k zmenám zo skúmania vylúčiť. Rovnako zatiaľ nepripustíme možnosť, že fluktuácie sú spôsobené špekuláciami (tento prípad prenecháme na neskôr).

Vráťme sa k základnej teórii, podľa ktorej je pravdepodobnosť, že systém je v makrostave s parametrom M úmerný počtu mikrostavov zodpovedajúcich tejto hodnote. So zavedením štatistickej váhy g stavu M sa táto pravdepodobnosť dá zapísať cez en-

tropiu

$$W(M) = g(M) = e^{\ln g(M)} = e^{S(M)}. \quad (5.1)$$

Už vieme, že pokiaľ je systém v rovnováhe v stave M_0 , tak entropia dosahuje maximálnu hodnotu, teda platí

$$\left. \frac{\partial S}{\partial M} \right|_{M_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 S}{\partial M^2} \right|_{M_0} < 0 \quad (5.2)$$

Keďže skúmame iba malé odchýlky od rovnovážneho stavu, môžeme použiť Taylorov rozvoj okolo bodu M_0 [20]:

$$W(M_0 + \Delta M) = e^{S_0 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial M^2} \right|_{M_0} \Delta M^2} \quad (5.3)$$

Aj napriek tomu, že by sme mali uvažovať len malé odchýlky ΔM , tak pre hustotu rozdelenia pravdepodobnosti potrebujeme všetky hodnoty $M_0 + \Delta M$ od $-\infty$ po ∞ . Našťastie však pre veľké odchýlky hodnota exponentu prudko klesá, takže tento fakt môžeme zanedbať. Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} dW(M_0 + \Delta M) = e^{S_0} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial M^2} \right|_{M_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\Delta M^2}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial M^2} \right|_{M_0}} d\Delta M = 1 \quad (5.4)$$

S využitím normálneho rozdelenia potom získame vzťah

$$\overline{\Delta M^2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial M^2} \right|_{M_0}} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta M)^2 e^{-\frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial M^2} \right|_{M_0} \Delta M^2} d\Delta M = \frac{1}{\left. \frac{\partial^2 S}{\partial M^2} \right|_{M_0}}, \quad (5.5)$$

takže môžeme povedať, že odchýlka od rovnováhy má normálne rozdelenie s parametrami $(0, \overline{\Delta M^2})$. Vďaka tomu má nulovú strednú hodnotu aj súčin dvoch nezávislých fluktuácií. V opačnom prípade to už také jednoduché nie je.

Pri predpoklade, že sa fluktuácia objavila v časti trhu, ktorý bol v rovnováhe, môžeme predokladať, že teplota a cena zostanú v prvej aproximácii konštantné, na rovnovážnej úrovni T_0 resp. P_0 . Celú odchýlku potom môžeme vyjadriť vo forme zmeny potenciálu ako

$$\Delta \Phi = \Delta E - T_0 \Delta S + P_0 \Delta V. \quad (5.6)$$

Aby sme objasnili odchýlky v Φ , rozviňme ΔE pomocou $\delta S, \delta V$, ktoré budeme vnímať ako zmeny v oddelenej časti celého systému (kým $\Delta \Phi$ a ΔE vnímame ako

celkovú zmenu systému). Rovnako ako predtým zapíšeme

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi &= \Delta E - T\delta S + P\delta V \\
&= -\frac{\partial E}{\partial V}\delta V + \frac{\partial E}{\partial S}\delta S - T\delta S + P\delta V + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\delta S^2 + 2\frac{\partial^2 E}{\partial S\partial V}\delta S\delta V + \frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\delta V^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\delta S^2 + 2\frac{\partial^2 E}{\partial S\partial V}\delta S\delta V + \frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\delta V^2\right) \\
&= \frac{1}{2}(\delta S\delta T - \delta V\delta P)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

V tomto vyjadrení máme zastúpené všetky premenné, takže si môžeme vybrať rôzne sústavy - napríklad pre výber $\delta V, \delta T$ dokážeme vyjadriť $\delta S, \delta P$ a zjednodušením dostaneme

$$\delta T\delta S - \delta P\delta V = \frac{C_V}{T}\delta T^2 - \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T \delta V^2, \tag{5.8}$$

kde C_V je tzv. tepelná kapacita trhu pri konštantnom objeme tovarov, definovaná ako $C_V = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_T$ [22]. (Inými slovami, tepelná kapacita C_V trhu je množstvo peňazí potrebné na zvýšenie trhovej teploty o jednotku pri fixnom množstve tovarov na trhu.)

Pravdepodobnosť odchýlky od rovnováhy sa tak dá vyjadriť pomocou dvoch faktorov závislých od δV a δT ako

$$W(\delta T, \delta V) \approx e^{-\frac{1}{2T}\left(-\frac{C_V}{T}\delta T^2 + \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T \delta V^2\right)}, \tag{5.9}$$

odkiaľ taktiež vyplýva, že $\overline{\delta V\delta T} = 0$. Porovnaním s normálnym rozdelením vieme vypočítať stredné kvadratické hodnoty fluktuácií [23]:

$$\overline{(\delta T)^2} = \frac{T^2}{C_V} \tag{5.10}$$

$$\overline{(\delta V)^2} = -T \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T \tag{5.11}$$

A tie ďalej využijeme pri výpočte strednej hodnoty súčiny $\overline{\delta P\delta V}$:

$$\overline{\delta P\delta V} = \overline{\left(\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T \delta V - \left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_V \delta T\right)\delta V} = \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T \overline{\delta V^2} = -T \left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T \left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_T = -T \tag{5.12}$$

Tento vzťah nám umožňuje merať teplotu trhu len na základe priemeru súčinnu trhových fluktuácií objemu tovarov a ceny. Namiesto priemeru cez súbor môžeme počítať časový priemer dát, čím získame nasledovný vzťah pre empirický výpočet trhovej teploty

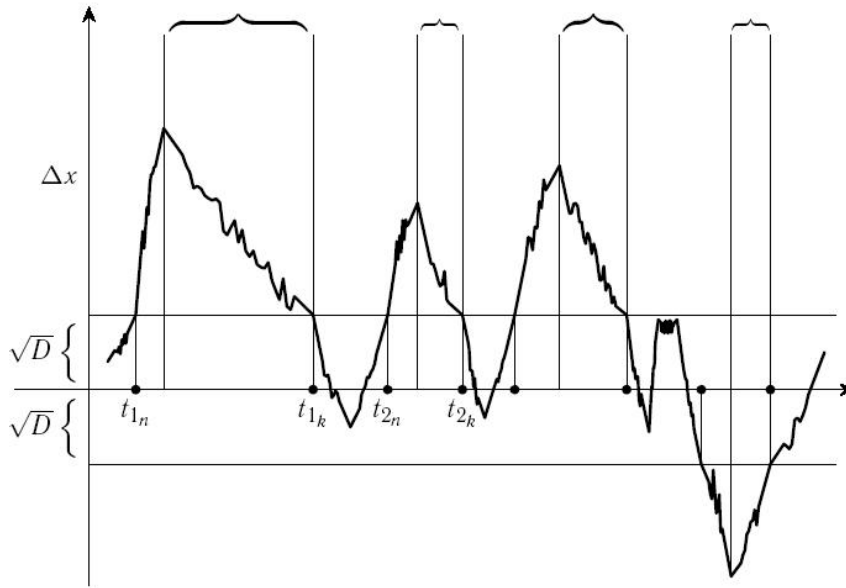
$$T = -\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} (V(t) - \bar{V})(P(t) - \bar{P}) dt \quad (5.13)$$

Tento vzťah je veľmi praktický, vzhľadom na to, že časová závislosť ceny a objemu tovarov od času sú prístupnými dátami, napríklad pre akciový trh. Ak teda pripustíme, že cenu akcií neovplyvňujú žiadne externé faktory, získame nástroj, ktorým môžeme merať termodynamické parametre trhov.

5.1 Fluktuácie v čase

Pozrime sa teraz detailnejšie na závislosť fluktuácií od času v systéme vychýlenom z rovnováhy. V tomto prípade rovnako nemôžeme počítať s priveľkými odchýlkami, ale tentokrát ani s príliš malými. Pokiaľ je totiž počiatočná odchýlka primará, jej dynamika sa nebude vôbec odlišovať od spontánnej chaotickej fluktuácie. Ak je naopak odchýlka príliš veľká, treba brať do úvahy už aj nelineárne závislosti vývoja odchýlky od tej pôvodnej. Výberom veľkosti odchýlky sa obmedzíme len na lineárny prípad, takže v Taylorovom rozvoji pre odchýlku budeme môcť zanedbať všetky členy okrem prvého.

Pre praktické využitie v predikcii časových radov, napríklad cien na akciových trhoch, je nutné povedať, že rozumné predikcie sa dajú robiť len pre krátke časové periódy, kým sú ešte ceny schopné vrátiť sa do rovnovážneho stavu, ale časové rozpätia musia byť ešte vždy väčšie než hodnota disperzie (tzn. predikcie sú podstatné len pre intervaly na grafe označené $t_{1_n} - t_{1_k}$ a $t_{2_n} - t_{2_k}$). Pri použití termodynamической teórie navyše musíme predpokladať, že rozhodnutia predávajúcich a kupujúcich nie sú príliš ovplyvnené „tieňom budúcnosti“ a nebude tým narušená symetria medzi nimi. Práve z tohto dôvodu je termodynamický prístup na akciovom trhu neefektívny, ale pre komoditné trhy vyhovuje. Keďže budeme pracovať s dátami, ktorými sú časové rady,



Obr. 5.1:

je potrebné definovať autokorelačnú funkciu

$$\varphi(t_0) = \langle \Delta X(t) \Delta X(t + t_0) \rangle \quad (5.14)$$

pre dva momenty oddelené fixným časovým intervalom t_0 . Za pomoci autokorelačnej funkcie budeme určovať spektrálnu hustotu fluktuácií, teda pravdepodobnosť, že „frekvencia“ fluktuácií spadá do určitého intervalu. Nejde však o skutočnú frekvenciu, pretože takéto procesy majú určitý relaxačný čas, pričom pre frekvenciu ω platí

$$\omega = \frac{1}{t_0} \quad (5.15)$$

Pri formálnejšom vyjadrení vzťahu medzi frekvenciou a relaxačným časom, s využitím Fourierovej transformácie [20], získavame

$$\Delta X^\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X(t) e^{i\omega t} dt \quad (5.16)$$

$\Delta X(t)$ potom môžeme zapísať inverznou Fourierovou transformáciou

$$\Delta X = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X_\omega e^{-i\omega t} dt \quad (5.17)$$

a dosadiť do definičného vzťahu pre autokorelačnú funkciu

$$\varphi(t_0) = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X^{\omega} \Delta X^{\omega'} e^{-i(\omega+\omega')t} e^{-i\omega t_0} d\omega d\omega' \right\rangle. \quad (5.18)$$

Ďalej, v súlade s princípmi štatistickej termodynamiky zameníme priemer súboru s časovým priemerom:

$$\varphi(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X_{\omega} \Delta X_{\omega'} \left(\frac{1}{T} \int_{-T}^T e^{-i(\omega+\omega')t} dt \right) e^{-i\omega t_0} d\omega d\omega' \quad (5.19)$$

V limite pre $T \rightarrow \infty$ sa integrál v zátvorke stáva výrazom s delta funkciou $\delta(\omega+\omega')$ a pre autokorelačnú funkciu dostávame výraz

$$\varphi(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X_{\omega}^2 e^{-i\omega t_0} d\omega. \quad (5.20)$$

Opätovnou Fourierovou transformáciou získame výraz pre spektrálnu hustotu

$$X_{\omega}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_0) e^{i\omega t_0} dt_0, \quad (5.21)$$

ktorý je známy pod menom Wiener-Hinchinova veta [10]. Pozrime sa teraz bližšie na to, ako sú previazané frekvencia fluktuácií a relaxačný čas. Ak budeme predpokladať, že rýchlosť, s akou sa premenná ΔX vracia do rovnovážneho bodu závisí iba od hodnoty samotnej premennej, tak platí

$$\frac{d\Delta X(t)}{dt} = f(\Delta X). \quad (5.22)$$

Funkcia f má v 0 nulovú hodnotu, pretože v ekvilibriu sa X nemení. S použitím Taylorovho rozvoja so zanedbaním členov vyššieho rádu dostaneme

$$\frac{d\Delta X}{dt} = -\lambda \Delta X, \quad (5.23)$$

kde $\lambda > 0$, teda platí $\Delta X(t) = \Delta X(0)e^{-\lambda t}$. Ak dosadíme tento výraz do vyjadrenia pre autokorelačnú funkciu, dostaneme

$$\varphi(t_0) = \langle \Delta X^2 \rangle e^{-\lambda t}, \quad (5.24)$$

ale pripomeňme si, že pri rozvoji $\Delta\dot{X}(t)$ zanedbávame členy vyšších rádov vzhľadom na ΔX a že berieme do úvahy hodnoty vyššie než typické mimovoľné fluktuácie (t.j. takých, že $|\Delta X| < \sqrt{D}$, kde D označuje disperziu).

Keďže poznáme autokorelačnú funkciu, môžeme určiť presný vzťah s λ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(|t_0|) dt_0 = \langle \Delta X^2 \rangle 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda t_0} dt_0 = \langle \Delta X^2 \rangle \frac{2}{\lambda} \quad (5.25)$$

Pokiaľ teda máme časový rad $\Delta\dot{X}$, môžeme vypočítať jeho autokorelačnú funkciu

$$\varphi(t_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Delta X(t) \Delta X(t + t_0) dt, \quad (5.26)$$

ktorú môžeme dosadiť do predchádzajúceho vzťahu, odkiaľ vyjadríme konštantu λ :

$$\lambda = \frac{2\langle X^2 \rangle}{\int_0^{\infty} \varphi(t_0) dt_0} = \frac{2\pi\langle X^2 \rangle}{X_{\omega}^2(0)} \quad (5.27)$$

(kde $X_{\omega}^2(0)$ je spektrálna hustota pri nulovej frekvencii). Konkrétne pre prípad, že autokorelačná funkcia je exponenciálna, spektrálna hustota má tvar

$$X_{\omega}^2 = \frac{\lambda}{\pi(\omega^2 + \lambda^2)} \langle X^2 \rangle. \quad (5.28)$$

Pre frekvencie menšie než λ sa spektrálna hustota rovná približne $\frac{1}{\pi\lambda} \langle X^2 \rangle$.

Práve tieto poznatky využijeme, pokiaľ má študovaný systém dva rozličné relaxačné časy - jeden veľmi malý, ktorý určuje neúplné ekvilibrium (teda to, ktoré opisuje jednotlivé časti systému) a druhý veľký, korešpondujúci s celkovým ekvilibrium. Pokiaľ hovoríme o trhoch, znamená to, že je rozumné rozdeliť trh na jednotlivé časti, z ktorých každú vieme opísať termodynamickým modelom. Technické prevedenie bude spočívať v tom, že budeme zbierať dáta z cenových rozdielov na viacerých trhoch, keďže relaxačný čas takéhoto parametra je vyšší než relaxačný čas na konkrétnom trhu.

Na využitie teórie termodynamických fluktuácií na cenové relaxácie na trhoch však treba venovať maximálnu pozornosť, pretože pri bližšom pozorovaní zisťujeme, že rozlične rozvinuté trhy sa vyvíjajú úplne rozdielnymi spôsobmi [25].

5.2 „Tieň budúcnosti“ a kolektívne správanie na trhu

Keď hovoríme o fluktuáciách, nemôžeme obísť otázku, ako vplývajú na vnímanie budúcnosti jednotlivými agentmi na trhu. Vo všeobecnosti má každý z agentov rozličné údaje o situácii, a preto ťažko môžeme predpokladať koordinované správanie agentov v akejkoľvek situácii, obzvlášť v okolí ekvilibria. Navyše každý, kto objaví nové možnosti správania ziskava na trhu výhodu a týchto možností je neobmedzené množstvo. Pokiaľ vo všeobecnosti v správaní začína prevládať určitý stereotyp, rozumné je skôr očakávať deštrukciu tohto poriadku ako jeho posilnenie. A to isté môžeme očakávať, keď sa určitá myšlienka ujme u väčšiny agentov na trhu - napríklad investícia do určitého typu aktív. Aktívum sa stáva nadhodnoteným, čo skôr či neskôr vedie k odlevu peňazí inam. Práve toto je dôvodom vzniku oscilácií, ktoré na trhu vznikajú. Rozhodujúcu úlohu v spontánnej koordinácii konania agentov má „tieň budúcnosti“, teda nazeranie na možný budúci vývoj situácie. Výsledok konania agentov je vďaka masovému efektu taký, ako si nikto z nich neželal. V teórii nekooperatívnych hier to zodpovedá *väzňovej dileme* [16]. My sa však musíme sústrediť na problém, v akom vzťahu sú malé fluktuácie s osciláciami spôsobenými kolektívnym správaním a aká je rola tohto správania v stabilite ekonomiky?

Ak malá fluktuácia môže vyvolať koordinovanú reakciu, ktorá zničí trhové ekvilibrium, tak trh sa stáva evolučne nestabilným. Štúdium procesu formovania trhovej ceny akcií má mimoriadny význam pri tvorbe prognózovacích modelov. Cena je veľmi dobrým príkladom ilustrujúcim, ako mierená činnosť masy ľudí, z ktorých každý koná na základe vlastného uváženia určuje hodnotu celkovej premennej.

Predpovedanie ceny akcií matematickým modelom, ak berieme do úvahy všetky ekonomické, ale aj politické faktory je príliš komplikované a preto odsúdené na neúspech. Navyše fluktuácie spôsobené špekuláciami týmto spôsobom nevieme modelovať. Pokiaľ sú dlhodobé faktory fixné, tak závislosť ceny od času (pre dostatočne krátke intervaly) vykazuje určité špecifiká. Táto znalosť nám umožňuje modelovať cenové zmeny spôsobené špekuláciami ako aj oscilácie spôsobené dlhodobými premennými.

Definujme *priemernú cenu* $\bar{X}(t)$ ako pomer priemerného množstva peňazí $\bar{P}(t)$ vynaloženého na nákup tovarov za jednotku času a priemernú hodnotu tovarov $\bar{Q}(t)$

predaných za rovnaký čas

$$\bar{X}(t) = \frac{\bar{P}(t)}{\bar{Q}(t)}. \quad (5.29)$$

Špekulácie vedú k zmene $P(t)$ ako aj $Q(t)$, čo ďalej znamená zmenu ceny. Okamžitá cena potom závisí od týchto zmien:

$$X(t) = \frac{\bar{P}(t) + \Delta P(t)}{\bar{Q}(t) + \Delta Q(t)}. \quad (5.30)$$

Pri krátkych časových intervaloch môžeme predpokladať, že \bar{Q} a \bar{P} nezávisia od času.

Ak sa obmedzíme na predpoklad, že určité dodatočné množstvo tovarov a peňazí, ktoré sa objaví na trhu závisí od možného zisku, môžeme situáciu na trhu opísať rovnicou

$$X(t) = \frac{\bar{P} + \sum_l f_l(X(t), \tilde{X}(t+T))}{\bar{Q} + \sum_k \varphi_k(X(t), \tilde{X}(t+T))}, \quad (5.31)$$

kde k je index charakterizujúci predávajúcich, l charakterizujúci kupujúcich, $\tilde{X}(t+T)$ je predikovaná cena na obdobie T a funkcie φ_k a f_l sú funkcie popisujúce vzťah medzi dodatočným množstvom tovarov a peňazí a predikovanou cenou. Aby sme vzťah naozaj mohli použiť, musíme prijať určité predpoklady, ktoré skonkretizujú zatiaľ neznáme funkcie φ_k , f_l :

1. Predpokladajme, že všetci kupujúci používajú rovnakú prognózu; rovnako aj všetci predávajúci.
2. Nárast ponuky je priamo úmerný predpokladanému zisku na jednotku tovaru.
3. Nárast dopytu je tiež priamo úmerný predpokladanému zisku.

S použitím týchto predpokladov získava vzťah tvar

$$X(t) = \frac{\bar{P} + \alpha(\tilde{X}_P(t+T) - X(t))}{\bar{Q} + \beta(\tilde{X}_Q(t+\theta) - X(t))}, \quad (5.32)$$

kde $\tilde{X}_P(t+T)$ je odhad ceny kupujúcimi, s predikčným časom T a $\tilde{X}_Q(t+\theta)$ je odhad predajcov, s predikčným časom θ . Predpoklad, že $T \neq \theta$ znamená, celkom racionálne, že trh je asymetrický.

Ak budeme v zjednodušovaní pokračovať ďalej, rozvineme cenu $X(t)$ do Taylorovho radu s tým, že členy vyšších rádov opäť zanedbáme. Výsledkom potom bude

$$X(t) = \frac{\bar{P} + \alpha \left(T\dot{X} + \frac{T^2}{2}\ddot{X} \right)}{\bar{Q} + \beta \left(\theta\dot{X} + \frac{\theta^2}{2}\ddot{X} \right)}. \quad (5.33)$$

Ďalej máme dve možnosti: Obmedzíme sa len na prvé derivácie, takže získame rovnicu

$$X(t) = \frac{\bar{P} + \alpha T\dot{X}}{\bar{Q} + \beta\theta\dot{X}}, \quad (5.34)$$

alebo zostaneme pri komplikovanejšej verzii s druhými deriváciami, čo prináša viacero problémov s výpočtami a navyše nerazučuje existencie riešenia za ľubovoľných podmienok. Práve z tohto dôvodu zostaneme len pri jednoduchšej verzii.

Teda vyjadrením \dot{X} získavame

$$\dot{X} = \frac{\bar{P} - \bar{Q}X}{\beta\theta X - \alpha T}. \quad (5.35)$$

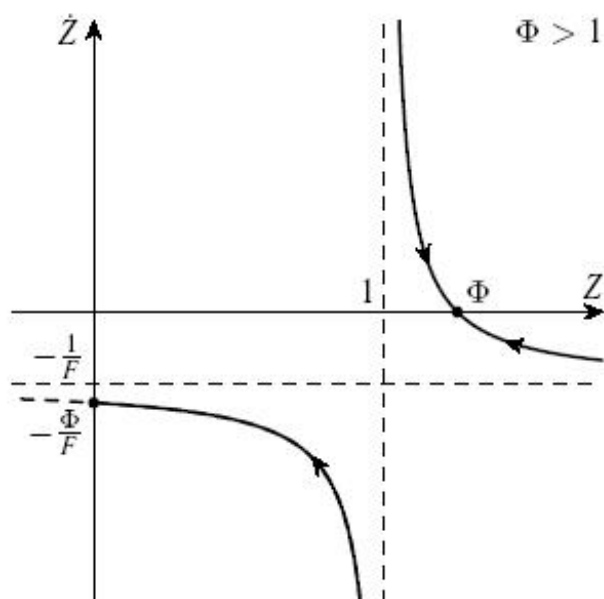
Rovnica (5.35) sa dá priamo riešiť, my však budeme pokračovať zavedením substitúcie $Z = \frac{\beta\theta}{\alpha T}X$:

$$F\dot{Z} = \frac{\Phi - Z}{Z - 1}, \quad (5.36)$$

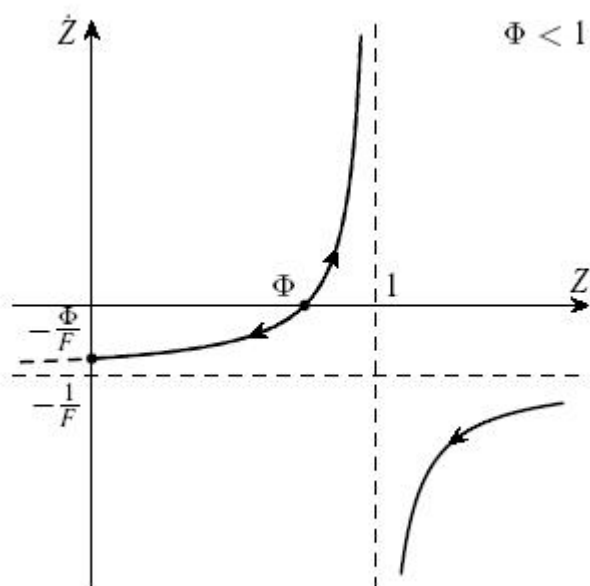
kde $F = \frac{\alpha T}{\bar{Q}}$, $\Phi = \frac{\bar{P}\beta\theta}{\bar{Q}\alpha T}$.

Pre $F > 0$, v prípade že $\alpha T > 0$ a zároveň $\Phi > 1$ (graf 5.2) je stabilným ekviliбриom bod, pre ktorý platí $Z = \Phi$, resp. $X = \frac{\bar{P}}{\bar{Q}}$. Pokiaľ však $F > 0$ a $\Phi < 1$, ekvilibrium v rovnakom bode sa stáva nestabilným (graf 5.3): s malým zvýšením ceny táto rýchlo stúpne na hodnotu $X = \frac{\alpha T}{\beta\theta}$, s malým znížením zase pomaly klesá k nule. Posledný prípad, s $\Phi = 1$, znamená neexistenciu ekvilibria, vzhľadom na to, že takto $\dot{Z} = -\frac{1}{F}$, resp. $\dot{X} = -\frac{\bar{Q}}{B}$. Pre $B < 0$ (graf 5.4) cena spojite rastie, pre $B > 0$ (graf 5.5) naopak klesá k nule.

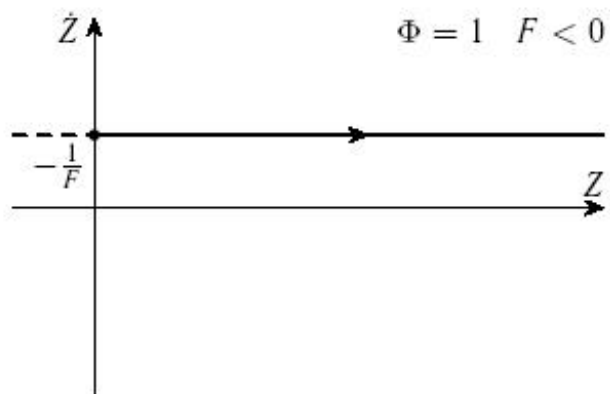
V prípade, že ponuka je obmedzená, alebo ak existuje možnosť znížiť produkciu, najpravdepodobnejšie sa uskutoční scenár s $B < 0$. Napríklad, pokiaľ ide o monopol s obmedzenou ponukou, cena neobmedzene rastie. Takto postavený model dokonca dokáže objasniť prepád cien počas nepokojov alebo vojen, a tiež infláciu v prípade obmedzenej produkcie.



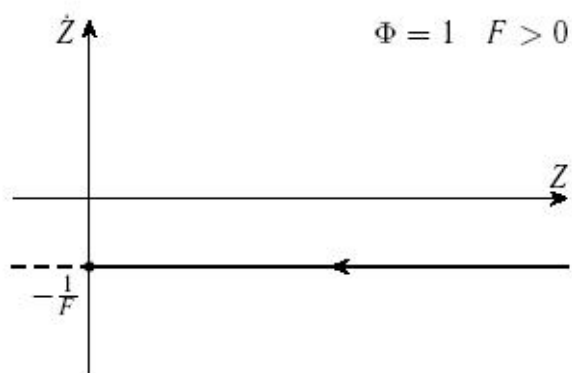
Obr. 5.2:



Obr. 5.3:



Obr. 5.4:



Obr. 5.5:

Kapitola 6

Aplikácia teórie na reálne trhové dáta

S vystavanou teóriou už dokážeme overiť, nakoľko sa približuje naozajstnej realite. Vzhľadom na to, že sme ju vytvárali podľa ideálnych trhov, najlepšie bude ju overiť na trhu, ktorý sa k tejto situácii aspoň približuje. Preto sa pustíme do štúdia komoditných trhov, pretože situácia na nich nie je až taká nepokojná ako napríklad na akciovom trhu. Keďže cieľom je overiť, či termodynamická teória funguje, teda budeme pracovať s historickými dátami a pokúsime sa zistiť, či iný prístup k ekonomickým dátam umožňuje jasnejší pohľad na historickú situáciu. Pre porovnanie sa neskôr pozrieme aj na situáciu na akciovom trhu, aby sme tak overili hypotézu, že na ich modelovanie treba model rozšíriť aj o fluktuácie vyvolané špekuláciou agentov. Rozličné situácie z minulosti nám poskytujú viacero možností na skúmanie - napríklad potravinové či surovinové krízy. Posledným prípadom bola práve potravinová kríza, teda sa zameriame na trhy so základnými potravinami, akými sú kukurica, pšenica, repka, sója alebo cukor. Sústredíme sa teda na obdobie, v ktorom bola kríza zaznamenaná a pokúsime sa na základe teoreticky vypočítanej trhovej teploty zistiť, či bolo možné jej príchod predpovedať.

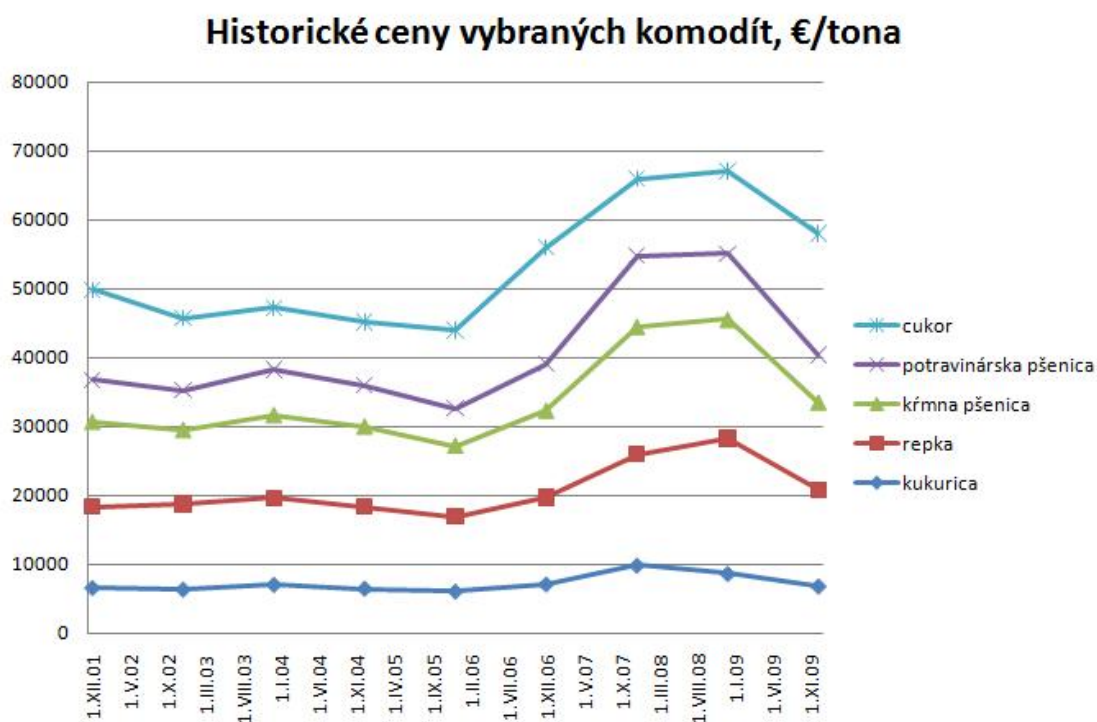
Na tento účel by bolo najvhodnejšie používať dáta z regiónov, ktoré boli krízou najviac zasiahnuté, teda africké štáty. Bohužiaľ však údaje z afrických komoditných búrz, ako sú napríklad Ethiopia Commodity Exchange alebo Africa Mercantile Exchange nie sú prístupné v dostatočnom počte na to, aby nám poskytl výsledky s výpovednou hodnotou o celom období. Preto sa obmedzíme na trhy, ktoré posky-

tujú dostatočné množstvo informácií - európsky centrálny trh NYSE Liffe a ázijský National Commodity and Derivatives Exchange (NCDX) v Bombaji. Naopak pre akciové trhy s dátami problém nie je, môžeme tak údaje z pomerne dlhého časového obdobia pred ekonomickou krízou.

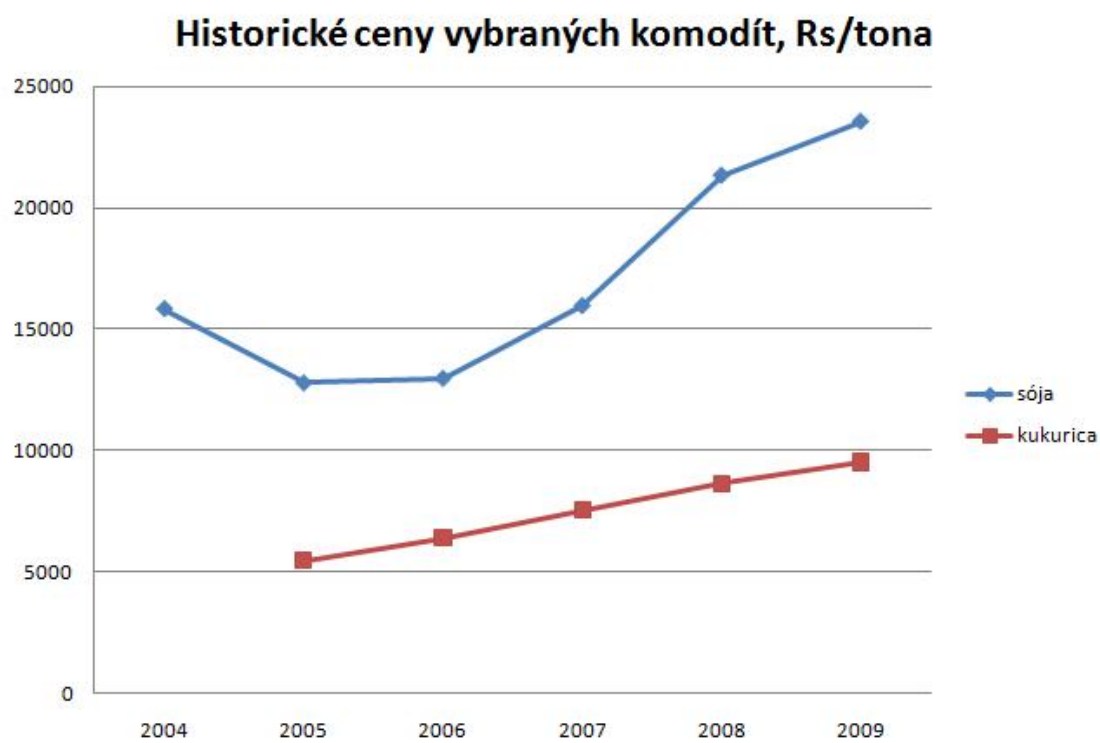
6.1 Použité dáta pre komoditný trh

Pre výskum budeme používať jednak dáta zo systému NYSE Euronext, ktorý zhromažďuje obchodné informácie z viacerých európskych búrz (Amsterdam, Lisabon, Londýn, Brusel, Paríž) na mesačnej báze, pričom pre dostatok údajov budeme sledovať celé obdobie od roku 2000 a jednak údaje z NCDX rovnako na mesačnej báze, ale len od roku 2003, pretože ich archívy ďalej nesiahajú. Vzhľadom na to, že pri výpočte trhovej teploty vychádzame z teórie fluktuácií, mesačné dáta nie sú najvhodnejšie, ale získať dáta na dennej báze z historicky zaujímavého obdobia je takmer nemožné. Posledná potravinová kríza sa odohrala v období rokov 2007 - 2008, bola spôsobená viacerými faktormi, ako sú napríklad rastúca cena ropy a vody, a v jej dôsledku sa ceny základných surovín od roku 2006 na niektorých trhoch viac než zdvojnásobili. Na európske trhy nemala kríza až taký veľký dopad, no aj napriek tomu je viditeľné markantné zvýšenie cien (obr. 6.1). Viac badateľným dôsledkom krízy je pomerne prudké zvýšenie obchodovaných objemov, ktorých rast sa však ani po roku 2008 veľmi nespomalil (obr. 6.3). Na indickom trhu je zvýšenie ceny markantné pre obe vybrané komodity (obr. 6.2), ale vývoj obchodovaných objemov má v prípade kukurice atypický priebeh (obr. 6.4). Pravdepodobne je to spôsobené tým, že kukurica v Indii nie je až takou frekventovanou plodinou ako v Európe. Vybrať plodiny ktoré by boli charakteristickejšie pre indický trh však nie je možné, pretože časové rady pre ne sú neúplné a príliš krátke, čo nám znemožňuje prácu s nimi.

Pre základnú orientáciu, aby sme vedeli, aký vývoj možno očakávať pri podrobnejších dátach, môžeme spraviť jednoduchý odhad trhovej teploty na základe modelu voľného trhu. Ten sa dá v krátkosti opísať jedinou rovnicou $PV = NT$, a teda v



Obr. 6.1: Prehľad cien vybraných komodít na európskom trhu



Obr. 6.2: Prehľad cien vybraných komodít na indickom trhu

prípade, že poznáme počet uskutočnených (naplnených) kontraktov, získame základný odhad pre trhovú teplotu (obr. 6.5 resp obr.6.6). Už tu sa dá pozorovať, ako teplota v Európe postupne stúpa, jej absolútna hodnota, ako aj výchylka z pôvodného trendu však závisí od konkrétneho trhu a jeho citlivosti. (V úvahách o modeli sme pre jednoduchosť vylúčili všetky konštanty, ich opätovným zavedením by sa získané výsledky dali zladiť - samozrejme, pre každý trh a každú komoditu potrebujeme inú konštantu.) V Indii na trhu s kukuricou môžeme pozorovať obrovský prepád teploty, pri sóji ale na počudovanie nevidno na prvý pohľad žiadnu zmenu.

Tieto výsledky na báze ročných dát nám poskytujú len prehľad o trhovej situácii, na ďalšie modelovanie už budeme používať mesačné dáta a teóriu fluktuácií z predchádzajúcej kapitoly.

6.1.1 Vlastné modelovanie trhovej teploty

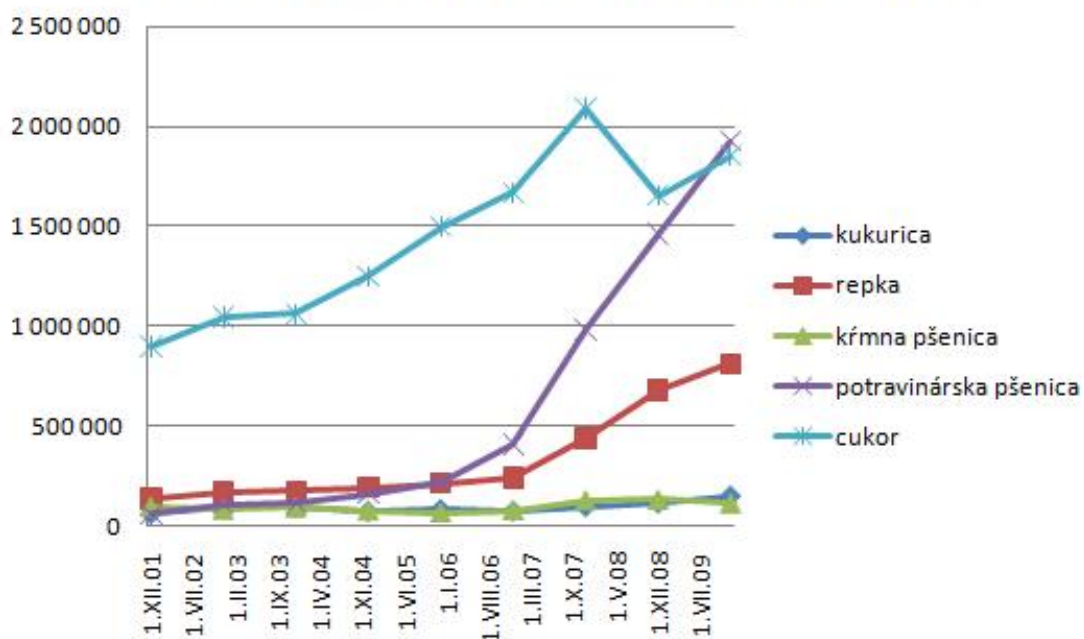
Model je postavený na vzťahu (5.13), pričom však integrál musíme nahradiť obyčajnou sumou, pretože ani na trhu neprebíha obchodovanie spojito. S vzťahom (5.35) pracovať nedokážeme, pretože zo získaných dát nedokážeme získať všetky potrebné údaje. Zostáva nám tak práca so statickým modelom, pre ktorý je už v ostatných aspektoch vzťah úplne rovnaký, pričom priemery \bar{P} , \bar{V} sa vypočítavajú kĺzavo, vždy za posledných dvanásť mesiacov, aby sme získali priemernú ročnú teplotu. Z toho dôvodu však prichádzame o posledných 12 údajov v dátovom súbore. Samotná teplota nie je udaná v špeciálnych jednotkách, tie sa nakoniec dajú doplniť zavedením špeciálnej konštanty (z teórie vieme, že teplota má byť akýmsi ekvivalentom hrubého domáceho produktu). Nás však v skutočnosti nezaujímajú absolútne čísla, stačí nám analýza priebehu a tak môžeme porovnávať rozličné trhy s rôznymi surovinami.

Európsky trh

Výsledky výpočtov teploty podľa jednotlivých trhov s komoditami sú graficky zobrazené na obrázku 6.7.

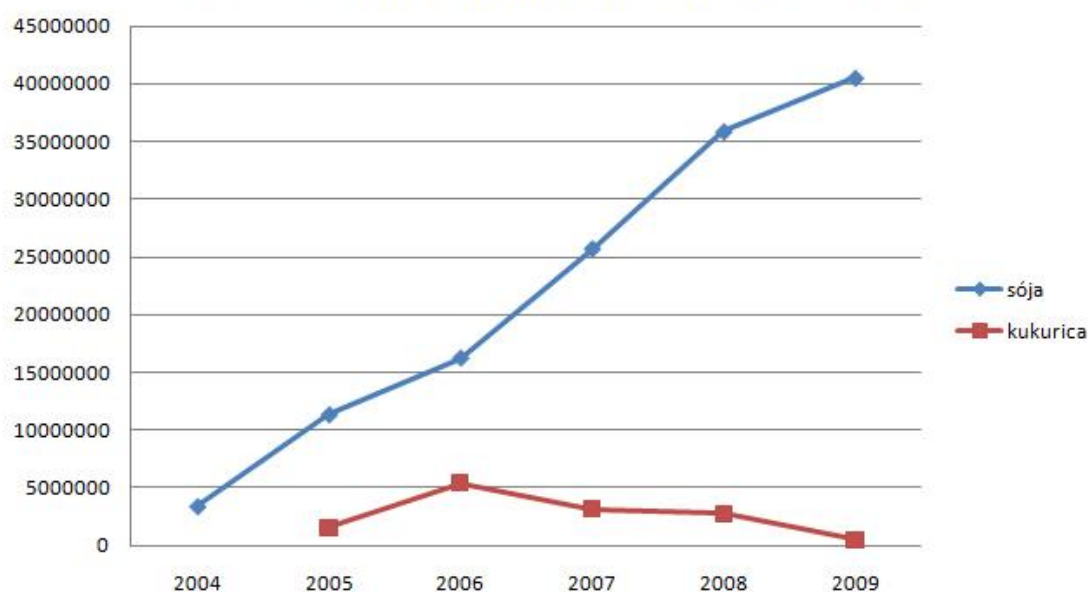
Práve z tohto obrázka je zrejmé, že na trhu sa odohrávajú isté zmeny. O aké zmeny

Obchodované objemy vybraných komodít



Obr. 6.3: Obchodované množstvá vybraných komodít na európskom trhu

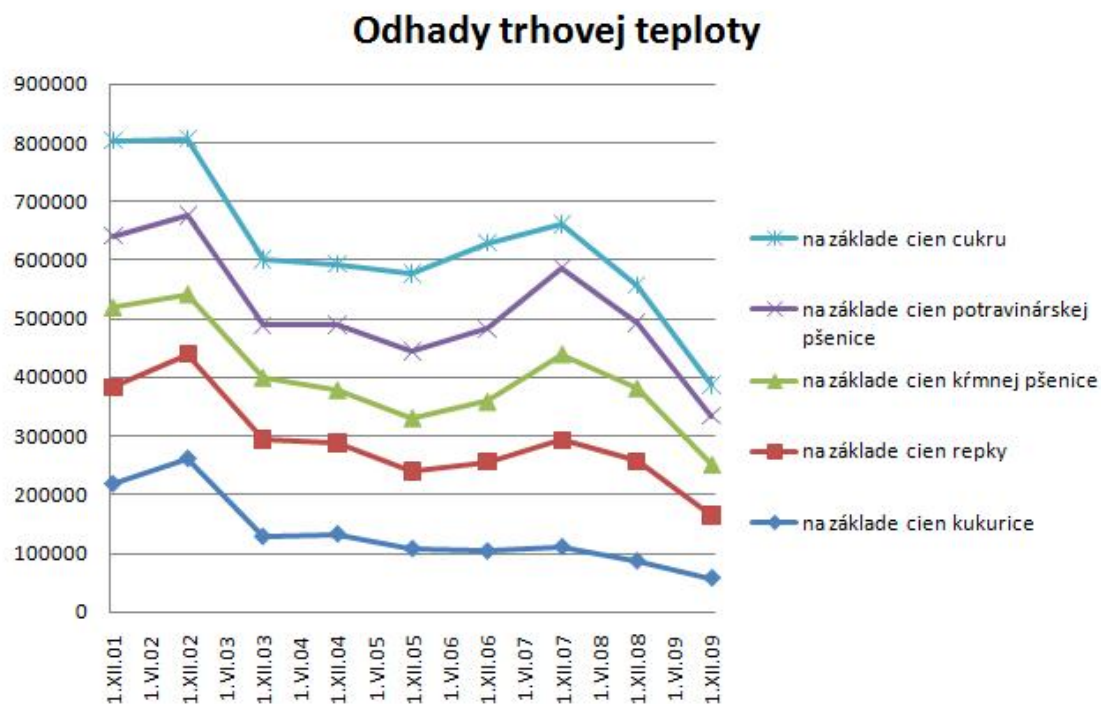
Obchodované objemy vybraných komodít



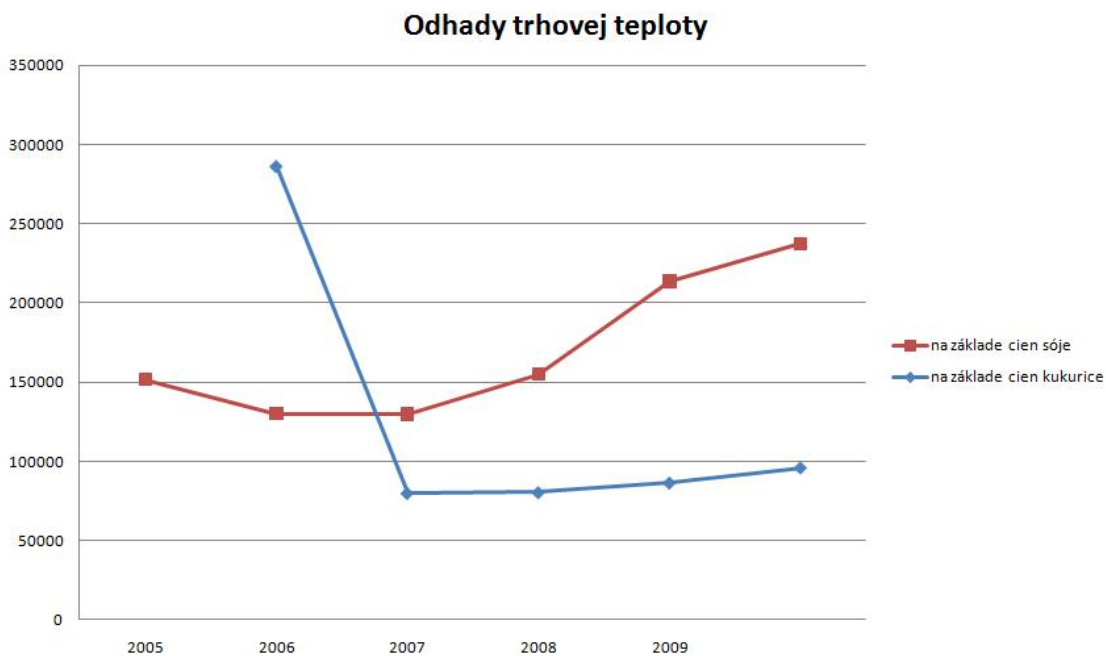
Obr. 6.4: Obchodované množstvá vybraných komodít na indickom trhu

presne ide musíme zistiť z ekonomických správ v danom období, a práve s touto vedomosťou neskôr môžeme identifikovať podobné situácie v budúcnosti (alebo minulosti). Bohužiaľ však zo skúmania musíme vylúčiť dáta z trhu s cukrom, pretože na európskych trhoch bolo v priebehu sledovaného obdobia zavedených viacerých regulačných opatrení, ktoré udržiavali nízku cenu aj napriek tomu, že na ostatných svetových trhoch cena stúpala. Rovnako však môžeme pozorovať inú vlastnosť: zavedením regulácií [24] bola porušená rovnováha na trhu s cukrom, čo spôsobilo (neskôr aj s príchodom potravinovej krízy) obrovské výkyvy v hodnotách trhovej teploty. O teplote na trhu s cukrom však treba poznamenať, že už od začiatku sledovaného obdobia vykazoval väčšie odchýlky, je teda prirodzené, že po zásahu „zvonka“ sa zintenzívnili. Vzhľadom na to, že charakter aj rád odchýliek je pri cukre úplne odlišný od vývoja pri iných komoditách, najpravdepodobnejším vysvetlením bude, že na trh s cukrom posobí ďalšia „sila“ ktorá v modeli nie je zahrnutá, a preto sa ďalej budeme zaoberať len zvyšnými štyrmi komoditami. Je možné, že práve tu vstupujú do hry fluktuácie spôsobené špekulatívne, ktoré náš model nepokrýva. V prehľade na obrázku 6.11 sú viditeľné priebehy teplôt na základe trhov s kukuricou, pšenicom a repným semenom.

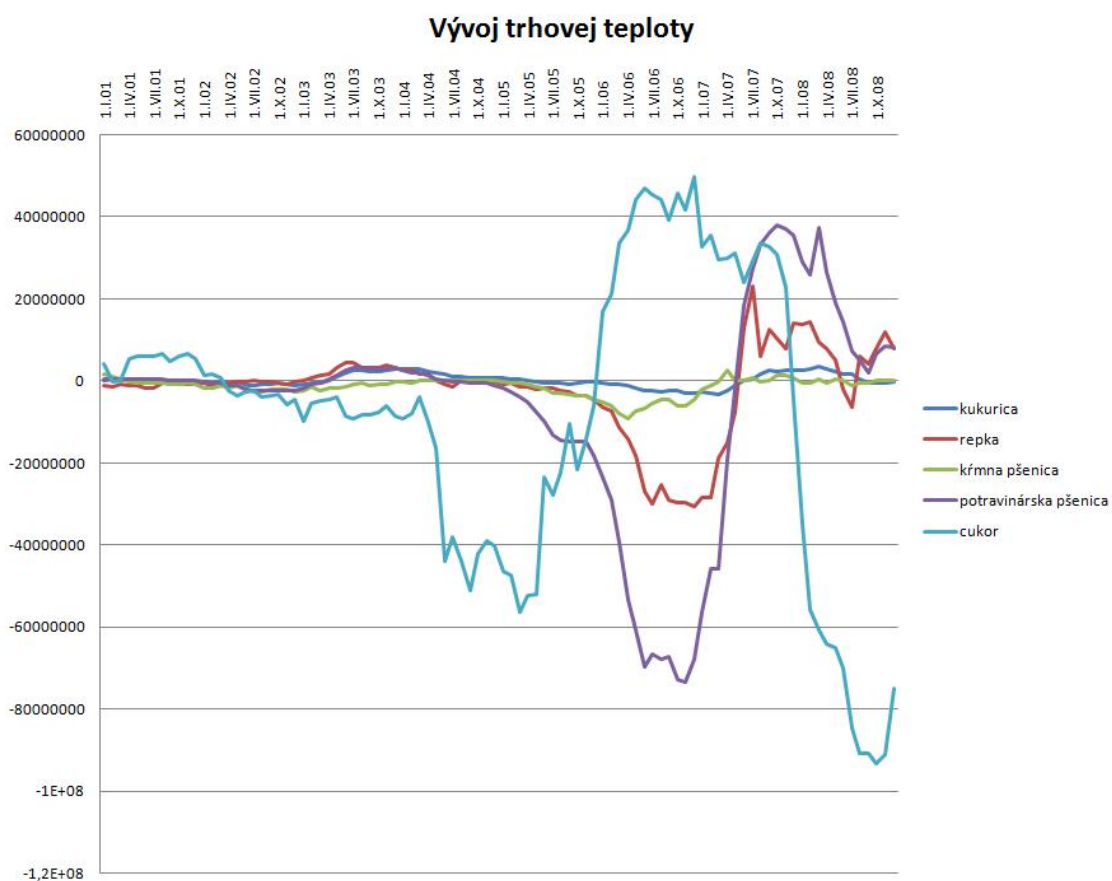
Výchyľky na jednotlivých trhoch sú rôzne veľké, čo súvisí jednak s ich veľkosťou a jednak s citlivosťou, ale všade sa nachádza určitá analógia. Je ňou prudký pokles teploty v období rokov 2005 až 2006 nasledovaný prudkým nárastom na začiatku roka 2007. V období do roku 2005 sa priebeh rôzni, vznikajú menšie (potravínárska pšenica, repka) či väčšie (krmná pšenica, kukurica) fluktuácie. Pre lepší prehľad o citlivosti trhov uvádzam aj graf s štatistickou varianciou jednotlivých trhových teplôt (obr. 6.8), ktorá tiež môže uľahčiť pozorovanie nezvyčajných situácií. Pokiaľ by sme však chceli podľa tohto kritéria určovať aktuálnu situáciu, je potrebné zvážiť výber danej komodity a do hĺbky preštudovať všetky ďalšie faktory, ktoré by naň mohli pôsobiť (alebo pôsobili v minulosti). Vo všeobecnosti, pokiaľ chceme sledovať teplotu na akomkoľvek trhu, je nutné dlhšie pozorovanie situácie, aby sme boli schopní určiť, ktoré fluktuácie vo výsledkoch už treba považovať za významné a ktoré sú len výsledkom krátkodobých vplyvov. Ak sa však pre viaceré komodity súčasne objaví veľmi



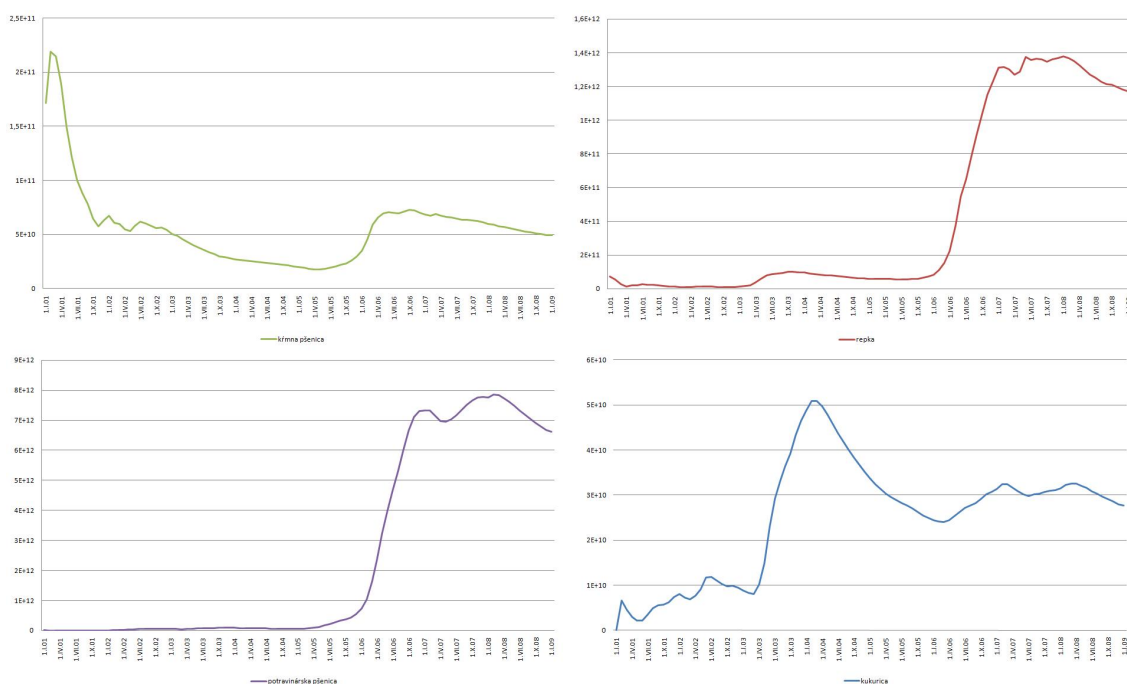
Obr. 6.5: Odhad teploty na európskom trhu



Obr. 6.6: Odhad teploty na indickom trhu



Obr. 6.7: Vývoj trhovej teploty na základe rôznych komodít



Obr. 6.8: Štatistická variancia teploty na rôznych komoditných trhoch

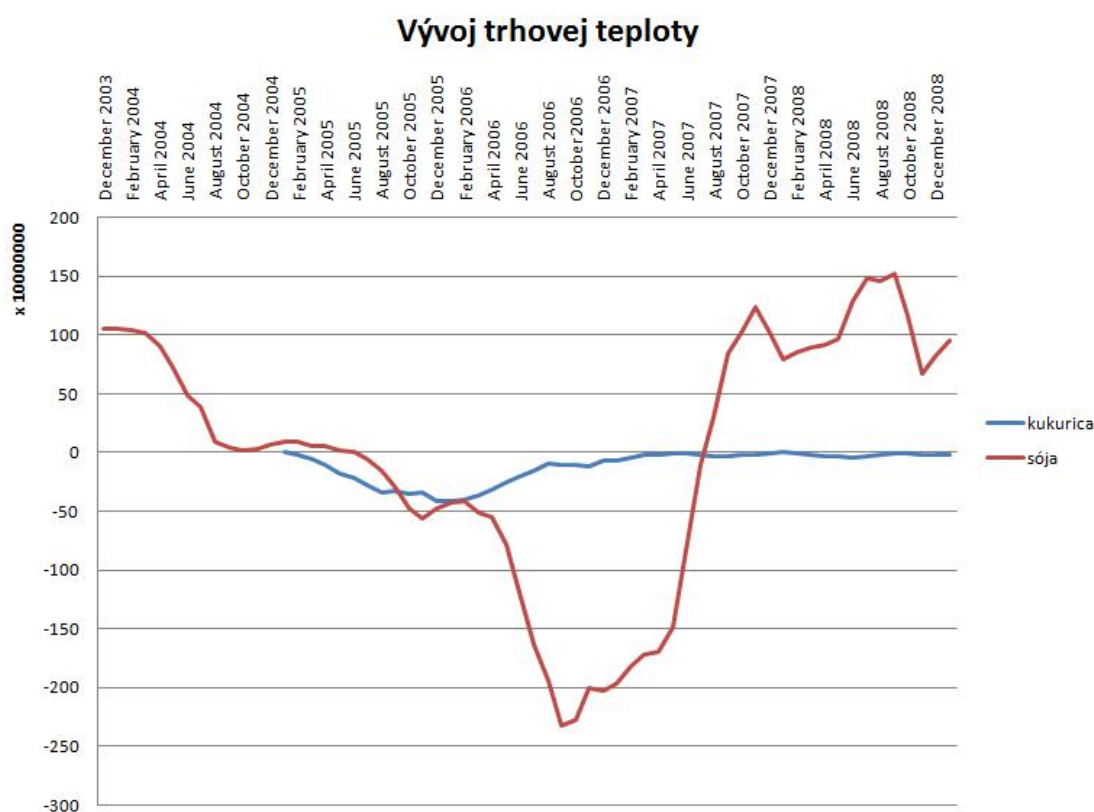
podobný a prudký nárast variancie (potravinárska pšenica, repka), situácia rozhodne stojí za povšimnutie.

Indický trh

Analogicky ako na európskom trhu, uvádzam získané výsledky vo forme grafu (obr. 6.9). A rovnako môžeme povedať, že veľkosť výchylky závisí jednak od citlivosti a jednak od veľkosti trhu.

Čo však je omnoho zaujímavejšie, zdá sa, že trh s kukuricou nezaznamenal v krízovom období takmer žiadnu teplotnú zmenu, a teda ho kríza zrejme úplne obišla. Pravdepodobným dôvodom je práve to, že v porovnaní s trhom so sójou je veľmi malý a kukurica sa tu nedá považovať za tradičnú základnú potravinu. Otázkou však zostáva, či možno rovnaký priebeh predpokladať aj pri iných komoditách s „malým“ obchodovaným objemom; a pokiaľ áno, tak aký objem ešte možno za malý považovať.

Pre porovnanie s európskym trhom sa zamerajme ešte na vývoj štatistickej vari-

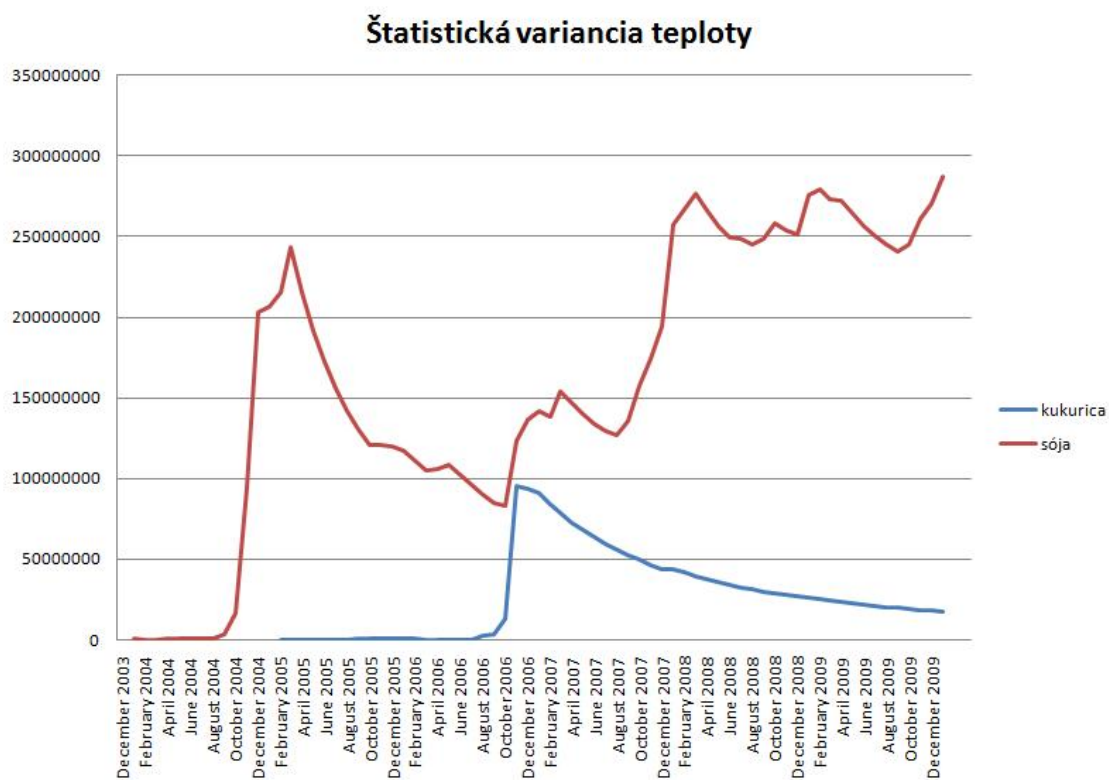


Obr. 6.9: Vývoj teploty na základe trhov rôznych komodít

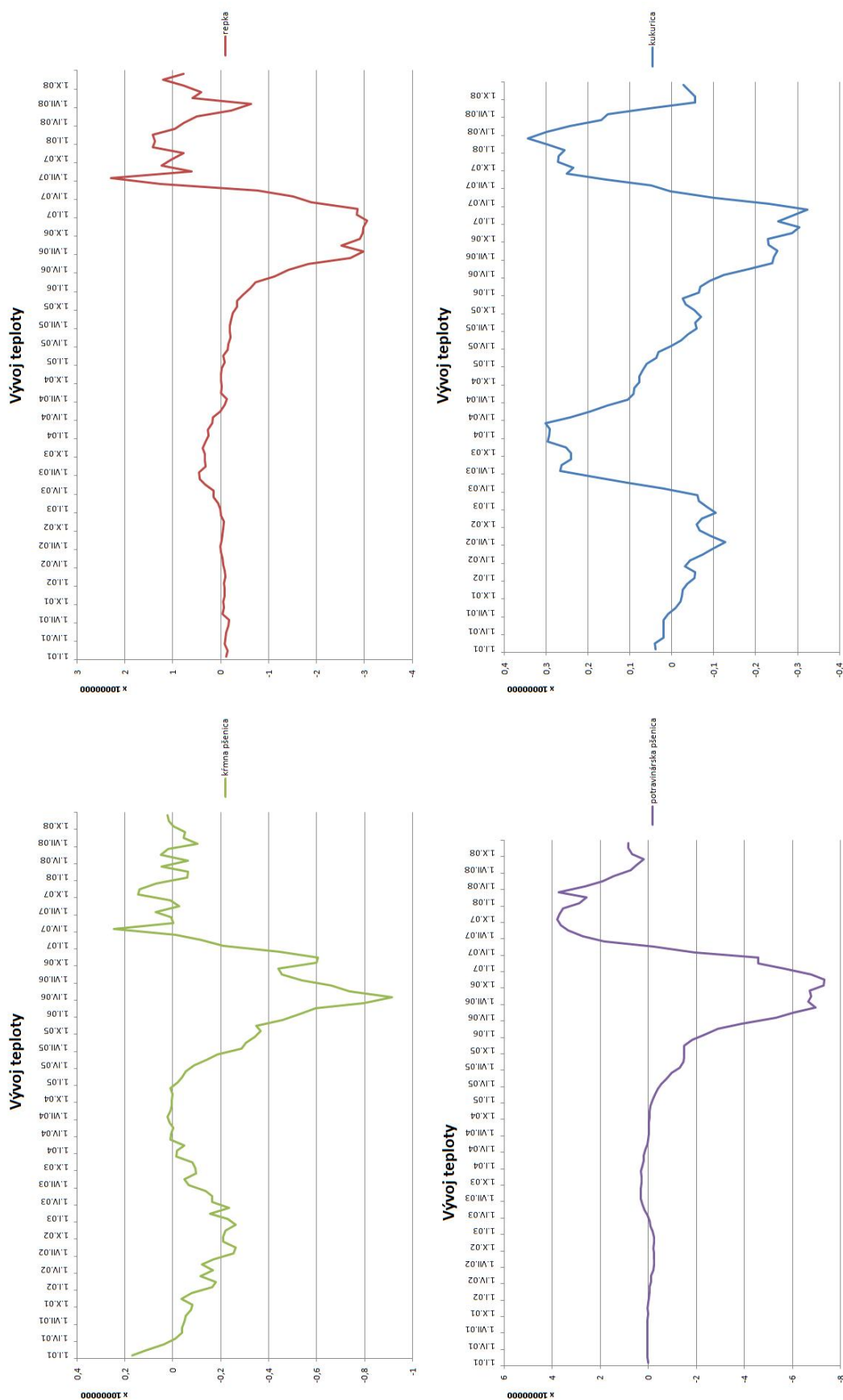
ancie hodnôt trhovej teploty. Dáta z indického trhu sú zobrazené na obrázku 6.10. Tu v rozpore s očakávaním pozorujeme v prípade kukurice priebeh, ktorý určitej (zrejme krátkodobej) krízovej situácii zodpovedá. Táto situácia sa na európskom trhu najviac približuje krmnej pšenici, aj keď počiatočné obdobie je úplne rozdielne. O krmnej pšenici však vieme, že na krízu reagovala. Sústreďovať sa na zmeny vo variancii teda zrejme nebude spoľahlivou cestou, pokiaľ ide o odhaľovanie krízových momentov na trhu. Na trhu so sójou sa tiež z variancie toho nedá veľa vypočítať o období krízy, vzhľadom na to, že trh zrejme v roku 2004 prekonal pomerne veľký šok, o ktorom bohužiaľ nemáme konkrétne informácie. Od konca roka 2006 už opäť dochádza k relatívne rýchlemu nárastu variancie (s rôznymi výkyvmi), rovnako ako to bolo v Európe v prípade repky a potravinárskej pšenice.

Porovnanie

Oba trhy, európsky i indický prešli potravinovou krízou. My sme sledovali, ako na tento fakt reagovala trhovú teplotu. Podľa tohto skúmania sme zistili, na krízu citlivejšie reagovala Európa, čo je pravdepodobne dané aj veľkosťou celého trhu (len objem obchodovanej sóje na indickom trhu je väčší ako celkový obchodovaný objem nami sledovaných komodít na trhu európskom). Zaujímavým faktom však je, že európsky trh, ktorý bol krízou isto poškodený menej než ten ázijský vykazuje väčšie zmeny v správaní. Tu sa ale opäť núka pomerne jednoduché vysvetlenie - kým z európskeho trhu máme údaje ako o celku, z ázijského trhu, ktorý je omnoho väčší máme údaje len zlomok. Skúmaním jedinej komoditnej burzy preto nedostaneme ucelený pohľad na to, aký mala vplyv, pretože ázijské trhy sú vzájomne prepojené. Navyše musíme brať do úvahy aj to, že komoditné burzy operujú len s malou časťou vyprodukovaných plodín, a teda nemôžu odrážať celkový stav situácie. Z pozorovaného vývoja jednoznačne možno povedať, že sledovaním prudkého poklesu teploty by bolo možné odhaliť príchod krízy v predstihu, predtým než sa naplno rozvinula (aj napriek oneskoreniu pri spracovávaní údajov). Ďalej sme zistili, že potravinovú krízu vo všetkých podstatných prípadoch sprevádza dvojica javov: najprv prudké zníženie teploty na prelome rokov 2005 a 2006 (ešte pred nástupom krízy) a potom prudké zvyšovanie teploty počas celého roka 2007. To nám dáva možnosť vysloviť hypotézu, že samotná kríza bola vyvolaná tým, že svetové trhy boli podchladené. K problémom došlo potom, čo sa začali zahrievať, pretože reakcia agentov zrejme bola prehnaná a došlo naopak k prehriatiu trhov. Kríza v rokoch 2007-2008 potom bola obdobím, keď trhovú teplotu dosiahla príliš vysokú hodnotu a s jej poklesom zase odoznela. V súčasnosti by, najmä v Európe, už teplota mala dosahovať približne rovnaké hodnoty ako v predkrízovom období, alebo aspoň v rovnakých rádoch (pretože nemôžeme očakávať návrat do úplne rovnakých pomerov).



Obr. 6.10: Štatistická variancia teploty na rôznych komoditných trhoch



Obr. 6.11: Prehľad vývoja teplôt na jednotlivých surovinových trhoch

6.2 Akciový trh

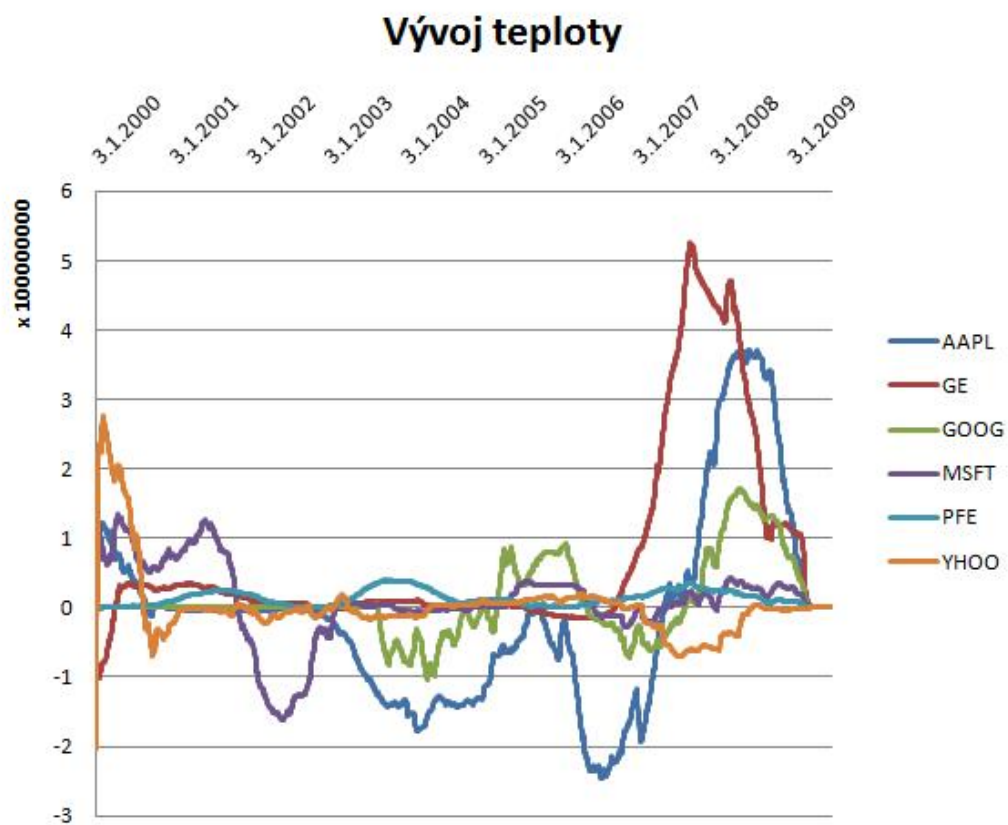
Rovnako ako komoditné trhy, krízy zažíva aj trh s akciami. Preto by bolo zaujímavé vidieť, čo sa dialo s teplotou na trhu práve v tomto období. Zo štúdia komoditných trhov už vieme, ako by sa kríza mala prejavíť v priebehu teploty, pozrime sa teda, či je možné odhaliť ju s využitím rovnakého mechanizmu. Z predchádzajúcej kapitoly o vzniku fluktuácií však vieme, že to tak byť nemusí, pretože fluktuácie na akciových trhoch môžu byť spôsobené aj špekulatívnymi dôvodmi. Aj napriek tomu by však teplota vypočítaná týmto spôsobom mohla zachytiť aspoň príchod poslednej veľkej krízy.

Na tento výskum použijeme dáta na dennej báze zo svetového akciového trhu. Konkrétne sa zameriame na 6 firiem, ktorých akcie patria na svetovom akciovom trhu medzi najobchodovanejšie [26] - Apple Inc. (AAPL), General Electric Co. (GE), Google (GOOG), Microsoft Corporation (MSFT), Pfizer Inc. (PFE), Yahoo! Inc. (YHOO). Podrobnejšie denné dáta sú na skúmanie fluktuácií vhodnejšie, ale aby sme dostali výsledky aspoň formálne podobné tým na komoditnom trhu, tieto dáta spracujeme aj do formy s mesačnou frekvenciou. Všetky akcie budeme sledovať od začiatku roka 2000 po marec 2010, s výnimkou akcie GOOG, vzhľadom na to, že sa s ňou začalo obchodovať až v auguste 2004.

Pre lepší prehľad o situácii na začiatok uvádzam graf vývoja cien sledovaných akcií (obr. 6.12) na dennej báze. Už z tohto grafu vidno, že reakcia trhu zrejme nebude tak ľahko pozorovateľná, pretože ceny 4 zo 6 sledovaných akcií zostávajú približne od roku 2006 na rovnakej úrovni. U zvyšných dvoch (GOOG, AAPL) sa zase rast ceny dá vysvetliť aktivitami firiem samotných. Kríza sa teda mohla ešte odraziť na zmenených obchodovaných množstvách akcií, na dennej báze je však priebeh tohto ukazovateľa veľmi neprehľadný a nemá zmysel ho uvádzať. Pre podrobnejšie dáta by však bolo možné použiť techniku sledovania obchodovacej aktivity [28]. Pre úplnosť teda ešte uvedme graf s vypočítanou ročnou teplotou na základe denných dát, aj keď nie je konzistentný s predchádzajúcimi výsledkami. Na prvý pohľad však môžeme povedať, že na grafe môžeme pozorovať výraznú zmenu zodpovedajúcu obdobiu ekonomickej krízy.



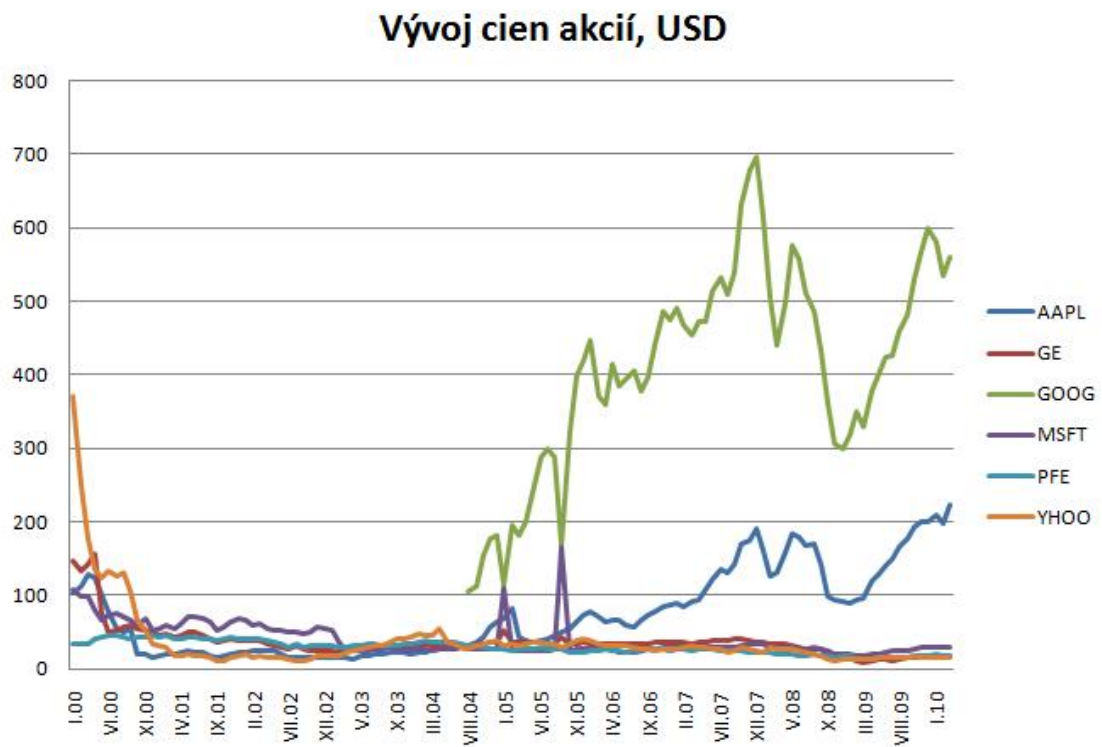
Obr. 6.12: Grafický vývoj cien vybraných akcií



Obr. 6.13: Vývoj teploty na akciovom trhu na základe denných dát

Pre uľahčenie interpretácie výsledkov teda upravme dáta na mesačnú frekvenciu - t.j., budeme pracovať so sumárnymi mesačnými obchodovanými množstvami akcií a priemernými cenami za tento časový úsek. (Kríza zaznamenaná v denných a v mesačných dátach totiž nemusí mať úplne rovnaký priebeh, a výsledky by teda neboli porovnateľné.) V prípade cenového priebehu dostávame takmer rovnaký graf ako pre denné dáta, časový rad je len „vyhladený“ (obr. 6.14). V prípade obchodovaných množstiev akcií je časový rad tiež vyhladený, rozhodne však nepozorujeme jasný trend, ako to bolo na komoditnom trhu. Skôr by sa dalo povedať, že hodnoty oscilujú okolo určitej hladiny, ktorá je viac-menej stála (okrem prípadu GE, kde v rokoch 2008-2009 došlo k veľkému výkyvu smerom nahor), obr. 6.15 .

Ak teraz prejdeme na skúmanie teploty samotnej, po prechode na mesačnú frekvenciu môžeme tiež očakávať akési vyhladenie časového radu. Priebeh ročnej teploty vypočítanej z upravených dát podľa nášho základného vzorca je zobrazený na obrázku 6.16. Pre lepší prehľad je vývoj teploty jednotlivu zaznamenaný aj na obrázku 6.18. Čo však je veľmi zaujímavé, grafy pre teplotu na základe denných a mesačných dát sa podstatne líšia. Napríklad pre teplotu na základe akcie GOOG je pre mesačné dáta prepad v rokoch 2002-2003 omnoho výraznejší a naopak teplotné fluktuácie vypočítané podľa akcie PFE sú na mesačnej báze takmer zanedbateľné. My však vieme, že teplota vypočítaná týmto spôsobom neopisuje realitu úplne dokonale, pretože opomína časť fluktuácií spôsobených špekulatívne a vyhládanie časového radu prechodom na mesačné dáta môže túto nedokonalosť buď zosilniť alebo zoslabiť. Čo nás však viac zaujíma je to, či je na základe štúdia vypočítaných teplôt možné odhaliť prítomnosť krízy. Na grafe na dennej báze je očividný veľký nárast teploty práve v krízovom období (akcie AAPL, GE, GOOG). Teplota vypočítaná na základe akcie YHOO naopak v tomto období poklesla. Rozhodne však nemožno povedať, že teplota na ekonomickú situáciu nezareagovala. Podstatný rozdiel oproti komoditným trhom je priebeh teploty v krízovom období: kým pri komoditách najprv teplota poklesla a potom vzrástla, na akciovom trhu pozorujeme (zatiaľ) iba zvýšenie teploty. Otázkou zostáva, či v tomto prípade bude nasledovať ešte ďalšie ochlade-



Obr. 6.14: Vývoj cien akcií na základe mesačných dát



Obr. 6.15: Obchodované množstvá akcií na základe mesačných dát

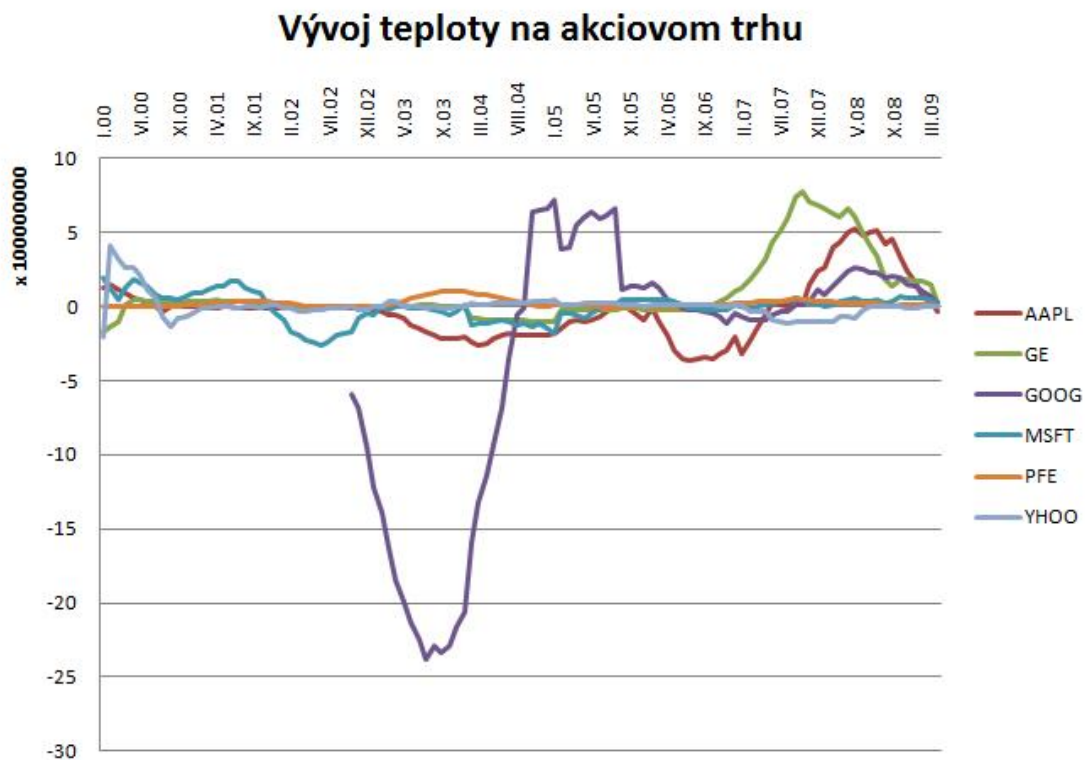
nie, alebo je turbulentné obdobie už za nami. Ďalej sa zamerajme na to, ako sa vyvíjala variancia vypočítanej teploty, keďže aj tento faktor sa zdá byť podľa komoditného trhu preukazný pri sledovaní krízy. Zaujímavejší je priebeh pri dátach na dennej báze, pretože umožňuje sledovať väčšinu dátových sérií. Graficky sú výsledky uvedené na obrázku 6.17, bolo však potrebné z neho vylúčiť dáta pre akciu YHOO, pretože na začiatku sledovaného obdobia sa vo variancii objavil obrovský skok (spôsobený pravdepodobne náhlym poklesom ceny akcie na začiatku roka 2000), ktorý by znemožnil sledovať ostatné dátové série. Okrem tohto „skoku“ je priebeh štatistickej variancie teploty YHOO veľmi podobný variancii teploty MSFT. Podľa variancie môžeme usúdiť, že obchodovanie s akciami PFE, MSFT a YHOO kríza nezasiahla, kým akcie GE a AAPL reagovali pomerne silno.

Príchod tejto krízy na základe vývoja teploty nebolo možné predpovedať, vzhľadom na to, že v tomto prípade chýba „predkrízový prepád“ teploty. Dôvodom je pravdepodobne to, že samotná kríza nebola spôsobená správaním trhu, ale finančnou krízou. Otázkou tak zostáva, nakoľko je model schopný zachytiť príchod menších kríz v predchádzajúcich obdobiach.

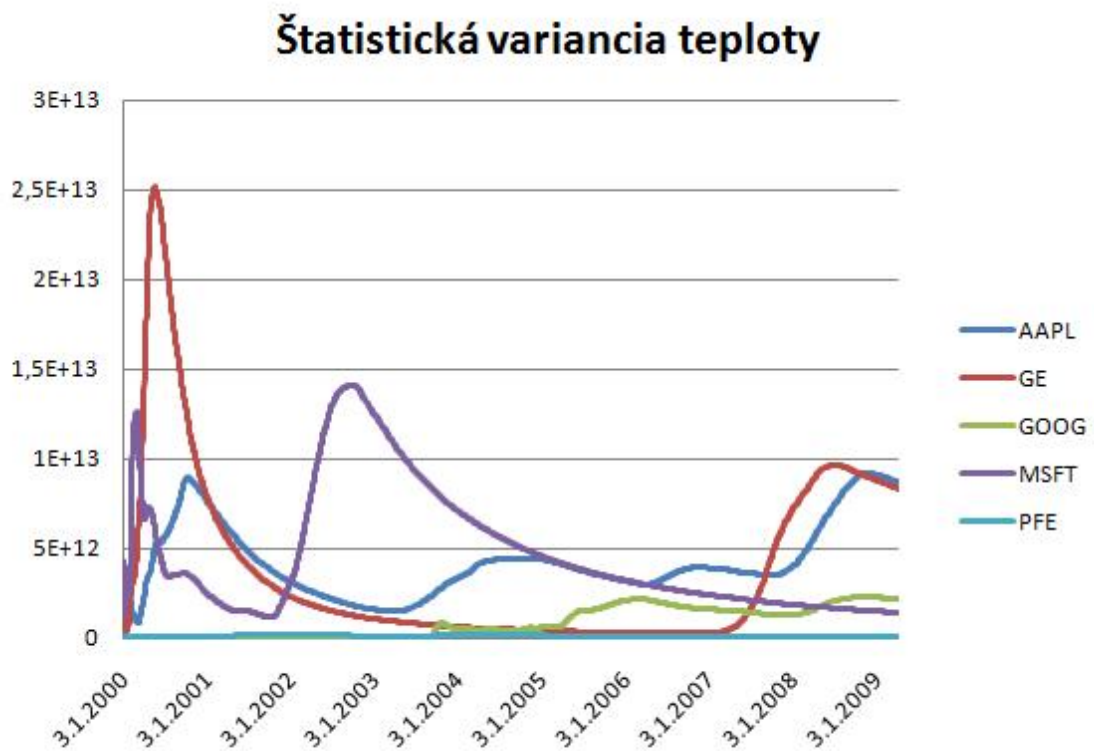
Záver o akciovom trhu

Rozhodne nemožno povedať, že by sme krízu výpočtom teploty bez zahrnutia špekulatívnych fluktuácií nedokázali zaznamenať. Určite je dané aj výberom akcií, ktoré sme sledovali, pretože je pravdepodobné, že pre akcie ktoré sú na burze obchodované len krátko by bol tento nedostatok zásadný. Prítomnosť veľkých fluktuácií sme mohli zaznamenať aj po vstupe akcie GOOG na trh. Nevieme však povedať, nakoľko sa nami vypočítané teploty približujú naozajstným trhovým teplotám. Pravdepodobné je, že čím je akcia na trhu dlhšie a čím stabilnejšiu má pozíciu, tým menší vplyv vynechanie špekulatívnych fluktuácií má na konečný výsledok.

Kritériá však môžu byť rôzne, prípadne sa môžu líšiť na základe oblasti podnikania firmy emitujúcej akciu. Akcie s ktorými sme pracovali patria do akciového indexu S&P500, teda spĺňajú aspoň základné kritérium [27]. Možno by bolo zaujímavé do výpočtov zahrnúť aj podobné indexy, v priebehu roka sa v nich však mení zastúpenie



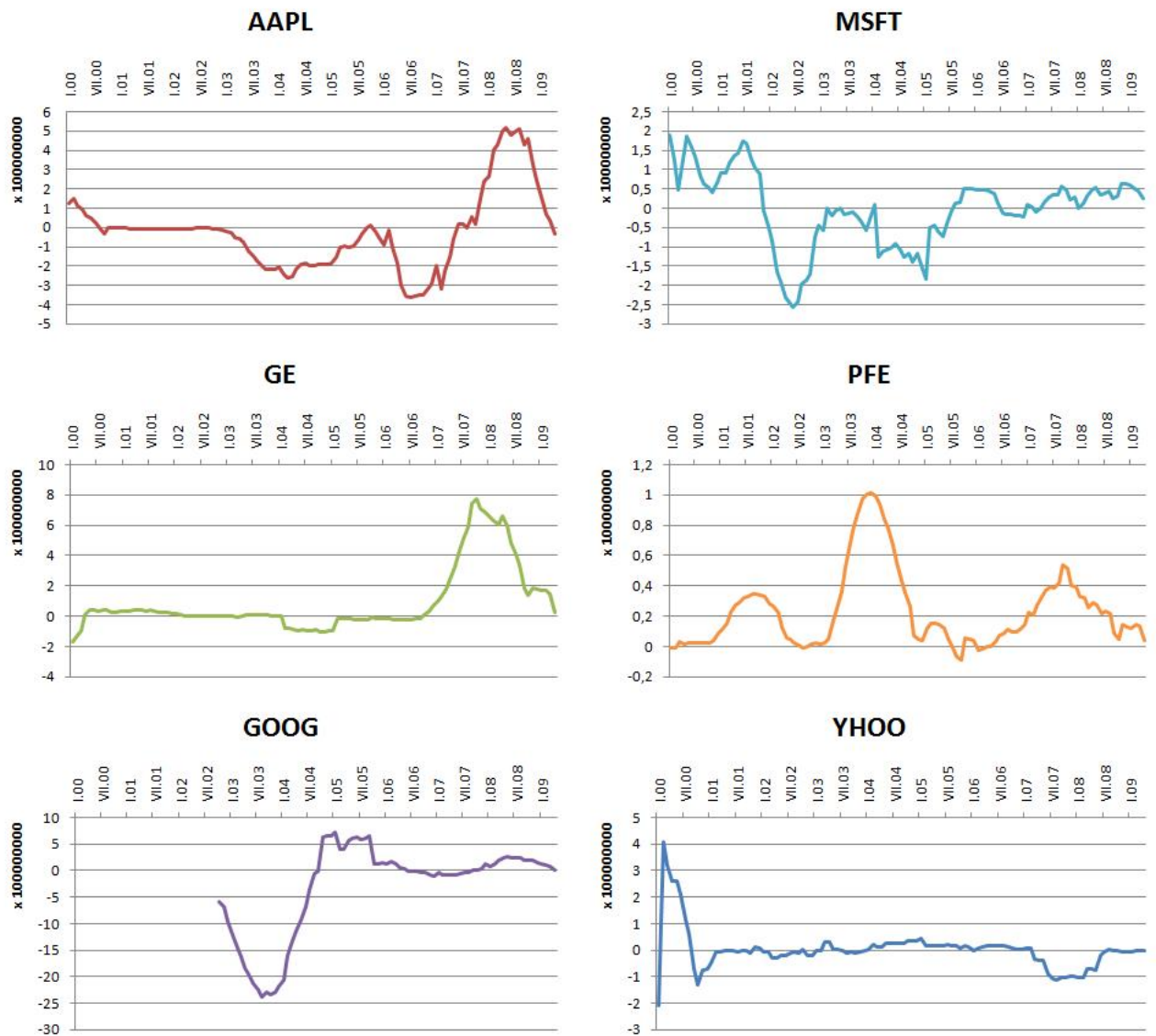
Obr. 6.16: Vývoj teploty na akciovom trhu na základe dát s mesačnou frekvenciou



Obr. 6.17: Štatistická variancia teploty vypočítanej na základe jednotlivých akcií

jednotlivých akcií a teda interpretácia by nebola úplne jasná, získali by sme však tak väčší prehľad a spoločné reakcie by dokázali viac vyniknúť.

Nakoniec ešte treba dodať, že na akciovom trhu vlastne vôbec nie je jasné, akú teplotu vlastne počítame. Akciové trh totiž rozhodne nemôžeme považovať za izolované z národného ani z geografického hľadiska. S vybranými akciami môže obchodovať takmer každý, takže strácame prehľad o tom, s čím vlastne možno trhovú teplotu porovnávať.



Obr. 6.18: Vývoj teploty pre jednotlivé akcie

Kapitola 7

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo zistiť, či sa metódami ekonofyziky dajú na reálnych trhoch získať relevantné informácie a či má zavádzanie termodynamickej teórie vôbec zmysel. Práca sa najskôr venuje tvorbe teórie, postavenej na základoch z termodynamiky a štatistickej fyziky, a tú ďalej v praktickej časti využijeme na sledovanie fluktuácií trhovej teploty na rôznych trhoch - komoditnom a akciovom. Termodynamický prístup k trhu však poskytuje mnoho rôznych aplikácií, zisťovanie trhovej teploty je len jednou z nich.

Práve výpočtami na dátach z komoditných trhov sme potvrdili hypotézu, že sledovaním trhovej teploty dokážeme odhaliť príchod potravinovej krízy, v prípade, že budememe sledovať vhodne vybranú komoditu. Získané výsledky nám umožňujú porovnávať reakcie na trhoch jednotlivých komodít, v závislosti od ich citlivosti. Množstvá komodít obchodované na burze sú bohužiaľ len zlomkom skutočnej spotreby, takže nám neposkytujú úplnú informáciu o teplote, ktorú by sme mohli porovnávať s HDP. Časť práce pojednávajúca o komoditných trhoch zároveň aj porovnáva dve rozličné komoditné burzy: indickú a centrálnu európsku. Získané výsledky poukazujú na to, že hoci každá oblasť na trhový vývoj reaguje svojsky, reakcia na krízu i napriek tomu má obdobný priebeh.

Na akciovom trhu sme nepredpokladali, že nám výpočet trhovej teploty bez zahrnutia fluktuácií spôsobených špekuláciami poskytne nejaké výsledky. Výberom akcií, ktoré sú súčasťou akciového trhu už pomerne dlho a navyše patria k popredným

spoločnostiam v rámci ekonomiky USA sa nám podarilo obmedziť priestor na tieto špekulatívne fluktuácie. Preto sme aj na tomto trhu dokázali sledovať špecifický vývoj teploty počas ekonomickej krízy.

Vzhľadom na prezentované výsledky možno povedať, že používanie termodynamickkej teórie má potenciál nájsť si v ekonómii svoje miesto. Hlbším štúdiom jednotlivých trhov by bolo možné pre jednotlivé suroviny alebo akcie nájsť kritické hodnoty pre vypočítané teploty, ktorých prekročenie (zdola alebo zhora) by indikovalo určitý problém na trhu. Hľadanie kritickej teploty je proces, ktorý je náročný na objem a kvalitu historických dát, takže nebolo možné sa ním zaoberať v tejto práci. Ďalším podnetom na skúmanie do budúcnosti môže byť samotný vplyv krízy na teplotu. Na použitých dátach sme pozorovali dva rôzne typy reakcie: podchladenie trhu nasledované prehriatím a len samotné prehriatie nasledované návratom k pôvodným hodnotám. Otázkou tak zostáva, či sú možné aj iné priebehy, a ako sa potom rozličné krízy navzájom líšia. Rovnako otvorenou otázkou zostáva, či je kríza schopná dlhodobo narušiť trhovú rovnováhu, alebo, ako to bolo v nami pozorovaných prípadoch, sa teplota vracia približne k rovnakým hodnotám.

Podľa môjho názoru má termodynamická teória na poli ekonómie nádej na úspech. Na to aby mohla konkurovať tradičnej ekonomickej teórii je však nutné sformulovať jednoduché ale účinné modely, ktoré by lepšie odrážali realitu na trhu. Žiadny z uvedených modelov napríklad nezahŕňa možnosť vytvárania úspor, ktoré v realite nemôžeme opomenúť. Rovnako aj zapracovanie fluktuácií spôsobených špekuláciami by priblížilo model pre teplotu o kúsok bližšie k realite. Tieto výhrady však ponechávam len ako výzvu a inšpiráciu pre ďalšie práce z oblasti ekonofyziky.

Literatúra

- [1] Tinajová, A., 2008. *Aplikácie fyzikálnych metód v ekonómii a financiách*. Bakalárska práca, FMFI UK.
- [2] Martiška, M., 2005. *Štúdium niektorých ekonomických ukazovateľov metódami ekonofyziky*. Diplomová práca, FMFI UK.
- [3] Kolektív autorov, 1970. *Malá encyklopedie fyziky*. Obzor Bratislava.
- [4] Kvasnica, J., 1983. *Statistická fyzika*. Academia Praha.
- [5] Čulík, F.; Noga, M., 1982. *Úvod do štatistickej fyziky a termodynamiky*. Alfa Bratislava.
- [6] Atkins, P.W., 1999. *Fyzikálna chémia (diel 2a, 2b)*. Oxford University Press/STU v Bratislave.
- [7] Ulický, L. a kolektív, 1983. *Chemický náučný slovník(1.zväzok)*. Alfa Bratislava.
- [8] Ulický, L.; Pelikán, P.; Staško, A.; Vavra, J., 1977. *Prehľad fyzikálnej chémie a chemickej fyziky*. Alfa Bratislava.
- [9] Chen, J., 2005. *The physical foundation of economics*. World Scientific Publishing, Singapore.
- [10] Sergeev, V., 2008. *The thermodynamic approach to market*. arXiv:0803.3432v1 [physics.soc-ph].
- [11] Bennewitz, J., 2006. *Application of the Main Laws of Thermodynamics on the Economy*. <http://ssrn.com/abstract=969980>.

- [12] Mohanty, P.K., 2006. *Ideal-Gas Like Markets: An Exact Solution*. arXiv:physics/0603141 v1.
- [13] Kleinert, H.; Chen, X.J., 2006. *Boltzmann Distribution and Temperature of Stock Markets*. arXiv:physics/0609209 v1.
- [14] Samohýl, I., 1982. *Racionální termodynamika chemicky reagujících směsí*. Academia Praha.
- [15] Kluvánek, I.; Mišík, L.; Švec, M., 1970. *Matematika I, II*. Alfa Bratislava.
- [16] Axelrod, R., 1984. *The evolution of cooperation*. Basic Books New York.
- [17] Chakrabortia, A.; Tokea, I.M.; Patriarcab, M.; Abergel, F., 2009. *Econophysics: Empirical facts and agent-based models*. arXiv:0909.1974v1 [q-fin.GN].
- [18] Akerloff, G.A., 1970. *The Market for Lemons: Qualitative Uncertainty and the Market Mechanism*. Quarterly J. Econom., 84, 488-500.
- [19] Arrow, K.J.; Debreu, G., 1954. *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy*. Econometrica, 22, 265-290.
- [20] Rektorys, K. a spolupracovníci, 1973. *Přehled užití matematiky*. SNTL Praha.
- [21] Wang, Y.; Wu, J.; Di, Z., 2006. *Physics of Econophysics*. arXiv:cond-mat/0401025v1 [cond-mat.soft].
- [22] Hála, E., 1975. *Úvod do chemické termodynamiky*. Academia Praha.
- [23] Dvořák, I.; Maršík, F.; Andrej, L., 1982. *Biotermodynamika*. Academia Praha.
- [24] Frandsen, S.E., Jensen, H.G., Yu, W., Walter-Jørgensen, A., 2003. *Reform of EU sugar policy: price cuts versus quota reductions*. Oxford University Press and the Foundation for the European Review of Agricultural Economics.
- [25] Pan, R.K.; Sinha, S., 2006. *Self-organization of price fluctuation distribution in evolving markets* arXiv:physics/0606213 v1.

[26] <http://finance.yahoo.com/actives?e=us>.

[27] <http://www.standardandpoors.com/>.

[28] Eisler, Z.; Kertész, J., 2006. *Liquidity and the multiscaling properties of the volume traded on the stock market*. arXiv:physics/0606161 v1.