Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Kvantové financie

Miroslava Englmanová

Bratislava 2010

Kvantové financie

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Miroslava Englmanová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

9.1.9. Aplikovaná matematika
Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce
Doc. RNDr. Július Vanko PhD.

BRATISLAVA 2010

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto prácu vykonala samostatne na základe vedomostí získaných štúdiom a s použitím uvedenej literatúry.

Poďakovanie

Ďakujem vedúcemu diplomovej práce Doc. RNDr. Júliusovi Vankovi, PhD. za odborné vedenie, cenné rady a trpezlivosť pri tvorbe tejto diplomovej práce.

Abstrakt

ENGLMANOVÁ, Miroslava: Kvantové financie. Diplomová práca. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Školiteľ: Doc. RNDr. Július Vanko PhD. Bratislava. 2010. 38 s.

Ekonofyzika je novým prístupom k ekonómií a financiám. Je založená predovšetkým na pozorovaní a porovnávaní podobných úkazov. Poskytuje nový náhľad na problematiku, nové postupy a algoritmy.
Diplomová práca sa zaoberá prístupom ekonofyziky k financiám. Predkladá úvod do širokej aplikácie štatistickej fyziky a termodynamiky na financie. Následne je bližšie spracovaná aplikácia kvantovej teórie poľa na forwardové úrokové miery. Kvantová teória poľa skúma pohyb a interakcie častíc. Dlhodobé úrokové miery predstavujú systém častíc, ktorý podstupuje kvantovú evolúciu.
Platnosť prístupu je testovaná na reálnych dátach pomocou korelácie, ktorá zodpovedá aktuálnemu vývoju reálnych dát.

Kľúčové slová:
Ekonofyzika. Kvantové financie. Kvantová mechanika. Kvantová teória poľa. Forwardové úrokové miery.

Abstract

ENGLMANOVÁ, Miroslava: Quantum Finance. Master Thesis. Comenius University. Faculty of mathematics, physics and informatics; Department of Applied Mathematics and Statistics. Supervisor: Doc. RNDr. Július Vanko PhD. Bratislava. 2010. 38 p.

Econophysics is new approach to economy and finance. Econophysics is based mainly on observation and comparison of similar phenomenon. It provides new insight and gives new methods and algorithms.

The topic of this master's thesis is the econophysics approach to finance. It starts with an introduction to a wide application of statistical physics and thermodynamics on finance. Then it deals more closely with the application of quantum field theory on forward rate. Quantum field theory explores movement and interactions of particles. In econophysics long-term interests rates represent a system of particles that undergoes quantum evolution.

The validity of the approach is tested with real data by correlation, which corresponds to actual development of the observed data.

Key words:

Econophysics. Quantum finance. Quantum mechanism. Quantum field theory. Forward rates.

Obsah

Zoznam symbolov

R	výnos investície
V	hodnota investície
$E[x]$	očakávaná (stredná) hodnota
σ	štandardná odchýlka
t	premenná času
x	premenná budúceho času, maturita;
$r(t)$	okamžitá úroková miera
$f(t,x)$	forwardová úroková miera v čase t pre maturitu x
$P(t,T)$	cena dlhopisu v čase t s maturitou T
$E[X_{n+1}\mid x_1,\ldots,x_n]$	podmienená očakávaná (stredná) hodnota
$\alpha(t,x)$	drift forwardovej úrokovej miery
$\sigma(t,x)$	funkcia volatility forwardových úrokových mier
$S[\phi]$	účinok fyzikálneho systému
$L[\phi]$	Lagranžián fyzikálneho systému
H	Hamiltonián systému
Z	pravdepodobnostná amplitúda, funkcia rozdelenia
μ	parameter rigidity (pevnosti) systému
$A(t,x)$	rýchlostné pole forwardových úrokových mier
$\int Df$	funkcionálny integrál cez všetky forwardové úrokové miery
θ	súradnica budúceho času, $x-t$
$D(\theta,\theta')$	propagátor forwardových úrokových mier
$<f(t,x)>$	očakávaná (stredná) hodnota forwardových úrokových mier
$<\delta f(t,\theta)>$	stredná hodnota zmeny forwardových úrokových mier
$<\delta f(t,\theta)\delta f(t,\theta')>_c$	kovariancia forwardových úrokových mier
$C(\theta,\theta')$	korelácia forwardových úrokových mier

Zoznam obrázkov

Úvod

V posledných dvoch desaťročiach sa formuje nová disciplína vo fyzike, nazývaná Ekonofyzika. Ako už z názvu plynie, ekonofyzika je prelínanie sa fyziky a ekonómie. Presnejšie povedané, je to aplikácia fyzikálnych postupov a teórie na ekonomickú a finančnú problematiku.

Avšak prelínanie fyziky a ekonómie bolo známe už dávno predtým. Ako najznámejšie príklady sú León Walras a jeho teória rovnováhy alebo Vilfredo Pareto a jeho zákon opisujúci distribúciu príjmu a bohatstva obyvateľstva.

Jedným z dôvodov vzniku ekonofyziky je veľké množstvo dát, ktoré finančné trhy, ale aj iné ekonomické sféry produkujú. Fyzici prišli s nápadom využiť tieto dáta na testovanie ich pozorovaní a hypotéz. V ekonómii hľadajú podobnosti k javom vyskytujúcim sa vo fyzike, aplikujú známu fyzikálnu teóriu a následne testujú svoje predpoklady na reálnych dátach.

Ekonofyzika ponúka nový náhľad na problematiku, nové postupy a algoritmy.

Cieľom tejto práce je predstaviť ekonofyziku predovšetkým z finančného pohľadu a následne ukázať a overiť jednu z jej aplikácií. Danou aplikáciou je téma forwardových úrokových mier z pohľadu kvantovej teórie poľa. Aplikácia sa snaží modelovať dlhodobú úrokovú mieru ako silne korelovaný systém, ktorý prechádza kvantovou evolúciou.

Prvá kapitola je venovaná ekonofyzike, jej histórii, dôvodom vzniku, ako aj vybraným aplikáciam fyziky na finančnú problematiku. Na záver kapitoly je uvedená aj kritika ekonofyziky.

V druhej kapitole sú zhrnutá finančná teória, potrebná v nasledujúcich kapitolách.

Tretia kapitola sa zaoberá kvantovou teóriou a jej aplikáciou na forwardové úrokové miery. Uvedený je aj model, resp. rámec, z ktorého aplikácia vychádza. Týmto rámcom je HJM rámec.

Posledná kapitola sa zaoberá skúmaním reálnych dát. Pomocou korelácie reálnych dát testuje platnosť modelu forwardových úrokových mier. Uvedené sú dva modely korelácie.

1 Ekonofyzika

V tejto kapitole je uvedený prehľad toho, čomu sa hovorí Ekonofyzika. V prvej časti je história ekonofyziky, vznik ekonofyziky a prelínanie sa fyziky a ekonómie. Ďalej je krátky prehľad dôvodov vzniku ekonofyziky, hlavné oblasti ekonómie, o ktoré sa fyzici zaujímajú a niečo z kritiky.

1.1 História ekonofyziky

Vznik slova „ekonofyzika“ sa pripisuje fyzikom H. E. Stanley a R. N. Mantegna. Nový termín bol prvý krát verejne použitý na konferencii štatistickej fyziky v Kalkate aj jej následných publikáciách v roku 1995. Vyššie uvedení fyzici definujú ekonofyziku ako „neologizmus označujúci aktivity fyzikov, ktorí pracujú na ekonomických problémoch testovaním rôznych nových prístupov odvodených z fyzikálnych vied“ [1]. Cieľom nového prístupu je pokúsiť sa lepšie popísať a predpovedať rôzne ekonomické a finančné problémy.

Aj keď ekonofyzika vznikla až v 90-tych rokoch 20. storočia, prelínanie sa ekonómie a fyziky bolo známe už dlho predtým. Dajú sa spomenúť napríklad León Walras, Vilfredo Pareto, ktorí sa zaslúžili o to, že sa ekonómia stala vedou z kategórie „hard sciences“, t.j. podľa vzoru z fyziky boli do ekonomickej teórie zavedené matematické vzťahy.

Walras bol zakladateľom všeobecnej ekonomickej teórie ekvilibria na základe konceptu statickej rovnováhy. Jeho kniha Elements of pure economic bola prvá matematická analýza ekonomického ekvilibria.

Pareto študoval distribučné pravidlá, mocninové pravdepodobnostné rozdelenia, zaviedol paretovskú optimalitu a paretovskú distribúciu [2]. Paretov zákon popisuje distribúciu príjmu a bohatstva v populácii. Ale aj iní fyzici sa zaoberali ekonomickou problematikou viac ako storočie pred vznikom ekonofyziky, dajú sa spomenúť S. Newcomb, H. Hotelling, M. Allais [3] [4].

V 80-tych rokoch 20. storočia sa zvýšila aktivita vplyvom rôznych štatisticko-fyzikálnych zoskupení. Ekonómia sa stala subdisciplínou fyziky. Ekonofyzické publikácie vychádzajú predovšetkým vo časopisoch zameraných na fyziku a štatistickú mechaniku ako sú Physica A, The European Physical Journal B alebo International Journal of Modern Physics C.

Za jednu z prvých oficiálnych publikácií ekonofyziky sa považuje „Levy walks and enhanced diffusion in Milan Stock-Exchange“ od R. Mantegnu, ktorá vyšla v časopise Physica A v roku 1991.

Vyformovalo sa viacero skupín, ktoré podporovali ekonofyzické hnutie. Dajú sa spomenúť:

- Mantegna, Stanley a kol. v Bostone
- Sornette a kol. v Nice
- Farmer a kol. v Santa Fe Inštitúte
- Marsili, Zhang a kol. – Fribourgská Univerzita vo Švajčiarsku
- Solomon a kol. na Jeruzalemskej Univerzite
- Olson group v Zürichu

1.2 Prečo vznikla ekonofyzika

Jedným z dôvodov prelínania sa ekonómie a fyziky je veľký objem dát, o ktoré nie je záujem. Na finančných trhoch sú denne zaznamenávané obrovské objemy dát, ktoré sú ľahko prístupné, no v ekonomickej sfére nie zaujímavé, resp. nie dostatočne využité. Fyzika zdôrazňuje úlohu pozorovania. Väčšina Nobelových cien bola vo fyzike za experimentálne výskumy, žiadna z Nobelových cien vo fyzike nebola za teóriu, ktorá by nemohla byť alebo nebola podložená experimentálnym podkladom. Zatiaľčo v ekonómii Nobelové ceny získali aj práce, ktoré boli čisto teoretické, bez akéhokoľvek štatistického testu. [4]

Ďalším motívom ekonofyziky je komparatívna analýza. To znamená, snahu vyhľadávať úkazy, ktoré sú porovnateľné s už známymi úkazmi vo fyzike a aplikovať na ne známu fyzikálnu teóriu. Zoskupovaním a porovnávaním podobných javov je následne možné určiť, ktoré faktory sú v danom úkaze významné, a ktoré sú zanedbateľné. [4]

1.3 Hlavné oblasti a ciele ekonofyziky

Základnými nástrojmi ekonofyziky sú predovšetkým pravdepodobnostné a štatistické modely odvodené v štatistickej fyzike. Medzi najpoužívanejšie modely patria modely zo štatistickej mechaniky, kvantovej mechaniky, modely chaosu, modely dynamiky kvapalín a rôzne iné.

Ekonofyzici sa zaujímajú o všetky oblasti ekonómie a financií. No najviac publikované a skúmané sú predovšetkým nasledujúce štyri odvetvia:

- Finančné trhy
  - kvantitatívne financie, rôzne modely cenových fluktuácií na finančných trhoch ([5] [6] [7])
- Rozdelenie príjmu a bohatstva v rôznych spoločnostiach
  - štúdie pravdepodobnostného rozdelenia príjmu a bohatstva obyvateľstva ([8] [9][10])
- Priemyselná ekonómia
  - miera ekonomického rastu, ekonomické šoky, rozdelenie veľkosti firiem a pod. ([11] [12])
- Sieťová analýza
  - štúdia siete obchodu ([13] [14])

1.4 Aplikácie štatistickej fyziky a termodynamiky do financií

Rozsah aplikácie štatistickej fyziky a termodynamiky je pomerne veľký. Uvádzame len niektoré príklady aplikácií.

Entropia

Entropia je miera usporiadania systému. Je dôležitou časťou druhého zákona termodynamiky. Na finančné trhy môže byť aplikovaná ako miera ovplyvnenia.

Prechodná entropia vyjadruje mieru ovplyvnenia jedného trhu iným, prípadne jedného akčného indexu iným. Prechodná entropia je explicitne nesymetrická, teda môže nám dať informáciu, ktorým smerom dané objekty, na seba vzájomne pôsobia. [15] [16]

Kalibračná symetria (Gauge theory)

Všeobecná teória relativity je založená na predpoklade, že výber umiestnenia nie je podstatný pre určenie zákona pohybu telies. Teórie silných a slabých a elektromagnetických interakcií sú skúmané na základne symetrie výberu fyzikálne ekvivalentných objektov. Takéto symetrie sa nazývajú kalibračné symetrie.

Teória finančných trhov môže byť tiež opísaná pomocou takejto symetrie ako kalibračná teória arbitráže, keďže úlohu sily pôsobiacej na poli v tejto teórii si môžeme predstaviť ako prebytočné výnosy arbitrážnych operácií. [17]

Pilot wave theory

Pilot wave theory je jednou z mnohých interpretácií kvantovej mechaniky. Pozícia a hybnosť častice sú neznámymi premennými. Tieto premenné sú definované v každom čase, no pre pozorovateľa sú súčasne nemerateľné. Teda sú tam nejasné stavy častice, ktoré zodpovedajú Heisenbergovmu princípu neurčitosti. Súbor častíc má priradenú vlnovú funkciu, ktorá sa vyvíja podľa Schrödingerovej rovnice. Vlnová funkcia určuje pravdepodobnosť nájdenia častice v danej oblasti.

Informácie o finančnom trhu sú v tomto prístupe popísané ako informačné pole. Toto pole vyvíja deterministicky sa perturbujúcu dynamiku cien akcií a opcií. Dynamika je daná Schrödingerovou rovnicou na priestore cien akcií. [18] [19] [20]

Korelácia

Množstvo aplikácií sa zaoberá korelačnou analýzou dát, počítaním korelačných matíc a aplikáciou teórie náhodných matíc. [1] [21]

Kvantová mechanika

Kvantová mechanika vo všeobecnosti popisuje správanie sa častice v čase a priestore. Sleduje pohyb častice a snaží sa popísať jej náhodný vývoj.

Vo financiách si môžeme ako časticu predstaviť napríklad vývoj ceny akcie. Cena môže vzrásť alebo klesnúť. Jej vývoj je náhodný a je ho možné popísať kvantovou teóriou častice v jednorozmernom priestore a čase. S týmto prístupom sa môžeme stretnúť napríklad v literatúre [22].

Rozšírením kvantovej mechaniky je kvantová teória poľa. Kvantová teória sa zaoberá správaním systému častíc, ktoré podstupujú kvantový vývoj na nejakom kvantovom poli. Narozdiel od kvantovej mechaniky skúma kvantová teória poľa okrem polohy a hybnosti daného systému aj vzájomné interakcie medzi časticami.

Vo financiách môže byť systémom, postupujúcim kvantovú evolúciu, napríklad výnosová krivka. [22]

1.5 Pre a proti ekonofyzike

Ozývajú sa hlasy, ktoré vidia v ekonofyzike novú nádej na nájdenie vysvetlenia a riešenia súčasnej ekonomickej krízy, nájdenie nových prístupov, ktoré budú schopné lepšej predikcie a vrhnú viac svetla na problémy, na ktoré je súčasná ekonomická a finančná teória nepostačujúca.

Ešte extrémnejšie sú odporúčania, že z ekonofyziky by sa malo prejsť až na ekonoscience, v ktorej budú uplatnené postupy nie len z fyziky, ale aj z iných oblastí vedy. Teda, len úspešný vývoj z ekonofyziky na ekonovedu, doložený stabilnými ohraničeniami založenými na dôkladnej analýze empirických dát, dáva ekonómii šancu stať sa prediktívnou teóriou s vysokou dôveryhodnosťou [23].

Na druhej strane niektorí sú ekonomici, ktorí nesúhlasia s ekonofyzikou. Veľa ekonómov z hlavného prúdu nebola zaujatá myšlienkou ekonofyziky [24]. Ďalší ekonómovia, jej vyčítajú najmä:

- Nedostatok pochopenia prác, ktoré boli vypracované ekonómami
- Nedostatočne rigorózne a robustné štatistické metodológie
- Vieru, že univerzálne empirické pravidlá sa nachádzajú vo viacerých oblastiach ekonomickej aktivity
- Teoretické modely, ktoré sa používajú na vysvetlenie empirických úkazov

Podrobnejšou kritikou sa zaoberá [25].

2 Úvod do kvantitatívnych financií

V tejto kapitole zhrnieme základné poznatky z financií a finančnej matematiky. Vychádzať budeme predovšetkým z literatúry [26] [27] [28].

2.1 Finančný trh

Finančný trh je inštitúcia, ktorá sprostredkuje finančné obchody, ako je nákup a predaj finančných aktív, ich derivátov, valút a rôznych komodít. Zoskupuje predajcov a kupujúcich na jednom mieste. Finančný trh umožňuje predovšetkým:

- zvyšovanie kapitálu – kapitálový trh
- premiestňovať, resp. znižovať riziko – trh finančných derivátov
- medzinárodný obchod – menový trh

Finančný trh sa delí na kapitálový trh, trh komodít, peňažný trh, trh finančných derivátov a trh zahraničnej meny.

Na kapitálovom trhu sa obchoduje predovšetkým s akciami a dlhopismi. Ako už bolo spomenuté, slúži na zvýšenie kapitálu. Patria sem obchody, v ktorých sa peniaze poskytujú na časové obdobie viac ako rok.

Peňažný trh slúži na krátkodobé požičiavanie peňazí. Pozostáva z finančných inštitúcií, ktoré si medzi sebou poskytujú pôžičky splatné väčšinou do jedného roka s úrokovou mierou vyhlasovanou príslušnou centrálnou bankou. Na Slovensku a v krajinách Európskej Menovej Únie sa táto úroková miera nazýva EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate), vo Veľkej Británii je to LIBOR, a podobne je to aj v iných krajinách.

Na trhu finančných derivátov sa obchoduje s derivátmi aktív. Pričom aktíva sú predovšetkým akcie a dlhopisy, deriváty sú opcie, futurity a swapy. Deriváty slúžia na zníženie (rozloženie) rizika portfólia tvoreného predovšetkým akciami a dlhopismi.

Trh zahraničnej meny, ako už z názvu trhu vyplýva, slúži na obchodovanie s valutami.

2.2 Riziko a výnos

Každý investor na finančnom trhu zvažuje, či sa mu investícia oplatí. To znamená, že porovnáva potenciálny výnos, ktorý môže získať, s rizikom, s ktorým môže daný zisk dosiahnuť. Každý sa snaží minimalizovať riziko a maximalizovať výnos.

Výnos investície je definovaný nasledovne:

$$R = \frac{V_1 - V_0}{V_0}, \tag{2.1}$$

kde V_0 je hodnota investície na začiatku a V_1 je hodnota investície na konci časovej periódy. Problémom vo vyššie uvedenej rovnici (2.1) je, že potenciálny výnos potrebujeme počítať ešte pred investíciou, keď hodnotu investície na konci periódy V_1 nepoznáme. Hodnota investície na konci periódy V_1 je náhodná. Z tohto dôvodu počítame očakávaný výnos, ktorý je pre diskrétne možnosti koncovej hodnoty definovaný:

$$\bar{R} = \sum_s p(s) R(s) \equiv E[R],$$

kde s index všetkých možných prípadov koncovej hodnoty V_1, $R(s)$ je výnos prislúchajúci jednotlivým prípadom hodnoty investície na konci periódy V_1 a $p(s)$ je pravdepodobnosť, s akou jednotlivé prípady nastávajú.

Risk investície je skrytý v pravdepodobnosti, s akou sa môže skutočný výnos odchyľovať od očakávaného výnosu. To znamená:

skutočný výnos = očakávaný výnos ± štandardná odchýlka

Štandardnú odchýlku σ vypočítame ako druhú odmocninu z variancie, ktorá je daná nasledovne:

$$\sigma^2 = \sum_s p(s)\left(R(s) - \bar{R}\right)^2 \equiv E[(R - \bar{R})^2]$$

Čím väčšie riziko v sebe skrýva investícia, tým vyššia je štandardná odchýlka a naopak.

Uloženie peňazí na fixný depozit do banky je tiež spôsob investície. Tento spôsob investície je bezrizikový. Miera výnosu bezrizikovej investície je nazývaná okamžitá úroková miera, označujeme ju $r(t)$.

Základný princíp financií je princíp bezarbitráže. Princíp bezarbitráže je: Žiadna bezriziková investícia nemôže dosiahnuť vyšší výnos ako je bezriziková úroková miera. To znamená, že ak chce investor vyšší výnos, musí podstúpiť vyššie riziko.

2.3 Forwardová úroková miera

Forwardové úrokové miery sú úrokové miery medzi dvomi časovými obdobiami v budúcnosti za podmienok dohodnutých dnes. Označujeme ich $f(t, x)$, kde t označuje čas, kedy nastala dohoda na úrok platný v čase x na krátku dobu, $t < x$. Pre forwardovú úrokovú mieru $f(t, t)$ platí, že je rovná okamžitej úrokovej miere $r(t)$, teda:

$$f(t,t) = r(t)$$

Dlhopisy sú finančné inštrumenty, ktoré emituje vláda a firmy, aby získali finančný kapitál. Dlhopisy predstavujú pre emitenta záväzok voči držiteľovi, že zaplatí vopred dohodnutý, pevný peňažný tok.

Dlhopisy delíme na kupónové a bezkupónové. Pri bezkupónových dlhopisoch sa emitent zaväzuje zaplatiť v čase maturity dlhopisu vopred dohodnutý obnos peňazí (istinu). Pri kupónových dlhopisoch musí emitent zaplatiť okrem istiny, platenej v čase maturity, aj kupóny, platené vo vopred dohodnutých časoch. Kupónové dlhopisy si môžeme predstaviť aj ako portfólio bezkupónových dlhopisov, t.j. každá platba (kupóny aj istina) v kupónovom dlhopise predstavuje bezkupónový dlhopis, ktorého maturita a istina je zhodná s časom a výškou platby.

Cena bezkupónového dlhopisu je daná:

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,T)\,dt} \tag{2.2}$$

Z toho následne vyplýva:

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t,T) \tag{2.3}$$

Rovnica (2.3) predstavuje definíciu forwardovej úrokovej miery. Navyše, z toho vyplýva, že ak poznáme cenu dlhopisu $P(t,T)$, potom poznáme aj forwardovú úrokovú mieru $f(t,T)$ a naopak.

2.4 Martingaly a rizikovo neutrálna miera

Na efektívnom trhu nedochádza k arbitrážnym príležitostiam. Za arbitráž sa považuje možnosť obchodu, v ktorom investor získa bez rizika vyšší zisk ako je garantovaný bezrizikový zisk. Za bezrizikový nástroj sa považuje napríklad peňažný depozit, prípadne štátne dlhopisy veľkých a stabilných krajín (Nemecko, USA).

Na zabezpečenie ceny finančného nástroja, ktorá neposkytuje arbitrážnu príležitosť, je nevyhnutné, aby sa jeho diskontovaná hodnota vyvíjala martingalovým procesom [29]. Martingalový proces je definovaný ako:

$$E[X_{n+1} | x_1, x_2, \ldots, x_n] = x_n \tag{2.4}$$

Ľavá strana rovnice označuje strednú očakávanú hodnotu náhodnej premennej X_{n+1} za podmienky nadobudnutých hodnôt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pre náhodné premenné $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Vo financiách v čase t vyjadrujú náhodné premenné budúce ceny finančného nástroja.

V prípade dlhopisov, pre ktoré platí rovnica (2.2):

$$P(t,T) = e^{\left(-\int_t^T f(t,T)\,dt\right)}$$

sa proces martingalov dá vyjadriť:

$$P(t_0, T) = E_{[t_0, t_*]}[e^{-\int_{t_0}^{t_*} r(t)\,dt} P(t_*, T) | P(t_0, T)] \tag{2.5}$$

Teda, ak existuje miera, pri ktorej vývoj diskontovaného finančného nástroja spĺňa podmienku existencie martingalu, potom ceny derivátov tohto nástroja nepodliehajú arbitrážnym príležitostiam. A naopak, ak cena diskontovaného finančného nástroja je bezarbirážna, potom existuje martingalová miera. Existencia martingalovej miery je nazývaná aj základná veta financií.

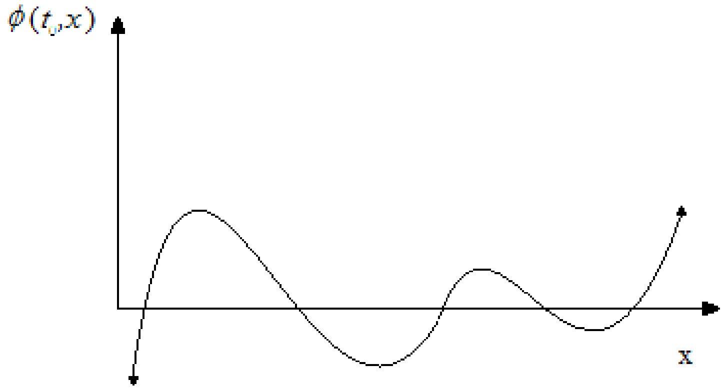
3 Kvantová teória forwardovej úrokovej miery

Na úvod kapitoly si povieme, prečo sa snažíme aplikovať kvantovú teóriu na forwardové úrokové miery. Potom si uvedieme rámec, ktorým sa vo všeobecnosti modelujú forwardové úrokové miery. Následne zadefinujeme všeobecnú kvantovú teóriu poľa, z ktorej budeme vychádzať pri popisovaní kvantovej teórie forwardových úrokových mier.

Vychádzať budeme predovšetkým z literatúry [22], najmä 7. a 10. kapitoly a literatúry [30].

3.1 Kvantová teória a forwardové úrokové miery

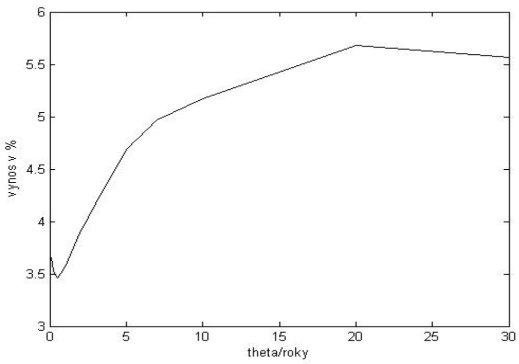
Kvantová mechanika popisuje ako častica prechádza kvantovým vývojom. Kvantová teória poľa je rozšírením kvantovej mechaniky. Popisuje, ako nejaký systém častíc podstupuje kvantový vývoj. Tento systém si môžeme predstaviť ako nejaký reťazec bodov, resp. častíc. Ak uvažujeme jednorozmerný reťazec, môžeme ho popísať pomocou vzdialenosti $\phi(t,x)$ od rovnováhy v čase t a priestore x. Príklad takéhoto reťazca je uvedený na obrázku 3.1.



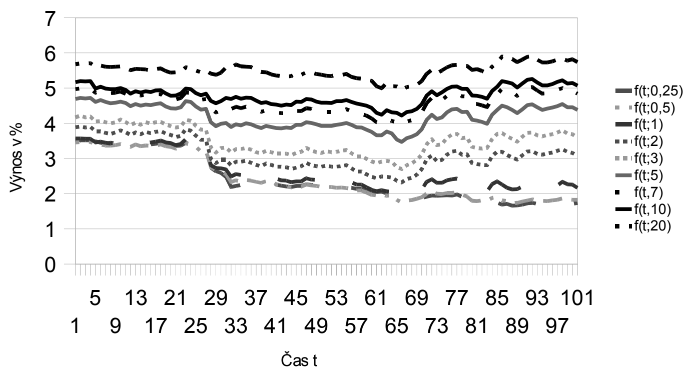
Obrázok 3.1: Príklad jednorozmerného reťazca v okamihu t_0

Stupeň voľnosti určuje, koľko častíc kmitá, resp. prechádza kvantovou evolúciou. V kvantovej mechanike môže byť stupeň voľnosti 1, zatiaľčo v kvantovej teórii poľa ich môže byť až nekonečno.

Podobnosť forwardových úrokových mier a kvantovej teórie poľa spočíva v tom, že výnosová krivka tiež predstavuje reťazec bodov. Viď obrázok 3.2. Pričom jednotlivé body tejto krivky sa vyvíjajú samostatne. (Obrázok 3.3) Na presný popis výnosovej krivky sa vyžaduje nekonečne veľa stupňov voľnosti.



Obrázok 3.2: Výnosová krivka



Obrázok 3.3: Vývoj jednotlivých mier v čase t

Kvantová teória poľa modeluje forwardové úrokové miery ako silne korelovaný systém s nezávislými fluktuáciami pre všetky maturity.

Výhoda prístupu z pohľadu kvantovej teórie je, že poskytuje iný náhľad na finančný proces a ponúka množstvo výpočtových algoritmov.

3.2 Heat – Jarrow – Morton rámec

V tejto časti si uvedieme HJM rámec, na ktorý sa neskôr budeme odvolávať. HJM rámec by sme nemali nazývať modelom, pretože je treba ešte dodefinovať volatilitu, ktorá môže byť takmer ľubovoľná.

Jednofaktorový rámec je daný ako všeobecná stochastická diferenciálna rovnica forwardovej úrokovej miery, t.j.:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}=\alpha(t,x)+\sigma(t,x)W(t), \tag{3.1}$$

kde $\alpha(t,x)$ je drift krivky forwardovej úrokovej miery a $\sigma(t,x)$ je volatilita forwardovej úrokovej miery.

K – faktorový rámec je následne daný pomocou K nezávislých bielych šumov $W_i(t)$:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}=\alpha(t,x)+\sum_{i=1}^{K}\sigma_i(t,x)W_i(t), \tag{3.2}$$

kde $\alpha(t,x)$ je opäť drift krivky forwardovej úrokovej miery a $\sigma_i(t,x)$ sú volatility procesov forwardovej úrokovej miery pre každé $W_i(t)$.

Ako už bolo vyššie spomenuté, toto je len rámec, pretože nepoznáme volatilitu $\sigma_i(t,x)$, ktorú treba určiť. Drift $\alpha(t,x)$ následne vyplynie z podmienky martingalov, resp. podmienky bezarbitráže.

Následne integrovaním predchádzajúcej rovnice dostávame:

$$f(t,x)=f(t_0,x)+\int_{t_0}^{t}\alpha(t',x)dt'+\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{K}\sigma_i(t',x)W_i(t')dt' \tag{3.3}$$

3.3 Kvantová teória poľa

Teória kvantového poľa je prirodzeným rozšírením teórie kvantovej mechaniky. Preto sa budeme najskôr venovať kvantovej mechanike, a následne rozšírime túto teóriu na teóriu kvantového poľa.

V kvantovej mechanike sa stav častice vyvíja náhodne, čo by sa dalo prirovnať k náhodnému vývoju okamžitej úrokovej miery.

Poloha kvantovej častice v každom čase t, ktorú označujeme x_t, určuje stupeň voľnosti. Povolené hodnoty pozície x_t sú celá reálna os. Z toho vyplýva, že sme v jednorozmernom priestore a teda častica, ktorej daná poloha prislúcha, má stupeň voľnosti 1. Distribúcia pravdepodobnosti pozície kvantovej častice na pozícii x v danom čase t je daná:

$$|\Psi(t,x)|^2 \equiv \Psi^*(t,x)\Psi(t,x) \tag{3.4}$$

Funkcia Ψ sa nazýva stavový vektor (vlnová funkcia) kvantového systému, ktorý je elementom stavového priestoru – lineárneho vektorového priestoru. $\Psi^*(t,x)$ je komplexne združené k $\Psi(t,x)$. V prípade, že sa častica pohybuje po reálnej osi, potom sa vektorový priestor skladá zo všetkých možných funkcií $\Psi(x)$ pre $x \in R$, a teda platí:

$$\int_R |\Psi(x)|^2 dx = 1$$

Diracova notácia vektorov je nasledovná:

- bra $<p|$ predstavuje riadkový vektor
- ket $|q>$ predstavuje stĺpcový vektor
- skalárny súčin je nasledovne definovaný ako braket a platí:

$$<p|q> = <q|p>^*$$

V kvantovej mechanike sú merateľné veličiny ako energia, pozícia atď. reprezentované ako Hermitovské operátory zobrazujúce lineárny vektorový priestor na seba.

Ako už bolo vyššie spomenuté, kvantová teória poľa popisuje ako nejaký systém podstupuje kvantový vývoj. Systém si môžeme predstaviť ako reťazec bodov, ktorého vzdialenosť od rovnováhy v čase t a pozícii x je označená ako $\phi(t,x)$.

Základ kvantovej teórie tvorí účinok systému. Účinok je atribútom dynamiky fyzikálneho systému. Vo všeobecnosti je definovaný ako integrál Lagranžiánu cez časovú premennú, v prípade kvantovej teórie sa integruje aj cez priestorovú premennú, t.j.:

$$S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} L[\phi]\,dx\,dt. \tag{3.5}$$

Lagranžián L dynamického systému je funkcia, ktorá zahŕňa dynamiku daného systému. Lagranžián L je definovaný ako rozdiel kinetickej a potenciálnej energie systému.

Nech je dynamika poľa definovaná pomocou Hamiltoniánu sústavy, značíme $H.$ Kvantová teória poľa definuje pravdepodobnostnú amplitúdu (funkciu rozdelenia) poľa $\phi(t,x)$ pomocou Feynmanovho krivkového integrálu:

$$Z \equiv <\phi_2|e^{-t\hat{H}}|\phi_1> \tag{3.6}$$

$$= \prod_{t_1<t<t_2} \prod_{-\infty<x<+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{S(\phi)} d\,\phi(t,x) \tag{3.7}$$

s okrajovými podmienkami: $\phi_1 = \phi(t_1, x)$ a $\phi_2 = \phi(t_2, x)$.

Hamiltonián H je v kvantovej mechanike operátorom, ktorý zodpovedá totálnej energii systému. Teda je súčtom potenciálnej a kinetickej energie systému. Hamiltonián generuje časový vývoj kvantových stavov.

Z matematického hľadiska neexistuje interpretácia výrazu (3.7). Dochádza v ňom k diskretizácii a teda k „mriežkovaniu“ časopriestoru, čo spôsobí zmenu nekonečno-dimenzionálneho integrálu na súčin konečno-dimenzionálnych integrálov.

Podľa [31] konečná spojitá limita nelineárnej kvantovej teórie poľa definovanej na konečnom a diskrétnom časopriestore je vo všeobecnosti možná, len ak účinok S definuje teóriu, ktorá je renormalizovateľná. Procedúra renormalizácie však nemá presnú matematickú definíciu a vo všeobecnosti celý formalizmus kvantovej teórie poľa závisí od rozsahu konvencií a rigoróznej matematiky.

Ak účinok S je kvadratickou funkciou kvantového poľa $\phi,$ potom sa nemusíme obávať problému s renormalizáciou a teda existuje spojitá limita kvantovej teórie poľa. Táto teória sa nazýva aj voľná (Gaussovská) kvantová teória poľa.

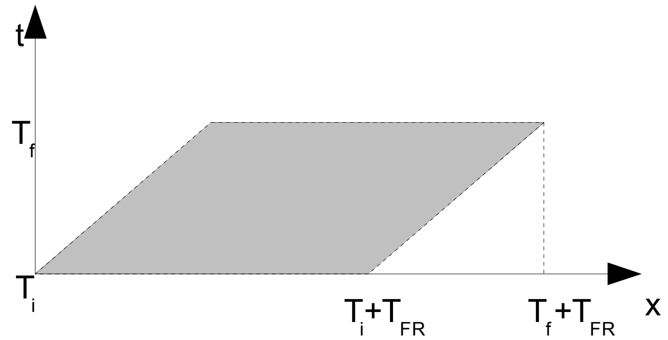
3.4 Účinok lineárnej forwardovej úrokovej miery

Forwardové úrokové miery sú považované za bozónové kvantové pole, t.j. $f(t,x)$ je považovaná za nezávislú náhodnú premennú pre každý čas t aj maturitu x. Pre jednoduchosť notácie sú t aj x spojité. Treba pripomenúť, že narozdiel od kvantového poľa nie je premenná x premennou priestoru, ale budúceho času, resp. maturity.

V každom okamihu t existuje trhová forwardová úroková miera pre maturitu (dobu trvania) T_{FR}. Čas v budúcnosti T_{FR} je väčšinou väčší ako 30 rokov. V každom okamihu t forwardová úroková miera $f(t,x)$ existuje pre všetky maturity x, pre ktoré platí $t<x<t+T_{FR}$. Forwardová úroková miera $f(t,x)$ ako funkcia od maturity x sa nazýva krivka forwardovej úrokovej miery.

Predpokladajme vývoj forwardovej úrokovej miery od nejakého počiatočného času T_i po čas v budúcnosti T_f. Pretože forwardové úrokové miery $f(t,x)$ sú dané pre maturity v budúcnosti, vždy platí: $x>t$. Z toho vyplýva, že kvantové pole $f(t,x)$ je definované na oblasti rovnobežníka P, ktorý je v smere maturity x ohraničený rovnobežkami $x=t$ a $x=T_{FR}+t$ a v smere času t horizontálnymi čiarami $t=T_i$ a $t=T_f$. Viď obrázok 3.4.

Každý bod oblasti P predstavuje nezávislú integrovateľnú premennú. Pre potreby modelovania forwardovej úrokovej miery sa potrebujeme oboznámiť s dvoj-dimenzionálnym kvantovým poľom na konečnej (Euklidovskej) oblasti.



Obrázok 3.4: Oblasť forwardovej úrokovej miery P

Model lineárneho účinku forwardovej úrokovej miery je ekvivalentne s rovnicou (3.5) daný:

$$S[f]=\int_{T_i}^{T_f}\int_{t}^{t+T_{FR}} L[f]\,dx\,dt, \tag{3.8}$$

kde $L[f]$ je Lagranžián definovaný ako:

$$\begin{aligned} L[f] &= L_{kinetic}[f] + L_{rigidity}[f] \\ &= -\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}-\alpha(t,x)}{\sigma(t,x)}\right\}^2+\frac{1}{\mu^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}-\alpha(t,x)}{\sigma(t,x)}\right)\right\}^2\right] \end{aligned} \tag{3.9}$$

kde $\alpha(t,x)$ a $\sigma(t,x)$ sú drift a volatilita z HJM rámca uvedeného v kapitole 3.2. Drift $\alpha(t,x)$ je determinovaný podmienkou martingalovej evolúcie forwardových úrokových mier. Volatilita $\sigma(t,x)$ a parameter μ sú voľné. Parameter μ kontroluje fluktuácie forwardových úrokových mier. Narozdiel od HJM rámca, v kvantovej teórii môže byť volatilita odvodená z trhu.

Na kompletizáciu definície modelu potrebujeme ešte dodefinovať podmienky všetkých štyroch hraníc oblasti P, ktorá je zobrazená na obrázku 3.4. Okrajové podmienky sú nasledujúce:

- podmienky v smere času t – Dirichletove podmienky:
  - počiatočná:

$$t=T_i\ ;\ \ T_i < x < T_i+T_{FR}\ :\ f(T_i, x) \tag{3.10}$$

  - koncová:

$$t=T_f\ ;\ \ T_f < x < T_f+T_{FR}\ :\ f(T_f, x) \tag{3.11}$$

- podmienky v smere maturity x – Neumanove podmienky:

$$T_i < t < T_f,\ \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}-\alpha(t,x)}{\sigma(t,x)}\right) = 0\ :\ x = t\ \vee\ x = t + T_{FR} \tag{3.12}$$

Z rovníc (3.8) a (3.9) spolu s hraničnými podmienkami dostávame nasledujúcu rovnicu pre účinok:

$$S=-\frac{1}{2}\int_P\left(\frac{\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}-\alpha(t,x)}{\sigma(t,x)}\right)\left[1-\frac{1}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial x^2}\right]\left(\frac{\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}-\alpha(t,x)}{\sigma(t,x)}\right) \tag{3.13}$$

Kvantová teória poľa forwardových úrokových mier je definovaná funkciou rozdelenia Z. Funkciu rozdelenia Z získame integráciou cez všetky možnosti $f(t,x)$, čím dostávame Feynmanov krivkový integrál:

$$Z=\int e^{S[f]}Df \tag{3.14}$$

$$\int Df \equiv \prod_{(t,x)\in P} \int_{-\infty}^{+\infty} df(t,x) \tag{3.15}$$

3.5 Rýchlostné kvantové pole forwardovej úrokovej miery

V tejto časti sa zameriame na zmenu premenných z kvantového poľa $f(t,x)$ na iné kvantové pole $A(t,x)$. Funkcia $A(t,x)$ predstavuje rýchlostné kvantové pole.

Nech $A(t,x)$ je dvoj-dimenzionálne kvantové pole. Model HJM vyjadruje pole $A(t,x)$ vo vzťahu s $f(t,x)$ nasledovne:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \alpha(t,x)+\sigma(t,x)A(t,x) \tag{3.16}$$

$$f(t,x) = f(t_0,x) + \int_{t_0}^{t} \alpha(t',x)dt' + \int_{t_0}^{t} \sigma(t',x)A(t',x)\, dt' \tag{3.17}$$

Jakobián tejto transformácie je konštanta, preto:

$$\int Df \to \int DA$$

Účinok v zmysle poľa $A(t,x)$ je následne daný:

$$S[A] = -\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\int_{t}^{t+T_{FR}} \left[A^2(t,x)+\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\partial A(t,x)}{\partial x}\right)^2 \right] dx\, dt \tag{3.18}$$

$$= \int_P L[A] \tag{3.19}$$

s hraničnými podmienkami:

$$\left.\frac{\partial A(t,x)}{\partial x}\right|_{x=t} = 0 = \left.\frac{\partial A(t,x)}{\partial x}\right|_{x=t+T_{FR}} \tag{3.20}$$

3.6 Propagátor forwardovej úrokovej miery

Kvantové polia $f(t,x)$ a $A(t,x)$ sa nedajú priamo pozorovať. Sú náhodné a nemajú žiadnu pevnú hodnotu. Pozorovateľné a merateľné sú ich priemerné hodnoty, ktoré sú fluktuáciami kvantového poľa. Merateľné veličiny sú korelačné funkcie, ktoré vysvetľujú vplyv fluktuácie v jednom bode na fluktuáciu v inom bode.

Korelácia medzi dvoma bodmi poľa $A(t,x)$ je daná:

$$
\begin{aligned}
<(A(t,x)A(t',x'))> &= E[A(t,x)A(t',x')] \\
&= \tfrac{1}{Z}\int A(t,x)A(t',x')e^{S[A]}DA \\
&\equiv \delta(t-t')D(x,x';t,T_{FR})
\end{aligned}
\qquad (3.21)
$$

Funkcia $D(x,x';t,T_{FR})$ sa nazýva propagátor. Propagátor je miera efektu fluktuácie poľa $A(t,x)$ v bode (t,x) na fluktuáciu $A(t',x')$ v inom bode (t',x'). Je daný nasledovne:

$$D(x,x';t,T_{FR})=\mu\frac{\cosh\mu[T_{FR}-|x-x'|]-\cosh\mu[T_{FR}-(x+x'-2t)]}{2\sinh\mu T_{FR}} \qquad (3.22)$$

Formálne vyjadrenie propagátora je:

$$D(x,x';t,T_{FR};\mu)=<x|\frac{1}{1-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}}|x'> .$$

Pre limitu $T_{FR}\rightarrow\infty$ dostávame podľa [22]:

$$
\begin{aligned}
D(x,x';t) &= \lim_{T_{FR}\rightarrow\infty} D(x,x';t,T_{FR}) \\
&= \frac{\mu}{2}\left[e^{-\mu(x+x'-2t)}+e^{-\mu|x-x'|}\right] \;;\quad x,x'>t
\end{aligned}
\qquad (3.23)
$$

Interpretácia propagátora je: Ak pole $A(t,x)$ má nejakú hodnotu v bode x, potom v okruhu $x-\mu<x'<x+\mu$ má tendenciu nadobúdať rovnakú hodnotu, zatiaľčo pre iné hodnoty x' nadobúda ľubovoľné hodnoty. Teda fluktuácie v smere maturity x sú korelované počas času maturity μ^{-1}, ktorý predstavuje korelačný čas forwardových úrokových mier.

3.7 Martingaly a rizikovo neutrálna miera pre lineárne forvardové úrokové miery

Rizikovo neutrálny vývoj forwardových úrokových mier získame využitím martingalovej podmienky pre účinok $S[A]$. Všeobecná podmienka martingalu pre dlhopisy je:

$$P(t_0, T) = E_{[t_0, t_*]}[e^{-\int_{t_0}^{t_*} r(t)dt} P(t_*, T)] \tag{3.24}$$

Táto podmienka má v teórii poľa nasledujúce vyjadrenie:

$$P(t_0, T) = \frac{1}{Z} \int e^{-\int_{t_0}^{t_*} r(t)dt} P(t_*, T) e^{S[f]} Df \tag{3.25}$$

ktoré sa podľa [31] dá upraviť na:

$$P(t_0, T) = P(t_0, T) e^{-\int_T \alpha(t, x)} \frac{1}{Z} \int e^{-\sum_i \int_T \sigma(t, x) W_i(t)} e^{S[A]} DA \tag{3.26}$$

z čoho po úprave dostávame:

$$e^{\int_T \alpha(t, x)} = \frac{1}{Z} \int e^{-\int_T \sigma(t, x) A(t, x)} e^{\int_P L[A]} DA \tag{3.27}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_*} dt \int_t^T \sigma(t, x) D(x, x'; t, T_{FR}) \sigma(t, x') dx\, dx'} \tag{3.28}$$

Doména integrovania T určuje rizikovo neutrálnu mieru. Doména T sa nachádza v doméne forwardových úrokových mier P.

Vynechaním časovej integrácie dostávame:

$$\int_t^T \alpha(t, x) dx = \frac{1}{2} \int_t^T \sigma(t, x) D(x, x'; t, T_{FR}) \sigma(t, x') dx\, dx' \tag{3.29}$$

následným diferencovaním dostávame vzťah pre drift:

$$\alpha(t, x) = \sigma(t, x) \int_t^x D(x, x'; t, T_{FR}) \sigma(t, x') dx' \tag{3.30}$$

3.8 Nelineárne forwardové úrokové miery

V predchádzajúcich kapitolách sme sa zaoberali forwardovými úrokovými mierami, ktoré boli dané ako Gaussovské náhodné pole s konečnou pravdepodobnosťou nadobúdania záporných hodnôt. Pre vysoké hodnoty forwardových úrokových mier sú záporné fluktuácie zanedbateľné. Problém nastáva, ak sa forwardové úrokové miery pohybujú blízko nuly. Vtedy sa vyžaduje striktná pozitivita kvantového poľa, teda $f(t,x)>0$ pre všetky t, x. Forwardové úrokové miery sa následne dajú modelovať ako exponenciálne kvantové pole:

$$f(t,x)=f_0 e^{\phi(t,x)}; \quad -\infty\leqslant\phi(t,x)\leqslant+\infty$$

Lagranžián daný rovnicou (3.9) je interpretovaný ako približný. Použiteľný je len vtedy, ak všetky forwardové úrokové miery sú blízko nejakej fixnej hodnoty f_0. Teda

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}=f_0 e^{\phi(t,x)}\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}$$

$$\simeq f_0\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}+O(\phi^2)$$

Preto sa robí nasledujúce zobrazenie:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\to f_0\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}$$

Následne sa rovnica (3.9) zovšeobecní ako:

$$L[f]=L_{kinetic}[f]+L_{rigidity}[f]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{f_0\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}-\alpha(t,x)}{\sigma(t,x)}\right\}^2+\frac{1}{\mu^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_0\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}-\alpha(t,x)}{\sigma(t,x)}\right)\right\}^2\right] \qquad (3.31)$$

Lagranžián je nelineárny, pretože drift $\alpha(t,x)$ je nelineárna funkcia, ktorá je podmienená podmienkou existencie martingalov.

Funkcia rozdelenia (pravdepodobnostná amplitúda teórie poľa) je daná Feynmanovým integrálom:

$$Z=\int e^{S[\phi]}D\phi \qquad (3.32)$$

pričom:

$$\int D\phi \equiv \prod_{(t,x)\in P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\,\phi(t,x) \qquad (3.33)$$

s hraničnými podmienkami:

- v smere času t rovnakými ako v podmienkach (3.10) a (3.11)
- v smere maturity x podobne ako v (3.12)

$$T_i < t < T_f, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_0 \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} - \alpha(t,x)}{\sigma(t,x)}\right) = 0 \;:\; x = t \;\vee\; x = t + T_{FR} \qquad (3.34)$$

Na záver tejto podkapitoly treba poznamenať, že v prípade nelineárnych forwardových úrokových mier sa drift nedá odvodiť ako v prípade lineárnych forwardových mier. Na odvodenie nelineárneho driftu je potrebná Hamiltonovská formulácia kvantovej teórie.

Pre záujemcov je dané odvodenie v literatúre [22], kapitola 10. A teda podľa [22] je drift nelineárnych forwardových úrokových mier rovný:

$$\alpha(t,x) = -\frac{\sigma^2(t,x)}{2 f_0} D(x,x;t) + \sigma^2(t,x) \int_t^x D(x,x';t)\,\sigma(t,x')\,e^{\phi(t,x')} dx' \qquad (3.35)$$

3.9 Stochastická volatilita

V tejto kapitole povieme niečo o volatilite. Volatilita môže byť:

- odvodená z trhu ako deterministická premenná
- modelovná ako stochastická funkcia forwardových úrokových mier
- modelovaná ako nezávislé kvantové pole.

Pozorovať a skúmať vieme len forwardové úrokové miery, preto aj dôsledky vplyvu volatility môžeme pozorovať cez pozorovateľné vlastnosti forwardových úrokových mier.

Stochastická volatilita

Volatilita môže byť modelovaná ako funkcia forwardových úrokových mier. Podrobnejšie sa o tejto problematike môžeme dočítať v literatúre [32].

V štandardných modeloch je volatilita daná ako:

$$\sigma(t,x,f(t,x)) = \sigma_0(t,x)\, e^{\nu\phi(t,x)}, \tag{3.36}$$

kde $\sigma_0(t,x)$ je deterministická funkcia.

Volatilita ako kvantové pole

Uvažujme forwardové úrokové miery ako lineárne kvantové pole:

$$f(t,x): \quad -\infty \leqslant f(t,x) \leqslant +\infty$$

Funkcia volatility je vždy kladná, preto ju môžeme definovať pomocou nasledujúceho bozónového kvantového poľa $h(t,x)$:

$$\sigma(t,x) = \sigma_0 e^{h(t,x)}, \qquad -\infty \leqslant h(t,x) \leqslant +\infty$$

Systém sa skladá z dvoch navzájom pôsobiacich polí, konkrétne $f(t,x)$ a $h(t,x)$. Systém by mal mať nasledujúce vlastnosti:

- Parameter ξ určuje mieru náhodnosti poľa $h(t,x)$. Limita $\xi \to 0$ zmenšuje náhodné fluktuácie poľa $h(t,x)$ a redukuje ho na deterministickú funkciu.
- Parameter κ reguluje fluktuácie v smere maturity.
- Parameter ρ, ktorý $-1 \leqslant \rho \leqslant +1$, určuje koreláciu poľa forwardových úrokových mier $f(t,x)$ s kvantovým poľom volatility $h(t,x)$.
- Drift volatility $\beta(t,x)$ je analogický driftu forwardových úrokových mier $\alpha(t,x)$.

Lagranžián, ktorý spĺňa uvedené vlastnosti, nie je jednoznačný. Jeden z možných Lagranžiánov systému je daný ako:

$$L = -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial t}-\alpha}{\sigma} - \rho\frac{\frac{\partial h}{\partial t}-\beta}{\xi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t}-\beta}{\xi}\right)^2 - \frac{1}{2\mu^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial t}-\alpha}{\sigma}\right)\right)^2 - \frac{1}{2\kappa^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t}-\beta}{\xi}\right)\right)^2 \tag{3.37}$$

pričom účinok systému je:

$$S[f,h] = \int_P L$$

Hraničné podmienky pre forwardové úrokové miery zostávajú rovnaké ako podmienky (3.10) až (3.12). Hraničné podmienky pre kvantové pole volatility sú:

- Dirichletove podmienky:
  - počiatočná:

$$t = T_i \ ; \ \ T_i < x < T_i + T_{FR} \ : \ \ \sigma(T_i, x)$$

  - koncová:

$$t = T_f \ ; \ \ T_f < x < T_f + T_{FR} \ : \ \ \sigma(T_f, x)$$

- Neumanove podmienky

$$T_i < t < T_f : \ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} - \beta(t,x)\right)\Bigg|_{x=t} = 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} - \beta(t,x)\right)\Bigg|_{x=t+T_{FR}} \quad (3.38)$$

4 Aplikácia poznatkov na reálne dáta

V tejto kapitole odvodíme diskrétnu teóriu, potrebnú pre empirické skúmanie dát, z reálnych dát odhadneme korelačnú funkciu a ďalšie vlastnosti forwardových úrokových mier, a porovnáme získanú koreláciu s modelovými koreláciami.

Keďže drift forwardových úrokových mier $\alpha(t,\theta)$ je daný martingalovou mierou, nemôže byť odvodený z empirického vývoja forwardových mier. Avšak korelačná funkcia je nezávislá od driftu, a teda priamo modeluje aktuálny trhový vývoj forwardových úrokových mier. Z toho dôvodu môže byť použitá na testovanie platnosti modelu forwardových úrokových mier.

Ako reálne dáta boli použité Daily Treasury Yield Curve Rates v rozpätí rokov 1996 až 2001.

Výpočty a grafy boli vypracované v programoch Open Office Calc a Matlab.

4.1 Diskretizácia teórie

Keďže dáta forwardových úrokových mier sú dostupné len v diskrétnych okamihoch, potrebujeme diskretizovať aj premennú času t v našich modeloch.

Našim základným vzťahom je rovnica (3.16):

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \alpha(t,x) + \sigma(t,x) A(t,x) \tag{4.1}$$

kde z martingalovej podmienky dostávame vzťah pre drift (rovnica (3.30)):

$$\alpha(t,x) = \sigma(t,x) \int_t^x D(x,x';t,T_{FR})\,\sigma(t,x')\,dx' \tag{4.2}$$

Diskretizáciou času t so vzdialenosťou ε dostávame $t = n\varepsilon$. Následne vzchádzajúc z rovnice (4.2) definujeme:

$$\begin{aligned} \delta f(t,x) &\equiv f(t+\varepsilon,x) - f(t,x) \\ &= \varepsilon\,\alpha(t,x) + \varepsilon\,\sigma(t,x) A(t,x) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pripomeňme, že pre pole $A(t,x)$ platí (rovnica 3.21):

$$E[A(t,x)]=0 \tag{4.4}$$

$$E[A(t,x)A(t',x')]=\frac{1}{Z}\int e^{S[A]}A(t,x)A(t',x')\,DA \tag{4.5}$$

$$=\delta(t-t')D(x,x';t) \tag{4.6}$$

Všetky forwardové úrokové miery budú v smere maturity vyjadrené pomocou súradnice $\theta=x-t.$ V diskrétnom čase bude následne očakávaná hodnota polí v dvoch maturitách daná pre $\delta(0)=1/\varepsilon$:

$$E[A(t,\theta)A(t',\theta')]\equiv <A(t,\theta)A(t',\theta')> =\frac{1}{\varepsilon}D(\theta,\theta') \tag{4.7}$$

Následne z rovníc (4.3) a (4.7) dostávame:

$$<\delta f(t,\theta)> =\varepsilon\alpha(\theta)$$

$$<\delta f(t,\theta)\,\delta f(t,\theta')>_c \equiv <\delta f(t,\theta)\delta f(t,\theta')> - <\delta f(t,\theta)><\delta f(t,\theta')>$$

$$=\varepsilon^2\sigma(\theta)\sigma(\theta')<A(t,\theta)A(t,\theta')>$$

$$=\varepsilon\sigma(\theta)\sigma(\theta')D(\theta,\theta') \tag{4.8}$$

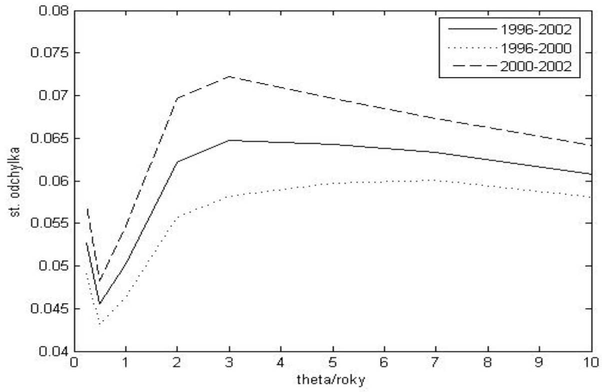
$$\Rightarrow <\delta f^2(t,\theta)>_c=\varepsilon\sigma^2(\theta)D(\theta,\theta) \tag{4.9}$$

Vzťah v rovnici (4.9) definuje rovnicu pre volatilitu s výnimkou činiteľa $\varepsilon D(\theta,\theta),$ ktorý je závislý na propagátore zvoleného modelu. Aby sme boli schopní porovnávať empirické údaje s modelovými, musíme dosiahnuť, aby bola volatilita nezávislá. Podľa [22], symetrická zmena mierky dovoľuje preškálovať pole $A(t,\theta),$ takže $D(\theta,\theta')\to\tilde{D}(\theta,\theta'),$ pričom $\tilde{D}(\theta,\theta)=1/\varepsilon.$ Preškálovaná konštrukcia už spĺňa zvyčajnú definíciu volatility forwardových mier:

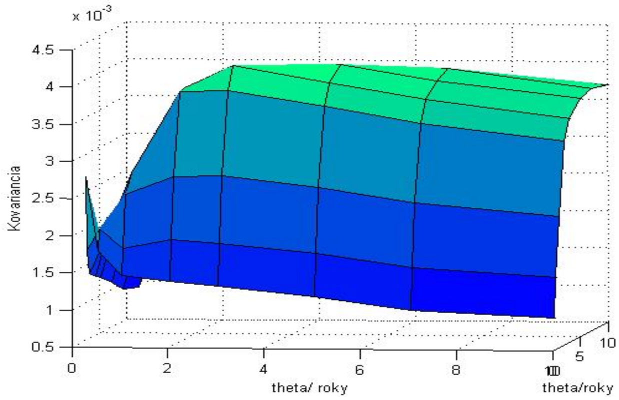
$$<\delta f^2(t,\theta)>_c=\sigma^2(t,\theta) \tag{4.10}$$

4.2 Empirické vlastnosti forwardových úrokových mier

Štandardná odchýlka získaná z dát je zobrazená na obrázku 4.1. Kovariancia forwardových mier je následne zobrazená na obrázku 4.2. Vzhľadom na literatúru [22] a [33] bola v prípade štandardnej odchýlky očakávaná hladká krivka s vrcholom v okolí $\theta=1$. Teda je prekvapujúca volatilita v prípade štvrťročných dát, ktorá je výrazne vyššia, ako bolo očakávané.



Obrázok 4.1: Štandardná odchýlka získaná z dát



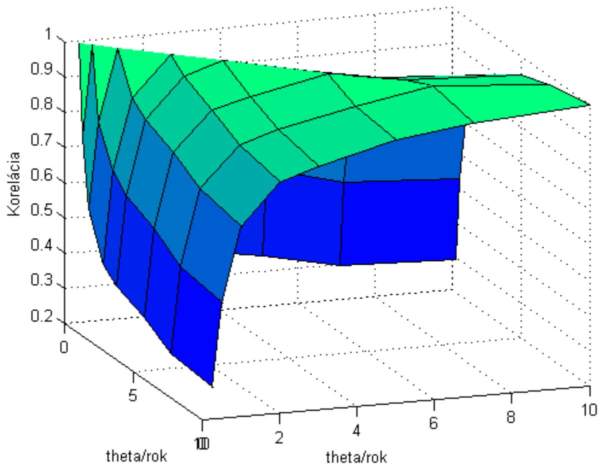
Obrázok 4.2: Kovariancia forwardových úrokových mier

Dôležitým ukazovateľom je korelácia forwardových úrokových mier medzi dvoma rôznymi maturitami θ a θ'. Korelácia $C(\theta,\theta')$ je daná:

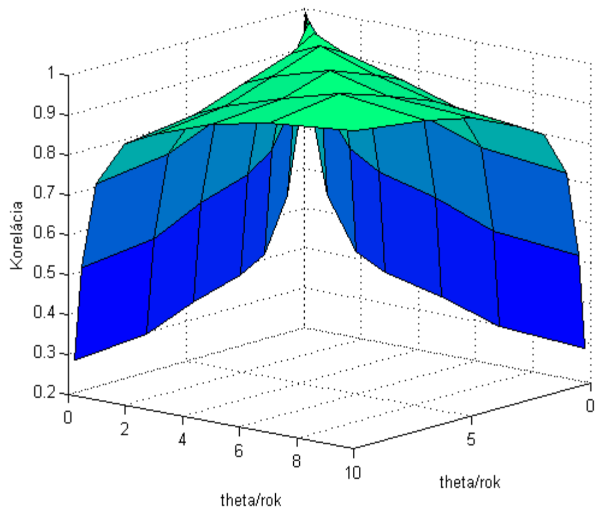
$$C(\theta,\theta')=\frac{<\delta f(t,\theta)\,\delta f(t,\theta')>_c}{\sqrt{<\delta f(t,\theta)>_c}\sqrt{<\delta f(t,\theta')>_c}} \tag{4.11}$$

Empirická korelačná funkcia sa nazýva aj empirický propagátor. Empirická korelácia získaná z dát je zobrazená na obrázkoch 4.3 a 4.4.

Ako je vidno, dáta sú navzájom kladne korelované. Avšak kvantová teória popisuje forwardové úrokové miery ako silne korelovaný systém. Preto bola očakávaná silná korelácia dát, tj. korelácia vyššia ako 0,5. Toto očakávanie nebolo splnené pre maturitu $\theta = 0{,}25$, ktorá bola silne korelovaná len s forwardovými úrokovými mierami s maturitou do jedného roka.



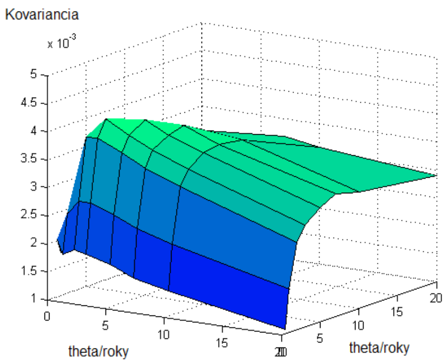
Obrázok 4.3: Empirická korelácia



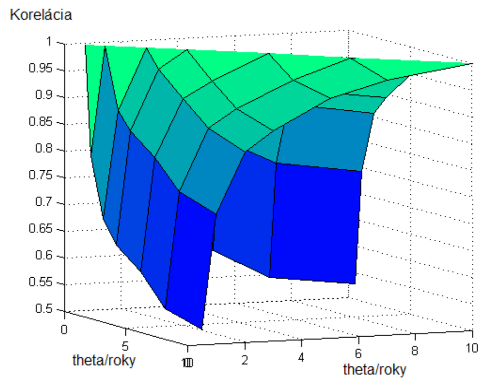
Obrázok 4.4: Empirická korelácia, iný pohľad

Jednou možnosťou ako obísť túto nekonzistentnosť je vynechať maturitu $\theta = 0{,}25$ z modelu. Opodstatnením vylúčenia je predovšetkým to, že úroková miera prislúchajúca k spomínanej maturite môže byť považovaná za krátkodobú mieru, resp. okamžitú úrokovú mieru a teda sa vyvíja odlišne od zvyšku výnosovej krivky.

Upravené dáta už spĺňajú očakávania. Obrázky 4.6 a 4.5.



Obrázok 4.6: Kovariancia upravených dát



Obrázok 4.5: Korelácia upravených dát

4.3 Korelačné funkcie a ich parametre

V tejto časti sa pokúsime aproximovať koreláciu získanú z dát, prezentovanú v podkapitole 4.2. Korelácia je zobrazená na obrázku 4.5. Aproximovať budeme pomocou viacerých korelačných funkcií. Zaoberať sa budeme Gaussovskou teóriou poľa, teda lineárnou aproximáciou.

Model korelačnej funkcie Gaussovskej teórie poľa je vo všeobecnosti daný:

$$C_{QFT}(\theta,\theta') = \frac{D(\theta,\theta')}{\sqrt{D(\theta,\theta)\,D(\theta',\theta')}} \tag{4.12}$$

Výhoda danej korelačnej funkcie je, že je nie závislá od driftu forwardových úrokových mier $\alpha(t,x)$ a ani od volatility forwardových úrokových mier $\sigma(t,x)$. To znamená, že sa nemusíme zaoberať odvádzaním daných funkcií, a na testovanie teórie potrebujeme do modelu odhadnúť len niektoré parametre, ako napríklad parameter rigidity μ.

Model s konštantnou rigiditou

Prvým modelom, ktorým sa budeme zaoberať, je model s konštantnou rigiditou. Propagátor, ktorý potrebujeme dosadiť do funkcie korelácie uvedenej vo vzťahu (4.12) vyzerá nasledovne:

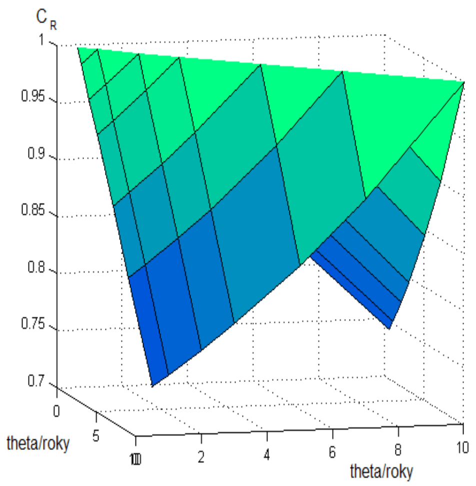
$$D(\theta,\theta')=\frac{\mu}{2}\left(e^{-\mu(\theta-\theta')}+e^{-\mu(\theta+\theta')}\right)=\mu e^{-\mu\theta}\cosh(\mu\theta')\ ;\quad \theta>\theta' \tag{4.13}$$

Dosadením rovnice (4.13) do všeobecnej funkcie korelácie (4.12) dostávame koreláciu prislúchajúcu modelu s konštantnou rigiditou:

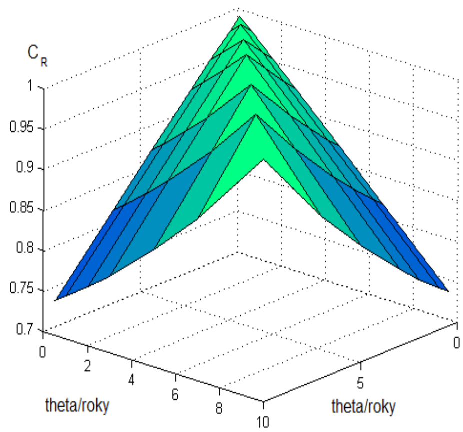
$$C_R(\theta,\theta')=\sqrt{\frac{\mu e^{-\mu\theta}\cosh(\mu\theta')}{\mu e^{-\mu\theta'}\cosh(\mu\theta)}}\ ;\quad \theta>\theta' \tag{4.14}$$

V tomto prípade sa snažíme odhadnúť parameter rigidity μ. Aproximáciou sa snažíme minimalizovať normu matice rozdielu $\|C-C_R\|_2$, tj. snažíme sa minimalizovať odchýlku medzi koreláciou získanou z dát a koreláciou získanou z aproximácie.

Výsledok tejto aproximácie môžeme vidieť na obrázkoch 4.7 a 4.8.



Obrázok 4.7: Aproximovaná korelácia pomocou modelu s konštantnou rigiditou



Obrázok 4.8: Aproximovaná korelácia pomocou modelu s konštantnou rigiditou, iný pohľad

Táto aproximácia nie je veľmi presná. Optimálny parameter rigidity má hodnotu $\mu=0{,}05$. Absolútna chyba aproximácie je až 11,72%.

Model s psychologickým časom

V tomto modeli vystupuje čas ako funkcia $z(\theta)$ daná rovnicou:

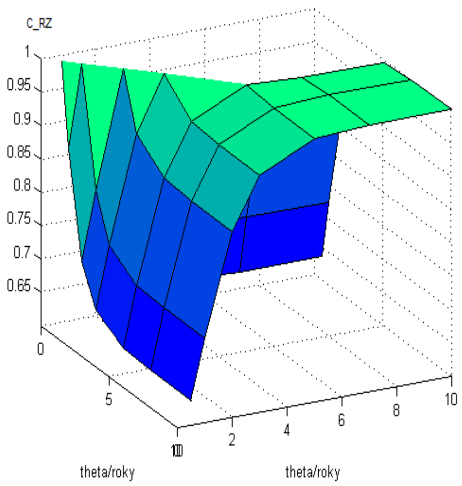
$$z=\tanh(\beta\theta) \qquad (4.15)$$

To znamená, že časová funkcia $z(\theta)$ nadobúda pre nízke hodnoty parametra θ hodnoty blízke príslušnej hodnote, zatiaľčo pre vysoké hodnoty θ konverguje k 1. Teda znižuje vplyv vysokých hodnôt maturity θ na koreláciu.

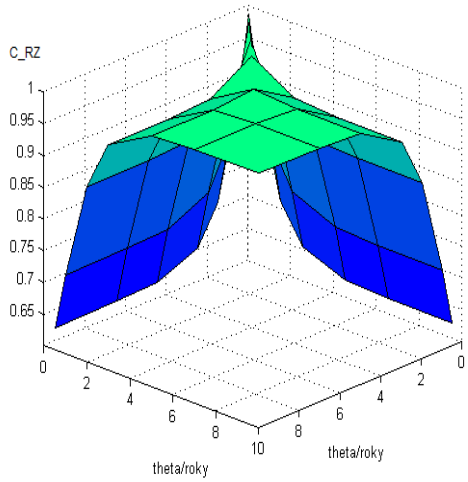
Korelačná funkcia následne daná:

$$C_{RZ}(\theta,\theta')=\sqrt{\frac{e^{-\mu z(\theta)}\cosh(\mu z(\theta'))}{e^{-\mu z(\theta')}\cosh(\mu z(\theta))}} \quad ; \quad \theta>\theta' \qquad (4.16)$$

Výsledná korelácia je zobrazená na obrázkoch 4.9 a 4.10.



Obrázok 4.10: Aproximácia korelácie získanej z dát koreláciou C_RZ



Obrázok 4.9: Aproximácia korelácie získanej z dát koreláciou C_RZ, iný pohľad

V tomto prípade bolo potrebné nakalibrovať model dvoma parametrami, a to podobne ako v prvom modeli parameter μ a navyše parameter β, ktorý sa nachádza v časovej funkcii $z(\theta)$ danej rovnicou (4.15). Optimálne hodnoty parametrov sme dostali $\mu=0{,}846$ a $\beta=0{,}566$. A ako je vidno z obrázkov, táto aproximácia je presnejšia, ako predchádzajúca. Túto skutočnosť potvrdzuje aj absolútna chyba, ktorá je 3,69%.

Záver

V tejto diplomovej práci sme sa zaoberali novou oblasťou fyziky – ekonofyzikou. No predovšetkým to bola aplikácia kvantovej teórie poľa na forwardové úrokové miery. Forwardové úrokové miery predstavovali súbor častíc, podstupujúci kvantový vývoj. Vychádzajúc z Heat-Jearrov-Morton rámca, sme uviedli model forwardových úrokových mier z pohľadu kvantovej teórie Gaussovského poľa a ďalšie možné rozšírenia tohto modelu.

Na testovanie platnosti modelu sme použili korelačnú funkciu, ktorá je nezávislá od driftu a volatility forwardových mier, ktoré by bolo potrebné ďalej odvodiť. Korelačná funkcia priamo modeluje vývoj na trhu. Uvedené boli korelačné funkcie dvoch modelov – model s konštantnou rigiditou a model so psychologickým časom.

V prvom prípade nebol výsledok uspokojujúci, pretože absolútna chyba bola takmer 12%. No problém bol skôr v jednoduchosti modelu.

V druhom modeli – modeli so psychologickým časom, boli výsledky lepšie. Aproximácia korelácie, získanej z dát, dosiahla absolútnu chybu 3,69%.

Avšak podľa literatúry [22] existujú aj iné Gaussovské modely, ktoré dosahujú ešte lepšie aproximačné hodnoty, no sú značne zložitejšie. Ďalším možným vylepšením je modelovať forwardové úrokové miery ne-Gaussovským poľom, teda nelineárnou teóriou.

Táto diplomová práca je skôr úvodom do rozsiahlej možnosti modelovania dlhodobých úrokových mier. Na jej základe, príp. teórii a literatúre, z ktorej bola vypracovaná by sa dalo pokračovať, napríklad už priamym modelovaním dlhodobej úrokovej miery, odvodením ďalších potrebných atribútov ako bol drift, ktorý vyplýva z martingalovej podmienky, a volatilita, ktorú možno priamo odvodiť z dát alebo modelovať ako ďalšie kvantové pole a následne skúmať interakcie dvoch kvantových polí.

Táto teória má však aj nevýhodu, ktorou je pomerná zložitosť problematiky pre človeka, ktorý priamo neštudoval kvantovú teóriu, avšak nie je to nezdolateľná prekážka.

Na opačnej strane stojí pomerne prebádaná teória, s množstvom algoritmov, ktorá prináša nový prístup a náhľad na problematiku. To sa netýka len kvantovej teórie a forwardových úrokových mier, ale aj iných aplikácií fyzikálnej teórie na financie alebo ekonómiu.

Literatúra

[1]: Mantegna, R., Stanley, H. E., An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance, Cambridge University Press, 2000
[2]: Rosser, J. B., The Nature and Future of Econophysics, lampsacus.com, 2006
[3]: Mirowski, P., More Heat than Light: Economics as Social Physics, Physics as Nature's Economics, Cambridge University Press, 1989
[4]: Roehner, B. M., Patterns of Speculation: A Study in Observational Econophysics, Cambridge University Press, 2002
[5]: Mantegna, R. N., Lévy walks and enhanced diffusion in Milan stock exchange, Physica A 179, 1991
[6]: Bouchaud, J. P., Cont, R., A Langevin approach to stock market fluctuations and crashes, European Physical Journal B 6, 2002
[7]: Farmer, J. D., Joshi, S., The price dynamics of common trading strategies, Journal of Economic Behavior and Organization 49, 2002
[8]: Levy, M., Solomon, S., New evidence for the power-law distribution of wealth, Physica A 242, 1997
[9]: Dragulescu, A. A., Yakovenko, V. M., Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States, Physica A 299, 2001
[10]: Chattejee, A., Yarlagadda, S., Chakrabarti, B. K., Econophysics of Wealth Distribution, Springer, 2005
[11]: Canning, D., Amaral L. A. N., Lee Y., Meyer, M., Stanley, H. E., A power law for scaling the volatility of GDP growth rates with country size, Economics Letters 60, 1998
[12]: Bak, P., Chen, K., Scheinkman, J., Woodford, M., Aggregate fluctuations from independent sectoral shocks: self-organized criticality in a model of production and inventory dynamics, Ricerche Economiche 47, 1993

[13]: Serrano, M. A., Boguna, M., Topology of the world trade web, Physical Review E 68, 2003
[14]: Li, X., Jin, Y. Y., Chen, G., Complexity and synchronization of the World trade Web, Physica A 328, 2003
[15]: Kwon, O., Yang, J. S., Information Flow between Composite Stock Index and Individual Stocks, arXiv:0708.0063v1, 2007
[16]: Kwon, O., Yang, J. S., Information flow between stock indices, arXiv:0802.1747v1, 2008
[17]: Ilinski, K., Gauge Physics of Finance: simple introduction, arXiv:cond-mat/9811197v1, 2008
[18]: Haven, E., Pilot-wave theory and financial option princing, International Journal of Theoretical Physics 44, 2005
[19]: Haven, E., The wave-equivalent of the Black-Scholes option price: an interpretation, Physica A 344, 2004
[20]: Choustova, O., Toward quantum-like modeling of financial processes, arXiv:quant-ph/0109122v5, 2007
[21]: Chakraborti, A., Toke, I. M., Patriarca, M., Abergel, F., Econophysics: Empirical facts and agent-based models, arXiv:0909.1974v1, 2009
[22]: Baaquie, B. E., Quantum finance, Cambridge University Press, 2004
[23]: Burda, Z., Jurkiewicz, J., Nowak, M. A., Is Ecophysics a Solid Science?, arXiv:cond-mat/0301096v1, 2003
[24]: Ball, P., Econophysics: Culture Crash, Nature 441,
[25]: Gallegati, M., Keen, S., Lux, T., Ormerod, P., Worrying trends in econophysics, Physica A, 2006
[26]: Ševčovič, D., Stehliková, B., Mikula, K., Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov, Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2009
[27]: Melicherčík, I., Olšárová, L., Úradníček, V., Kapitoly z finančnej matematiky, EPOS, 2005
[28]: Schmidt, A. B., Quantitative Finance for Physicists: An Introduction, Elsevier Academic Press, 2005
[29]: Campbell, J. Y., Low, A. S., Mackinlay, A. C., The Econometrics of

Financial Markets, Princeton University Press, 1997
[30]: Griffiths, R. B., Consistent Quantum Theory, Cambridge University Press, 2002
[31]: Zinn-Justin, J., Quantum Field Theory and Critical Phenomena, Oxford University Press, 2002
[32]: Amin, K. I., Morton, A. J., Implied volatility functions in arbitrage-free term structure models, Journal of Financial Economics 35, 1994
[33]: Baaquie, B. E., Srikant, M., Comparison of Field Theory Models of Interest Rates with Market Data, Physical Review E 69, 2004