

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Ekonomická a finančná matematika



Modelovanie finančných trhov pomocou minoritných hier

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Diplomant: Darina Graczová

Vedúci diplomovej práce: Doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

Bratislava, 2010

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNIVERZITY KOMENSKÉHO

V BRATISLAVE

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Modelovanie finančných trhov pomocou minoritných hier

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Darina Graczová

Štúdijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Štúdijný program: Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce:

Doc. RNDr. Július Vanko, PhD.

BRATISLAVA 2010

Pod'akovanie

Týmto by som sa chcela poďakovať vedúcemu mojej diplomovej práce Doc. RNDr. Júliusovi Vankovi, PhD., za tému, cenné rady a odborné vedenie počas celého spracovania témy.

Čestné prehlásenie

Týmto prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s využitím svojich poznatkov a s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave, 23.4.2010

.....

Darina Graczová

Abstrakt

Táto práca je zameraná na štúdium minoritných hier ako modelu finančných trhov. Ukazuje sa, že štatistické vlastnosti minoritných hier sa veľmi podobajú tým, ktoré možno pozorovať na reálnych trhoch. Najprv je predstavený základný model minoritnej hry a jeho charakteristické vlastnosti. Do modelu sú implementované niektoré reálne prvky trhov akými sú rôzne typy obchodníkov, transakčné poplatky, cena či kapitál. Ďalej sa práca zameriava na analýzu fázového prechodu a vznik štylizovaných faktov akými sú zhlukovanie volatility, dlhodobá autokorelácia absolútnych návratností a ťažké chvosty v jej rozdelení. Nakoniec sú porovnané vlastnosti nášho zrealizovaného modelu s vlastnosťami pozorovanými na finančných trhoch.

Kľúčové slová: minoritná hra, špekulanti, fázový prechod, zhlukovanie volatility, dlhodobá autokorelácia, mocninové správanie

Abstract

In this paper we discuss a minority game as a model of financial markets. It is shown that the statistical features of minority games are close to that observed in real markets. The first, a basic model of minority game is presented and its characteristics features are introduced. Some realistic elements are then implemented in the model, such as different types of agents, transaction fees, price or capital. The phase transition between symmetric and asymmetric phase and the emergence of stylized facts such as volatility clustering, long-range autocorrelation of absolute returns and fat tails in distribution of returns are analyzed. Finally, the features of our model are compared with that arising from real markets.

Key words: minority game, speculators, phase transition, volatility clustering, long-range auto-correlation, power-law behaviour

Obsah

1	Úvod	9
2	Základná minoritná hra	10
2.1	Systémy s viacerými hráčmi	10
2.2	Popis hry	11
2.2.1	El Farol Bar problém	12
2.3	Základné vlastnosti minoritnej hry	13
3	Dynamika minoritných hier	15
3.1	Dynamika minoritnej hry	15
3.2	Model minoritnej hry a jeho dynamika	15
3.3	Rovnice pre model minoritnej hry	16
4	Vlastnosti minoritných hier	18
4.1	Volatilita systému	18
4.2	Predpovedateľnosť systému	22
4.3	Fázový prechod	24
4.4	Priestor stratégií. Hammingova vzdialenosť	25
5	Minoritná hra ako trhový model	29
5.1	Trhy a minoritné hry	29
5.2	Typy agentov	30
5.3	Grand kanonická minoritná hra	30
5.4	Stratégie špekulantov. Hammingova vzdialenosť	31
5.5	Ekológia trhu	33

5.6 Fázový prechod	37
6 Dynamika ceny	43
6.1 Empirické a štatistické vlastnosti cien	43
6.2 Dynamika ceny v trhových hrách	44
6.3 Model so zahrnutím kapitálu	45
6.3.1 Model	46
6.4 Porovnanie vlastností zrealizovaných minoritných hier s vlastnosťami finančných trhov	46
6.4.1 Odlišnosti vo fázach	46
6.4.2 Pozorovanie vlastností zrealizovanej minoritnej hry	50
7 Diskusia k výsledkom	54
8 Záver	57
9 Referencie	58
10 Príloha	60

Kapitola 1

Úvod

Už od nepamäti sa ľudia snažili pochopiť správanie sa rôznych systémov, či už z biologickej, sociálnej alebo ekonomickej sféry. Štúdium systémov nie je zaujímavé len z pohľadu jednotlivca, ale najmä z pohľadu správania sa celého systému. Jednotlivci majú väčšinou rovnaké úmysly a očakávania a často krátkrát aj rovnaké informácie. Jedným z najviac pozorovaných systémov sú finančné trhy. Snahou vedcov, finančníkov a mnohých iných, je predpovedať budúci vývoj trhu. Snahou je vytvoriť čo najjednoduchší model, ktorý by bol schopný kopírovať priebeh finančného trhu. Jedným z najviac sledovaných v posledných dvoch desaťročiach je model minoritnej hry, ktorý obohatením o niektoré reálne prvky vykazuje veľmi podobné štatistické vlastnosti ako finančné trhy.

Cieľom mojej diplomovej práce je v prvom rade navrhnuť a vytvoriť model minoritnej hry obohatený o niektoré reálne zložky, akými sú obchodníci, ktorí na trh vstupujú iba s cieľom zbohatnúť, poplatky spojené s obchodovaním na trhu, dynamika ceny a kapitálu a ďalej porovnať vlastnosti takto vytvoreného modelu s vlastnosťami pozorovanými na finančných trhoch. V neposlednom rade nájsť a zdefinovať hranicu prechodu v modeli so zahrnutím špekulantov a bližšie preskúmať charakteristické znaky jednotlivých fáz.

Diplomová práca je rozdelená do piatich častí. V prvých dvoch predstavím motiváciu štúdia minoritných hier a ich dynamiku. V štvrtej kapitole sa zameriam na základné vlastnosti hry, akými sú volatilita a predpovedateľnosť a predstavím problém fázového prechodu. Piata kapitola je venovaná modelu so špekulantmi, ich stratégiám, ziskom a „spolužitím“ s producentami. Ukážeme si, kedy dochádza k fázovému prechodu a rozanalyzujeme vlastnosti modelu v symetrickej a asymetrickej fáze. V šiestej kapitole implementujeme do modelu jeden z najdôležitejších prvkov finančných trhov, cenu. Zavedieme dynamiku ceny a priradíme obchodníkom kapitál, ktorý sa bude počas obchodovania vyvíjať podľa ich úspešnosti. Povolíme im meniť obchodovanú čiastku, čím umožníme väčšiu škálu objemu peňazí na trhu. Na základe ich kapitálu a obchodovaného množstva ich tak diverzifikujeme na obchodníkov s väčším a menším vplyvom na trh.

Kapitola 2

Základná minoritná hra

2.1 Systémy s viacerými hráčmi

V mnohých systémoch, či už biologických alebo sociálnych, sa pozoruje správanie jedincov v ich vlastnom prostredí. Vo väčšine prípadov sa jedinci správajú takmer rovnako, pretože ako zástupcovia jedného druhu majú rovnaké potreby a taktiež podobné očakávania a domnienky. Analýza takýchto systémov je zaujímavou témou, no tiež pomerne zložitou. Finančné trhy patria medzi takéto systémy, v ktorých jedincami sú agenti a ich „potrebou“ je obchodovať s komoditami a vytvárať pritom čo najväčší zisk [3, 4, 6].

Vo finančných trhoch môže mať široko rozsiahla domnienka, že cena komodity bude rásť, za následok práve podporu rastu ceny danej komodity. Ak tu však nie sú fundamentálne príčiny pre rast ceny, bubliny, ktoré sa takto vytvárajú, majú tendenciu prasknúť. Takéto široko spoločné stratégie sú často dlhodobu sebadeštruktúrne. Preto v mnohých systémoch, najmä v takých, kde agenti súperia o vzácne zdroje, sú úspešní agenti voliaci stratégie, ktoré sa líšia od stratégií ich protivníkov. Príklady minoritných hier, s ktorými sa stretávame denne, zahŕňajú vodičov, ktorí si vyberajú menej upchatú cestu alebo ľudí, ktorí sa chcú pokojne najesť v reštaurácii. Ďalšími príkladmi takýchto systémov sú zvieratá zháňajúce potravu, firmy hľadajúce výnosné technologické inovácie alebo celebrity pokúšajúce dostať sa na čo najlukratívnejšie miesto alebo zúčastniť sa populárnych podujatí. Z pohľadu výkonu celého systému je najlepšia tá skupina stratégií, ktorej výsledkom je koordinované využitie zdroja. Priemerná úspešnosť agentov je v takom prípade relatívne dobrá. Zdroj je využitý blízko jeho obmedzeného množstva. Príklady systémov, v ktorých je takéto koordinované rozvrhnutie kritické, zahŕňajú ekologické komunity, ľudí rozhodujúcich sa, ktorý večer ísť do populárneho baru (El-Farol bar problem, B. Arthur).

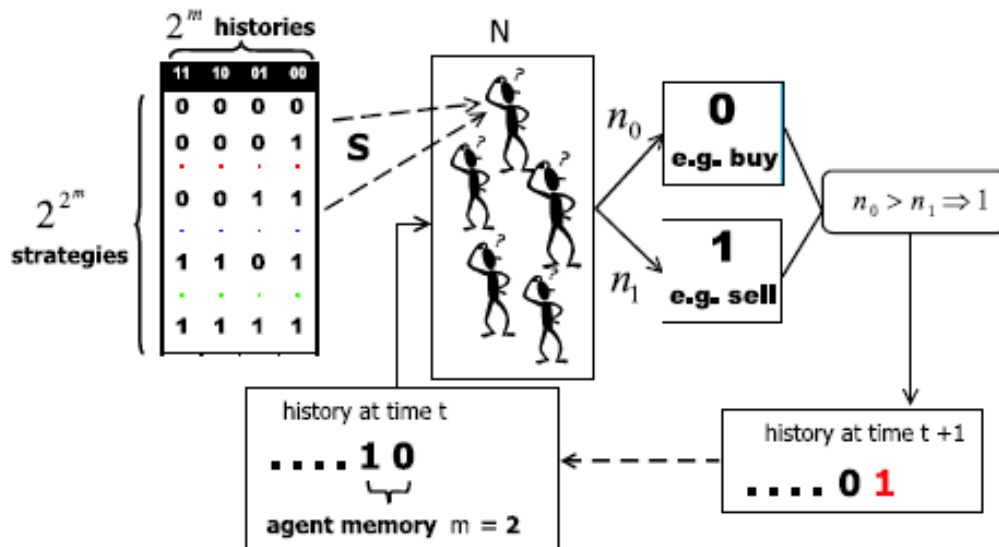
Tieto systémy sú nesmierne zložité a ich detailná dynamika môže závisieť od určitých charakteristík agentov a ich interakcií. Napriek tomu majú všetky tieto systémy niektoré spoločné základné vlastnosti. Ak však chceme porozumieť týmto typom kolektívnych systémov, potrebujeme najprv pochopiť dynamiku využitú pri väčšine z nich.

2.2 Popis základnej minoritnej hry

Štandardná minoritná hra je hra, ktorej sa zúčastní nepárny počet ľudí N . Každý zúčastnený i si vyberá medzi dvoma možnosťami, *akciami*, napríklad áno-nie, hore-dole, kúpiť-predať, $\{0,1\}$. V jednom okamihu všetci zvolia jednu z možností a tí, ktorí volili možnosť v menšine, čiže tú, ktorú volilo menší počet hráčov, vyhrávajú. Preto sa hra nazýva minoritnou hrou. V prípade, že hráči hru opakujú, pamätajú si aj výsledky z predošlých hier, na základe ktorých sa môžu ďalej rozhodovať. Každý hráč si tak vytvára vlastnú *stratégiu*, odozvu na každý možný stav hry, *históriu*, pri určitom počte M výsledkov predošlých hier, ktoré si pamätá. Príklad stratégií dvoch hráčov i, j je znázornený v tabuľke, tab. 2.1. Prehľadnejší postup hry je možné vidieť na nasledujúcej ilustrácii, obr. 2.1.

$M = 3$	stratégia hráča	
história	i	j
0 0 0	0	1
0 0 1	1	0
0 1 0	0	1
0 1 1	1	0
1 0 0	1	1
1 0 1	0	1
1 1 0	0	1
1 1 1	0	1

Tab. 2.1 Ak si hráči pamätajú výsledky posledných $M = 3$ hier, potom počet všetkých histórií, ktoré môžu nastať, je $2^M = 8$. Na istú históriu jednotliví hráči nejako reagujú. Napríklad ak výsledky posledných troch hier boli (0 1 1), hráč i bude voliť vždy 1, zatiaľ čo hráč j bude voliť vždy 0. Na každý stav si každý hráč volí jednu z dvoch akcií. Súbor akcií tvorí stratégiu hráča. Počet všetkých možných stratégií je $2^{2^M} = 256$.



Obr. 2.1 Hry sa zúčatní N hráčov, každý s dvoma možnými akciami $\{0,1\}$. Počet hier, ktorých výsledky si pamätajú je $M = 2$. Hráči si na základe posledného stavu - histórie hry (1 0) a svojich stratégií (tab. 2.1) volia akciu 0 alebo 1 v tom istom okamihu. Potom sa spočítajú počty pre jednotlivé akcie (akciu 0 volilo n_0 hráčov, akciu 1 n_1 hráčov) a vyhodnotí sa výsledok hry. Pre $n_0 > n_1$ je víťazná strana 1, pretože ju volilo menej hráčov. Nová história hry bude preto (0 1). Hra pokračuje ďalej rovnakým spôsobom.

2.2.1 El Farol Bar problém

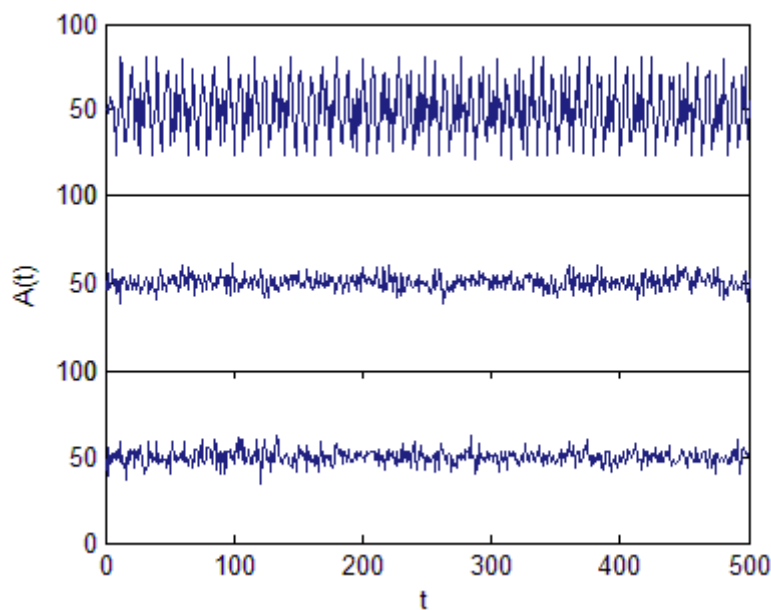
El Farol Bar problém je najznámejší príklad minoritnej hry [12, 13]. Ako prvý ju predstavil B. Arthur v roku 1994. V istej malej dedinke so sto obyvateľmi je jeden veľmi obľúbený podnik, El Farol Bar. Podstata problému spočíva v tom, že má obmedzenú kapacitu okolo 60 ľudí, preto ak je tam návštevníkov viac, v bare je tlačienica a ľudia sa nebavia. Rovnako sa však nebavia, ak je tam návštevníkov málo. Preto optimálny počet návštevníkov je 60. Občania dedinky sa nedohadujú a nevedia, kto tam príde a kto nie. Vedia ale, či bola minulé večery zábava alebo nie. Vynára sa otázka, aká je návštevnosť v bare v jednotlivé večery.

Hoci tento problém nespĺňa práve všetky podmienky klasickej minoritnej hry, ukazuje sa, že použitím minoritnej hry ako modelu, sa dá tento systém pekne popísať. Pomocou simulácií možno ukázať, že počet návštevníkov baru sa po krátkom čase bude pohybovať na úrovni 60 ľudí.

2.3 Základné vlastnosti

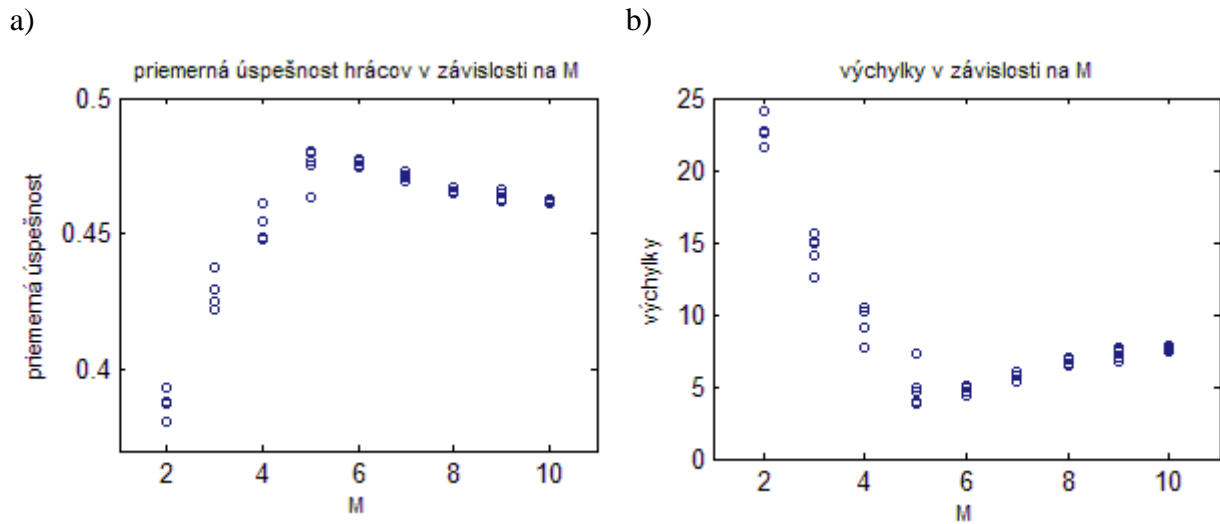
Teraz si ukážeme niektoré základné prvky správania sa minoritnej hry ako systému hráčov [6]. Jedným z hlavných parametrov takéhoto systému je pamäť hráčov M . Na základe predošlých výsledkov kôl hry sa hráči rozhodujú, akú akciu budú v ďalšom kole voliť. Uvažujme, že hráči majú možnosť vybrať si medzi dvoma akciami z množiny $\{-1, +1\}$. Reakcia hráča na každý možný stav výsledku posledných M kôl hry je zapísaná v jeho stratégii, ktorú si na začiatku hry zvolí. Hráč môže mať aj viac stratégií, z ktorých si vyberie vždy tú, ktorej odozvy na výsledky sú v priemere lepšie.

V hre, ktorej sa zúčastní nepárny počet hráčov, nikdy nenastane remíza. Očakávame však, že veľkosť víťaznej skupiny sa bude pohybovať okolo polovice počtu hráčov. To aké veľké rozdiely medzi veľkosťou víťaznej a porazenej skupiny nastanú, závisí najmä od veľkosti pamäte hráčov. Jednou zo základných vlastností minoritnej hry je, že čím väčšiu pamäť majú hráči, tým v priemere menšie tieto rozdiely budú, aj keď od istého M rozdiely trochu porastú, obr. 2.3 a). Na obr. 2.2 vidíme počet hráčov voliacich jednu z akcií v každom kole hry.



Obr. 2.2 Počet hráčov voliacich akciu $+1$ v každom čase t . Parametre: $N = 101$, $S = 2$, zhora $M = 2, 5, 7$.

Rovnaká závislosť bude platiť aj pre úspešnosť hráčov. Na obr. 2.3 b) je znázornená priemerná úspešnosť hráčov v závislosti od ich pamäte M .



Obr. 2.3 a) Priemerná úspešnosť hráčov ako funkcia M a b) k tomu prislúchajúca priemerná výchyľka počtu hráčov od polovice v závislosti na M . Parametre: $N = 101$, $S = 2$, $M = 2, \dots, 10$. Pre každé M je v grafe zaznamenaných 5 meraní (jedna guľička = jedna hra).

Z obrázkov vyplýva, že zvyšovaním pamäte hráčov sa určite zvyšuje aj ich schopnosť ich adaptácie, hoci po dosiahnutí určitej veľkosti pamäte sa rozdiely medzi skupinami voliacimi stranu +1 a stranu -1 mierne zväčšujú a ich úspešnosť mierne klesá. Tomuto pozoruhodnému správaniu sa budeme podrobne venovať v kapitole 4.

Kapitola 3

Dynamika minoritných hier

3.1 Dynamika minoritnej hry

Model minoritnej hry, ako binomický algoritmus, bol pôvodne napísaný bez jedinej rovnice [3]. Aby sme pochopili dynamiku minoritnej hry, ako prvé sa musíme zamerať na kľúčové dynamické rovnice. Ak chceme pomocou minoritnej hry modelovať zložité mechanizmy akými sú aj finančné trhy, budeme potrebovať do modelu zahrnúť niekoľko dôležitých prvkov. Jeden z najdôležitejších elementov, ktorý by mal model zahrňovať je, že hráči vytvárajú svoje stratégie na základe spracovania informácie o minulých situáciách, ktoré v systéme nastali a zároveň boli vytvorené ich akciami. Model treba navrhnuť tak, aby bol ľahko modifikovateľný, no zároveň ostal jednoduchý.

3.2 Model minoritnej hry

Uvažujme N hráčov a množinu akcií $a_i(\cdot) \in \{-1, 1\}$, z ktorých si každý hráč i v každom čase t jednu zvolí. Nech $A(t)$ – *attendance* je dané ako suma akcií všetkých hráčov v čase t , teda

$$A(t) = \sum_{\forall i} a_i(t).$$

Potom zrejme platí, že ak $A(t) > 0$, víťaznou stranou je skupina, ktorá v čase t volila akciu -1 a pre $A(t) < 0$ víťazí skupina voliaci akciu 1.

V každom čase t je hráčom poskytnutá informácia $\mu(t)$. Na základe druhu informácie μ , rozdeľujeme hry na *endogénne* a *exogénne*. V endogénnych hrách využívajú hráči na určenie ďalšej svojej voľby reálnu históriu hry, t.j. výsledky posledných kôl hry. Pri veľkosti pamäte hráča M môže nastať 2^M rôznych histórii, vid' tab. 2.1. Platí, že $\mu \in \{1, \dots, 2^M\}$. Exogénne hry využívajú náhodnú históriu. Počet možných histórií tak už nie je obmedzený na 2^M , môže to byť hocaké celé číslo, obyčajne označované ako P . Náhodná informácia reprezentovaná číslom $\mu(t)$ z množiny $\{1, \dots, P\}$ je v každom čase t vybratá z rovnomerného rozdelenia. Pre jednoduchosť budeme v celej práci považovať hru za exogénnu s $P = 2^M$.

Každý hráč má k dispozícií S stratégií, ktoré sa skladajú z akcií $\{-1,1\}$. Stratégie zostávajú počas hry nemenné. Každý strategii sa počíta skóre, tzv. virtuálne skóre, na základe toho, či by boli úspešné, ak by boli v danom čase volené. Možností počítania skóre je viacero, my sa zameriame na lineárne počítanie skóre:

$$U_{i_s}(t+1) = U_{i_s}(t) - a_{i_s}^{\mu(t)} A(t),$$

kde $a_{i_s}^{\mu(t)}$ je akcia hráča i , ktorú volil na základe svojej stratégie s a informácie $\mu(t)$. Stratégia s je pozitívne odmenená, ak predpovedá správne minoritné znamienko, teda ak $a_{i_s}^{\mu} = -\text{sign} A(t)$.

Nakoniec je vhodné zovšeobecniť najpravdepodobnejší spôsob, akým sa hráči rozhodujú. V klasickej minoritnej používa každý hráč i v čase t stratégiu s , ktorá dosahuje najvyššie skóre, t.j.

$$s = \arg \max_{j \in S} U_{i_j}(t).$$

S takouto podmienkou sa však ťažko pracuje analyticky. Jedným spôsobom ako predísť tomuto problému je uchýlenie sa k pravdepodobnostnému modelu:

$$\text{Prob}\{j(t) = s\} = \frac{e^{\Gamma U_j(t)}}{\sum_{s'} e^{\Gamma U_{j'}(t)}},$$

kde $\Gamma > 0$. Parameter Γ môže byť interpretovaný ako senzitivita voľby na marginálnu informáciu. Toto pripomína Gibsovo rozdelenie (pre fyzikov) a Γ vystupuje ako „individuálna inverzia teploty“, vďaka čomu dostala minoritná hra názov Termálna minoritná hra. Rovnica je medzi ekonómami známa ako Logit model.

Práca je experimentálneho charakteru, preto pravdepodobnostný model uvažovať nebudeme, uvedený je len pre zaujímavosť. Hráči budú svoje stratégie voliť na základe ich najvyššieho virtuálneho skóre v každom čase.

3.3 Rovnice pre model minoritnej hry

Zhrnutie zjednodušeného modelu MG popisuje nasledovný systém rovníc:

- $s = \arg \max_{j \in S} U_{i_j}(t)$ (voľba stratégie agenta)
- $Prob\{\mu(t) = v\} = \frac{1}{P}, v = 1, \dots, P$ (informácia)
- $A(t) = \sum_{i=1}^N a_{i_s}^{\mu(t)}$ (previs dopytu)
- $U_{i_s}(t+1) = U_{i_s}(t) - a_{i_s}^{\mu(t)} A(t)$, (virtuálne skóre)

Je vhodné poznamenať, že v minoritnej hre sa vyskytujú dva zdroje náhodnosti. Jednou je voľba informácie $\mu(t)$ v každom čase t a druhou voľba stratégií s jednotlivým hráčom na začiatku hry.

Kapitola 4

Vlastnosti minoritných hier

4.1 Volatilita systému

Volatilita systému $A(t)$ je definovaná ako priemerná hodnota štvorcov výchýliek A :

$$\sigma^2 \equiv \langle A^2 \rangle.$$

Čím menšia je σ^2 , tým väčšia je minoritná skupina. Inými slovami, σ^2 je meradlo *globálnej efektivity* systému v zmysle globálneho zisku [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Ak je funkcia výplat lineárna, výplata hráča i je

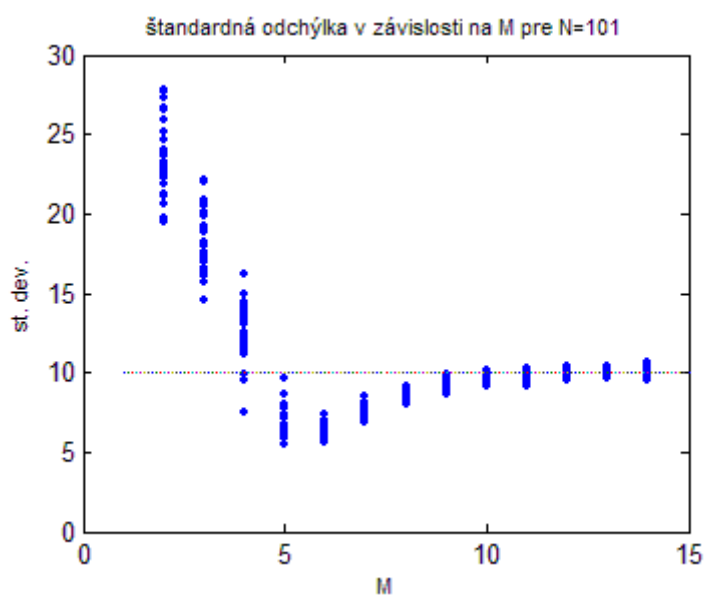
$$g_i(t) = -a_i(t)A(t),$$

potom totálna výplata daná hráčom je

$$\sum_i g_i(t) = -\sum_i a_i(t)A(t) = -A^2(t),$$

teda σ^2 meria priemernú *totálnu stratu* hráčov v čase.

Správanie sa závislosti štandardnej odchýlky σ od veľkosti pamäte hráčov M je znázornené na obr. 4.1.

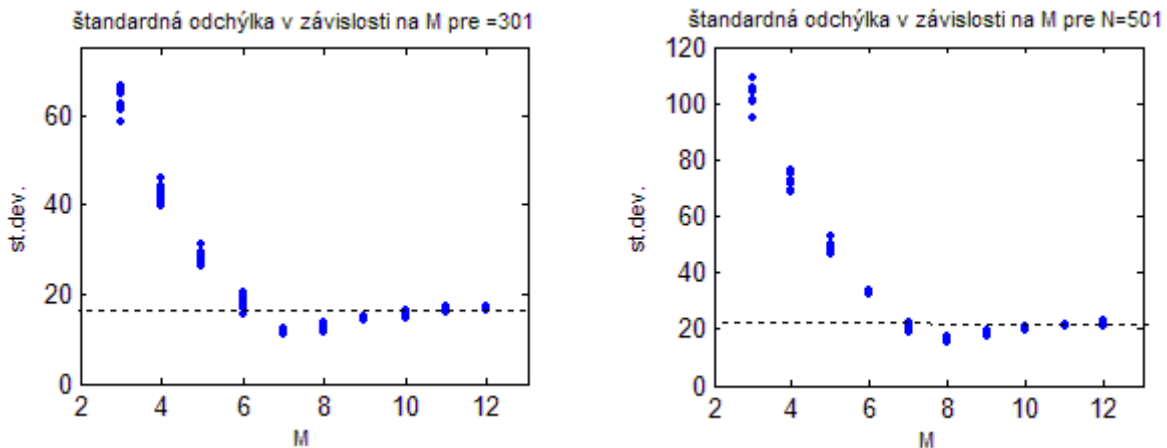


Obr. 4.1 Štandardná odchýlka ako funkcia veľkosti pamäte M pre $N = 101$ a $S = 2$. Pre každé M bolo spravených 32 nezávislých meraní ($t_0 = 100, T = 1000$). Prerušovaná čiara v grafe je hodnota σ pre náhodnú hru.

Zaznamenávame nasledujúce vlastnosti:

- pre malé M je priemerná hodnota veľká (oveľa väčšia ako pri náhodnom volení hráčov, napr. ako pri hádzaní mincou). Pre $M < 6$ ($N = 101$) je taktiež charakteristický veľký rozptyl σ pre rôzne hry pri tom istom M
- σ nadobúda svoje minimum pre $M = M_c = 6$, v ktorom je σ menšia ako v náhodnej hre. Taktiež je vidieť, že rozptyl σ pre $M \geq M_c$ nie je taký výrazný ako v prípadoch, kde $M < M_c$
- pre zvyšujúce sa M , za M_c , sa hodnota σ zvyšuje len pomaly a pre veľké M sa blíži k hodnote σ pri náhodnej hre [4].

Je dôležité ale poznamenať, že pre iný počet hráčov N je aj hodnota M_c iná. Teda minimum σ sa pre iný počet hráčov nadobúda v inom M_c . Grafy sú však veľmi podobné a minimum M_c je proporcionálne $\ln N$. Pre ilustráciu je nasledovný obrázok, obr. 4.2.

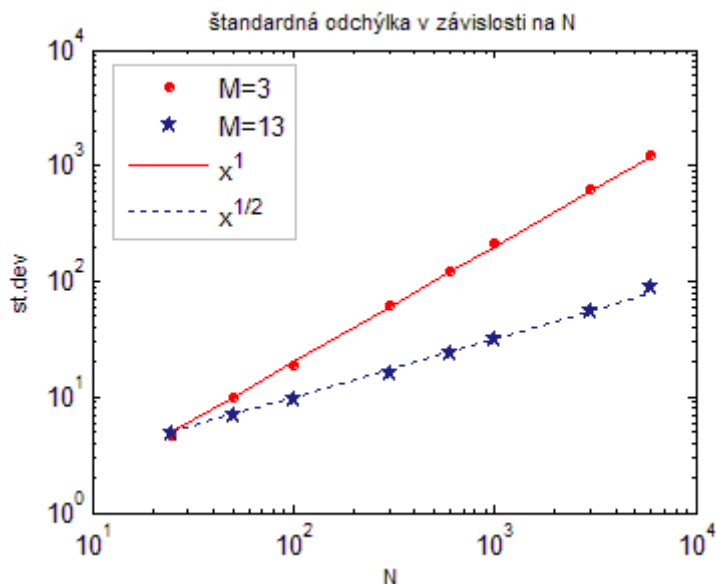


Obr. 4.2 Naľavo – štandardná odchýlka ako funkcia M pre $N = 301, S = 2$. Minimum σ je v $M_c = 7$. Napravo - štandardná odchýlka ako funkcia M pre $N = 501, S = 2$. Minimum σ je v $M_c = 8$. (Pre každé M bolo spravených 10 nezávislých meraní.)

Pozrime sa teraz na správanie sa σ ako funkcie od N . σ ako aj jej rozptyl sa správajú veľmi podobne pri rôznom počte hráčov N . Pre hodnoty $M < M_c$ je hodnota σ veľká a jej rozptyl taktiež. Za dosiahnutým minimom M_c sa hodnota σ pomaly zvyšuje, rozptyl sa znižuje, a konverguje k hodnote σ pri náhodnej hre. Zoberme si preto dve hodnoty M tak, aby bola jedna dostatočne naľavo od M_c pre všetky pozorované N a druhá napravo.

Pre škálu hodnôt N , ktorú použijeme v nasledujúcom grafe, sa $M = 3$ nachádza naľavo od minima na krivke σ vs. M ($3 < M_c$) a $M = 13$ napravo ($13 > M_c$). Obr. 4.3 znázorňuje závislosť σ od N na logaritmickú škálu. Pre $M = 3$ je σ proporcionálna N , zatiaľ čo pre

$M = 13$ je σ proporcionálna \sqrt{N} . Pre pevné M tak platí, že ak $M < M_c$, σ je proporcionálna N , zatiaľ čo ak $M > M_c$, σ je proporcionálna \sqrt{N} . Pre rozptyl σ ako funkcie N sa dá ukázať rovnaká vlastnosť.



Obr. 4.3 Štandardná odchýlka ako funkcia počtu hráčov N pri zafixovanej hodnote M . Červenou sú znázornené hodnoty σ pre $M = 3$, modrou pre $M = 13$ pri hodnotách $N = 25, 50, 100, 300, 600, 1000, 3000, 6000$.

Prechod medzi týmito dvoma rôznymi správami sa uskutočňuje v určitom pomere funkcií M a N . Kolektívne správanie teda nezávisí len na M alebo N , ale ukázalo sa, že na pomere $P = 2^M$ – počtu možných informácií μ a počte hráčov N . Definujme tento pomer ako

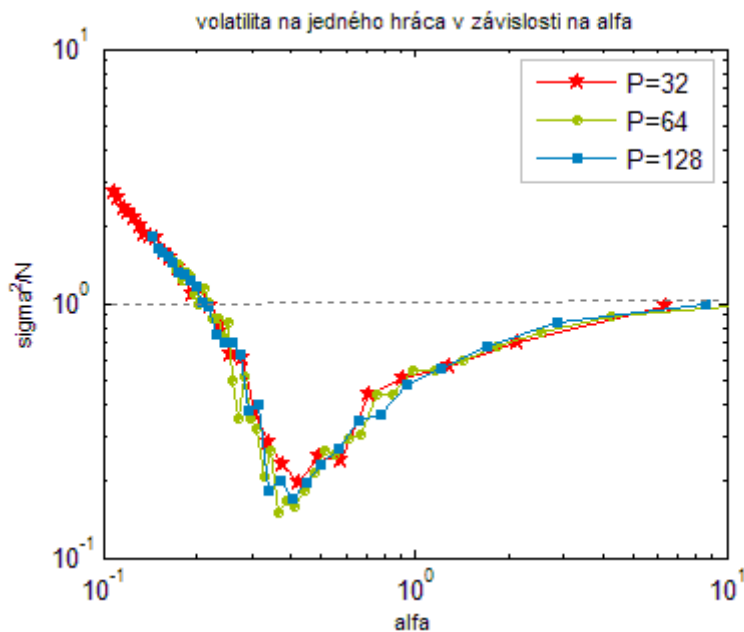
$$\alpha \equiv \frac{2^M}{N} = \frac{P}{N}.$$

Ako už bolo spomenuté, variácia σ^2 je meradlom efektivity. Čím menšia je hodnota σ^2 , tým menšia je majoritná skupina strácajúcich hráčov. To prislúcha situácii, kde $A(t) \approx 0$, alebo inak $\sigma^2 \approx 0$, a teda zhruba polovica hráčov $N/2$ stráca a druhá polovica $N/2$ berie. Detailná analýza ukázala, že globálny zisk je v podstate daný ako $-\sigma^2$. Vzhľadom na vnútorný charakter hry, minoritná hra je hra so záporným súčtom, sú celkové zisky vždy záporné, resp. ≤ 0 .

Správanie sa volatility σ^2 ako funkcie parametrov modelu M , resp. P , a N ukazuje celkom pozoruhodné správanie, obr. 4.4:

- Simuláciami sa dá ľahko ukázať, že σ^2/N pre $S \geq 2$ kvalitatívne závisí len od pomere P/N , nie od počtu stratégií, ktorými jednotliví hráči disponujú. Preto vo všetkých simuláciách položíme $S = 2$.

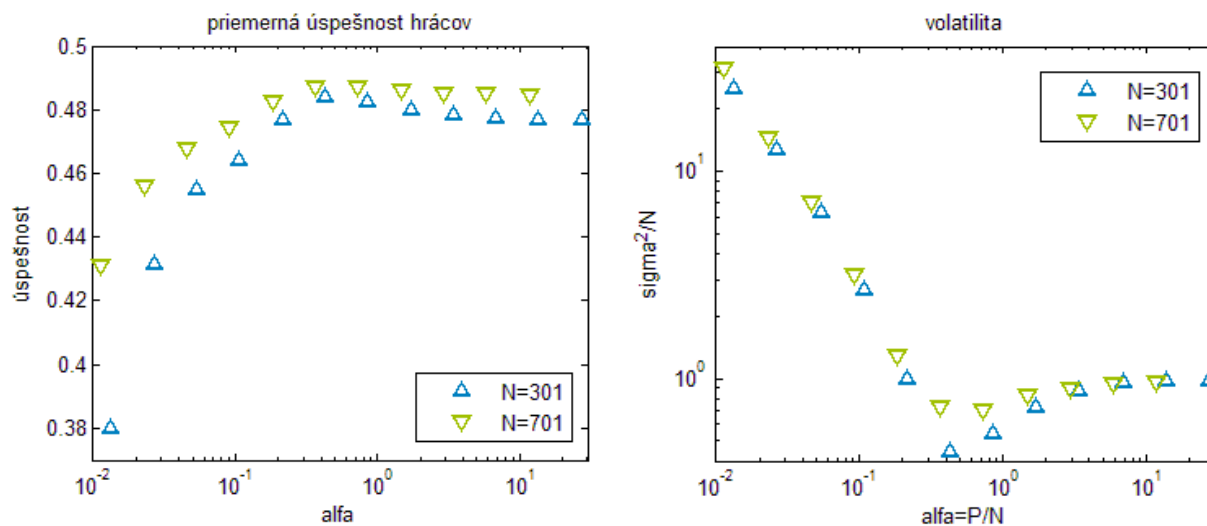
- Pre veľké hodnoty α sa σ^2/N blíži k hodnote volatility pri náhodnom volení hráčov, kedy sa $\sigma^2/N \cong 1$. Hráči sa ako-keby v každom čase t rozhodujú nezávisle medzi akciami $a_t = \{-1, 1\}$.
- Pre malé hodnoty α je priemerná hodnota σ^2 veľmi veľká a ukázali sme, že dokonca platí, že je proporcionálna N , čo znamená, že veľkosť skupiny strácajúcich hráčov je oveľa väčšia ako $N/2$.
- V okolí $\alpha = 0.34$ je volatility menšia ako v náhodnom prípade. Minimum funkcia dosahuje práve v tejto hodnote. V tejto oblasti sa veľkosť strácajúcej skupiny pohybuje okolo polovice celkového počtu.



Obr. 4.4 Volatilita na jedného hráča ako funkcia kontrolného parametra α pri $S = 2$ a $P = 32, 64, 128$ (červená, zelená, modrá).

Skutočnosť, že σ v určitom intervale α klesá pod hodnotu dosahovanú v náhodnom prípade, naznačuje možnosť, že agenti koordinujú za cieľom dosiahnuť stav, v ktorom dochádza k čo najmenšiemu globálnemu plytvaniu. Z trhového hľadiska to znamená, že hráči dokážu využiť prítomnú informáciu a predpovedať budúci pohyb trhu tak, že globálna efektivita σ^2 je minimálna. V tomto zmysle je *adaptácia* dobrým mechanizmom pre hráčov vedúcim k dosiahnutiu lepšieho riešenia problému minoritnej hry. Riešenie tak prichádza cez koordináciu hráčov, čo je v protiklade s ich sebeckým počínaním si. Globálna koordinácia, ako lepšie riešenie problému súperenia o zdroje, je bežná v rôznych hrách a situáciách.

Hoci koordinácia v minoritnej hre nie je kompletná a najlepší výsledok, v ktorom sa alternujúce skupiny rozdelia na polovicu, sa nikdy nedosiahne, priemerná úspešnosť hráčov, t.j. frekvencia pripojenia sa hráča k minoritnej skupine, dosahuje v určitom bode hodnotu rovnú takmer $1/2$. Najvyššie hodnoty dosahuje v bode, v ktorom volatilita nadobúda svoje minimum, obr. 4.5.



Obr. 4.5 Priemerná úspešnosť hráčov ako funkcia pomeru α . Vľavo volatilita na jedného hráča ako funkcia α . V okolí $\alpha = \alpha_c = 0.34$ dosahuje funkcia úspešnosti svoje maximum a funkcia σ^2/N svoje minimum pre všetky N . Na obrázku sú realizácie hry pre $N = 301, 701$ (modrá, zelená), $S = 2$.

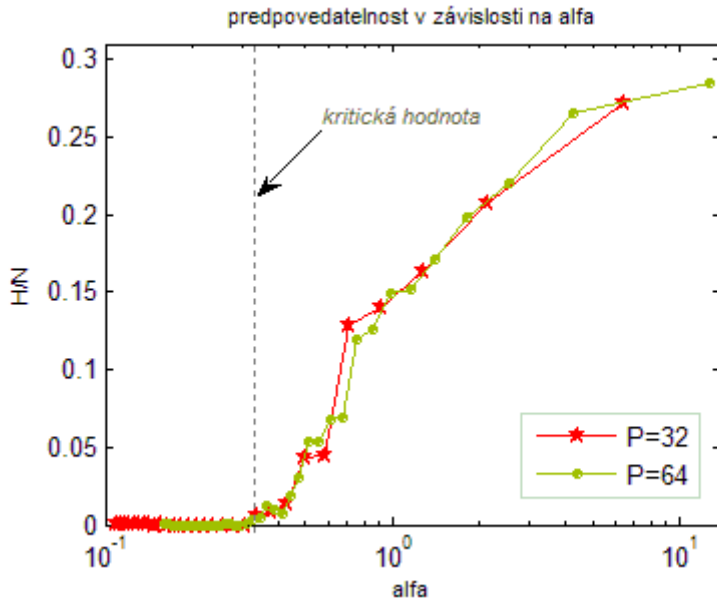
4.2 Predpovedateľnosť systému

Predpovedateľnosť systému H je meradlom korelácie výsledku $A(t)$ s informáciou $\mu(t)$ [1, 2, 3, 6, 8]. Teda či je kladný výsledok $A(t)$ viac alebo menej pravdepodobný, ak máme k dispozícii informáciu μ . Ak $H > 0$, potom poznanie informácie μ nám prezrádza niečo o znamienku $A(t)$. Vďaka tomu majú niektorí hráči kladný zisk. Predpovedateľnosť H je daná nasledovným vzťahom:

$$H = \frac{1}{P} \sum_{\mu=1}^P \langle A | \mu \rangle^2 = \overline{\langle A \rangle^2},$$

kde $\langle A | \mu \rangle$ je priemer $A(t)$ závislý na informácii $\mu(t) = \mu$. Ak $\langle A | \mu \rangle \neq 0$ aspoň pre jedno μ , teda $H > 0$, potom je systém štatisticky predpovedateľný. Situácia $H = 0$ prislúcha plne informačne-efektívnemu trhu, v ktorom sa nenachádza žiadna využiteľná informácia, teda

žiadna arbitrážna príležitosť. Nasledujúci obrázok znázorňuje závislosť predpovedateľnosti na jedného agenta od pomeru α , obr. 4.6.



Obr. 4.6 Predpovedateľnosť na jedného hráča ako funkcia kontrolného parametra α pre $P = 32, 64$ (červená, zelená) a $S = 2$. Vertikálna čiara znázorňuje prechod medzi symetrickou a asymetrickou fázou.

Predpovedateľnosť je po istú hodnotu α nulová, potom nastáva zlom a hodnota predpovedateľnosti sa postupne zvyšuje. Hodnota, v ktorej zlom nastáva, sa nazýva *kritická hodnota* označovaná ako α_c . Kritická hodnota α_c určuje tzv. *fázový prechod* medzi *symetrickou fázou*, kde $\alpha < \alpha_c$ a *asymetrickou fázou*, kde $\alpha > \alpha_c$. Symetria, ktorá je tak nalomená, spočíva v priemere $A(t)$ podmienenom na histórii μ , $\langle A|\mu \rangle$.

Zaujímavé pozorovanie pochádza z analýzy pravdepodobnosti P^μ , či je minorita na jednej danej strane podmienená informáciou μ [8]. P^μ je funkcia definovaná ako

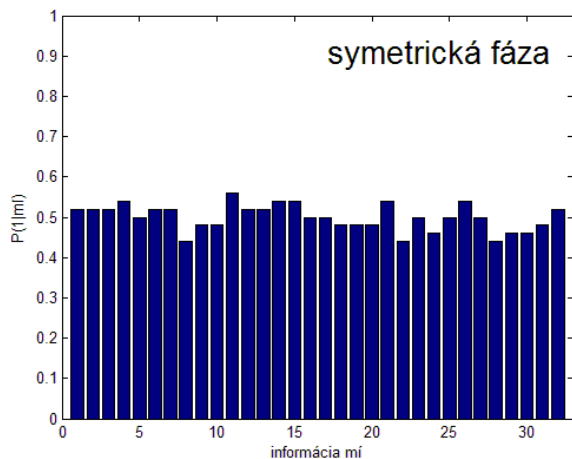
$$P^\mu = \langle \theta(A)|\mu \rangle,$$

$$\text{pričom } \theta(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}.$$

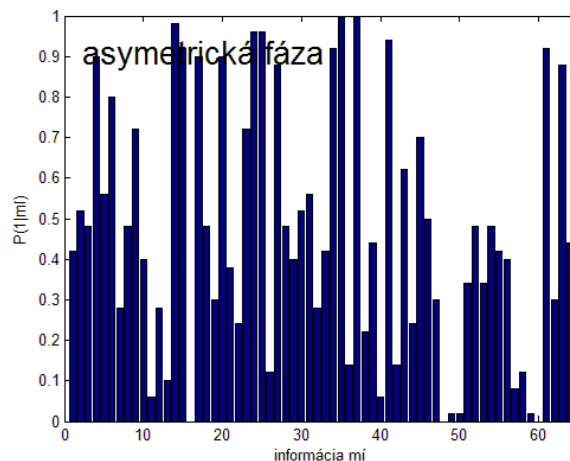
Ak pozorujeme pravdepodobnosti víťazstva určitej akcie pri každej informácii μ , zisťujeme, že sa správajú úplne odlišne v oboch fázach. Definujme $P^\mu = \langle 1|\mu \rangle$ ako podmienenú pravdepodobnosť akcie „1“ ako minoritnej skupiny na informácii μ . Potom $P^\mu = \langle 1|\mu \rangle$ sa približne rovná $1/2$ pre všetky μ , ak $\alpha < \alpha_c$. Obr. 4.7 a) ilustruje pravdepodobnosť výhry akcie „1“ pre $\forall \mu$ pri $\alpha \approx 0.317$. Pre $\alpha > \alpha_c$ už histogram $P^\mu = \langle 1|\mu \rangle$ nie je „plochý“ ako možno vidieť na obr. 4.7 b), kde $\alpha \approx 0.634$. Toto pozorovanie indikuje, že pre hodnoty pod α_c nie je prítomná žiadna využiteľná informácia vzhľadom k tomu, že obidve akcie majú rovnakú pravdepodobnosť výhry. Fáza, v ktorej $\alpha < \alpha_c$, sa nazýva *nepredpovedateľná* alebo

symetrická fáza. Na druhej strane fáze, v ktorej $\alpha > \alpha_c$, hovoríme *predpovedateľná* alebo *asymetrická fáza*.

a)



b)



Obr. 4.7 Histogram pravdepodobností $P^\mu = \langle 1|\mu \rangle$ ako víťaznej akcie „1“ podmienej na informácii μ pre hru s $N = 101$ hráčmi a $S = 2$ stratégiami. (a) symetrická fáza pri $P = 32$, $\alpha \approx 0.317$ a (b) asymetrická fáza pri $P = 64$, $\alpha \approx 0.634$.

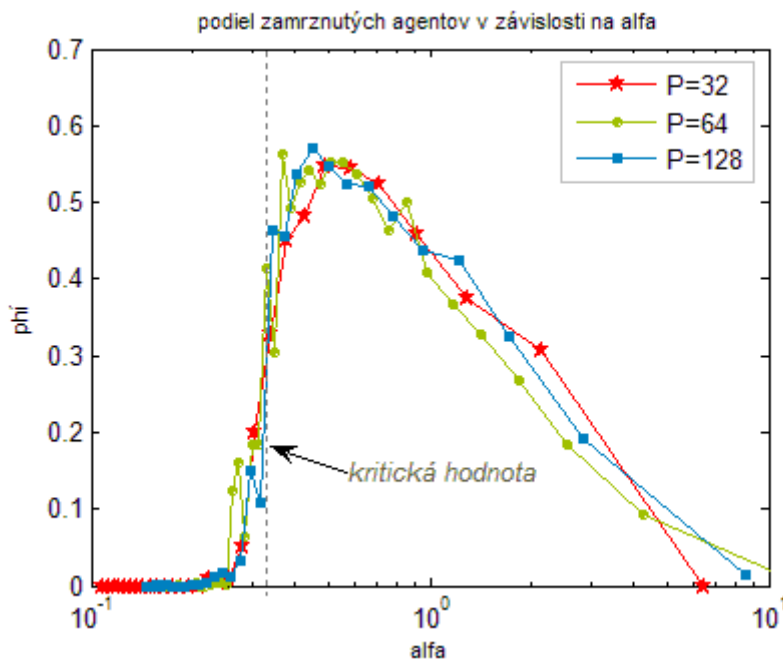
4.3 Fázový prechod

Ako sme si ukázali, fázový prechod sa uskutočňuje v okolí hodnoty $\alpha_c \cong 0.34$. To znamená, že agenti prichádzajúci do hry pri zafixovanej hodnote M využívajú predpovedateľnosť $A(t)$ a tým ju redukujú. Z pohľadu komunity, α_c oddeľuje dve oblasti, v ktorých adaptácia je úspešná v dosiahnutí dobrého globálneho riešenia problému minoritnej hry. Nasledovná tabuľka, tab. 4.1, zhrňa výsledky volatility a predpovedateľnosti v oboch fázach.

	oblasť $\alpha < \alpha_c$	oblasť $\alpha > \alpha_c$
volatilita / globálna strata	neefektívna (horšia ako pri náhodnej hre)	efektívna (lepšia ako pri náhodnej hre)
predpovedateľnosť / arbitrážna príležitosť	efektívna (žiadna prítomná informácia, $H = 0$)	neefektívna (prítomná arbitrážna príležitosť, $H \neq 0$)

Tab. 4.1 Pozorované vlastnosti (volatilita a predpovedateľnosť) v jednotlivých fázach.

Ako alternatívu k H môžeme považovať podiel tzv. *zamrznutých agentov* [3, 5, 6]. Zamrznutí agenti sú agenti, ktorí nezávisle od času používajú tú istú stratégiu. Z ďalšieho obrázku, obr. 4.8, vyplýva, že podiel zamrznutých agentov ϕ vo fáze, kde $\alpha < \alpha_c$, je nulový. To znamená, že každý agent zmení svoju stratégiu aspoň raz. Avšak v blízkom okolí kritickej hodnoty α_c , tesne poprechode do asymetrickej fázy, dosahuje hodnota zlomku ϕ svoje maximum. Vtedy sa na jednu stratégiu počas celej hry fixuje viac ako polovica agentov. Po tejto hodnote α hodnota podielu ϕ rýchlo klesá a pre α veľké sa $\phi \rightarrow 0$. To znamená, že pokiaľ je množstvo možných informácií oveľa väčšie ako je počet hráčov, stratégie, ktoré obsadzujú, tvoria len malý zlomok z celkového ich počtu, preto môžu byť úplne odlišné. Ich virtuálne skóre je takmer rovnaké a počas hry sa stratégie jedného hráča môžu vo svojom skóre medzi sebou „predbiehať“. Hráči tak majú tendenciu počas hry viackrát zmeniť svoju stratégiu.



Obr. 4.8 Podiel zamrznutých agentov ϕ v hre ako funkcia kontrolného parametra α pre $P = 32, 64, 128$ (červená, zelená, modrá) a $S = 2$. Prienik všetkých troch čiar sa uskutočňuje približne v α_c .

4.4 Priestor stratégií. Hammingova vzdialenosť

Vzhľadom na charakter minoritnej hry je cieľom hráčov čo najviac sa odlišiť od svojich protihráčov [6, 7, 9]. Ak by všetci používali tú istú stratégiu, všetci by stratili. Menšinové pravidlo ich núti vybrať stratégiu, ktorá ich v spoločnosti robí jedinečnými. Stratégií je však obmedzené množstvo dané množstvom možných informácií P . Počet všetkých možných stratégií je tak obmedzený na $2^P = 2^{2^M}$. Očakávame teda, že hráči sa odlišujú, ak je počet stratégií väčší ako ich počet N , kým pri menšom počte možných stratégií sa hráči môžu

správať viac ako dav. Inak povedané, zmenu v správaní sa systému by sme mali pozorovať pre $N \sim 2^P = 2^{2^M}$. Túto zmenu však pozorujeme skôr a to vtedy, keď $N \sim P = 2^M$. Všetky možné stratégie pre $M = 2$, resp. $P = 4$ možno vidieť v tab. 4.2.

$P = 4$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2^P stratégií	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Tab. 4.2 Priestor stratégií pre $P = 4$ a akcie z množiny $\{0,1\}$.

Vysvetliť sa to dá tak, že hoci $2^P = 2^{2^M}$ je počet všetkých možných stratégií, $P = 2^M$ je dimenzia priestoru stratégií, ktoré sú úplne odlišné. Hovoríme, že dve stratégie sú úplne odlišné, ak sú odlišné všetky ich komponenty. Kvantitatívnym meradlom je Hammingova vzdialenosť. Ak chcú byť hráči úplne odlišní, musia si vybrať úplne odlišné stratégie a to je možné len ak $N < P$. Ak $N > P$, vznikajú skupinky hráčov, ktorých stratégie sú veľmi podobné. Skupinky používajúce rovnakú najlepšiu stratégiu vytvoria *davy*, pretože na dostupnú informáciu reagujú rovnako.

Rozdielne správanie volatility σ^2/N možno pochopiť v zmysle týchto davov.

- Pokiaľ je $N < P$, nemôžu mať všetci hráči úplne odlišné stratégie a tak čím väčšie je N , tým väčší počet stratégií z celkového ich počtu je rozobratých medzi nich. Tak vznikajú skupinky s podobnými, prípadne rovnakými najlepšimi stratégiami v tom istom čase t . Veľkosť takéhoto davu je rádu $\mathcal{O}(N)$, čo znamená, že aj variancia $\sigma^2/N \sim N$, ako sme ukázali už v predošlej časti, obr. 4.3.
- Na druhej strane, ak $N \ll P$, davy nie sú veľké, respektíve najlepšia stratégia je takmer pre každého hráča iná. Hráči reagujú nezávisle, čo pripomína náhodnú hru. Preto $\sigma^2/N \cong 1$.
- Nakoniec pre $N \sim P$, k davom vznikajú tzv. *anti-davy*, ktorých najlepšia stratégia je úplne opačná k najlepšej stratégii *davu*. Volatilita dosahuje v tejto oblasti svoje minimum. V extrémnom prípade by veľkosť davu bola $N/2$ a $\sigma^2/N \cong 0$.

Iná možnosť ako charakterizovať správanie volatility, resp. formáciu *davov* a *anti-davov*, je merať vzdialenosť medzi najlepšimi stratégiami všetkých hráčov. Definujme najprv priemernú Hammingovu vzdialenosť dvoch hráčov ako:

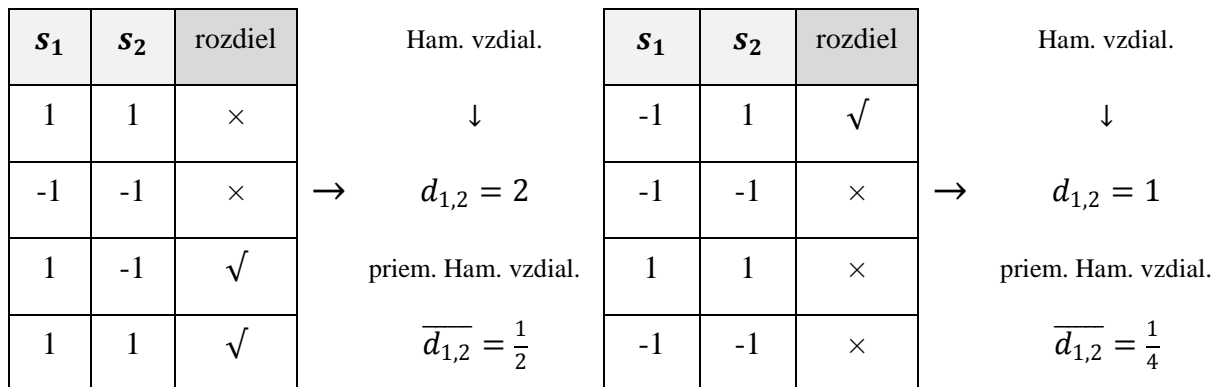
$$\overline{d}_{i,j} = \frac{(a_i - a_j)^2}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} a_i a_j,$$

pričom $1 - \overline{d}_{i,j}$ vyjadruje pravdepodobnosť, že hráči budú voliť v rovnakom čase tú istú akciu. Priemerná Hammingova vzdialenosť všetkých hráčov tak bude daná vzťahom:

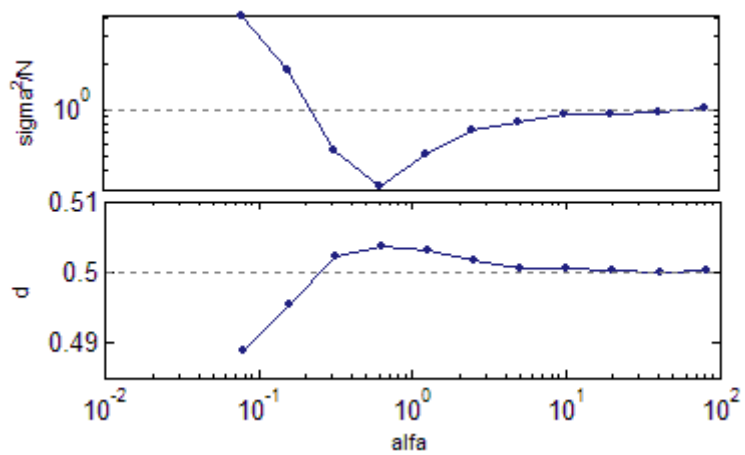
$$\overline{d}^{best} = \frac{1}{PN(N-1)} \sum_{i,j} \overline{d}_{i,j}^{best},$$

kde $\overline{d}_{i,j}^{best}$ je vzdialenosť najlepších stratégií dvoch hráčov. Inak povedané, Hammingova vzdialenosť medzi dvoma stratégiami je počet odlišných akcií v stratégiách.

Príklad.



Z nasledujúceho obrázka vidíme, že hráči sa snažia medzi sebou odlišiť a tým maximalizovať vzdialenosť medzi ich najlepšimi stratégiami, obr. 4.9. Pri maximálnej vzdialenosti stratégií hráčov sa dosahuje minimálna volatilita. Teda čím väčšia je vzdialenosť medzi agentami, tým menšia je strata celej spoločnosti. Pre $\alpha \rightarrow \infty$ sa Hammingova vzdialenosť zhora blíži k $1/2$ a σ^2/N sa zdola blíži k 1.



Obr. 4.9 Volatilita na jedného hráča v závislosti od alfa a prislúchajúca Hammingova vzdialenosť hráčov pre hru s $N = 101$ hráčmi a $S = 2$ stratégiami.

Kapitola 5

Minoritná hra ako trhový model

5.1 Trhy a minoritné hry

V predchádzajúcej kapitole sme si predstavili minoritnú hru ako model systému s viacerými hráčmi s heterogénnymi stratégiami. Predstavili sme si jednotlivé vlastnosti minoritnej hry ako sú efektívnosť, či predpovedateľnosť. Ale čo má tento model spoločný s finančnými trhmi? Ako možno model upraviť tak, aby popisoval reálne finančné trhy? Správa sa vôbec trh ako minoritná hra?

Jedným argumentom podporujúcim toto tvrdenie je, že trhy sú inštitúcie, ktoré umožňujú agentom vymieňať tovary. Prostredníctvom takýchto výmien potom predávajú svoje tovary a kupujú tie, ktoré potrebujú. V reči minoritnej hry to znamená, že agenti majú dve akcie a to kúpiť a predáť. Nie však všetci agenti reálne chcú obchodovať v každom čase. Niektorí agenti vstupujú na trh iba za účelom zisku a tak na trh vstúpia len vtedy, keď vycítia vhodnú príležitosť. V pôvodnej minoritnej hre agenti v každom čase kúpili alebo predali akcie za jednu jednotku peňazí. Objem peňazí na trhu nie je konštantný, pretože v skutočnosti môžu agenti obchodovať aj s viacerými jednotkami peňazí naraz. To však závisí aj od ich kapitálu, ktorý sa mení v čase podľa ich počínania si a vstúpiť na trh môžu len v prípade, že nejaký kapitál k dispozícii majú. Obchodovanie na trhu sa taktiež nezaobíde bez poplatkov spojených s obchodovaním. Jedným z poplatkov je cena za vstup, ktorá môže agentov od vstupu na trh odradiť. Jednou z najdôležitejších zložiek, ktoré v modeli treba zohľadniť je dynamika ceny.

Minoritné hry nemôžu pokryť všetky reálne zložky finančných trhov a popísať tak celý komplexný systém. Avšak aj napriek takémuto deficitu môžu minoritné hry poskytnúť dôveryhodný obraz finančného trhu. Pozorovanie minoritných hier je zamerané predovšetkým na štúdium fenoménu fluktuácií a ich štatistických vlastností.

V tejto kapitole sa zameriame na vsunutie nového typu obchodníka do modelu a jeho stratégie. Budeme sa zaoberať súhrou typov obchodníkov v modeli a budeme pozorovať ako sa mení ich zisk pri ich rôznom pomere na trhu. Ďalej sa pokúsime definovať prechod oddeľujúci rôzne fázy trhu, ak existuje, ako to bolo aj v systémoch s jedným typom agentov.

5.2 Typy agentov

Hráčov rozdeľujeme na základe toho, ako sa na trhu správajú [1, 3, 9]. Jedným typom agentov sú *producenti*. Na trh vstupujú v každom čase s úmyslom výmeny tovarov. Výplaty producentov sú v priemere záporné, no uvažujeme, že sú to agenti, ktorí sú schopní vytvárať zisk mimo trhu. *Špekulanti*, druhý typ agentov, nemajú prostriedky na obchodovanie v ďalších odvetviach, preto sú odkázaní na zisk z tohoto trhu. Tretím typom agentov sú tzv. *noise traders*. Sú to agenti, ktorí na trh občas vstúpia, no nemajú stratégie a ich akcia sa javí ako náhodná. Môžu to byť napr. špekulanti, ktorí svoje rozhodnutie zakladajú na rozložení hviezd alebo na nejakom vnútornom pocite.

Pre model trhu je dôležité zamyslieť sa nad tým, akým spôsobom zahrnúť jednotlivé typy agentov. Zameriame sa na vlastnosti akými sú predpovedateľnosť a zisk na jedného agenta. Dôležité je preto pozorovať výchylky $A(t)$, ktoré v zmysle trhu indikujú previs dopytu nad ponukou. Pri zahrnutí všetkých troch typov uvažujeme tri zložky $A(t)$

$$A(t) = A_{prod}(t) + A_{špek}(t) + A_{noise}(t)$$

v každom čase t .

Agenti typu noise traders nepoužívajú stratégie a ich voľba je v každom čase náhodná. Preto $\langle A_{noise} \rangle = 0$. Ich vplyv na trh bude minimálny, resp. žiadny. Producenti budú agenti s jednou hracou stratégiou. Predpovedateľnosť, ktorú budú na trh vkladať tak bude vysoká a poskytnú špekulantom dobrú pôdu pre vytváranie zisku. Špekulanti budú mať k dispozícii viacero hracích stratégií, aby mali možnosť výberu v každom čase a ešte k tomu budú obohatení o jednu *nulovú stratégiu*. Voľba tejto stratégie znamená zdržanie sa vstupu na trh.

5.3 Grand kanonická minoritná hra

Grand kanonická minoritná hra zohľadňuje dynamický vývoj objemu obchodu [2, 3]. Kým v klasickej minoritnej hre bol obchodovaný objem vždy konštantný a rovný N jednotkám, pridaním špekulantov na trh, ktorých stratégie sú obohatené ešte o jednu nulovú, s_0 , sa objem peňazí na trhu mení a to v závislosti od počtu zúčastnených špekulantov. Nadalej však platí, že každý aktívny agent obchoduje práve s jednou peňažnou jednotkou.

Každému agentovi sa na začiatku hry pridelia *aktívne* stratégie, ktoré predpisujú kúpu alebo predaj a špekulantom ešte jedna *neaktívna* nulová stratégia. Pre každú stratégiu si agenti udržiujú skóre a vyberú v každom čase tú, ktorej skóre je najvyššie. Ďalej zavedieme parameter ε , ktorý môže predstavovať napríklad averziu agenta k riziku alebo bezrizikový úrok v banke, takže namiesto obchodovania s jednou jednotkou peňazí, ju agent vloží do banky a jeho výplata za daný čas bude ε . ε môžeme definovať aj ako poplatok pri vstupe na trh, ktorý agent ušetrí, keďže sa obchodovania zdrží. Skóre stratégií bude počítané pomocou nasledujúcich vzťahov:

$$U_{i_s}^{virt}(t) = \begin{cases} U_{i_s}^{virt}(t-1) - \alpha_{i_s}^{\mu(t-1)} A(t-1), & s \neq s_0 \\ U_{i_s}^{virt}(t-1) + \varepsilon, & s = s_0 \end{cases}.$$

Výplata agenta v minoritnej hre je daná ako:

$$g_i(t) = -\alpha_{i_s}^{\mu(t)} A(t),$$

preto skutočné skóre agenta v čase t bude:

$$U_{i_s}^{real}(t) = \begin{cases} U_{i_s}^{real}(t-1) + g_i(t), & \alpha_{i_s}^{\mu(t)} \in \{-1, 1\} \\ U_{i_s}^{real}(t-1) + \varepsilon, & \alpha_{i_s}^{\mu(t)} = 0 \end{cases}.$$

Minoritná hra je hra so záporným súčtom, lebo súčet výplat všetkých hráčov je záporný. To je dôvodom, prečo agenti v priemere pri obchodovaní strácajú. Ak by mali všetci agenti možnosť na trh nevstúpiť, z dlhodobého hľadiska by postupne začali všetci využívať svoju nulovú stratégiu a na trh by prestali vstupovať. Z tohoto dôvodu je dôležité rozlíšiť typy agentov a poskytnúť špekulantom možnosť výberu stratégií tak, aby sa im na trh vstupovať oplátilo.

5.4 Stratégie špekulantov. Hammingova vzdialenosť

V pôvodnej minoritnej hre boli hráčom pridelené stratégie náhodne. Pre jednoduchosť uvažujeme, že $S = 2$. Hammingova vzdialenosť týchto stratégií sa pohybuje v rozmedzí 0 až P . Ak je vzdialenosť rovná P , stratégie sú opačné. V ostatných prípadoch sa akcie stratégií hráča zhodujú aspoň pre jednu informáciu μ . To znamená, že hráč volí tú istú akciu bez ohľadu na výber stratégie. Špekulanti tak strácajú možnosť úplnej voľby. Ak podľa

predpovedateľnosti platí, že $\langle \text{sign } A | \mu \rangle \neq 0$, potom je výhra (štatisticky) naklonená na jednu stranu. Ak je agentova akcia daná stratégiami totožná so $\langle \text{sign } A | \mu \rangle$, má väčšiu pravdepodobnosť úspechu. Pokiaľ je jeho akcia opačná k $\langle \text{sign } A | \mu \rangle$, naopak pravdepodobnosť, že uspeje, je menšia ako že stratí. Má samozrejme na výber ešte svoju nulovú stratégiu. Ak je Hammingova vzdialenosť agentových stratégií rovná 0, stratégie sú totožné, čo znamená, že špekulant sa riadi len jednou stratégiou [2, 9].

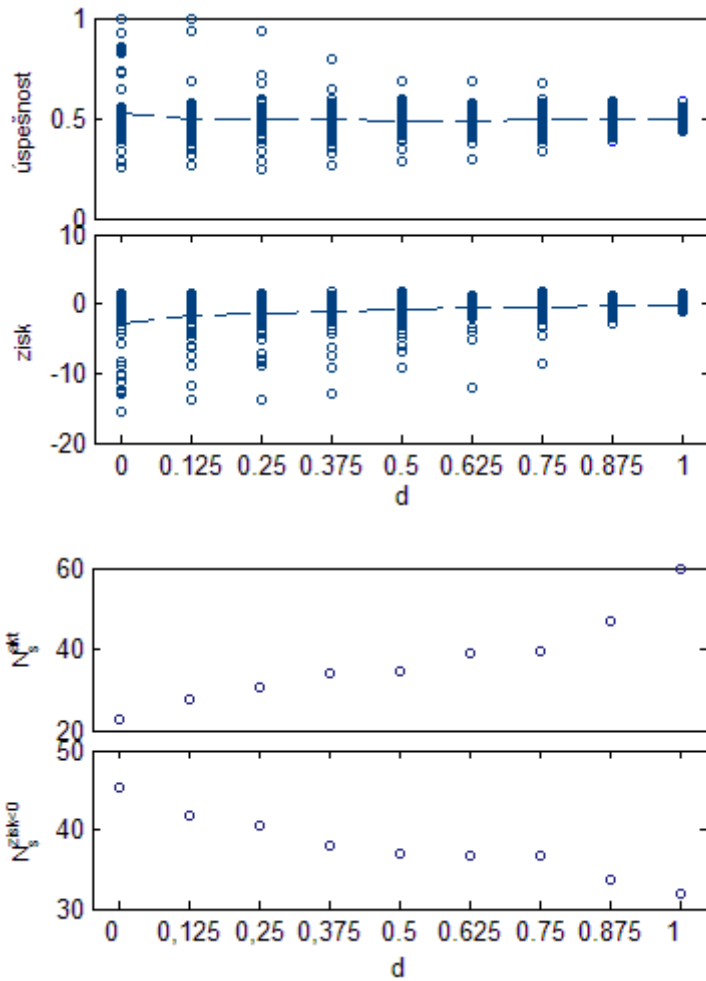
Vzhľadom na charakter špekulantov, stratégie, ktoré si zvolia, budú také, pri ktorých bude ich pravdepodobnosť výhry a zisk najvyšší. Pozrime sa na jednotlivé možnosti voľby stratégií a úspešnosť špekulantov v závislosti od \bar{d} , obr. 5.1.

Možnosti sú nasledovné:

- rovnaké stratégie - $d = 0$, resp. $\bar{d} = 0$
- rôzne stratégie - postupne pre $d = \left\{ \frac{1}{8}P, \frac{2}{8}P, \frac{3}{8}P, \frac{4}{8}P, \frac{5}{8}P, \frac{6}{8}P, \frac{7}{8}P \right\}$, resp. $\bar{d} = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8} \right\}$
- opačné stratégie - $d = P$, resp. $\bar{d} = 1$

Priemerná úspešnosť hráčov je vo všetkých prípadoch približne rovnaká, no rozptyl sa s rastúcou Hammingovou vzdialenosťou znižuje. Hoci pri hraní jednej stratégie môže špekulant dosiahnuť až stopercentnú úspešnosť v rámci priklonenia sa na víťaznú stranu, taktiež sa môže stať, že jeho úspešnosť bude iba okolo dvadsať percent. Priemerná maximálna úspešnosť sa s \bar{d} znižuje, pritom priemerný maximálny zisk ostáva pre všetky hodnoty \bar{d} približne rovnaký. Priemerný minimálny zisk je však najvyšší pri voľbe opačných stratégií. Vtedy je aj počet špekulantov, ktorí sa na trhu zúčastnia, najvyšší. Pri položení $\varepsilon = 0$, vstúpia na trh všetci špekulanti v každom čase t . Pokiaľ využívajú len jednu stratégiu, vstúpia na trh v priemerne len v 35% prípadov. S rastúcou Hammingovou vzdialenosťou taktiež klesá pravdepodobnosť, že zisk špekulanta bude v priemere záporný.

Najefektívnejšou voľbou pre špekulantov je voľba opačných stratégií. Pravdepodobnosť dosiahnutia kladného zisku je v takom prípade najvyššia, no nemožno očakávať príliš veľké zisky. Na druhej strane riziko veľkej straty je najmenšie spomedzi všetkých ostatných možností.

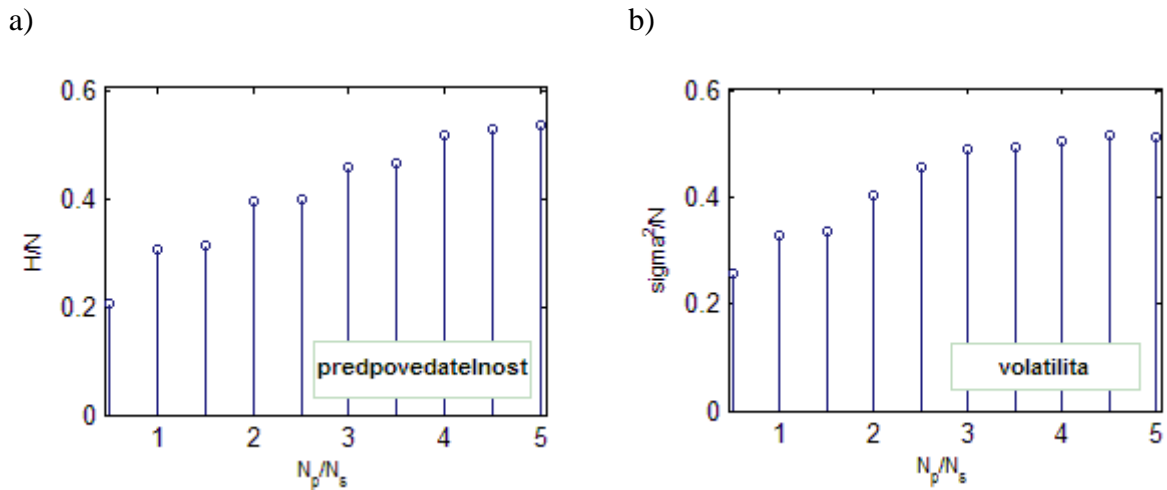


Obr. 5.1 Zhora: Úspešnosť a zisk špekulantov (prerušovaná čiara znázorňuje priemerné hodnoty), priemerný počet špekulantov, ktorí vstúpili na trh (N_s^{akt}) a priemerný počet špekulantov so záporným priemerným ziskom ($N_s^{zisk < 0}$) pri parametroch modelu $\alpha = 0.4$, $P = 64$, $N_p = 100$, $N_s = 60$, $\varepsilon = 0$.

5.5 Ekológia trhu

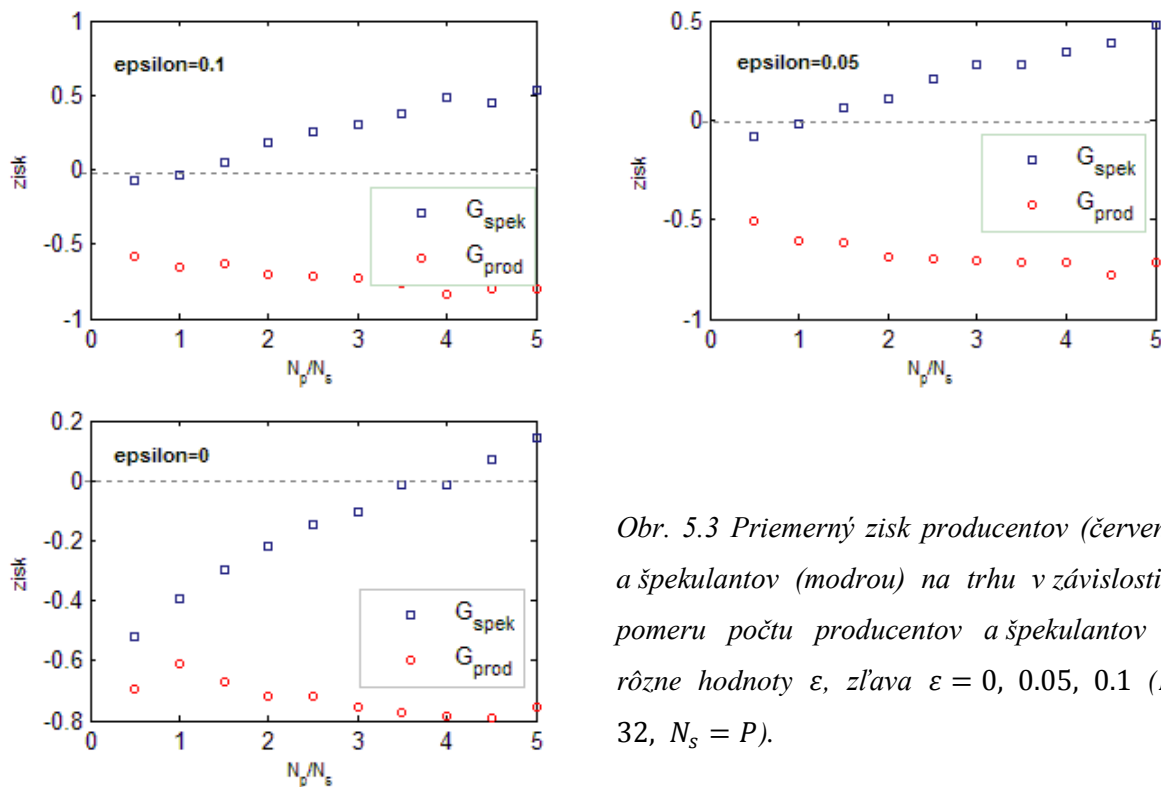
Producenti a špekulanti tvoria akúsi symbiózu [1, 3, 9]. Producenti, využívajúci trh len na výmenu tovarov, sa zúčastňujú trhu pre svoje vlastné potreby predpovedateľným spôsobom, nezávisle na malých fluktuáciách trhu. Naopak špekulanti prosperujú práve z týchto fluktuácií. Ťazia z predpovedateľnosti, ktorú producenti na trh prinášajú. Svojou obchodnou aktivitou však predpovedateľnosť znižujú.

Ak na trh prichádzajú producenti, no počet špekulantov ostáva nezmenený, priemerný zisk špekulantov sa bude zvyšovať, zatiaľ čo priemerný zisk producentov bude klesať. Keďže producenti na trh dodávajú istú mieru predpovedateľnosti, obr. 5.2 a), špekulanti ju budú využívať vo svoj prospech a na trh budú vstupovať častejšie. Tým sa fluktuácia výchyliiek previsu dopytu zvýši a celkové straty agentov budú rásť a to práve na úkor producentov, obr. 5.2 b).



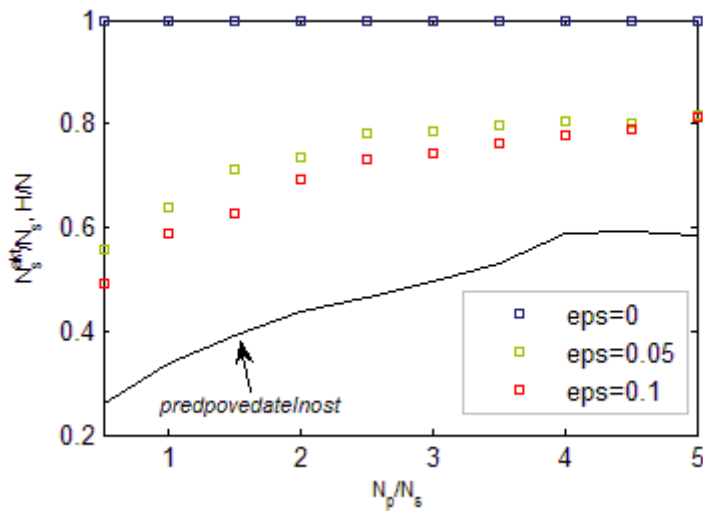
Obr. 5.2 a) Predpovedateľnosť a b) volatilita na agenta v závislosti od pomeru počtu producentov a špekulantov na trhu pre parametre modelu $P = 32$, $S_p = 1$, $S_s = 3 - 2$ opačné a 1 nulová stratégia, $N_s = P = \text{fix}$, $N_p = \left\{ \frac{1}{2} N_s, \frac{2}{2} N_s, \dots, \frac{10}{2} N_s \right\}$.

Vstup špekulantov na trh je taktiež ovplyvnený hodnotou ε . Pokiaľ je $\varepsilon = 0$, špekulanti vstupujú na trh v každom čase, čo znamená, že aspoň jedna z ich stratégií poskytuje kladný zisk. Priemerný zisk špekulantov je však kladný až vtedy, keď je pomer producentov a špekulantov dostatočne veľký. Ak ε zväčšujeme, znižuje sa pomer počtu producentov a špekulantov potrebný k tomu, aby bol priemerný zisk špekulantov kladný, obr. 5.3.



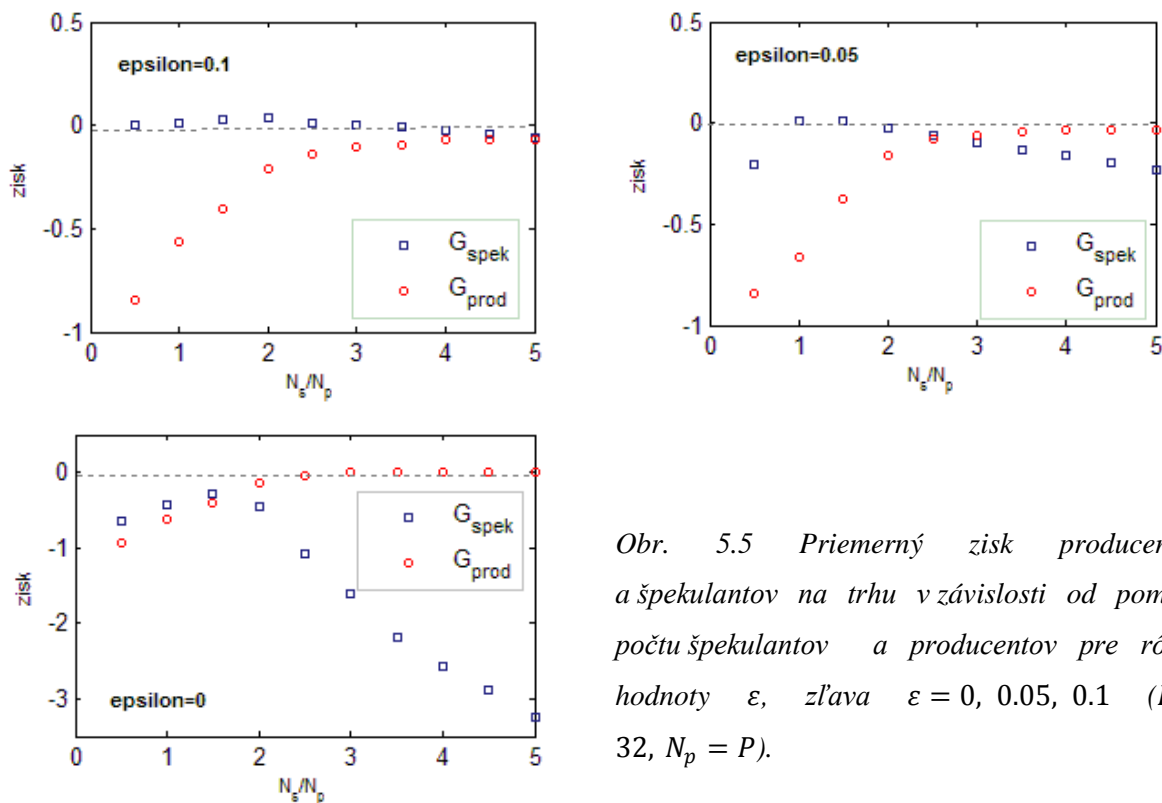
Obr. 5.3 Priemerný zisk producentov (červenou) a špekulantov (modrou) na trhu v závislosti od pomeru počtu producentov a špekulantov pre rôzne hodnoty ε , zľava $\varepsilon = 0, 0.05, 0.1$ ($P = 32$, $N_s = P$).

Pre $\varepsilon > 0$ nevstupujú na trh v každom čase všetci špekulanti, no ich počet sa s prichádzajúcimi producentami zvyšuje, obr. 5.4.



Obr. 5.4 Pomer počtu aktívnych špekulantov k ich celkovému počtu a predpovedateľnosť v závislosti na pomere N_p/N_s .

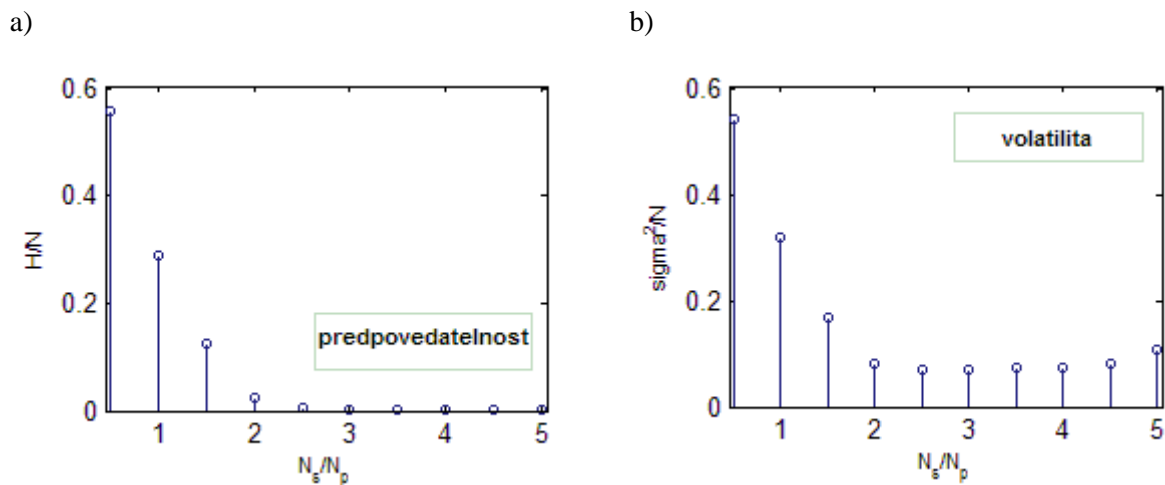
Ak je na trhu iba málo producentov vzhľadom na počet špekulantov, zisky špekulantov s ich rastúcim počtom klesajú a sú v priemere záporné. Naopak zisky producentov rastú, hoci ich maximálna priemerná hodnota je 0 a aj to len pri $\varepsilon = 0$, obr. 5.5.



Obr. 5.5 Priemerný zisk producentov a špekulantov na trhu v závislosti od pomeru počtu špekulantov a producentov pre rôzne hodnoty ε , zľava $\varepsilon = 0, 0.05, 0.1$ ($P = 32, N_p = P$).

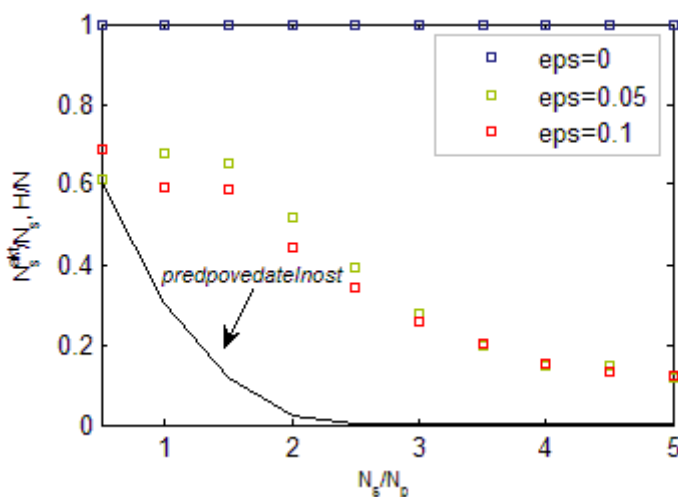
Na trhu s nízkym počtom špekulantov je väčšina výchyliet $A(t)$ spôsobená náhodnou informáciou $\mu(t)$, preto $H \cong \sigma^2$. S rastúcim počtom špekulantov ubúda na trhu

predpovedateľnosť, obr. 5.6 a) a ak je už predpovedateľnosť nulová, trh sa nachádza v symetrickej fáze. Zároveň je efektivita trhu najvyššia, obr. 5.6 b).



Obr. 5.6 a) Predpovedateľnosť a b) volatilita na agenta v závislosti od pomeru počtu špekulantov a producentov na trhu pre parametre modelu $P = 32$, $S_p = 1$, $S_s = 3 - 2$ opačné a 1 nulová stratégia, $N_p = P = \text{fix}$, $N_s = \left\{ \frac{1}{2} N_s, \frac{2}{2} N_s, \dots, \frac{10}{2} N_s \right\}$.

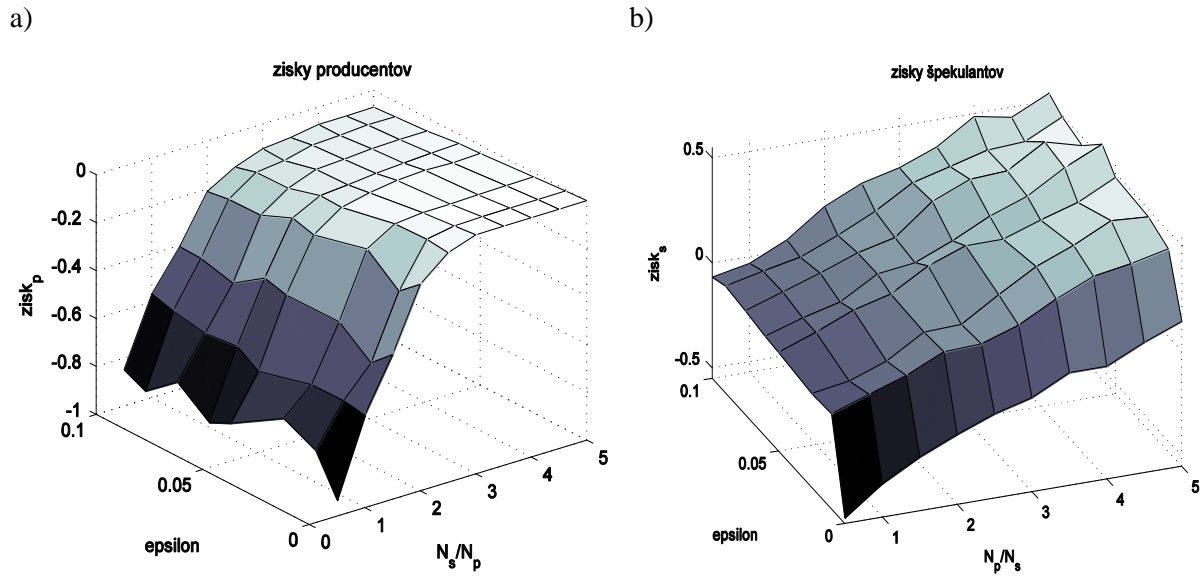
Počet aktívnych špekulantov na trhu narastá dovtedy, kým je hodnota predpovedateľnosti ešte kladná. Keď je už hodnota predpovedateľnosti nulová, prestane vstupovať na trh čoraz viac špekulantov, obr. 5.7. Ich počet sa neskôr ustáli, čo spôsobí aj ustálenie volatility. Výnimkou je prípad, v ktorom $\varepsilon = 0$. Vtedy na trh vstupujú všetci špekulanti, hoci sa trh nachádza v symetrickej – nepredpovedateľnej fáze. Volatilita sa tak stále zvyšuje.



Obr. 5.7 Predpovedateľnosť a pomer počtu aktívnych špekulantov k celkovému počtu špekulantov na trhu v závislosti od pomeru počtu špekulantov a producentov pre rôzne hodnoty ε .

Ak sa pozrieme na zisky agentov, našim pozorovaním je, že kým zisk producentov je vždy záporný, zisky špekulantov sú v priemere kladné. Špekulanti však dosahujú kladný zisk (v priemere) len v prípade, ak je ich počet na trhu dostatočne malý a na trhu je pre nich dostatok

predpovedateľnosti. Pri vysokej koncentrácii špekulantov tak môže byť ich zisk v priemere záporný, hoci trh zostane predpovedateľný. Na druhej strane zisky producentov sa zväčšujú pri vyššom počte špekulantov, teda prítomnosť špekulantov predstavuje pre producentov výhodu, obr. 5.8 a). Toto pozorovanie podporuje predstavu symbiózy týchto typov agentov, teda špekulanti redukujú straty producentov produkovaním likvidity, kým producenti zabezpečujú informáciu a pozitívny zisk špekulantom, obr. 5.8 b).



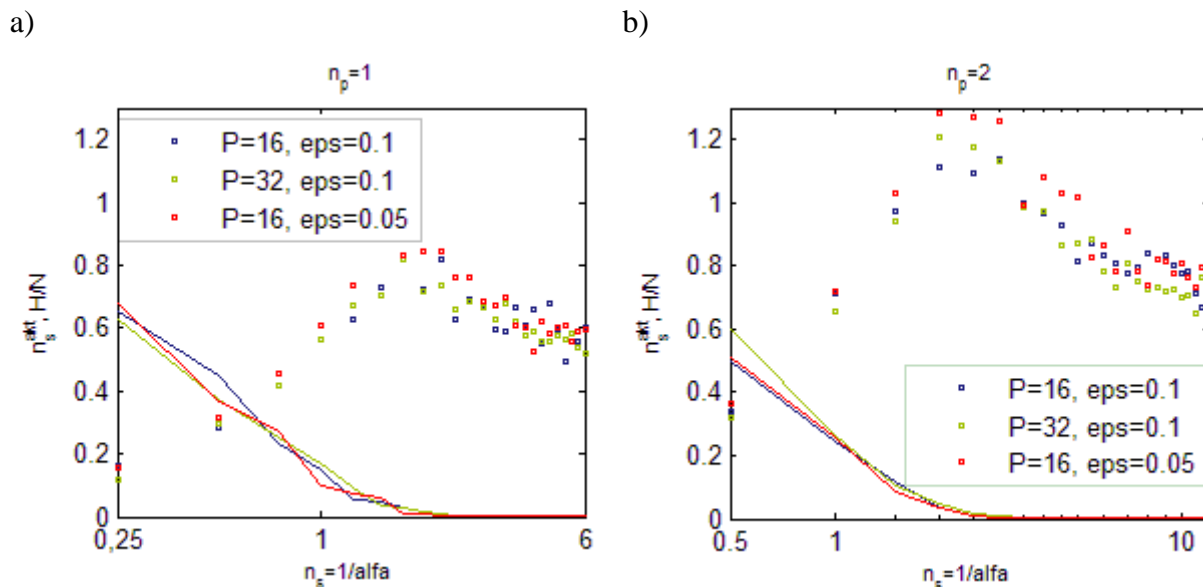
Obr. 5.8 a) Vývoj priemerného zisku producentov s rastúcim počtom špekulantov a s rastúcou hodnotou ε . b) Vývoj priemerného zisku špekulantov s rastúcim počtom producentov a s rastúcou hodnotou ε .

5.6 Fázový prechod

K prechodu medzi symetrickou a asymetrickou fázou systému dochádza vtedy, keď sa hodnota predpovedateľnosti mení z nulovej na kladnú. Hodnota predpovedateľnosti sa počas celého sledovaného obdobia ustáli na určitej hladine a od nej sa zaznamenávajú len veľmi malé výkyvy, ktoré sú voči jej priemernej hodnote zanedbateľné. Preto môžeme sledovať prechod v závislosti na zmene určitých parametrov systému.

V prípade, že na trhu vystupuje len jeden typ agentov, dochádza k fázovému prechodu pre $\alpha_c = P/N \approx 0.34$. V modeli, v ktorom sú zahrnutí aj špekulanti, dochádza k fázovému prechodu pri určitom vzťahu medzi počtom producentov N_p , počtom špekulantov N_s

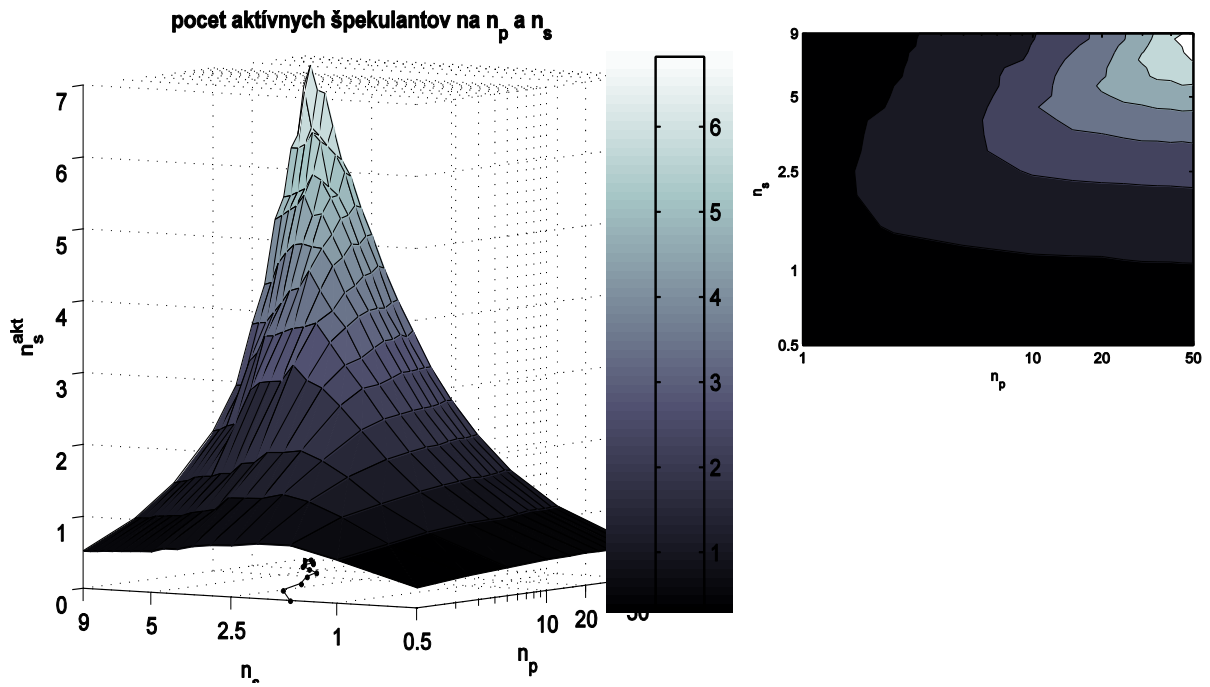
a počtom informácií P . Zavedme teraz nové premenné $n_p = N_p/P$ a $n_s = N_s/P$. Prechod medzi symetrickou a asymetrickou fázou možno pozorovať aj v zmene počtu aktívnych špekulantov na trhu pre rôzne hodnoty n_p a n_s , obr. 5.9 [1]. Rôzne hodnoty ε nezohrávajú v tejto závislosti žiadnu dôležitú úlohu.



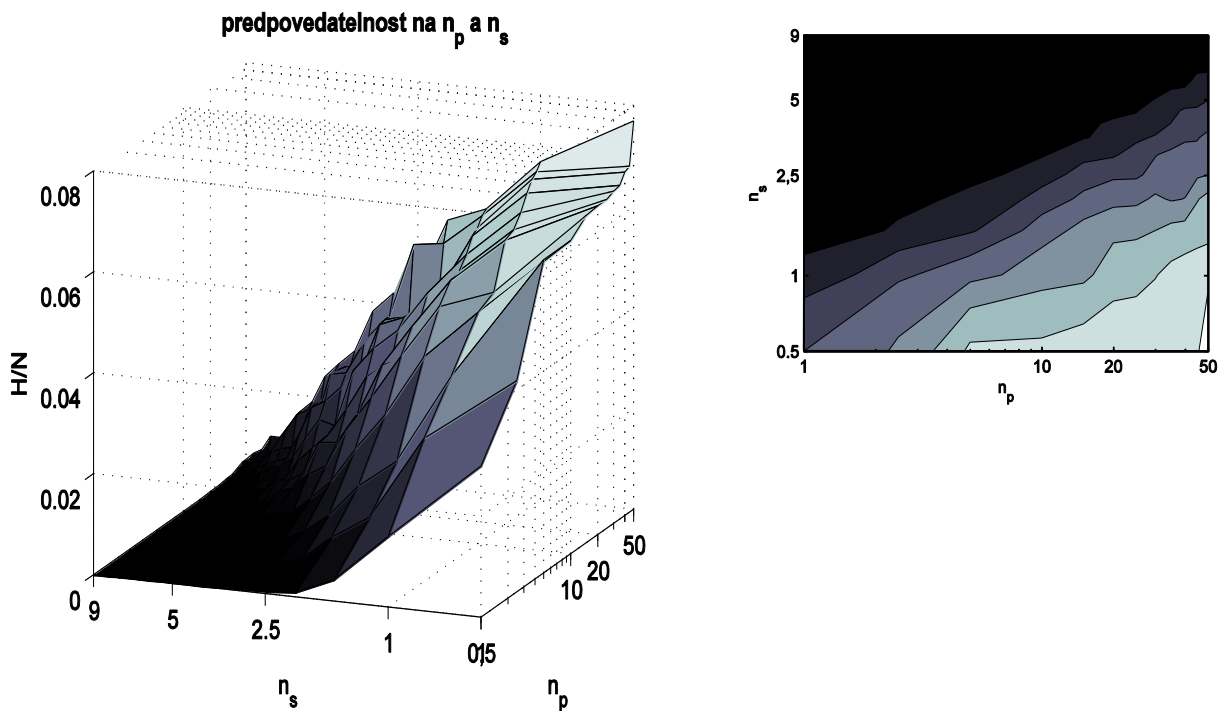
Obr. 5.9 Redukovaný počet aktívnych špekulantov $n_s^{akt} = N_s^{akt}/P$ a predpovedateľnosť na jedného agenta H/N v závislosti od n_s a a) $n_p = 1$, b) $n_p = 2$.

Počet aktívnych špekulantov sa lineárne zvyšuje s ich počtom na trhu dovtedy, kým hodnota predpovedateľnosti neklesne na hodnotu blízko nuly. Potom sa ich počet začne znižovať s $n_s^{-\gamma}$, $\gamma \cong \frac{2}{5}$. Vyššia koncentrácia producentov na trhu zabezpečuje vyššiu hodnotu predpovedateľnosti a tým aj v priemere vyššie výplaty špekulantom. Počet aktívnych špekulantov na trhu je tak vyšší. Závislosť počtu aktívnych špekulantov na počte producentov a špekulantov možno vidieť na obr. 5.10.

Body $[n_p, n_s]$, v ktorých dosahuje počet aktívnych špekulantov svoje maximum, alebo v ktorých sa H/N mení z nuly na kladnú, indikujú prechod medzi symetrickou a asymetrickou fázou. Obr. 5.11 zachytáva závislosť predpovedateľnosti na trhu od prítomnosti rôznych počtov n_p a n_s .

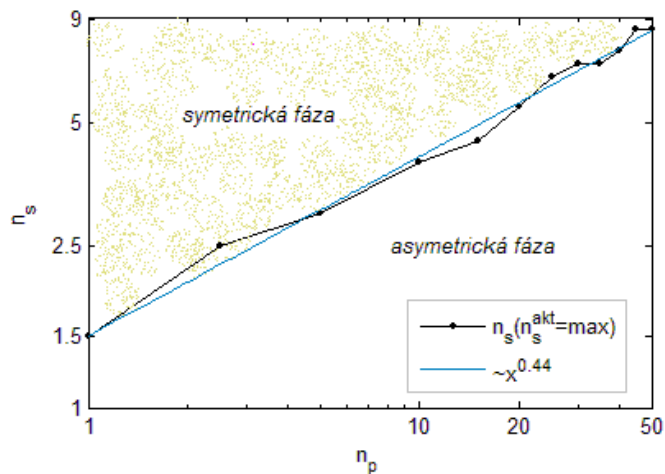


Obr. 5.10 Závislosť redukovaného počtu aktívnych špekulantov n_s^{akt} od n_p a n_s ako priemer pre rôzne P a ε . Čierna čiara na podstave znázorňuje premietnutie bodov n_s^{akt} , v ktorých je tento počet maximálny pre dané n_p a n_s . Napravo je úrovňový graf.



Obr. 5.11 Predpovedateľnosť ako funkcia n_p a n_s . Napravo je úrovňový graf.

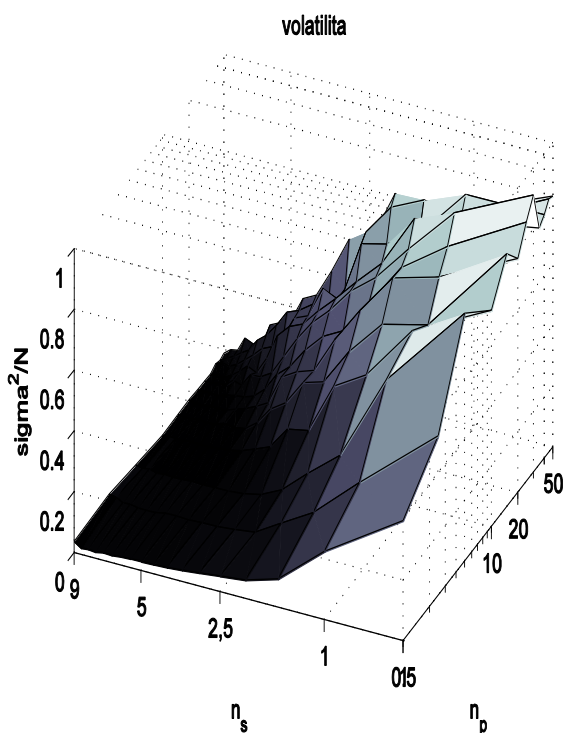
Prechod medzi jednotlivými úrovňami predpovedateľnosti sa uskutočňuje po funkciách v tvare $y = cx^a$, resp. $n_s = cn_p^a$. Naším pozorovaním sme zistili, že $a \cong 0.44$. Prechod medzi symetrickou a asymetrickou fázou sa uskutočňuje pre $a \cong 0.44$ a $c \cong \frac{3}{2}$, obr. 5.12.



Obr. 5.12 Krivka znázorňuje hodnoty n_s , pre ktoré je n_s^{akt} maximálne v závislosti na n_p . Krivka je preložená mocninovou funkciou v tvare $cx^{0.44}$.

Podľa nášho pozorovania platí, že pre $n_s < \frac{3}{2}n_p^{0.44}$ sa systém, trh, nachádza v asymetrickej fáze a pre $n_s > \frac{3}{2}n_p^{0.44}$ v symetrickej fáze.

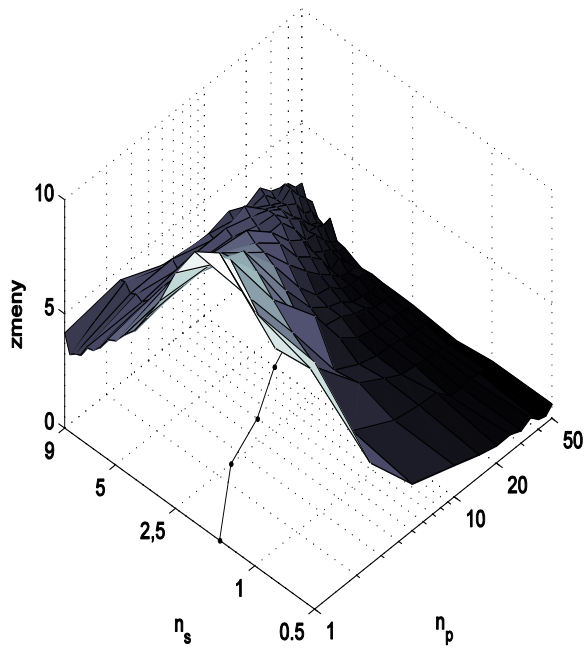
Prechod medzi symetrickou a asymetrickou fázou možno pozorovať aj pri iných vlastnostiach systému.



Obr. 5.13 Volatilita na jedného agenta v závislosti na n_p a n_s .

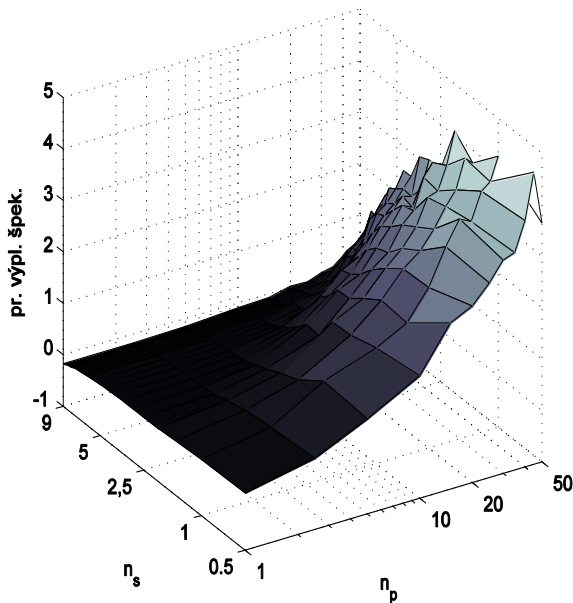
Jednou takou vlastnosťou je volatilita, ktorá sa vyvíja podobne ako predpovedateľnosť, obr. 5.13. Trh je najefektívnejší z hľadiska rozdelenia bohatstva medzi agentov vtedy, keď je hodnota výchyliet najnižšia. Teda trh, na ktorom obchodujú špekulanti, je najefektívnejší práve v symetrickej fáze. Vtedy je hodnota volatility všade v rovnakej (najnižšej) hladine. Pri prechode kritickou hranicou sa volatilita výrazne zvyšuje, resp. zvyšuje sa s klesajúcim počtom špekulantov, no rastie so zvyšujúcim sa počtom producentov. Znamená to, že špekulanti nie sú dostatočne schopní „eliminovať“ svojimi akciami výchytky spôsobené

priemerný percentuálny počet špekulantov, ktorí menili svoju stratégiu



Obr. 5.14 Priemerný percentuálny počet špekulantov meniacich svoju stratégiu v čase v závislosti na n_p a n_s .

priemerná výplata špekulantov



Obr. 5.15 Priemerná výplata špekulantov v závislosti na n_p a n_s .

obchodovaním producentov.

Taktiež je zaujímavé pozorovať, koľko špekulantov mení priemerne svoju stratégiu v čase, obr. 5.14. V priemere najviac špekulantov zmení svoju stratégiu, keď sa systém nachádza na hranici symetrickej a asymetrickej fázy. Kým v symetrickej fáze zmenia priemerne v každom čase svoju stratégiu aspoň 4% špekulantov, hlboko v asymetrickej fáze agenti svoje stratégie menia len zriedkavo a väčšinou sa spoliehajú len na jednu svoju stratégiu.

Ako sme ukázali v odseku 5.5 ekológia trhu, výplaty špekulantov sú vyššie pri vyššom počte producentov na trhu. V asymetrickej fáze sú výchylky veľké, preto výplaty špekulantov, ktorí sa na trhu zúčastnia, v absolútnej hodnote rovné hodnote previsu dopytu, tak budú taktiež veľké. Keďže predpovedateľnosť je v tejto fáze vysoká, špekulanti sa vo väčšine prípadov priklonia na víťaznú stranu. To je dôvodom vysokých priemerných výplat špekulantov hlboko v asymetrickej fáze. V symetrickej fáze, keď je predpovedateľnosť takmer nulová, je aj priemerná výplata špekulanta veľmi nízka, dokonca záporná, obr. 5.15. Špekulanti tak na trh vstupujú v nízkom počte, pretože sa im to neoplatí.

Hoci sa v symetrickej fáze priemerná hodnota predpovedateľnosti takmer rovná nule, ako sme už vyššie spomenuli, dochádza v jej hodnote k malým výkyvom rádovo rovným až 10^{-3} . Aj

takáto zdanlivo malá výchylka však stačí špekulantom na to, aby ju využili a na trh vstúpili v danom okamihu vo vyššom počte ako zvyčajne. Tieto náhle výkyvy v počte aktívnych špekulantov a ich vplyv na trh budú predmetom skúmania v ďalšej kapitole. Našli sme však pozoruhodnú vlastnosť systémov. Ukázali sme, že existuje hranica oddeľujúca dve oblasti, v ktorých sa vlastnosti systému zásadne odlišujú. Vlastnosti systému, v ktorom sú zahrnuté dva typy agentov – producenti a špekulanti, sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke, tab. 6.1.

	symetrická fáza	asymetrická fáza
predpovedateľnosť	$H \approx 0$	$H > 0$, klesá s n_s
volatilita	ustálená, nízka	klesá rýchlo s n_s
počet aktívnych špekulantov	n_s^{akt} klesá s n_s s rádom $-\frac{2}{5}$ rastie lineárne s n_p	rastie lineárne s n_s ustáli sa na určitej hodnote vzhľadom na n_p
zmena stratégií	klesá s n_s , ustáli sa na 3 až 4%	klesá s n_p , postupne sa takmer všetci zafixujú na jednu stratégiu
výplaty špekulantov	veľmi nízke, ≈ 0	rýchlo klesajú s n_s , rýchlo rastú s n_p

Tab. 6.1 Zhrnutie jednotlivých vlastností modelu so špekulantmi v symetrickej a asymetrickej fáze.

Kapitola 6

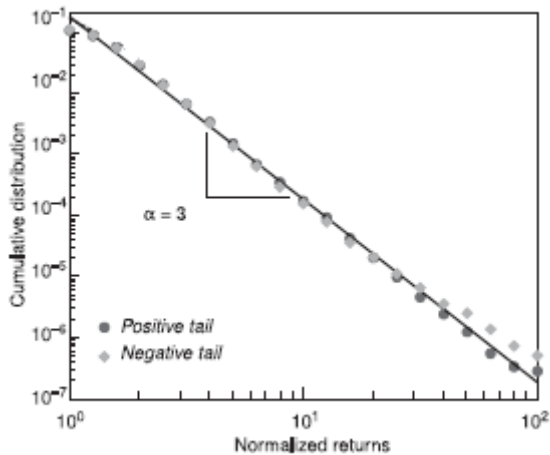
Dynamika ceny

6.1 Empirické štatistické vlastnosti cien

Jedným z najdôležitejších elementov finančných trhov je cena (akcií, komodít, ...). Rozdelenie fluktuácií ceny je jednou z najviac diskutovaných tém [11]. Centrálna limitná teória navádza na normálne rozdelenie. Ak $p(t)$ je cena v čase t , logaritmickej návratnosti $r_\tau(t)$ je definovaná ako $r_\tau(t) = \log p(t + \tau) - \log p(t)$. Rozdelením τ na N podintervalov dostávame, že celková logaritmickej návratnosti $r_\tau(t)$ je podľa definície suma log-návratností v jednotlivých podintervaloch. Ak sú zmeny v cene v každom podintervale nezávislé a identicky rozdelené s dobre definovaným druhým momentom, mala by kumulatívna distribučná funkcia $f(r_\tau)$ na základe centrálnej limitnej vety konvergovať pre veľké τ k normálnemu rozdeleniu. Pre reálne finančné dáta je však táto konvergencia veľmi pomalá. Pre malé τ (menej ako mesiac) sa zaznamenáva silná deviácia od normálneho rozdelenia. Autokorelácia log-návratností je však pre doby dlhšie ako 15 až 30 minút veľmi blízko nuly.

V skutočnosti má rozdelenie návratností ťažké chvosty. Znamená to, že pravdepodobnosť extrémnych hodnôt je vyššia ako pri normálnom rozdelení. Pri skúmaní obrovských skupín dát sa ukázalo, že rozdelenie takmer kopíruje mocninovú funkciu $f(r) \sim |r|^{-\alpha}$ pre $\alpha \approx 3$. (Skupina Olsen and Associates sa zamerala na štúdium zmien výmenného kurzu počas dňa na trhoch [12], ďalšia skupina z Bostonskej Univerzity na pohyby v rámci dňa S&P indexu [13,14] a v [4] študovali 5 minútové návratnosti 1000 individuálnych akcií obchodovaných na rôznych burzách počas dvoch rokov, obr. 6.1.)

Fluktuácie ceny nie sú identicky rozdelené. Vlastnosti rozdelenia, akou je volatilita, sa menia v čase. Tomuto sa hovorí zhlukovanie volatility. Autokorelácia log-návratností, daná ako $\rho(\tau) \sim \langle r_\tau(t + \tau)r_\tau(t) \rangle$, je malá pre časový úsek dlhší ako jeden deň. To však neplatí pre volatilitu, definovanú napr. ako r^2 alebo $|r|$. Volatilita je pozitívne korelovaná aj pre dlhšie časové úseky ako sú napr. týždne či dokonca mesiace. Zhlukovanie volatility môže spôsobiť ťažké chvosty v $f(r)$. Numerické štúdie jasne ukazujú, že autokorelačná funkcia volatility slabne ako mocninová funkcia $g(\tau) \sim \tau^{-\nu}$, pričom $\nu \in (0.1, 0.3)$.



Obr. 6.1 Ťažké chvosty vo fluktuáciách ceny: kumulatívna distribučná funkcia pozitívnych a negatívnych chvostov pre normalizované log-návratnosti r_τ tisícich najväčších amerických spoločností v rokoch 1994-1995, pre $\tau = 5$ min [4].

Model klasickej minoritnej hry nestačí na modelovanie finančných trhov. V klasickej minoritnej hre nie sú obsiahnuté žiadne ceny či obchodovanie. Pritom trh je definovaný práve ako miesto, kde ceny odrážajú priebeh obchodovania. Napriek tomu zrealizovaná minoritná hra vykazuje podobné štatistické vlastnosti ako reálne trhy. V nasledujúcej časti sa budeme venovať zahrnutiu ceny do modelu a rozdiferencujeme váhu agentov na trhu pomocou ich kapitálu.

6.2 Dynamika ceny v trhových hrách

Uvažujme trh s jednou jedinou akciou s cenou $p(t)$ v čase t [3, 10]. Predpokladajme, že cena je daná ako rozdiel medzi počtom kúpených a počtom predaných akcií, inak povedané previsom dopytu. Tak ako predtým predpokladajme, že $A(t) = \sum_i a_i(t)$ určuje previs dopytu nad ponukou. Potom cena akcie na trhu bude spĺňať nasledovnú rovnicu

$$\ln p(t+1) = \ln p(t) + r(t),$$

z toho

$$p(t+1) = p(t)e^{r(t)}.$$

$r(t)$ je cenová návratnosť daná vzťahom

$$r(t) = \frac{A(t)}{\lambda(t)},$$

kde $\lambda(t)$ je paramater niekedy nazývaný likviditou a niekedy tiež trhovým dlhom. λ reguluje dopad previsu dopytu $A(t)$ na cenovú návratnosť $r(t)$ a môže sa meniť v čase.

6.3 Model so zahrnutím kapitálu

S cieľom priblížiť sa k realite uvažujme, že každý agent idúci na trh, má k dispozícii určitý kapitál, ktorý sa na základe jeho úspešnosti počas obchodovania vyvíja. Ak si agent vedie na trhu zle, zkrachuje a z trhu odchádza. Na trhu ho však nahradí nový agent s novým počiatočným kapitálom a taktiež s novými stratégiami.

Každému agentovi i bude na začiatku pridelený kapitál $c_i > 0$ z fixného rozdelenia. Ďalej budeme uvažovať, že každý agent bude obchodovať vždy s rovnakou časťou svojho kapitálu $\theta \in [0,1]$, ak na trh v danom čase vstúpi. Previs dopytu $A(t)$ bude daný vzťahom

$$A(t) = \theta \sum_{i=1}^N a_i^{\mu(t)} c_i(t),$$

objem peňazí na trhu bude

$$\lambda(t) = \theta \sum_{i=1}^N |a_i^{\mu(t)}| c_i(t)$$

a cenová návratnosť

$$r(t) = \frac{A(t)}{\lambda(t)} = \frac{\sum_{\forall i} a_i^{\mu(t)} c_i(t)}{\sum_{\forall i} |a_i^{\mu(t)}| c_i(t)}.$$

Zisk agenta i v čase t bude

$$g_i(t) = -a_i^{\mu(t)} \theta c_i(t) r(t),$$

preto dynamika kapitálu agentov bude daná funkciou

$$c_i(t+1) = \begin{cases} c_i(t) + g_i(t), & a_i^{\mu(t)} \in \{-1, 1\} \\ c_i(t) + \varepsilon \theta c_i(t), & a_i^{\mu(t)} = 0 \end{cases}.$$

6.3.1 Model

Uvažujme teraz, že producenti, zúčastňujúci sa trhu v každom čase, budú obchodovať vždy s rovnakým množstvom peňažných jednotiek bez ohľadu na vývoj ich kapitálu. Špekulanti budú môcť variovať s množstvom obchodovaných peňažných jednotiek, ktoré bude závisieť práve na veľkosti ich kapitálu. Diverzifikujeme tak špekulantov na tých bohatších s väčším vplyvom a chudobnejších s menším vplyvom.

Ďalej budeme uvažovať, že každý špekulant bude obchodovať vždy s rovnakou časťou svojho kapitálu $\theta \in [0,1]$, ak tá neprevyší určitú peňažnú čiastku φ . To znamená, že v každom čase investuje špekulant čiastku vo výške $\min(\theta c_i(t), \varphi)$, ak sa rozhodne na trh v danom čase vstúpiť. Producenti budú obchodovať vždy s $\theta c_i(0)$ peňažných jednotiek. Objem peňazí na trhu bude daný ako

$$\lambda(t) = \theta \sum_{i=1}^{N_p} |a_i^{\mu(t)}| c_i(0) + \sum_{i=N_p+1}^N |a_i^{\mu(t)}| \min(\theta c_i(t), \varphi).$$

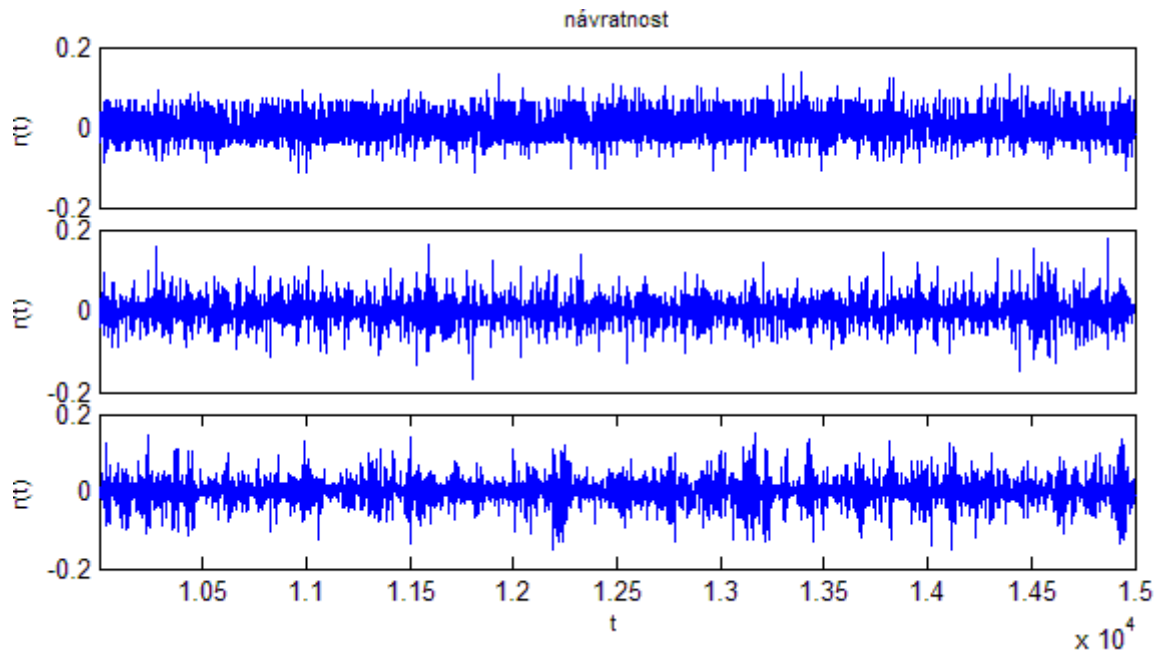
6.4 Porovnanie vlastností zrealizovaných minoritných hier s vlastnosťami finančných trhov

6.4.1 Odlišnosti vo fázach

Parametre modelu: $P = 16$, $n_p = 5$, $n_s = 1,3,8$, $c_i \sim \mathcal{N}(10,5) \forall i$ (počiatočný kapitál nebudú mať všetci agenti rovnaký, no rozdiely budú len malé, je to najmä kôli producentom, aby sme zohľadnili ich rozdielne váhy na trhu, hoci len mierne), $c_{\min} = 1$ (ak bude kapitál špekuklanta nižší ako 1, zkrachuje a z trhu odchádza, k takémuto prípadu však dochádza len veľmi zriedkovo), $\theta = 0.1$, $\varphi = 5$, $\varepsilon = 0.01$.

Vlastnosti systémov sa líšia podľa toho, v akej fáze, či v symetrickej alebo asymetrickej, sa nachádzajú. Najprv si ukážeme tri ukážkové príklady obohatenej minoritnej hry s parametrami prislúchajúcimi tým v asymetrickej fáze, v prechode a v symetrickej fáze. Zameriame sa na vlastnosti pozorované na reálnych finančných trhoch ako sú zhlukovanie, autokorelácia a rozdelenie návratností.

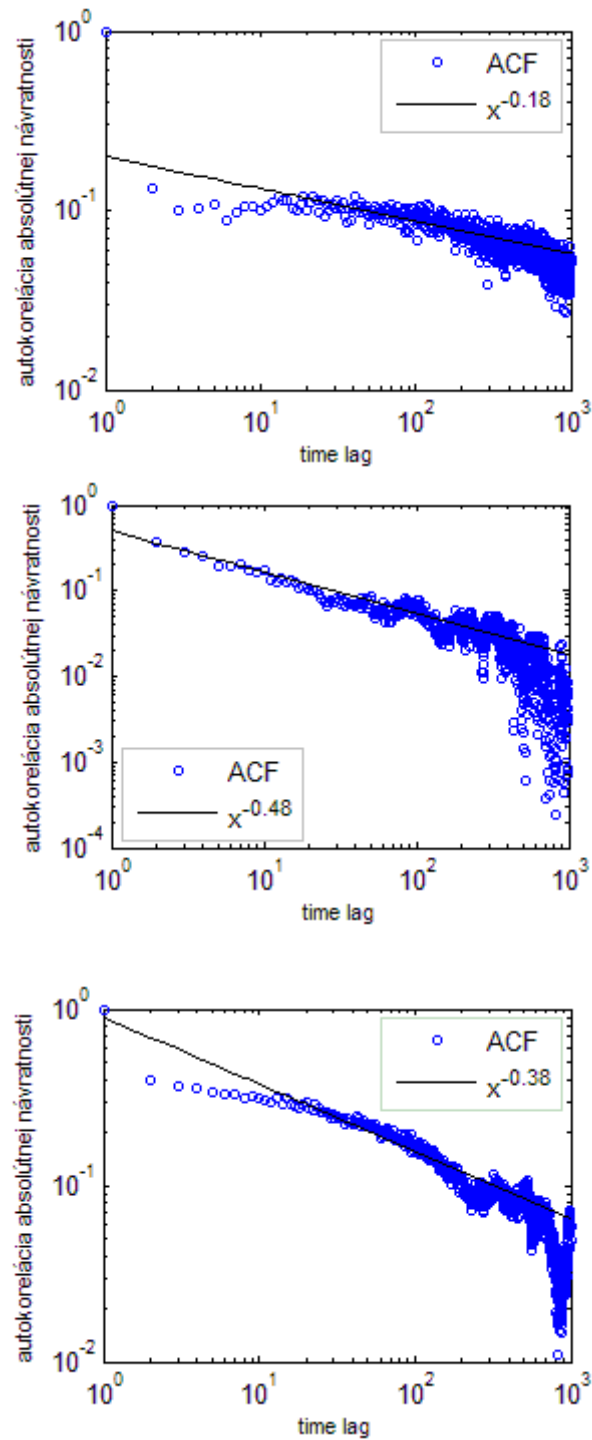
Podľa nášho pozorovania sa s pribúdajúcim počtom špekulantov na trhu znižuje priemerná hodnota návratností, no taktiež pozorujeme čoraz väčšie zhlukovanie návratností. Znamená to, že špekulanti svojou aktivitou síce eliminujú návratnosť, no s ich náhlym vstupom vo vyššom počte (prípadne so vstupom „botahších“ špekulantov) potom spôsobia veľký výkyv, obr. 6.2.



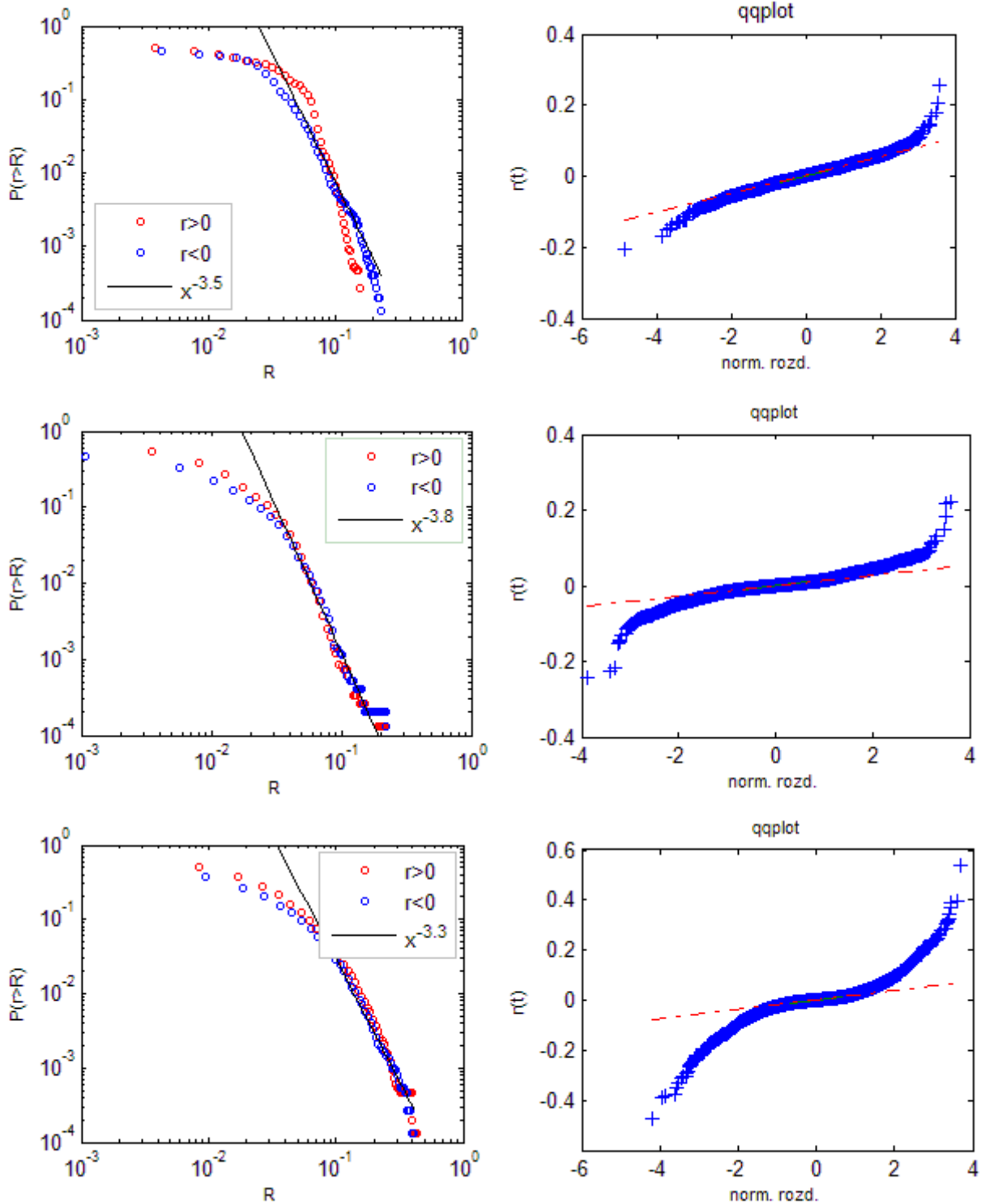
Obr. 6.2 Vývoj návratností v čase pre (zhora) $n_s = 1,3,8$.

Vlastnosťou reálnych trhov je dlhodobá autokorelácia návratností kopírujúca mocninovú funkciu $g(\tau) \sim \tau^{-\nu}$, pričom $\nu \in \langle 0.1, 0.3 \rangle$. Túto vlastnosť môžeme pozorovať aj v našom modeli, obr. 6.3. V asymetrickej fáze sa hodnota ν pre ACF pohybuje v rozmedzí 0.1 až 0.3, najvyššia je v prechode medzi symetrickou a asymetrickou fázou, kedy ν pozorujeme v rozmedzí až 0.2 až 0.5. V symetrickej fáze sa opäť mierne znižuje a jeho hodnota sa nachádza v intervale $\langle 0.1, 0.4 \rangle$.

V rozdelení návratností pozorujeme podobne ako pri reálnych trhoch ťažké chovosty. Hoci v našom modeli kopíruje rozdelenie návratností funkciu $f(r) \sim |r|^{-\alpha}$ najmä na chvostoch, stále pozorujeme ťažšie chovosty v porovnaní s normálnym rozdelením. Hodnota α je opäť najvyššia vo fázovom prechode, najbližšie hodnoty k tým na reálnych trhoch pozorujeme v symetrickej fáze.



Obr. 6.3 Autokorelácia návratností pre $n_s = 1, 3, 8$, pričom pre $n_s = 1$ sa trh nachádza v asymetrickej fáze, pre $n_s = 3$ na prechode medzi sym. a asym. fázou a pre $n_s = 8$ v symetrickej fáze.

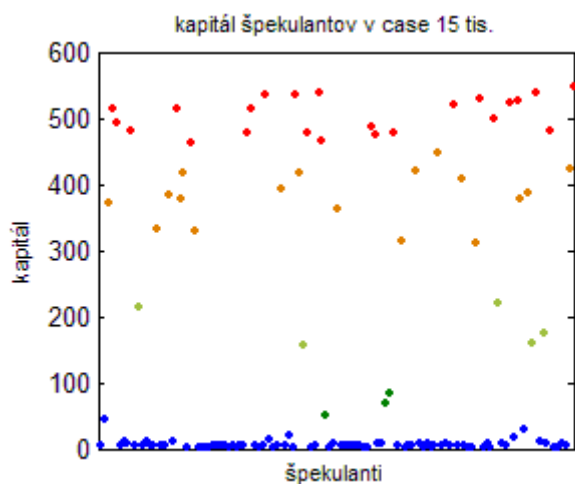


Obr. 6.4 Kumulatívna distribučná funkcia návratností pre $n_s = 1,3,8$ a qqplot ako porovnanie ťažkosti chvostov s normálnych rozdelením. (Normalita dát bola v každom pozorovaní zamietnutá JB aj KS testom normality.)

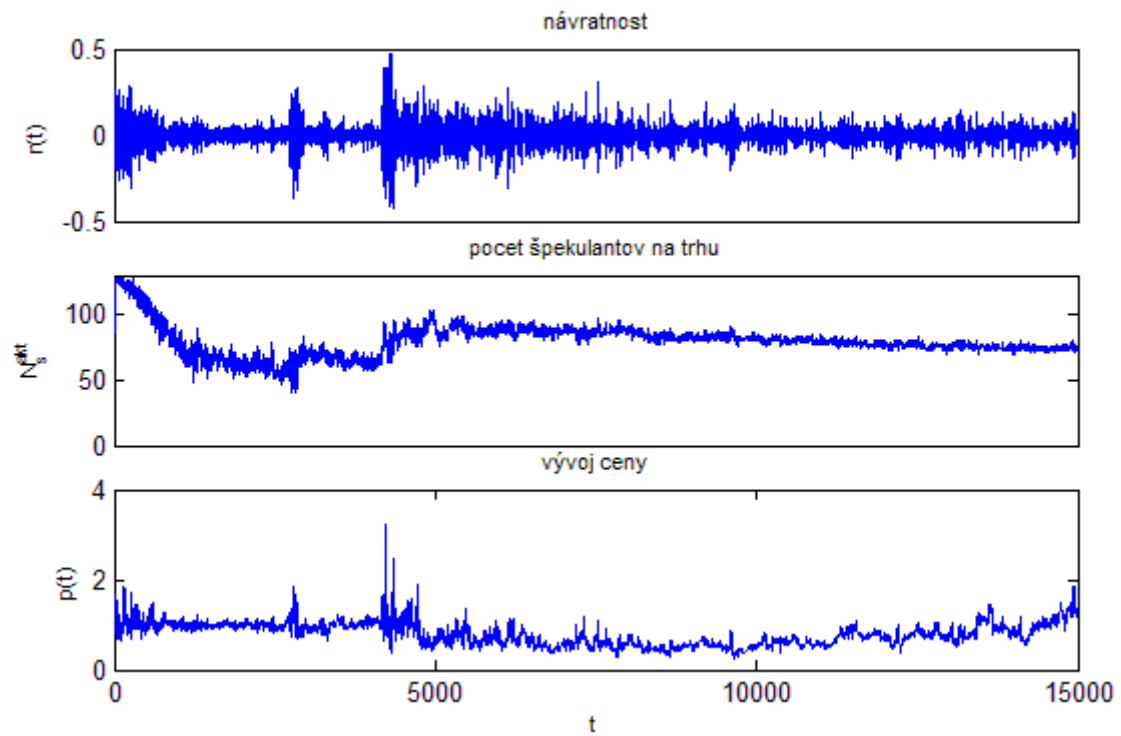
6.4.2 Pozorovanie vlastností zrealizovanej minoritnej hry

V tejto časti si bližšie rozoberieme posledný prípad pre $n_s = 8$, keď sa trh nachádza v symetrickej, nepredpovedateľnej, fáze. Vlastnosti modelu v symetrickej fáze sa najviac podobajú tým na finančných trhoch.

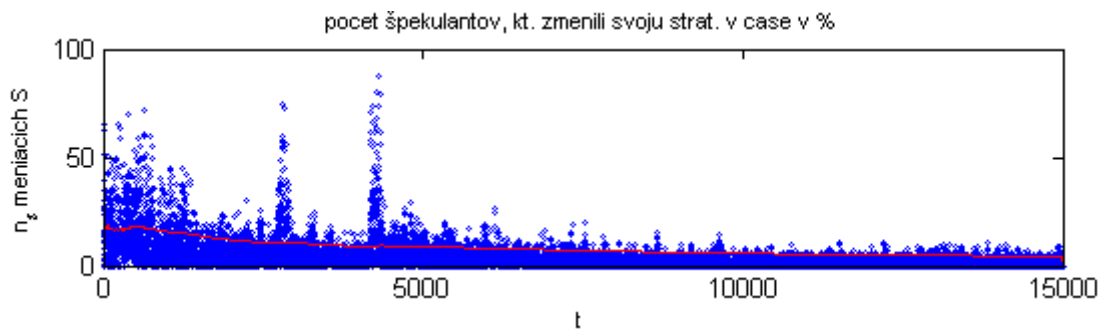
Hodnota návratností je veľmi blízko nuly, no často pozorujeme v jej priebehu zhluky veľkých výchyľok, obr. 6.6. Počet aktívnych špekulantov na trhu je ustálený, no keďže množstvo nimi obchodovaných peňažných jednotiek je vyššie ako množstvo, s ktorým disponujú na trhu producenti, ich aktivita sa v hodnote návratností veľmi prejaví. Špekulanti si prostredníctvom trhu neustále zvyšujú svoj kapitál, práve kôli tomu sme navrhli v modeli horné obmedzenie množstva obchodovaných jednotiek. K ich diverzifikácii podľa bohatstva dochádza pomerne rýchlo a po 15 tis. obchodovaniach sú schopní niektorí špekulanti zvýšiť svoj kapitál až 50-násobne, obr. 6.5. Špekulanti sa v symetrickej fáze zvyknú fixovať na jednu stratégiu. Keď však vycítia možnosť zvýšiť svoj zisk, najmä tí, ktorých dlhodobou stratégiou bola nulová, svoju stratégiu zmenia a na trh vstúpia, obr. 6.7. Pokiaľ náhle zaznamenáme zvýšený počet agentov, ktorí v danom čase zmenili svoju stratégiu, automaticky to znamená zvýšenie výchyľky a tým pádom aj väčšiu zmenu v cene. Po veľmi krátkom čase špekulanti zmenia svoju stratégiu opäť na nulovú a volatilita návratnosti sa prudko zníži. Väčšia zmena v návratnosti však nemusí nutne indikovať zvýšený počet zmien v stratégiách. Tá môže byť spôsobená prítomnosťou „bohatých“ špekulantov na trhu. Priebeh ceny kopíruje správanie sa dopytu. Pokiaľ je dopyt vyšší ako je ponuka, cena komodity sa zvýši. Čím výraznejší je rozdiel medzi ponukou a dopytom, k tým väčším zmenám dochádza v cene.



Obr. 6.5 Kapitál špekulantov po 15 tisíc obchodovaniach. Až 15% dokáže svoj pôvodný kapitál zvýšiť približne 50-násobne. 13% približne 30 až 45 krát a 10% 5 až 30 krát. Zvyšná nadpolovičná väčšina si udržuje kapitál približne na rovnakej úrovni ako na začiatku. Keďže horné ohraničenie je 5 obchodovaných jednotiek, rozdelia sa špekulanti podľa majetku na 2 hlavné skupiny. Tí „bohatí“, ktorých obchodované množstvo je 5 jednotiek (do 40% špekulantov) a „chudobní“, ktorí obchodujú s menšími čiastkami (viac ako 60%).

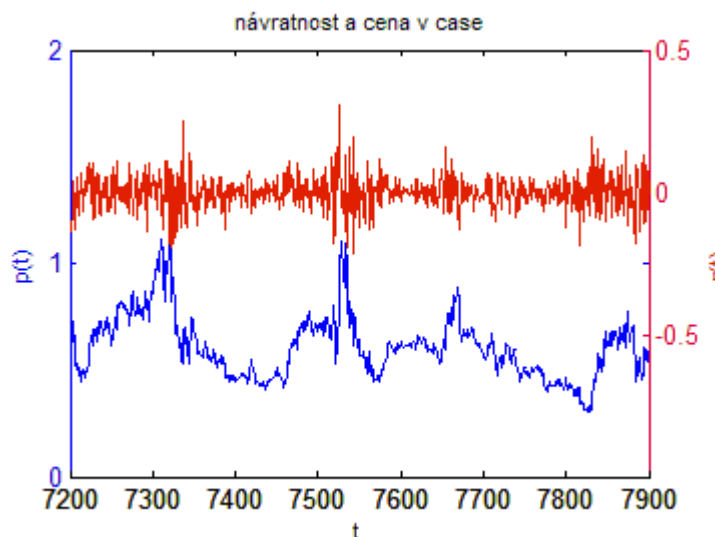


Obr. 6.6 Zhora môžeme vidieť priebeh návratností, počtu prítomných špekulantov na trhu a ceny v čase.

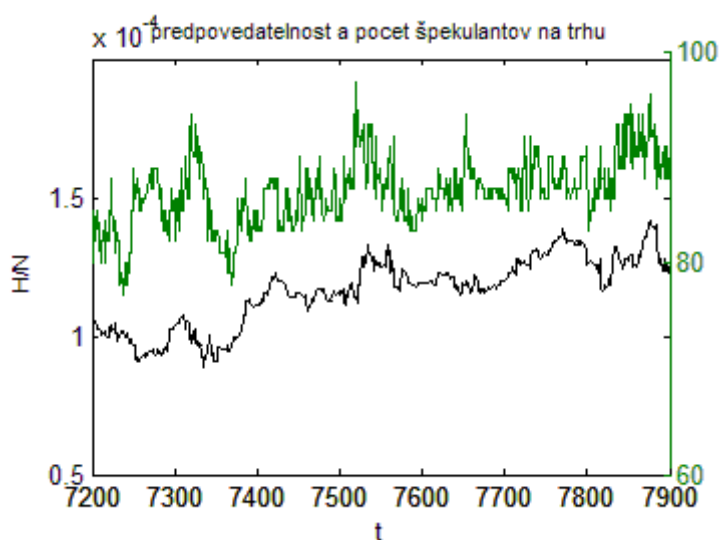


Obr. 6.7 Percentuálny počet špekulantov, ktorí zmenili svoju stratégiu v čase. A červená krivku znázorňuje priemer.

Zoberme si časový úsek, v ktorom sú pozorovateľné výchyľky v cene a v návratnosti. Ako možno vidieť na obr. 6.8, k výrazným zmenám v cene dochádza práve vtedy, keď pozorujeme zhľuky v návratnosti ($r(t) = \ln p(t+1) - \ln p(t)$). Za akých podmienok však k týmto zhľukom dochádza? Čo im predchádza a ako to súvisí so špekulantmi?



Obr. 6.8 Priebeh návratnosti (červenou) a ceny (modrou) vo vybranom časovom úseku.



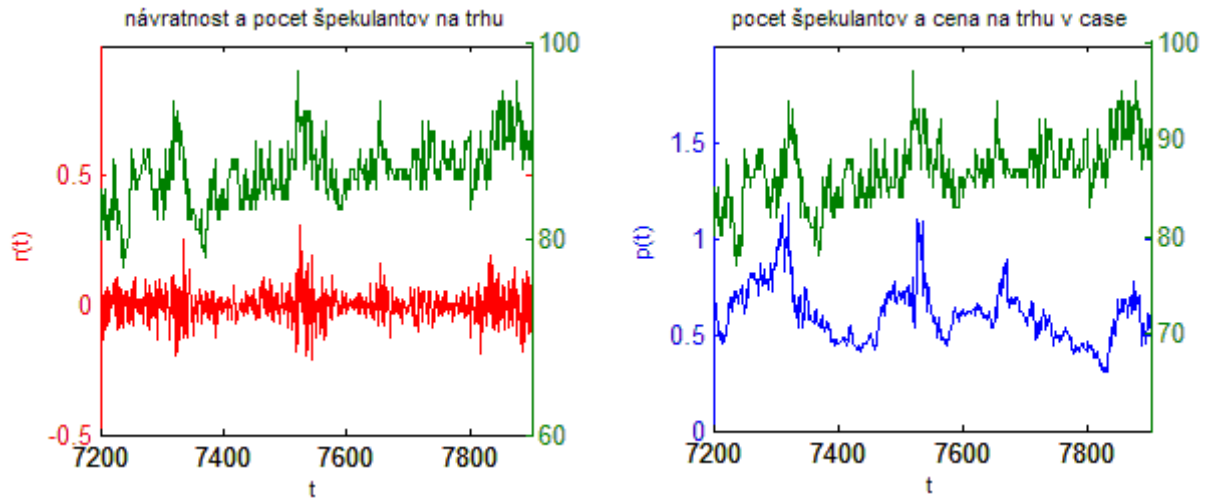
Obr. 6.9 Predpovedateľnosť (čiernou) a počet aktívnych špekulantov (zelenou) na trhu vo vybranom časovom úseku.

Špekulanti na trh vstupujú len v prípade, keď im podľa ich stratégií vstup prinesie zisk. V symetrickej fáze je hodnota predpovedateľnosti takmer nulová. Producenti ju svojou aktivitou na trh vkladajú, no špekulanti ju hneď využijú vo svoj prospech a tým eliminujú. Súvislosť výchyľiek v predpovedateľnosti (rádovo 10^{-4}) a počtu aktívnych špekulantov na trhu môžeme pozorovať na obr. 6.9.

Špekulanti svojím vstupom a vkladom hneď zvýšia absolútnu hodnotu návratnosti a tým pádom aj ceny, obr. 6.10.

Pridaním špekulantov do modelu a ich diverzifikovaním podľa ich úspešnosti na „chudobných, bohatších a bohatých“ sme však dokázali vytvoriť model, ktorého vlastnosti sú porovnateľné s vlastnosťami na finančných trhoch. Hoci má tento model ešte veľa nedostatkov, jeho ďalším modifikovaním je možné vytvoriť model, ktorý bude môcť byť

v istej miere použitý na predikciu trhu, v zmysle predikcie pohybu ceny smerom nahor či nadol, prípadne prudkosť tejto zmeny.



Obr. 6.10 Vľavo: návratnosť (červenou) a počet aktívnych špekulantov (zelenou) na trhu a vpravo: cena (modrou) a počet aktívnych špekulantov (zelenou) na trhu vo vybranom časovom úseku.

Poznámka: V našom modeli sme poskytli špekulantom možnosť obchodovať s väčšími čiastkami s akými obchodovali producenti. Ich vplyv na trh bol veľký, obmedzili sme ho však hornou hranicou pre veľkosť obchodovanej čiastky v každom čase. Kvalitatívne vlastnosti sa však mezmenia ani keď špekulantov postavíme ako obchodníkov s malým vplyvom oproti producentom.

Kapitola 7

Diskusia k výsledkom

Snahou vedcov je vytvoriť model, ktorý by bol použiteľný pri predpovedi budúceho vývoja trhov. Pre jeden z prístupov bol použitý ako základ model minoritnej hry, ktorý bol postupne obohacovaný o prvky vlastné reálnym trhom. Pôvodná minoritná hra totiž nezahrňuje žiadne ceny, či obchodovanie a všetci agenti majú heterogénne stratégie. Podobnosť s trhmi je len metaforická. Agenti sa svojou voľbou $a \in \{-1,1\}$ rozdelia do dvoch skupín, ktoré sú v ideálnom prípade vhl'adom na celú spoločnosť rovnako veľké. Teda v prípade trhu by to znamenalo, že dopyt je úplne uspokojený ponukou.

Napriek jednoduchosti modelu môžeme pozorovať, že agenti sa naozaj budú rozdeľovať do skupín približne rovnakej veľkosti a to, aký rozdiel vo veľkosti týchto skupín bude, závisí od počtu zúčastnených a od počtu informácií, ktoré im môžu byť poskytnuté. Články ako [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] sa zamerali na závislosť niektorých vlastností od pomeru počtu informácií a počtu agentov. Treba poznamenať, že prístup k dynamike minoritnej hry sa môže líšiť, napr. v počítaní úspešností stratégií, skutočných výplát agentov, vo výbere informácie v danom čase, atď.. Ďalej treba brať do úvahy aj programy, v ktorých boli simulácie spustené a ich zdroje náhodnosti. Náhodnosť zohráva dôležitú úlohu pri vzniku volatility, ktorá je kľúčová pri štúdiu minoritných hier ako trhového modelu.

Bližším pozorovaním sa zistilo, že v modeli existuje bod, ktorý oddeľuje dve oblasti s odlišným správaním vlastností ako sú volatilita a predpovedateľnosť, obr. 4.4 a 4.6. Taktiež sa pozorujú aj zmeny v správaní sa agentov z pohľadu voľby stratégií, obr. 4.8. Tento bod, kritický bod, oddeľuje symetrickú, nepredpovedateľnú, od asymetrickej, predpovedateľnej, fázy. V symetrickej fáze, $\alpha = \frac{P}{N} < \alpha_c$ ($N < P$), je hodnota $H \approx 0$, volatilita na jedného hráča pre $M = fix$ je proporcionálna počtu hráčov, teda $\frac{\sigma^2}{N} \sim N$ a takmer všetci agenti zmenia počas celej hry svoju stratégiu aspoň raz. V asymetrickej fáze, $\alpha > \alpha_c$, je $H > 0$, teda pravdepodobnosť naklonenia výchylky na jednu stranu je väčšia ako $\frac{1}{2}$, obr. 4.7. Volatilita rastie pri $M = fix$ s $N^{\frac{1}{2}}$ a pre $N \ll P$ je $\frac{\sigma^2}{N} \cong 1$. Hra pripomína náhodnú hru. Podiel zamrznutých agentov dosahuje svoje maximum na začiatku asymetrickej fázy a odvtedy klesá

s rastúcou α . Volatilita dosahuje svoje minimum práve v bode, v ktorom sa mení symetrická fáza na asymetrickú, teda v kritickom bode α_c . Numerické riešenie kritického bodu α_c sa v jednotlivých článkoch [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] líši. Jej hodnota leží v intervale $\langle 0.3, 0.5 \rangle$. Naše pozorovanie sa zhoduje s tými, ktoré sú uvedené napr. v literatúre [2, 3], v ktorých sa hodnota $\alpha \cong 0.34$. Rozdiely v tejto hodnote môžu byť spôsobené nižším počtom kôl hry, z ktorých bol spravený priemer. Volatilita sa pri vyšších hodnotách N a P ustáli až po dlhšom čase. Preto sme do priemeru brali hodnoty (volatility, predpovedateľnosti, počtu zamrznutých agentov, ...) až po viacerých kolách hry (cca. 1 až 3 tisíc). (Na krivky znázornené na obrázkoch 4.3 až 4.10 bol použitý priemer z približne 50 simulácií s počtom kôl 10 tisíc.)

Pri pridávaní reálnych prvkov do modelu je potrebné dbať na to, aby model ostal aj naďalej jednoduchý a snažiť sa vkladať do modelu tie reálne zložky, ktoré dokážu vyriešiť viacero reálnych znakov naraz. Zahnutím nového typu agentov do modelu sa dá vyriešiť viacero reálnych zložiek, akými sú po prvé agenti - špekulanti, ktorí na trh vstupujú len za účelom obohatiť sa, po druhé meniť objem obchodovaného množstva na trhu v čase a v 6. kapitole sme ukázali, že vstupom špekulantov na trh sa dajú popísať výkyvy v návratnosti a tým aj v cenách. S pojmom grand kanonická hra sme sa mohli stretnúť vo viacerých článkoch, napr. [2, 3]. Nastavenie počítania virtuálneho a reálneho skóre agentom sa líši, to však kvalitatívne nemá vplyv na pozorované vlastnosti. Inšpirácia pre pozorovania v kapitolách 5 a 6 bola čerpaná najmä z článkov [1, 9, 10, 11]. Fázový prechod pre model so špekulantmi nie je v literatúrach veľmi rozoberaný, resp. nie ako závislosť n_s na n_p . Overenie správnosti môjho pozorovania s dostupnou literatúrou tak nie je úplne možné, no výsledky uvedené v článkoch [1, 9] vykazujú veľmi podobné tendenčné vlastnosti tým znázorneným na obr. 5.2 až 5.15.

Medzi reálne vlastnosti trhov patrí okrem iného zhľukovanie v návratnosti, jej dlhodobá autokorelácia a ťažké chvosty v jej rozdelení [11]. V 6. kapitole sme sa zamerali na štúdium týchto vlastností v závislosti na počte špekulantov. Cenu a kapitál sme do modelu zahrnuli tak ako v článku [10] s tým, že vplyv špekulantov sme obmedzili položením hornej hranice obchodovaného množstva peňazí v každom čase. Ak by sme toto množstvo neobmedzili, dochádzalo by až k príliš veľkým výchylkám v návratnosti dokonca až takmer rovným 1. „Bohatý“ špekulant je v takom prípade schopný úplne zvrátiť priebeh trhu. Pokiaľ by sme neuvažovali kapitál v modeli, zhľuky by boli len slabo pozorovateľné. V článku [1] sa uvádza, že veľké zhľuky vo volatilita možno pozorovať aj v modeli, v ktorom kapitál zahrnutý nie je. Tento rozdiel možno odôvodniť rozdielnym prístupom k vyjadreniu návratnosti. Kým my

uvažujeme dynamický priebeh objemu peňazí na trhu, v článku [1] používajú $r(t)$ priamo úmerné $A(t)$ (λ je konštantá). Veľkosť výchýliek závisí aj od pomeru počtu špekulantov a producentov na trhu a taktiež od ďalších parametrov, akými sú P , S , ε . Pozorujeme však priamy súvis medzi počtom aktívnych špekulantov na trhu a volatilitou v návratnosti a cene. K drastickým zmenám v návratnosti, tzv. krachom spôsobených príchodom veľkého počtu špekulantov na trh naraz dochádza najmä pri vyššom počte špekulantov na trhu. Následkom toho je rapídny nárast, prípadne pokles, ceny a drastické zníženie počtu aktívnych špekulantov.

V modeli taktiež pozorujeme dlhodobú autokoreláciu absolútnej návratnosti so sklonom blízky pozorovanému na finančných trhoch [11], obr. 6.3. Rozdelenie návratnosti má podobne ako pri reálnych dátach ťažké chvosty, hoci nekopíruje funkciu $f(r) \sim |r|^{-\alpha}$ na celom intervale, ale len na chvostoch, obr. 6.4. Môžeme však sledovať výraznú podobnosť s vlastnosťami reálnych finančných trhov.

Kapitola 8

Záver

Minoritné hry sa ukazujú ako vhodný trhový model. Hoci pôvodná minoritná hra neobsahuje žiadne trhové vlastnosti, jej prispôbením a pridaním reálnych prvkov nabera hra skutočne charakter finančného trhu. Cieľom tejto práce bolo vytvoriť model, ktorého vlastnosti by sa zhodovali s tými pozorovanými na finančných trhoch. Zároveň sme však chceli, aby si model zachoval čo najviac základných charakteristík minoritnej hry.

Silným znakom minoritných hier je fázový prechod, ktorý oddeľuje symetrickú a asymetrickú fázu. Túto vlastnosť pozorujeme aj v zrealizovanom modeli, kedy sme do modelu pridal ďalší typ obchodníkov s pozmenenými stratégiami, zaviedli sme aj transakčné poplatky. Do modelu sme zahrnuli cenu a obchodníkom poskytli kapitál, ktorý sa vyvíjal podľa ich úspešnosti na trhu. Umožnili sme im obchodovať s rôznymi peňažnými čiastkami, čím sme rozdelili obchodníkov na tých „bohatších“ s veľkým vplyvom a „chudobnejších“ s menším vplyvom. V nami vytvorenom modeli tak možno pozorovať vlastnosti reálnych trhov akými sú zhlukovanie volatility v návratnosti, dlhodobá autokorelácia absolútnej návratnosti správajúca sa ako mocninová funkcia a ťažké chvosty v jej rozdelení. Najviac spoločných črt sme zaznamenali v symetrickej fáze modelu. Trh sa nedá predpovedať, neexistuje arbitrážna príležitosť. Efektivita trhu je najvyššia, keďže dochádza „k najlepšiemu využitiu zdroja“. Možno teda predpokladať, že podobný prechod medzi symetrickou a asymetrickou fázou existuje aj na finančných trhoch.

Aj napriek jednoduchosti modelu môžeme povedať, že je schopný kopírovať vlastnosti reálneho trhu. Snahou je použiť model na predikciu vývoja trhu. To nie je v takomto štádiu možné, no ďalšími prípadnými modifikáciami modelu sa možno bude dať v budúcnosti model naozaj na predikovanie rastu alebo poklesu cien, prípadne na predpoveď krachu búrz, použiť.

Kapitola 9

Referencie

- [1] Damien Challet, Matteo Marsili and Yi-Cheng Zhang: *Stylized facts of financial markets and market crashes in Minority Games*, arXiv:cond-mat/0101326v1, 2008
- [2] Tobias Galla, Giancarlo Mosetti, Yi-Cheng Zhang: *Anomalous fluctuations in Minority Games and related multi-agent models of financial markets*, arXiv:physics/0608091v1, 2006
- [3] Challet, Matteo Marsili and Yi-Cheng Zhang: *Minority Games interacting agents in financial markets*, Oxford University press, 2005
- [4] Robert Savit, Radu Manuca and Rick Riolo: *Adaptive Competition, Market Efficiency, Phase Transitions and Spin-Glasses*, Physical Review Letters, Vol. 82,1999, p. 2203
- [5] Willemien Kets: *The minority games: An economics perspective*, arXiv:0706.4432v1, 2007
- [6] Esteban Moro: *The minority games: an introductory guide*, arXiv:cond-mat/0402651v1, 2004
- [7] Michael L. Hart and Neil F. Johnson: *Crowd-Anticrowd Theory of Multi-Agent Minority Games*, arXiv:cond-mat/0212088v2, 2008
- [8] C. H. Yeung and Y.-C. Zhang: *Minority Games*, arXiv:0811.1479v2, 2010
- [9] Damien Challet, Matteo Marsili and Yi-Cheng Zhang: *Modeling Market Mechanism with Minority Game*, arXiv:cond-mat/9909265v1, 2008
- [10] Tobias Galla and Yi-Cheng Zhang: *Minority games, evolving capitals and replicator dynamics*, arXiv:0908.2347v1, 2009
- [11] *Physicists Attempt To Scale The Ivory Towers Of Finance*, Comput. Sci. Eng. (1999) November/December: 26–39

[12]. W.B. Arthur: *Inductive Reasoning and Bounded Rationality: Am. Economic Assoc.Papers and Proc.*, Vol. 84,1994,406-411

[13] W.B. Arthur: *Complexity and the Economy*, Science, Vol. 238,1999, pp. 107-109

[14] D. Challet and Y.-C. Zhang: *Emergence of Cooperation and Organization in an Evolutionary Game*, Physica A, Vol. 246,1997, p.407.

Kapitola 10

Príloha

Program

Poznámka: Z dôvodu veľkosti súborov potrebných pre vytvorenie všetkých grafov ich príloha neobsahuje všetky. Uvedené sú však všetky kľúčové súbory, ktoré tak slúžia najmä na vytvorenie obrazu o kóde. (Použitý program – matlab.)

základná minoritná hra

```
function [v_suma_A, v_Nakt, v_vyplat, v_mi, m_best_strat, success_rate,
ms_hd, spek_v] = hra1 (Np, Ns, pocet_hier, eps, P, S)

N= Np + Ns;
M=log2 (P);
vsmS=round(rand(P, S*N))*2-1;
% opacne strategie spekulantom
vsmS(:, (Np+1)*2:2:S*N)=vsmS(:, (2*Np+1):2:S*N-1)*(-1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% strategie spekulantom s roznuou hammingovou vzdialenostou
% d=7/8;
% x=ones(P,1);
% x(1:P*d,1)=ones(P*d,1)*(-1);
% c=zeros(P,Ns);
% for i=1:Ns
%     c(:,i)=shuffle(x);
% end
% vsmS(:, (2*Np+2):2:N*2)=vsmS(:, (2*Np+1):2:2*N-1).*c;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
mUsp= zeros(S, N);
v_volba= ones(1, N)*2;
v_vyplat= zeros(1, N);
best_strat= zeros(1, N);
m_best_strat=zeros(pocet_hier,N);
v_suma_A= zeros(1,pocet_hier+1);
v_Nakt=zeros(1,pocet_hier+1);
v_mi=1;
success_rate=ones(1, N)*(-1);
spek_v=zeros(1,Ns);

for j=1 : pocet_hier
    v_mi=[v_mi, ceil(rand(1,1)*P)];
    for i= 1 : Np
        [v_volba,mUsp,best_strat,success_rate]= producentil
(i,Np,v_Nakt(j),eps,S,v_suma_A(j),v_volba,vsmS,mUsp,v_mi,best_strat,success
_rate);
    end
    for i= 1 : Ns
        [v_volba,mUsp,best_strat,success_rate,spek_v]= spekulantil
(i+Np,Np,v_Nakt(j),eps,S,v_suma_A(j), v_volba, vsmS, mUsp,
v_mi,best_strat,success_rate,spek_v);
    end
    v_suma_A(j+1)= sum(v_volba);
end
```

```

v_Nakt(j+1)= Ns-sum(v_volba==0);
v_A= -sign(sum(v_volba));
v_vyplat=v_vyplat-v_volba*sum(v_volba) + eps*(1 - abs(v_volba));
m_best_strat(j,:)=best_strat;
end
v_suma_A=v_suma_A(2:length(v_suma_A));
v_Nakt=v_Nakt(2:length(v_Nakt));
v_mi=v_mi(2:length(v_mi));
success_rate=sum(success_rate)/N/pocet_hier;
kt=m_best_strat(pocet_hier, :)+(0:N-1)*S;
ms_hd=vsmS(:, kt);

```

volia producenti

```

function [v_volba, mUsp, best_strat, success_rate] = producentil (c, Np, Nakt,
eps, S, A, v_volba, vsmS, mUsp, v_mi, best_strat, success_rate)

m_S= vsmS(:, ( (c-1)*S+1):(c*S) );
mUsp(:, c)=mUsp(:, c)- m_S(v_mi(length(v_mi)-1), :)'*A;

success_rate(c)=success_rate(c)+abs(v_volba(c)-sign(A))/2;
us= max(mUsp(:, c));
ve= [];
for i= 1 : S
    if us == mUsp(i, c)
        ve= [ve, i];
    end
end
kt= ceil(rand(1,1)*length(ve));
v_volba(c)= m_S(v_mi(length(v_mi)), ve(kt));
best_strat(c)=ve(kt);

```

volia špekulanti

```

function [v_volba, mUsp, best_strat, success_rate, spek_v] = spekulantil (c,
Np, Nakt, eps, S, A, v_volba, vsmS, mUsp,
v_mi, best_strat, success_rate, spek_v)

m_S= vsmS(:, ( (c-1)*S+1):(c*S) );
mUsp(:, c)=mUsp(:, c)- m_S(v_mi(length(v_mi)-1), :)'*A;
success_rate(c)=success_rate(c)+abs(v_volba(c)-sign(A))*abs(v_volba(c))/2;
us= max(mUsp(:, c));
ve= [];
for i= 1 : S
    if us == mUsp(i, c)
        ve= [ve, i];
    end
end
kt= ceil(rand(1,1)*length(ve));
volba= m_S(v_mi(length(v_mi)), ve(kt));
if us < eps*(length(v_mi)-2)
    volba= 0;
end
v_volba(c)= volba;
best_strat(c)=ve(kt);
spek_v(c-Np)=spek_v(c-Np)+abs(volba);

```

kapitola 4 - vlastnosti minoritnej hry od M a N

- podiel zamrznutých agentov - frac , predpovedateľnosť – p_v_H, volatilita - vol

```
function [alfa, frac, p_v_H, vol] = vlastnosti(M)

S=2;
po_kolko=10;
kolko=10;
pocet_hier=10000;
alfa=zeros(1,po_kolko);

fraction=zeros(kolko,po_kolko);
m_H=zeros(kolko,po_kolko);
matica_efekt=zeros(kolko,po_kolko);
P=2^M;

for i=1:kolko
    fr=zeros(1,po_kolko);
    v_H=zeros(1,po_kolko);
    efekt= zeros(1,po_kolko);
    vekt= zeros(1,po_kolko);
    for k=1:po_kolko
        N=(po_kolko-k)*30+15;
        N=(k-1)*10+5;
        H=0;
        A=zeros(q,P);
        [v_suma_A, v_Nakt, v_vyplat, v_mi, m_best_strat,s_r] = hra1 (N,0,
pocet_hier,0,P,S);
        v_suma_A=v_suma_A(5001:pocet_hier);
        v_mi=v_mi(5001:pocet_hier);
        poc=zeros(1,P);
        a=zeros(1,P);
        for j=1:pocet_hier-5000
            poc(v_mi(j))=1+poc(v_mi(j));
            a(v_mi(j))=v_suma_A(j)+a(v_mi(j));
        end
        v_H(k)= sum((a./poc).^2)/P/N;
        efekt(k)= mean(v_suma_A.^2)/N;
        alfa(k)=P/N;
        fr(k)=poc/N;
    k
    end
    fraction(i,:)= fr;
    m_H(i,:)= v_H;
    matica_efekt(i,:)= efekt;
end
i
end
frac=mean(fraction);
p_v_H=mean(m_H);
vol= mean(matica_efekt);
```

kapitola 4 - Hammingova vzdialenosť, úspešnosť na N

```
function [alfa, volatilita, ham_dist, suc_rate] = globEffP (N,S)

priemer_zo=20;
po_kolko=10;
alfa=zeros(1,po_kolko-1);
matica_efekt= zeros(priemer_zo,po_kolko-1);
```

```

ham_distance=zeros(priemer_zo,po_kolko-1);
suc_rate=zeros(priemer_zo,po_kolko-1);

for i=1:priemer_zo
    efekt= zeros(1,po_kolko-1);
    success_rate= zeros(1,po_kolko-1);
    h_d=zeros(1,po_kolko-1);
    for M= 2:po_kolko
        P=2^M;
        alfa(M-1)=P/N;
        [v_suma_A, v_Nakt, v_vyplat, v_mi, m_best_strat,s_r, ms_hd] = hra1
(N, 0, 10000, 0, P, S);
        success_rate(M-1)=s_r;
        efekt(M-1)= mean(v_suma_A(5001:10000).^2)/N;
        RS=0;
        for k=1:N-1
            for l=k+1:N
                RS=RS+sum(abs(ms_hd(:,k)-ms_hd(:,l)));
            end
        end
        h_d(M-1)=1/2^M/(N-1)/N*sum(RS);
    end
    matica_efekt(i,:)= efekt;
    ham_distance(i,:)=h_d;
    suc_rate(i,:)=success_rate;
end
i
end
volatilita= mean(matica_efekt);
ham_dist= mean(ham_distance);
s_rate= mean(suc_rate);

```

kapitola 5 – ekológia trhu

```

function symbioza
% v hra1 treba pozmenit:
% strategie producentov - aby mali len jednu
% spekulantu opacne strategie
% nastavit d -hammingovu vzdialenost

S=2;
P=32;
eps=0.1;
pocet_hier=10000;
kolko=20;
po_kolko=10;
vyplataP1=zeros(kolko,po_kolko);
vyplataS1=zeros(kolko,po_kolko);
predict1=zeros(kolko,po_kolko);
volatilital=zeros(kolko,po_kolko);
m_nakt1=zeros(kolko,po_kolko);
Ns=P; % ak fixujeme pocet producentov a menime pocet spekulantov
Np=P; % ak fixujeme pocet spekulantov a menime pocet producentov
for i=1:kolko
    for k=1:po_kolko
        Np=k*P/2;
        % Ns=k*P/2;
        N=Ns+Np;
        [v_suma_A, v_Nakt, v_vyplat, v_mi, m_best_strat,s_r,ms_hd] = hra1
(Np,Ns,pocet_hier,eps,P,S);
        vyplataP1 (i,k)=sum(v_vyplat(1:Np)/Np)/pocet_hier;
    end
end

```

```

    vyplataS1 (i,k)=sum(v_vyplat(Np+1:N)/Ns)/pocet_hier;
    v_suma_A=v_suma_A(5001:pocet_hier);
    v_mi=v_mi(5001:pocet_hier);
    poc=zeros(1,P);
    a=zeros(1,P);
    for j=1:pocet_hier-5000
        poc(v_mi(j))=1+poc(v_mi(j));
        a(v_mi(j))=v_suma_A(j)+a(v_mi(j));
    end
    predict1 (i,k)= sum((a./poc).^2)/P/N;
    volatilita1 (i,k)=mean(v_suma_A.^2)/N;
    m_nakt1 (i,k)=mean(v_Nakt(100*P+1:pocet_hier));
end
end

```

zreálny model

```

function [v_suma_A, v_Nakt, kapital, v_mi, r, zbankrot, m_best_strat,
vyplata] = hraNM (Np,Ns,pocet_hier,eps,P,S,delta)

N= Np + Ns;
M=log2 (P);
% strategie producentom
vsmS_P=round(rand(P,Np))*2-1;
% opacne strategie spekulantom
vsmS_S=round(rand(P,S*Ns))*2-1;
vsmS_S(:,2:S:S*Ns)=vsmS_S(:,1:S:S*Ns-1)*(-1);
% matica uspesnosti sepkulantom
mUsp_S= zeros(S+1, Ns);
mUsp_S(S+1,:)= -ones(1,Ns)*eps;

v_volba= ones(1, N)*2;
v_suma_A= zeros(1,pocet_hier+1);
objem=zeros(1,pocet_hier+1);
r=zeros(1,pocet_hier+1);
v_Nakt=zeros(1,pocet_hier+1);
v_mi=1;
kapital= randn(1,N)*sqrt(5)+10;
povodny_kapital=kapital;
zbankrot=zeros(1,pocet_hier);
best_strat= zeros(1, Ns);
m_best_strat=zeros(pocet_hier,Ns);
vyplata=zeros(1,N);

for j= 1 : pocet_hier
    v_mi=[v_mi,ceil(rand(1,1)*P)];
    % volba producentov
    v_volba(1:Np)=vsmS_P(v_mi(j+1), :);
    % volba spekulantov
    for i=1 : Ns
        [v_volba,mUsp_S,vsmS_S,kapital,zbankrot,best_strat]= spekulantiNM
(i,Np,eps,S,v_suma_A(j), v_volba, vsmS_S, mUsp_S, v_mi,
kapital,zbankrot,best_strat);
    end
    invest=min(kapital*delta, 5);
    v_suma_A(j+1)= sum(v_volba.*invest);
    objem(j+1)=sum(abs(v_volba).*invest);
    r(j+1)=v_suma_A(j+1)/objem(j+1);
    v_Nakt(j+1)= Ns-sum(v_volba==0);
end
end

```



```

    vyplata=vyplata-v_volba*v_suma_A(j+1).*invest + eps*(1 -
abs(v_volba)).*invest;
    kapital=kapital-v_volba*r(j+1).*invest + eps*(1 -
abs(v_volba)).*invest;
    kapital(1:Np)=povodny_kapital(1:Np);
    m_best_strat(j,:)=best_strat;
end
v_suma_A=v_suma_A(2:length(v_suma_A));
objem=objem(2:length(objem));
r=r(2:length(r));
v_Nakt=v_Nakt(2:length(v_Nakt));
v_mi=v_mi(2:length(v_mi));
vyplata=mean(vyplata(Np+1:N))/pocet_hier;

```

volia špekulanti

```

function [v_volba, mUsp_S, vsmS_S, kapital, zbankrot, best_strat] =
spekulantiNM (c, Np, eps, S, A, v_volba, vsmS_S, mUsp_S, v_mi,
kapital, zbankrot, best_strat)
m_S= vsmS_S(:, ( (c-1)*S+1):(c*S) );

mUsp_S(1:S,c)=mUsp_S(1:S,c)- m_S(v_mi(length(v_mi)-1),:)'*A;%/(Np+Nakt);
mUsp_S(S+1,c)=mUsp_S(S+1,c)+eps;

us= max(mUsp_S(:, c));
ve= [];
for i= 1 : S+1
    if us == mUsp_S(i, c)
        ve= [ve, i];
    end
end
kt= ceil(rand(1,1)*length(ve));
if ve(kt)==S+1
    volba=0;
else
    volba= m_S(v_mi(length(v_mi)), ve(kt));
end
v_volba(c+Np)= volba;
best_strat(c)=ve(kt);

if kapital(c+Np)<1
    hra=length(v_mi)-1;
    zbankrot(hra)=zbankrot(hra)+1;
    kapital(c+Np)=randn(1,1)*sqrt(5)+10;%10;
    P=size(vsmS_S);
    v=round(rand(P(1),1))*2-1;
    vsmS_S(:, ( (c-1)*S+1):(c*S))=[v,-v];
    mUsp_S(:,c)=zeros(S+1,1);
end

```

kapitola 5 - fázový prechod

```

function symbiozaNM

predict=zeros(kolko_S,kolko_P);
m_nakt=zeros(kolko_S,kolko_P);
volatilita=zeros(kolko_S,kolko_P);
zmena_strat=zeros(kolko_S,kolko_P);

```

```

vyplata=zeros(kolko_S,kolko_P);

for p=1:kolko_P
    predict_pom=zeros(kolko_S, kolko);
    m_nakt_pom=zeros(kolko_S,kolko);
    volatilita_pom=zeros(kolko_S,kolko);
    zmena_strat_pom=zeros(kolko_S,kolko);
    vyplata_pom=zeros(kolko_S,kolko);
    for i=1:kolko
        for s=1:kolko_S
            N=Ns(s)+Np(p);
            [v_suma_A, v_Nakt, kapital, v_mi, r, zbankrot,m_best, vypl] =
hraNM (Np(p),Ns(s),pocet_hier,eps,P,S,delta);
            v_suma_A=v_suma_A(5001:pocet_hier);
            v_mi=v_mi(5001:pocet_hier);
            poc=zeros(1,P);
            a=zeros(1,P);
            for j=1:pocet_hier-5000
                poc(v_mi(j))=1+poc(v_mi(j));
                a(v_mi(j))=v_suma_A(j)+a(v_mi(j));
            end

            m_best_strat=m_best(5000:pocet_hier,:);
            poc_zmien=zeros(1,5001);
            priemer=zeros(1,5001);
            for l=1:5000
                v=m_best_strat(l+1,:)-m_best_strat(l,:);
                poc_zmien(l+1)=sum(v~=0);
                priemer(l)=mean(poc_zmien(1:l));
            end
            vyplata_pom(s,i)=vypl;
            zmena_strat_pom(s,i)=priemer(5000)./Ns(s);
            volatilita_pom(s,i)=mean(v_suma_A.^2)/N;
            predict_pom(s,i)=sum((a./poc).^2)/P/N;
            m_nakt_pom(s,i)=mean(v_Nakt(5001:pocet_hier));
        end
    end
    vyplata(:,p)=mean(vyplata_pom)';
    zmena_strat(:,p)=mean(zmena_strat_pom)';
    volatilita(:,p)=mean(volatilita_pom)';
    predict(:,p)=mean(predict_pom)';
    m_nakt(:,p)=mean(m_nakt_pom)';
end

```

grafy v kapitole 6

```

function navratnostNM(pocet_hier,S,P,Ns,Np,eps,delta)

[v_suma_A, v_Nakt, kapital, v_mi, r, zbankrot, m_best_strat] = hraNM
(Np,Ns,pocet_hier,eps,P,S,delta);
poc_hier=pocet_hier;
p=ones(1,poc_hier);
for i=1:poc_hier-1
    p(i+1)=p(i)*exp(r(i));
end
vol=zeros(1,poc_hier);
v_H=zeros(1,poc_hier);
a=zeros(1,P);
poc_a=zeros(1,P);
for i=1:poc_hier

```

```

    a(v_mi(i))=v_suma_A(i)+a(v_mi(i));
    poc_a(v_mi(i))=1+poc_a(v_mi(i));
    v_H(i)=sum((a(poc_a~=0)./poc_a(poc_a~=0)).^2)/P/(Np+Ns);
    vol(i)=mean(v_suma_A(1:i).^2)/(Np+Ns);
end

% navratnost a spekulanti v case a cena v case
figure
subplot(3,1,1)
plot(r)
xlabel('t')
ylabel('r(t)')
title('návratnost')
subplot(3,1,2)
plot(v_Nakt)
xlabel('t')
ylabel('N_s^a^k^t')
title('pocet špekulantov na trhu')
subplot(3,1,3)
plot(p)
xlabel('t')
ylabel('p(t)')
title('vývoj ceny')

% zbankrotovani
sum(zbankrot)

% predpovedatenost v case
figure
plot(v_H)
xlabel('t')
ylabel('H/N')
title('predpovedatel'nost')

% percento spekulantov, ktorí zmenili v case t svoju najlepsiu strategiu
figure
poc_zmien=zeros(1,pocet_hier);
priemer=zeros(1,pocet_hier);
for i=1:pocet_hier-1
    v=m_best_strat(i+1,:)-m_best_strat(i,:);
    poc_zmien(i+1)=sum(v~=0);
    priemer(i)=mean(poc_zmien(1:i));
end
plot(poc_zmien/Ns*100,'o','MarkerSize',2)
hold on
plot(priemer/Ns*100,'r-','LineWidth',1)
xlabel('t')
ylabel('n_s meniacich S')
title('pocet špekulantov, kt. zmenili svoju strat. v case v %')

% percentualny zisk spekulantov
figure
plot(kapital)
title('kapital')

% autokorelacia navratnosti
figure
k=r(1:pocet_hier);
[ACF,Lags,Bounds] = autocorr(abs(k),[1000],[],[])
loglog(ACF,'o','MarkerSize',2)
hold on

```

```

x=1:1:1000;
y=0.15*x.^(-0.3);
loglog(y, 'k-')
legend('ACF', 'x^-^0.^3^0')
xlabel('time lag')
ylabel('autokorelácia absolútnej návratnosti')

% rozdelenie navratnosti ma tazke chvosty, rozdelenie ktoreho hustota
% f(x)~x^-(1+alfa) as x do inf, alfa>0
z=100;
k=r;
x=zeros(1, z);
vektor_r=zeros(1, z);
d=(max(k)-min(k))/z;
pom=sort(k);
pom2=pom;
for i=1:z
    x(i)=min(k)+i*d;
    vektor_r(i)=sum(pom2<min(k)+i*d);
    pom2=pom(sum(vektor_r)+1:length(k));
end

kladny_vektor_r=vektor_r(x>0);
dlzka_klad=length(vektor_r(x>0));
P_r_kladne=zeros(1, dlzka_klad);
for i=1:dlzka_klad
    P_r_kladne(i)=sum(kladny_vektor_r(i:dlzka_klad));
end
zaporny_vektor_r=abs(vektor_r(x<0));
dlzka_zap=length(vektor_r(x<0));
P_r_zaporne=zeros(1, dlzka_zap);
for i=1:dlzka_zap
    P_r_zaporne(dlzka_zap-i+1)=sum(zaporny_vektor_r(1:dlzka_zap-i+1));
end

% kumulativna distribucna funkcia navratnosti
figure
loglog(x(x>0), P_r_kladne/length(k), 'ro', 'MarkerSize', 3)
hold on
loglog(abs(x(x<0)), P_r_zaporne/length(k), 'bo', 'MarkerSize', 3)
hold on
f=0.0000001*x(x>0).^(-3.8);
loglog(x(x>0), f, 'k')
legend('r>0', 'r<0', 'x^-^3.^8')
xlabel('R')
ylabel('P(r>R)')

% rozdelenie
% porovnanie s normalnym
figure
n=randn(1, length(k))
qqplot(n, k)
% porovnanie s log-normalnym
figure
meank=mean(k);
stdk=std(k);
n=lognrnd(meank, stdk, [1 length(k)]);
qqplot(n, k)

kstest(k) %1 znamena, ze nie je z normalneho

```

```
% doplnkove grafy

% cena a N_sakt
figure
t=7201:7900;
[x,h1,h2]=plotyy(t,p(7201:7900),t,v_Nakt(7201:7900),'plot')
xlabel('t')
ylabel('N_s^a^k^t,p(t)')
title('cena a pocet špekulantov na trhu')

% r(t) a cena
figure
[x,h1,h2]=plotyy(t,p(7201:7900),t,r(7201:7900),'plot')
xlabel('t')
ylabel('r(t),p(t)')
title('cena a návratnost na trhu')

% r(t) a N_sakt
figure
[x,h1,h2]=plotyy(t,r(7201:7900),t,v_Nakt(7201:7900),'plot')
set(h1,'Color','r')
xlabel('t')
ylabel('r(t) N_s^a^k^t')
title('návratnost a pocet špekulantov na trhu')

% H/N a N_sakt
figure
[x,h1,h2]=plotyy(t,v_H(7201:7900),t,v_Nakt(7201:7900),'plot')
set(h1,'Color','k')
xlabel('t')
ylabel('H/N N_s^a^k^t')
title('predpovedateľnosť a pocet špekulantov na trhu')
```