

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**  
**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**

Evidenčné číslo

**AUTOREGRESNÉ MODELY INFLÁCIE SLOVENSKA**

**2010**

**Stanislav Grom**

**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE**  
**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**

**AUTOREGRESNÉ MODELY INFLÁCIE SLOVENSKA**

Diplomová práca

Študijný program: **9.1.9 Aplikovaná matematika**

Študijný odbor: **Ekonomická a finančná matematika**

Školiace pracovisko: **Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky**

Školiteľ: **doc. RNDr. Ján Pekár, PhD.**

**Bratislava 2010**

**Bc. Stanislav Grom**

## Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som prácu vypracoval samostatne s využitím mojich poznatkov a s použitím uvedenej literatúry

V Bratislave 26. apríla 2010

---

podpis študenta

## **Pod'akovanie**

Ďakujem svojmu školiteľovi doc. RNDr. Jánovi Pekárovi, PhD. za ochotu, cenné rady a usmernenie pri písaní záverečnej práce.

Taktiež by som chcel vyjadriť pod'akovanie Ing. Tomášovi Bacigalovi, ktorý mi poskytol svoj program na modelovanie časových radov.

## Abstrakt

GROM, Stanislav: **Autoregresné modely inflácie Slovenska** [Diplomová práca] – Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. – Vedúci: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD., Bratislava, 2010. 47 strán.

V diplomovej práci rozoberáme problematiku lineárnych a nelineárnych autoregresných modelov. Uvedenú teóriu aplikujeme na časový rad inflácie Slovenska a konštruujeme najskôr lineárne a potom nelineárne modely. Základným predpokladom potrebným na modelovanie je stacionarita stochastického procesu. Špecifické autoregresné koeficienty vyberáme podľa hodnôt autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie. Pri lineárnych modeloch sa zaoberáme hlavne AR a ARMA modelmi a pri nelineárnych modeloch dávame prednosť prahovým modelom TAR a STAR.

Kľúčové slová: Autoregresný model, autokorelačná funkcia, parciálna autokorelačná funkcia, prahová premenná, stacionarita

## **Abstract**

GROM, Stanislav: Autoregressive models of inflation in Slovakia [Master thesis] - Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics. - Tutor: doc. RNDr. Ján Pekár, PhD. Bratislava, 2010. 47 pages.

The thesis discusses the problems of linear and nonlinear autoregressive models. That theory is applied to the time series of inflation in Slovakia and constructed first linear and then nonlinear models. The underlying assumption for modeling is stationarity of stochastic process. Specific autoregressive coefficients were chosen according to the values of autocorrelation and partial autocorrelation functions. Linear models are mainly represented with AR and ARMA models and nonlinear with threshold autoregressive models, where we prefer SETAR and STAR models.

Key words: autoregressive model, autocorrelation function, partial autocorrelation function, stationarity, threshold variable

# Obsah

<b>Zoznam obrázkov.....</b>	<b>3</b>
<b>Zoznam tabuliek.....</b>	<b>4</b>
<b>Zoznam skratiek.....</b>	<b>5</b>
<b>Úvod.....</b>	<b>6</b>
<b>1 Opis časového radu a jeho ekonomické prostredie.....</b>	<b>8</b>
1.1 Prvá etapa Slovenskej ekonomiky, roky 2002-2004.....	8
1.1.1 Vývoj cien v roku 2002.....	8
1.1.2 Vývoj cien v roku 2003.....	9
1.1.3 Vývoj cien v roku 2004.....	10
1.2 Druhá etapa vývoja Slovenskej ekonomiky, roky 2005-2008.....	11
1.2.1 Vývoj cien v roku 2005.....	11
1.2.2 Vývoj cien v roku 2006.....	12
1.2.3 Vývoj cien v roku 2007.....	13
1.2.4 Vývoj cien v roku 2008.....	13
<b>2 Základné pojmy.....</b>	<b>14</b>
2.1 Stochastické procesy a biely šum.....	14
2.2 Stacionarita .....	14
2.3 Momenty časových radov .....	15
2.4 Operátor posunutia.....	16
2.5 Dekompozícia časového radu.....	17
<b>3 Lineárne modely časových radov.....</b>	<b>19</b>
3.1 AR(p) proces .....	19
3.2 MA(q) proces .....	19
3.3 ARMA(p,q) procesy.....	20
3.4 Autokorelácia a Autokovariancia.....	20
<b>4 Nelineárne modely časových radov .....</b>	<b>24</b>
4.1 Prahové autoregresné modely TAR.....	24
4.2 Autoregresné modely hladkého prechodu STAR.....	27
<b>5 Analýza časového radu inflácie Slovenska.....</b>	<b>33</b>
5.1 Dekompozícia časového radu a test stacionarity.....	34
5.2 AR(p) model.....	36

5.3 MA(q) model.....	38
5.4 ARMA(p,q) model.....	40
5.5 SETAR(p,d,r) model .....	41
5.6 LSTAR model.....	42
<b>Záver.....</b>	<b>44</b>
<b>Literatúta.....</b>	<b>46</b>



## Zoznam obrázkov

5.1	Mesačná inflácia Slovenska od januára 2002 do decembra 2008.....	33
5.2	Sezónne očistená inflácia pomocou Census X12 filtra.....	34
5.3	Odstránená trendová zložka sezónne očistenej inflácie.....	35
5.4	Korelogram reziduálnej zložky s 12 oneskoreniami.....	36
5.5	Predikcia AR-modelom v porovnaní s pôvodným časovým radom.....	38
5.6	Predikcia MA-modelom v porovnaní s pôvodným časovým radom.....	40
5.7	Porovnanie predikcií lineárnych modelov s pôvodným časovým radom.....	39

## Zoznam tabuliek

5.1	Výstup z Eviews 5 – Unit Root Test reziduálnej zložky.....	35
5.2	Odhad rovnice AR – modelu.....	37
5.3	Odhad parametrov výsledného AR – modelu.....	37
5.4	Odhad parametrov výsledného MA – modelu.....	39
5.5	Odhad parametrov výsledného ARMA – modelu.....	40
5.6	Výsledky testu nelinearity realizovaného pomocou F – štatistiky.....	42

## Zoznam skratiek

<b>AR</b>	Autoregresné modely
<b>ARMA</b>	Autoregresné modely kĺzavých priemerov
<b>ARIMA</b>	Autoregresné integrované modely
<b>DPH</b>	Daň z pridanej hodnoty
<b>ERM II</b>	Európsky mechanizmus výmenných kurzov
<b>ESTAR</b>	Exponenciálny model hladkého prechodu
<b>EU</b>	Európska únia
<b>LSTAR</b>	Logistický model hladkého prechodu
<b>MA</b>	modely kĺzavých priemerov
<b>NBS</b>	Národná banka Slovenska
<b>USD</b>	Americký dolár

# Úvod

V posledných rokoch sa problematika časových radov stáva veľmi populárnou. Potreba skúmania závislosti medzi jednotlivými vplyvmi nás vedie k analýze časových radov z ekonomického, finančného alebo priemyselného prostredia. Začiatky ich skúmania sa datujú od roku 1970, kedy Box a Jenkins predstavili lineárne modely ARMA a ARIMA. Ešte v tom istom desaťročí sa Akaike zaoberal informačnými kritériami, podľa ktorých môžeme určiť najlepší model. Predstavil svoje informačné kritérium, ktoré sa používa dodnes.

Keďže lineárne modely sa nedajú použiť pre všetky stochastické procesy, tak predstavenie nelineárnych modelov nedalo na seba dlho čakať. Ich problematike sa venovalo mnoho autorov ako Tong (1979), Tsay (1989). Tong sa venoval vo svojich prácach hlavne prahovým autoregresným modelom (TAR), ktoré predstavíme aj v tejto práci. Budeme sa zaoberať analýzou časového radu inflácie Slovenska od januára 2002 do decembra 2008.

Na začiatku práce v prvej kapitole opíšeme skúmaný časový rad a ekonomické prostredie, v ktorom sa vyvíjal. Poukážeme na vplyvy vnútorného a vonkajšieho charakteru, ktoré ovplyvňovali infláciu na Slovensku v každom z rokov 2002 – 2008.

Druhá kapitola sa zamieriava na definovanie základného štatistického aparátu, ktorý budeme potrebovať pri analýze časového radu. Definujeme tu základné pojmy a sústredíme sa na dôležité definície a vety, uvádzané bez dôkazov, ktoré je však možné nájsť v literatúre použitej pre potreby tejto práce.

Tretia kapitola je zameraná na lineárne modely časových radov a ich problematiku. Postupne v nej rozoberáme problematiku AR, MA a ARMA procesov a ich vlastnosti. V závere tejto kapitoly svoju pozornosť sústredíme na autokorelačnú funkciu, podľa ktorej vyberáme významné autoregresné členy. Pomocou nich vytvárame diferenčnú rovnicu časového radu.

Štvrtá kapitola veľmi úzko súvisí s treťou kapitolou, pretože v nej rozoberáme problematiku nelineárnych časových radov, ktoré ako svoju podmnožinu využívajú lineárne procesy. Sústredíme sa tu hlavne na prahové autoregresné modely TAR, ktoré prechádzajú do modelu SETAR. Poukazujeme tu na výhodnosť modelovania časových radov pomocou tohto modelu, ale dávame do pozornosti aj jeho nedostatky. Ako napríklad: zlé vlastnosti okolo prahovej premennej. Tieto nedostatky odstránime

autoregresnými modelmi hladkého prechodu STAR. Pre tieto modely ďalej špecifikujeme dva druhy ESTAR a LSTAR.

V predposlednej piatej kapitole sa dostávame k praktickej analýze časového radu pomocou štatistického softvéru Eviews 5 a Matlab 7 a Mathematica 5.2. Najskôr časový rad rozložíme pomocou aditívnej dekompozície na špecifické zložky, a potom prejdeme k modelovaniu, najskôr lineárnymi a neskôr nelineárnymi modelmi. Pomocou rozhodovacích kritérií zvolíme vhodné diferenčné rovnice, ktorými reprezentujeme daný rad.

V závere práce zhodnotíme dosiahnuté výsledky a necháme prístor na diskusiu.

# 1 Opis časového radu a jeho ekonomické prostredie

V tejto práci sa budeme zaoberať časovým radom 84 mesačných údajov inflácie Slovenska na medziročnej báze za obdobie od januára 2002 až do decembra 2008. Na infláciu v tomto období vplývali rôzne vládne a ekonomické opatrenia, a preto tieto vplyvy opíšeme v nižšie uvedených podkapitolách.

Ekonomický vývoj Slovenska by sme mohli rozdeliť na dve významné etapy. Prvá etapa sa dá charakterizovať ako plnenie prístupových kritérií do eurozóny, roky 2002-2004. Druhá etapa Slovenskej ekonomiky, roky 2005-2008, je poznačená vstupom do EÚ a prípravami na prijatie eura v roku 2009.

## 1.1 Prvá etapa Slovenskej ekonomiky, roky 2002-2004

Obdobie rokov 2002 – 2004 bolo poznačené prípravami na vstup Slovenska do EÚ a plnením prístupových kritérií. Rok 2002 sa stal pre Slovensko ako kandidátsku krajinu na členstvo do EÚ významným medzníkom, keďže v decembri na summite EÚ v Kodani ukončilo Slovensko spolu s ďalšími 9 krajinami strednej a východnej Európy prístupové rokovania a dostalo pozvánku na vstup do EÚ v máji roku 2004. Hodnotiace správy európskych inštitúcií konštatovali, že Slovensko sa stalo dobre fungujúcou trhovou ekonomikou a bude schopné čeliť konkurenčným tlakom na trhoch EÚ.

### 1.1.1 Vývoj cien v roku 2002

Rast spotrebiteľských cien sa v roku 2002 znížil v porovnaní s rokom 2001. Medziročná miera inflácie dosiahla v decembri 3,4% a priemerná miera inflácie za rok 2002 predstavovala 3,3%. Na znížení tempa rastu spotrebiteľských cien sa podieľalo spomalenie cenového rastu vo všetkých základných sektoroch spotrebného koša. V priebehu celého roka sa medziročná miera inflácie pohybovala pod východiskovou hodnotou z decembra 2001 (6,5%). Vývoj spotrebiteľských cien bol v jednotlivých polrokoch odlišný, keď do júla mal ich rast klesajúcu tendenciu a od augusta sa mierne zrýchľoval. Za dynamikou spomaľovania rastu sa v prvom polroku podpísalo vzájomné

pôsobenie vonkajších a vnútorných nákladových faktorov. Vplyv vonkajších nákladových tlakov súvisel s volatílnym vývojom cien energetických surovín a posilňovaním výmenného kurzu voči USD. Spomalenie deregulačného procesu a mierny medziročný pokles cien potravín determinovali nízku úroveň domácich nákladových tlakov.

V priebehu druhého polroka postupne dochádzalo k miernemu zvýšeniu tempa rastu celkovej aj jadrovej inflácie. Prispeli k tomu rastúce ceny ropy na svetových trhoch, na ktoré reagovali aj ceny pohonných látok. Tento vplyv bol čiastočne tlmený posilňujúcim kurzom slovenskej koruny voči americkému doláru. Ďalším faktorom, ktorý prispel k miernemu nárastu celkovej inflácie, boli zmeny regulovaných cien. V januári sa zvýšili ceny tepelnej energie, poplatky za odvoz pevného odpadu, ceny v zdravotníctve a ceny za stravovanie v školských zariadeniach. V priebehu roka došlo k zvýšeniu cien za telekomunikácie, ubytovanie na vysokoškolských internátoch, cien v zdravotníctve a v decembri aj povinného zmluvného poistenia zodpovednosti za škodu spôsobenú prevádzkou motorového vozidla. Administratívne opatrenia v oblasti regulovaných cien, boli taktiež určujúcim faktorom vo vývoji spotrebiteľských cien v roku 2002. Medziročný rast regulovaných cien dosiahol 6,5% (rast o 17,2% oproti rovnakému obdobiu roku 2001) a na celkovom cenovom raste sa podieľal približne jednou tretinou. Cenovú úroveň ovplyvnili aj zmeny v nepriamych daniach z tabaku a cigariet. [3]

### **1.1.2 Vývoj cien v roku 2003**

Rok 2003 sa vyznačoval dynamickejším rastom spotrebiteľských cien v porovnaní s rokom 2002. Medziročná miera inflácie, meraná indexom spotrebiteľských cien, dosiahla v decembri 9,3% (3,4% v rovnakom období roku 2002). Priemerná miera inflácie v roku 2003 predstavovala 8,5% (3,3% v roku 2002). Na zvýšení medziročného tempa rastu spotrebiteľských cien sa podieľalo zrýchlenie cenového rastu vo všetkých základných sektoroch spotrebného koša. Na ceny v roku 2003 vplývali hlavne domáce faktory. Celkový vývoj bol ovplyvnený administratívnymi opatreniami, keď v januári došlo k rastu regulovaných cien a spotrebných daní, ako aj k zmene sadzieb DPH a v auguste k opätovnému zvýšeniu sadzieb spotrebných daní. Podiel administratívnych opatrení na celkovom náraste cien

predstavoval viac ako 75%. Regulované ceny medziročne vzrástli o 18,7%, čím tento sektor prispel k celkovému rastu takmer jednou polovicou. V januári vzrástli ceny za elektrickú energiu, plyn, teplo, vodné, stočné, osobnú autobusovú a železničnú dopravu. Zvýšili sa aj ceny stravovania v školských jedálňach a ubytovania na vysokoškolských internátoch. V ďalších mesiacoch rástli ceny nájomného v štátnych a obecných bytoch, ceny mestskej hromadnej dopravy a ceny v oblasti zdravotníctva. Výraznejší nárast zaznamenali aj ceny trhových služieb, kde sa ako sekundárny faktor podpísali zvyšujúce sa ceny energií. Ďalším domácim faktorom bolo zrýchlenie dynamiky cien potravín. Od januára 2003 boli zvýšené aj spotrebné dane z tabaku, piva, minerálnych olejov a vína. Upravili sa aj sadzby dane z pridanej hodnoty z 23% na 20% a z 10% na 14%. V auguste boli opätovne zvýšené spotrebné dane z tabaku, piva a minerálnych olejov. Externé faktory pôsobili na cenovú hladinu tlmiačo. Posilňovanie výmenného kurzu slovenskej koruny voči euru, ako aj voči americkému doláru, sa podpísalo na cenách pohonných látok. Vývoj kurzu slovenskej koruny mal vplyv na cenovú hladinu aj vo forme nízkej dovezenej inflácie, čo sa odrazilo v pomalej dynamike cien obchodovateľných tovarov. [4]

### **1.1.3 Vývoj cien v roku 2004**

Makroekonomický vývoj na Slovensku bol v roku 2004 ovplyvňovaný niekoľkými výraznými faktormi, medzi ktoré patrili predovšetkým vstup Slovenska do Európskej únie a ukončenie daňovej reformy. V oblasti spotrebiteľských cien došlo v roku 2004 k pozitívnemu vývoju tak celkovej, ako aj jadrovej inflácie, keď sa medziročná dynamika celkovej inflácie spomalila o 3,4% na 5,9% a jadrovej inflácie o 1,5% na 1,5%. Vývoj spotrebiteľských cien bol ovplyvnený predovšetkým domácimi nákladovými faktormi, ktoré boli do značnej miery spojené s administratívnymi opatreniami v oblasti regulovaných cien a nepriamych daní (spotrebných daní a dane z pridanej hodnoty). V rámci nepriamych daní došlo v máji k zvýšeniu spotrebných daní na cigarety a spotrebnej dane z vína na medziprodukty. Vplyv administratívnych opatrení sa prejavil ako sekundárny efekt v cenách trhových služieb. Mierne zrýchlenie ich medziročnej dynamiky bolo však ovplyvnené aj jednorazovými faktormi, akými boli zmena metodiky, keď došlo k presunu poplatkov za povinné zmluvné poistenie osobných motorových vozidiel z regulovaných cien do cien trhových služieb



a v neposlednom rade aj novelizácia zákona o dani z pridanej hodnoty s dopadom na ceny závodného stravovania. Na cenový vývoj v obchodovateľnom sektore mal vplyv hlavne nárast cien pohonných látok, ktoré v priebehu roka 2004, s výnimkou prvých troch mesiacov, zaznamenávali medziročný rast. Zvýšenie cien ropy na svetových trhoch bolo však tlmené posilňujúcim výmenným kurzom slovenskej koruny voči euru, ako aj voči americkému doláru. Vývoj kurzu slovenskej koruny mal dopad aj na cenovú hladinu vo forme dovezenej inflácie, čo sa odrazilo v cenách potravín, ktoré zaznamenali spomalenie dynamiky medziročného rastu. Na ceny potravín vplývali predovšetkým externé faktory, ako bol vstup do EÚ, otvorenie trhu a rast konkurencie, dobrá úroda, či prijatie Spoločnej poľnohospodárskej politiky. [5]

## ***1.2 Druhá etapa vývoja Slovenskej ekonomiky, roky 2005-2008***

Ekonomický a menový vývoj od roku 2005 bol charakteristický spomalením cenového rastu, akceleráciou ekonomickej aktivity, pokračujúcou konsolidáciou verejných financií, zhodnocovaním slovenskej koruny voči euru a relatívne dynamickým rozvojom úverových aktivít tak voči domácnostiam, ako aj v podnikateľskej sfére. Od začiatku roka 2005 začala NBS v súlade s Menovým programom NBS do roku 2008 realizovať Stratégiu inflačného členenia v podmienkach ERM II. Základným pilierom menovej politiky sú stanovené cieľové hodnoty pre vývoj inflácie. V nasledujúcich rokoch si NBS stanovila cieľ pre medziročnú mieru inflácie meranú harmonizovaným indexom spotrebiteľských cien (HICP) pod 2,5% k decembru 2006 a pod 2% k decembru 2007 a 2008 tak, aby bolo splnené maastrichtské kritérium na báze priemernej dvanásťmesačnej inflácie.

### **1.2.1 Vývoj cien v roku 2005**

Vstupom do eurozóny 1. mája 2004 sa začala merať inflácia Slovenska harmonizovaným indexom spotrebiteľských cien stanoveným Európskou centrálnou bankou (ECB). Tento index je pre všetky členské krajiny záväzný, avšak každá krajina si infláciu meria aj svojím národným indexom spotrebiteľských cien.

V roku 2005 sa rast spotrebiteľských cien v porovnaní s predchádzajúcim rokom 2004 spomalil, keď medziročná miera inflácie, meraná indexom spotrebiteľských cien, dosiahla v decembri 3,7% (5,9% v rovnakom období roku 2004). Priemerná miera inflácie za rok 2005 predstavovala 2,7% (v roku 2004 7,5%). Na znížení medziročného tempa rastu spotrebiteľských cien sa podieľalo spomalenie dynamiky vo väčšine základných sektoroch spotrebného koša okrem cien pohonných látok. Na ceny, podobne ako v predchádzajúcich rokoch, vplývali hlavne domáce faktory, keď cenový vývoj bol ovplyvnený administratívnymi opatreniami (ale v menšej miere ako po minulé roky). Podiel administratívnych opatrení (zmeny regulovaných cien) na celkovom náraste cien v roku 2005 predstavoval v priemere 67,6%. Spomalenie rastu regulovaných cien sa prejavilo aj miernejšími sekundárnymi efektmi v cenách trhových služieb, ktorých medziročná dynamika sa v priebehu roka postupne spomaľovala. Posilňovanie výmenného kurzu slovenskej koruny voči euru sa prejavilo aj v cenách potravín, ktoré klesali počas celého roka a aj vo forme nízkej dovezenej inflácie. To sa odrazilo v spomaľujúcej dynamike obchodovateľných tovarov, resp. v medziročnom poklese ich cien. [6]

### **1.2.2 Vývoj cien v roku 2006**

Slovenská ekonomika sa v roku 2006 vyvíjala v prostredí relatívne silného rastu svetovej ekonomiky, ktorej rast v porovnaní s predchádzajúcim rokom mierne zrýchlil a priblížil sa roku 2004. Vývoj cien vo svete bol stabilizovaný a úroveň inflácie zostala relatívne nízka. V porovnaní s rokom 2005 inflácia meraná indexom spotrebiteľských cien bola vyššia, keď medziročná miera inflácie dosiahla v priemere 4,5% (rok 2005 2,7%). V decembri 2006 dosiahol medziročný rast spotrebiteľských cien 4,2% (v porovnaní s 3,7% v decembri 2005). Na ceny v roku 2006, podobne ako po minulé roky vplývali hlavne úpravy regulovaných cien. Podiel administratívnych opatrení na celkovom náraste cien v roku 2006 predstavoval v priemere viac ako 50%. Zrýchlenie regulovaných cien energií sa prejavilo ako sekundárny efekt v cenách trhových služieb, ktorých medziročná dynamika sa v priebehu roka postupne zrýchľovala. Ceny obchodovaných tovarov zaznamenali spomaľovanie medziročného poklesu. V januári 2006 vzrástli ceny za elektrickú energiu, plyn, vodné, stočné a ceny zdravotníctva. V priebehu roka sa zvýšili aj ceny dopravy a vzdelania. Na jeseň rástli ceny tepla a na

prelome novembra aj ceny plynu. V oblasti spotrebných daní zaznameli nárast dane z alkoholu a cigariet. Dynamika cien potravín zrýchľovala počas celého roka.[7]

### **1.2.3 Vývoj cien v roku 2007**

Menová politika NBS pokračovala v realizácii stratégie inflačného cielenia v podmienkach ERM II. Ekonomické prostredie roku 2007 vykazovalo dynamický rast. V decembri roku 2007 sa spomalil medziročný rast spotrebiteľských cien o 0,8 percentuálneho bodu oproti decembru 2006 a ostal na úrovni 3,4%. Na spomalení medziročného tempa rastu sa podieľala najmä nižšia dynamika regulovaných cien. Na ceny vplývali hlavne vonkajšie faktory, ako svetové ceny komodít (ropa a energie), ktoré sa následne prejavili v úpravách regulovaných cien, cien pohonných látok a vo vývoji cien potravín. Najväčší podiel na raste cenovej hladiny mal rast cien trhových služieb (predovšetkým rast fondu opráv a imputovaného nájomného). Ceny obchodovateľných tovarov zaznamenali zrýchlenie medziročného poklesu. Uvedený vývoj bol výsledkom výraznejšieho medziročného poklesu cien pohonných látok. Ceny energie, plynu a tepla zaznamenali výraznejšie spomalenie dynamiky. V regulovaných cenách sa prejavilo aj zníženie DPH na lieky z 19% na 10% od januára 2007. [8]

### **1.2.4 Vývoj cien v roku 2008**

Vývoj ekonomiky Slovenska v roku 2008 bol poznačný prebiehajúcou externou finančnou krízou, ktorá spôsobila spomalenie reálnej ekonomickej aktivity najskôr vyspelých štátov a v poslednom štvrtroku 2008 aj rozvíjajúcich sa ekonomík. Na svetovú hospodársku krízu reagovala aj naša ekonomika. Vplyvom svetovej krízy sa zrýchlila aj dynamika spotrebiteľských cien v roku 2008, keď medziročná miera inflácie meraná indexom spotrebiteľských cien dosiahla v priemere 4,6% (v roku 2007 2,8%). V decembri 2008 dosiahol medziročný rast spotrebiteľských cien 4,4% (v porovnaní s 3,4% v decembri roku 2007). Na ceny v roku 2008 vplývali hlavne vonkajšie faktory, ako ceny ropy a poľnohospodárskych komodít. Vývoj týchto komodít sa prejavil v inflácii vo forme úprav regulovaných cien, cien pohonných látok, ako aj vo vývoji cien spracovaných a nespracovaných potravín. [9]

## 2 Základné pojmy

V tejto kapitole zdefinujem základnú terminológiu potrebnú pre pochopenie časových radov. Budeme sa zameriavať hlavne na definovanie pojmov potrebných pri analýze časového radu v praktickej časti.

### 2.1 Stochastické procesy a biely šum

**Definícia 2.1.1** Nech  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  je pravdepodobnostný priestor a  $T \subset \mathfrak{R}$ . Stochastickým procesom nazývame množinu náhodných premenných  $\{X_t : t \in T\}$ , kde  $X_t$  sú náhodné veličiny z  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Množina  $T$  sa najčastejšie interpretuje ako čas. Ak  $T = \mathbf{Z}$ ,  $T = \mathbf{N} + \{0\}$  hovoríme o náhodnom procese s diskretným časom a ak  $T$  je interval reálnych čísel tak o procese so spojitým časom.

**Definícia 2.1.2** Stochastický proces  $\{X_t\}$ , ktorého stredná hodnota sa rovná nule,  $E(X_t) = 0$ , nazývame centrovaný.

Každý stochastický proces  $\{X_t\}$  môžeme pomocou jednoduchej transformácie  $Y_t = X_t - \mu$  upraviť na centrovaný proces.

**Definícia 2.1.3** Stochastický proces  $\{X_t\}$  voláme biely šum a označujeme ako  $\{X_t\} \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ , ak  $E(X_t) = 0$ ,  $\text{Var}(X_t) = \sigma^2$  a  $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \forall i \neq j$ .

Ako vidíme aj proces bieleho šumu je centrovaný.

### 2.2 Stacionarita

Poznáme dva druhy stacionarity: slabú stacionaritu a silnú stacionaritu. Obidve poukazujú na časovú invariantnosť časového radu.

**Definícia 2.2.1** Časový rad  $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  je slabo stacionárny, ak  $E(X_t^2) < \infty$  pre každé  $t$  a platí:

- (i)  $E(X_t) = \mu$ ,
- (ii)  $Cov(X_t, X_{t-k}) = \gamma_k, \quad \forall t, k$ .

**Definícia 2.2.2** Časový rad  $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  je silno stacionárny, ak  $(X_1, \dots, X_n)$  a  $(X_{1+k}, \dots, X_{n+k})$  majú to isté spojité rozdelenie pre všetky  $n \geq 1$  a pre všetky  $k$ .

V praxi sa silná stacionarita veľmi ťažko overuje, a preto si vystačíme so slabou stacionaritou. Slabá stacionarita je charakteristická hlavne pre lineárne modely časových radov, kde hľadáme závislosť medzi premennými v rôznom čase.

### 2.3 Momenty časových radov

Každý náhodný proces  $\{X_t\}$  môžeme opísať pomocou niekoľkých charakteristík

- stredná hodnota

$$\mu_t = E(X_t) \quad (2.1)$$

- rozptyl (druhý centrálny moment)

$$\sigma_t^2 = Var(X_t) = E(X_t - \mu_t)^2 \quad (2.2)$$

- šikmosť (tretí centrálny moment)

$$\mu_t^{(3)} = E(X_t - \mu_t)^3 \quad (2.3)$$

- strmosť (štvrtý centrálny moment)

$$\mu_t^{(4)} = E(X_t - \mu_t)^4 \quad (2.4)$$

Výberové momenty náhodných procesov možno charakterizovať pomocou sledovaných výberových charakteristík

- výberový priemer

$$\bar{x}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2.5)$$

je dohadom strednej hodnoty  $\mu$

- výberový rozptyl

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (x_t - \bar{x}_t)^2 \quad (2.6)$$

je odhadom rozptylu  $\sigma^2$

- výberová šikmost'

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \frac{x_t - \bar{x}_t}{\hat{s}} \right)^3 \quad (2.7)$$

je dohadom tretieho centrálneho momentu

- výberová strmost'

$$\hat{K}^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left( \frac{x_t - \bar{x}_t}{\hat{s}} \right)^4 \quad (2.8)$$

je odhadom štvrtého centrálneho momentu.

## 2.4 Operátor posunutia

**Definícia 2.3.1** Nech  $\{X_t\}$  je stochastický proces. Potom operátor posunutia  $L$  je daný vzťahom

$$Lx_t = x_{t-1} \quad (2.9)$$

a operátor spätnej diferencie vzťahom

$$\Delta x_t = (1 - L)x_t = x_t - x_{t-1}. \quad (2.10)$$

Oba tieto operátory možno aplikovať viackrát za sebou, takže dostávame operátor posunutia rádu  $s$

$$L^s x_t = x_{t-s} \quad \forall s \in \mathbf{N} \quad (2.11)$$

a operátor spätnej diferencie rádu  $s$

$$\Delta^s x_t = (1 - L)^s x_t \quad \forall s \in \mathbf{N}_+. \quad (2.12)$$

**Veta 2.3.2** Každý centrováný slabo stacionárny stochastický proces  $\{X_t\}$  môže byť jednoznačne vyjadrený v tvare funkcie kľzavých priemerov súčasných a minulých inovácií

$$x_t = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i \varepsilon_{t-i} + \eta_t, \quad \text{s } \theta_0 = 1 \text{ a } \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i^2 < \infty, \quad (2.13)$$

kde  $\varepsilon_t$  je proces bieleho šumu a  $\eta_t$  je stacionárne deterministický člen, ktorý môžeme zanedbať.

## 2.5 Dekompozícia časového radu

Väčšinu časových radov z ekonomického prostredia, môžeme rozložiť na niekoľko charakteristických zložiek a to:

- trendová  $T_t$
- cyklická  $C_t$
- sezónna  $S_t$
- reziduálna  $\varepsilon_t$

Pri dekompozícii časového radu odhalíme pravidelné správanie sa časového radu, ako v prípade nerozloženého radu.

*Trendová zložka* odráža dlhodobé zmeny v priemernom správaní sa časového radu t.j dlhodobý rast alebo pokles. Poznáme viac typov trendov, ako napr. konštantný, lineárny, kvadratický, exponenciálny a logaritmický. Pre získanie trendu nám najčastejšie pomôže grafické zobrazenie časového radu.

*Sezónna zložka* popisuje v časovom rade periodické zmeny, ktoré sa odohrávajú počas jedného roka a každý rok sa opakujú. Pre skúmanie sezónnej zložky sú vhodné najmä mesačné alebo kvartálne data. Veľmi dôležitým cieľom je sezónne očistenie časového radu, alebo potlačenie vplyvov sezónnej zložky na minimum, aby sme mohli lepšie predpovedať ďalší vývoj časového radu.

*Cyklická zložka* je najspornejšou zložkou časového radu. Veľa autorov sa vyhýba pomenovaniu cyklická zložka a označujú ju ako fluktuácie okolo trendu, kde sa striedajú fázy rastu a poklesu. Dĺžka cyklu je obvykle premenlivá, a takisto môže byť premenlivá aj intenzita jednotlivých fáz cyklu. Pre rôzne ekonomiky je charakteristický iný cyklus (Západná ekonimika tzv. „business cycle“ v dĺžke trvania 5-7 rokov).

*Reziduálna zložka* zostáva v časovom rade po odstránení trendu, sezónnej a cyklickej zložky. Je tvorená náhodnými fluktuáciami v priebehu časového radu, ktoré nemajú systematický charakter. Reziduálna zložka pokrýva aj chyby v meraniach údajov a chýb, ktorých sa dopustíme pri analýze časového radu. Väčšinou sa predpokladá, že reziduálna zložka je biely šum s normálnym rozdelením.

*Aditívna dekompozícia* časového radu je daná ako

$$x_t = T_t + C_t + S_t + \varepsilon_t, \quad (2.14)$$

kde sú jednotlivé zložky uvažované vo svojich skutočných absolútnych hodnotách a sú merané v jednotkách skúmaného časového radu.

*Multiplikatívna dekompozícia* časového radu má tvar

$$x_t = T_t \cdot C_t \cdot S_t \cdot \varepsilon_t, \quad (2.15)$$

kde len trendová zložka je väčšinou uvažovaná v absolútnej hodnote a meraná v jednotkách časového radu. Ostatné zložky sú bezrozmerné veličiny uvažované v ich relatívnych hodnotách.



### 3 Lineárne modely časových radov

Najviac populárnu triedu lineárnych modelov časových radov tvoria autoregresné modely kĺzavých priemerov (ARMA), vrátane čisto autoregresných (AR) modelov a modelov kĺzavých priemerov (MA). ARMA modely sa používajú hlavne na modelovanie lineárnych dynamických štruktúr, na opísanie lineárnych vzťahov medzi oneskorenými premennými a slúžia ako apatár pre ich prognózy. Obzvlášť užitočnou triedou sú tzv. ARIMA modely, ktoré obsahujú autoregresný integrovaný proces. Tieto modely zahŕňajú stacionárne ARMA modely ako podtriedu.

#### 3.1 AR(p) proces

Autoregresný centrovaný proces rádu  $p \geq 1$  je definovaný ako

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t = \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (3.1)$$

ktorý môžeme zapísať v operátorovom tvare ako

$$\phi_p(B)X_t = \varepsilon_t, \quad (3.2)$$

kde

$$\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p), \quad (3.3)$$

pričom  $B$  je operátor spätného posunu, t.j.

$$B^j(X_t) = X_{t-j}. \quad (3.4)$$

**Veta 3.1.1** Stochastický proces  $\{X_t\}$  daný vzťahom (3.1) je stacionárny práve vtedy, ak všetky korene polynomickej rovnice

$$\phi_p(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \dots - \phi_p x^p = 0 \quad (3.5)$$

ležia mimo jednotkového kruhu.

#### 3.2 MA(q) proces

Proces kĺzavých priemerov rádu  $q$ ,  $MA(q)$ , je najjednoduchším modelom. Je definovaný ako lineárna kombinácia histórie bieleho šumu  $\varepsilon_t$  v tvare

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}, \quad (3.6)$$

alebo v operátorovom tvare,

$$X_t = \theta_q(B) \varepsilon_t, \quad (3.7)$$

kde

$$\theta_q(B) = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q). \quad (3.8)$$

Proces  $MA(q)$  je stacionárny a platí preň  $\mu_t = 0, \sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left( 1 + \sum_{j=1}^q \theta_j^2 \right)$ .

### 3.3 $ARMA(p,q)$ procesy

Kombináciou  $AR(p)$  a  $MA(q)$  procesu vzniká  $ARMA(p,q)$  proces, ktorý je definovaný ako

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} = \\ &= \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \end{aligned} \quad (3.9)$$

alebo aj ako

$$\phi_p(B) X_t = \theta_q(B) \varepsilon_t, \quad (3.10)$$

kde  $\phi_p(B)$  je daný vzťahom (3.3) a  $\theta_q(B)$  vzťahom (3.8). Podobne ako pri  $AR(p)$  a  $MA(q)$  vieme sformulovať vetu o stacionarite  $ARMA(p,q)$  procesu.

**Veta 3.3.1** Stochastický proces  $ARMA(p,q)$ , daný vzťahom (3.9) je stacionárny, ak  $\phi_p(z) \neq 0$  pre každé komplexné číslo  $z$  také, že  $|z| \leq 1$ .

Dôkaz je možné nájsť na strane 31. v J.Fan, Q.Yao: Nonlinear Time Series, Nonparametric and Parametric Methods vydané vydavateľstvom Springer v roku 2003.

### 3.4 Autokorelácia a Autokovariancia

Pri lineárnych časových radoch  $\{X_t\}$ , skúmame lineárnu závislosť medzi ľubovoľnými premennými radu v rôznom časovom okamihu  $t$ . Autokorelačný

koeficient meria lineárnu závislosť medzi  $X_{t+k}$  a  $X_t$ . Parciálny autokorelačný koeficient je korelácia medzi reziduami  $X_{t+k}$  a  $X_t$  po lineárnej regresii na  $X_{t+1}, \dots, X_{t+k-1}$ . Pre stacionárny časový rad  $\{X_t\}$ , ktorý je daný vzťahom (3.1) platí, že  $Cov(X_{t+k}, X_t) = Cov(X_k, X_0)$  pre každé  $k$ . To znamená, že korelácia medzi  $X_t$  a  $X_s$  závisí len od absolútnej diferencie času  $|t - s|$ .

**Definícia 3.4.1** Nech  $\{X_t\}$  je stacionárny časový rad. Autokovariančná funkcia (ACVF) radu  $\{X_t\}$  je

$$\gamma(k) = Cov(X_{t+k}, X_t), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.11)$$

Autokorelačná funkcia (ACF) radu  $\{X_t\}$  je

$$\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0) = Corr(X_{t+k}, X_t), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.12)$$

Z definície je vidieť, že obe funkcie  $\gamma(\cdot)$  a  $\rho(\cdot)$  sú párne funkcie a platí

$$\gamma(-k) = \gamma(k) \text{ a } \rho(-k) = \rho(k).$$

Teraz budeme skúmať vlastnosti ACVF a ACF pre stacionárne ARMA procesy. Po prvé, je zrejmé, že proces je biely šum vtedy a len vtedy, ak  $\rho(k) = 0$  pre každé nenulové  $k$ .

Pre  $MA(\infty)$  proces

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j},$$

kde  $\{\varepsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ ,  $\theta_0 = 1$  a  $\sum_{j=0}^{\infty} |\theta_j| < \infty$ . Je ACVF a ACF daná ako

$$\gamma(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \theta_{j+|k|}, \quad \rho(k) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \theta_{j+|k|}}{\sum_{j=1}^{\infty} \theta_j^2}. \quad (3.13)$$

Pre  $MA(q)$  proces sa obe formuly zmenia na

$$\gamma(k) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-|k|} \theta_j \theta_{j+|k|}, \quad \rho(k) = \frac{\sum_{j=0}^{q-|k|} \theta_j \theta_{j+|k|}}{\sum_{j=1}^{q-|k|} \theta_j^2} \text{ pre } |k| \leq q, \quad (3.14)$$

a  $\gamma(k), \rho(k)$  sú nulové pre všetky  $|k| > q$ .

Pre  $ARMA(p, q)$  proces definovaný vzťahom (3.9), môžeme ACVF a ACF vypočítať cez  $MA(\infty)$  reprezentáciu

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} d_j \varepsilon_{t-j},$$

kde  $d_j$  sú koeficienty polynómu  $\phi(z)^{-1}\theta(z)$ , ktoré môžeme vypočítať spätne ako:

$$\begin{aligned} d_0 &= \theta_0 (= 1), \\ d_1 &= \theta_1 + d_0\phi_1, \\ d_2 &= \theta_2 + d_0\phi_2 + d_1\phi_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

a vo všeobecnosti platí rekurzia

$$d_k = \theta_k + \sum_{j=0}^{k-1} d_j \phi_{k-j}, \quad k \geq 1, \quad (3.15)$$

Predpokladáme, že  $\theta_j = 0$  pre  $j > q$  a  $\phi_i = 0$  pre  $i > p$  v predchádzajúcom vzťahu.

Ak vo vzťahu (3.13) nahradíme  $\theta_j$ ,  $d_k$  dané vzťahom (3.15), tak dostaneme ACVF a ACF pre  $ARMA(p, q)$  proces.

Teraz zdefinujem výberovú ACVF a ACF na množine pozorovaní  $\{X_1, \dots, X_T\}$ . ACVF môžeme odhadnúť ako

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-k} (X_t - \bar{X}_T)(X_{t+k} - \bar{X}_T), \quad k = 0, 1, 2, \dots, T-1, \quad (3.16)$$

kde  $\bar{X}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t$  je výberový priemer. Podobne môžeme zdefinovať aj výberovú

ACF ako

$$\hat{\rho}(k) = \hat{\gamma}(k)/\hat{\gamma}(0), \quad k = 0, 1, \dots, T-1. \quad (3.17)$$

Pre  $k \geq T$  je odhadnúť výberovú ACVF a ACF nemožné. Pre veľmi malé  $k$  oproti  $T$  sú odhady ACVF a ACF nerelevantné, pretože je tam veľmi málo možných párov  $(X_t, X_{t+k})$ . Odporúča sa  $T \geq 50$  a  $k \leq T/4$ .

**Definícia 3.4.2** Nech  $\{X_t\}$  je stacionárny časový rad s  $E(X_t) = 0$ . Potom PACF je

definovaná ako  $\pi(1) = \text{Corr}(X_1, X_2) = \rho(1)$  a

$$\pi(k) = \text{Corr}(R_{|2, \dots, k}, R_{k+1|2, \dots, k}), \quad k \geq 2, \quad (3.18)$$

kde  $R_{j|2,\dots,k}$  je reziduum z lineárnej regresie  $X_j$  na  $(X_2, \dots, X_k)$  dané ako

$$R_{j|2,\dots,k} = X_j - (\alpha_{j2}X_2 + \dots + \alpha_{jk}X_k),$$

a

$$(\alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jk}) = \arg \min_{\beta_2, \dots, \beta_k} E\{X_j - (\beta_2X_2 + \dots + \beta_kX_k)\}^2. \quad (3.19)$$

## 4 Nelineárne modely časových radov

Veľa časových radov hlavne z ekonomického prostredia vykazuje silné nelineárne črty, preto modelovanie pomocou lineárnych modelov nie je dostatočné. Do popredia sa dostávajú nelineárne modely ako napr. bilineárne modely a viacrežimové modely.

Nelineárny model môžeme vo všeobecnosti zapísať matematicky ako

$$y_t = F(X_t, \theta) + \varepsilon_t, \quad (4.1)$$

kde  $X_t = (1, y_{t-1}, \dots, y_{t-p})'$ ,  $\theta$  je vektor parametrov modelu a tzv. skelet  $F(X_t, \theta)$  je nelineárna funkcia, ktorá je minimálne dvakrát spojite diferencovateľná.

V ďalšej časti tejto kapitoly sa budeme zaoberať veľmi obľúbenou triedou nelineárnych modelov, a to viacrežimovými modelmi, ktoré sú veľmi dobre interpretovateľné a vhodné na modelovanie reálnych dát.

### 4.1 Prahové autoregresné modely TAR

Najjednoduchšiu triedu viacrežimových modelov tvoria tzv. prahové autoregresné modely (Threshold auto-regressive model, TAR), kde sa podľa prahovej premennej zmení režim modelu. Táto zmena môže nastať, v ktoromkoľvek okamihu časového radu.

**Definícia 4.1.1** Prahový autoregresný model (TAR) s  $k$  ( $k \geq 2$ ) režimami je definovaný ako

$$X_t = \sum_{j(t)=1}^k \left( \phi_0^{j(t)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{j(t)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{j(t)} \right), \quad (4.2)$$

pričom  $j(t) = 1$  ak  $g(u_t) < r_1$ ,  $j(t) = 2$  ak  $r_1 \leq g(u_t) < r_2, \dots, j(t) = k$  ak  $r_{k-1} < g(u_t)$  a  $\varepsilon_t^{j(t)}$  je biely šum. Premennú  $u_t$  nazývame prahovou premennou, parametre  $r_i$  nazývame prahmi a hodnoty  $j(t)$  voláme režimy modelu. Model daný vzťahom (4.2) rozkladá časovú os na  $k$  režimov, kde jednotlivé režimy sú určené iným lineárnym procesom  $AR(p)$ . V prípade, že premennú  $u_t$  budeme uvažovať ako oneskorené hodnoty analyzovaného časového radu  $X_{t-d}$ , kde  $d > 0$  je parameter uvádzajúci oneskorenie, tak

dostaneme samobudiaci prahový model  $SETAR(p,d,r)$  (Self-Excitint Treshold Autoregressive Model), kde  $p$  je maximálny rád autoregresie,  $d$  je hodnota omeškania a  $r$  je vektor prahov.

**Definícia 4.1.2** Samobudiaci prahový autoregresný model  $SETAR(p,d,r)$  s maximálnym rádom autoregresie  $p$ , s oneskorením  $d$  a s vektorom prahov  $r$ , definujeme ako

$$X_t = \begin{cases} \phi_0^{(1)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(1)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{ak } X_{t-d} \leq r_1 \\ \phi_0^{(2)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(2)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{ak } r_1 \leq X_{t-d} \leq r_2 \\ \vdots & \vdots \\ \phi_0^{(k)} + \sum_{i=1}^p \phi_i^{(k)} X_{t-i} + \varepsilon_t^{(k)} & \text{ak } r_{k-1} < X_{t-d} \end{cases}, \quad (4.3)$$

kde  $k$  je počet režimov v modeli. Hodnota prahov  $r$  spĺňa  $-\infty = r_0 < r_1 < \dots < r_k = \infty$ ,  $\varepsilon_t^{(j)} \sim IID(0, \sigma^2)$  pre  $j = 1, 2, \dots, k$ .

**Proces modelovania modelu  $SETAR(p,d,r)$ :**

- (i) Namodelovanie časového radu pomocou  $AR(p)$  procesu, získanie rádu autoregresie  $p$ , ako  $p = \max[p_1, \dots, p_k]$ . Voľba množiny  $S$  možných hodnôt parametra  $d$ , ako  $d \in S : d \leq p$ .
- (ii) Pomocou preusporiadanej bázovej základne procesu  $AR(p)$  a možných hodnôt omeškania  $d$  otestovať prahovú nelinearitu štatistikou  $\hat{F}(p,d)$ . Ak sa preukáže nelinearita modelu, tak určíme parameter  $d_p$ .
- (iii) Pre dané  $p$  a  $d_p$  určiť hodnoty prahov  $r$  z bodového grafu.
- (iv) Vylepšenie rádu AR procesu a hodnôt prahov v každom režime pomocou lineárnych autoregresných metód.

Proces modelovania modelu  $SETAR(p,d,r)$  je veľmi náročný, no napriek tomu je tento model veľmi populárny pri modelovaní finančných a ekonomických časových radoch s nelineárnym charakterom. Teraz sa bližšie pozrieme na porcedúru (ii), kde na preusporiadanej bázovej základni testujem prahovú nelinearitu. Nech  $p$  je rád autoregresie identifikovaný v rade  $\{X_t\}$ . Nech  $X_{t-d}$  je prahová premenná, ktorá

<sup>1</sup> nezávislé a rovnako rozdelené náhodné premenné

nadobúda hodnoty z  $\{X_{p+1-d}, \dots, X_{n-d}\}$ . Nech  $(i)$  je časový index najmenšieho pozorovania z množiny  $\{X_{p+1-d}, \dots, X_{n-d}\}$ . Potom v skonštruovaní preusporiadaného autoregresného procesu podľa prahovej premennej  $X_{t-d}$  nám pomáha tzv. rolling order autoregression (ROA), ktorá je definovaná tvarom

$$\begin{pmatrix} X_{(1)+d} \\ X_{(2)+d} \\ \vdots \\ X_{(j)+d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & X_{(1)+d-1} & \cdots & X_{(1)} & \cdots & X_{(1)+d-p} \\ 1 & X_{(2)+d-1} & \cdots & X_{(2)} & \cdots & X_{(2)+d-p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{(j)+d-1} & \cdots & X_{(j)} & \cdots & X_{(j)+d-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{(1)+d} \\ \varepsilon_{(2)+d} \\ \vdots \\ \varepsilon_{(j)+d} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

kde  $j = m, m+1, \dots, n-p$ , a  $m$  je počiatkový počet pozorovaní v ROA. Tsay (1989) navrhuje vo svojej práci zvoliť ako počiatkovú hodnotu  $m \approx n/10 + p$ . Pre každé  $j$  z regresie (4.4) vieme vypočítať o jeden krok dopredu prediktívne reziduá ROA,  $\hat{\varepsilon}_{(j+1)+d}$ . Získané reziduá použijeme v ďalšej regresii, ktorú špecifikoval vo svojej práci Tsay v roku 1989. Daná je vzťahom

$$\mathbf{e} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\eta}, \quad (4.5)$$

kde  $\mathbf{e} = (\hat{\varepsilon}_{(m+1)+d}, \dots, \hat{\varepsilon}_{(n-p)+d})'$ ,  $\mathbf{X}$  je matica regresorov  $\{X_{(j+1)+d-1}, \dots, X_{(j+1)+d-p}\}$  pre  $j = m, m+1, \dots, n-p-1$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  je  $p$ -dimenzionálny vektor parametrov a  $\boldsymbol{\eta}$  je vektor rezidui. (i)

Potom nám stačí vypočítať len testovaciu F-štatistiku danú vzťahom

$$\hat{F}(p, d) = \frac{\left( \sum_{t=m+1}^{n-p} e_t^2 - \sum_{t=m+1}^{n-p} \varepsilon_t^2 \right) / (p+1)}{\sum_{t=m+1}^{n-p} \varepsilon_t^2 / (n-m-2p-1)} \quad (4.6)$$

aby sme otestovali prahovú nelinearitu modelu.

**Veta 4.1.1** Predpokladajme, že  $X_t$  je lineárny stacionárny *AR proces* rádu  $p$ . Teda  $X_t$  splňa (4.3) pre  $k = 1$ . Potom pre veľké  $n$  štatistika  $\hat{F}(p, d)$  definovaná vzťahom (4.6) má asymptoticky Fischerovo rozdelenie s  $(p+1)$  a  $(n-m-2p-1)$  stupňami voľnosti.

Jednou z najťažších častí procesu konštrukcie modelu SETAR je určenie hodnoty parametra omeškania  $d$ , ktorý má kľúčovú úlohu v nelineárnom charaktere modelu. My na určenie parametra  $d$  použijeme metódu, ktorú navrhol Tsay v roku 1989. Metóda je



založená na analýze reálnych dát, kde sa parameter  $d$  špecifikuje ako prvý. Pre daný AR proces rádu  $p$ , najvhodnejší parameter omeškania  $d$  vyberieme podľa štatistiky (4.6). Vyberáme podľa toho, kde štatistika (4.6) nadobúda svoje maximum pre  $d \in S = \{1, 2, \dots, p\}$ , t.j.

$$\hat{F}(p, d_p) = \max_{v \in S} \{\hat{F}(p, v)\}, \quad (4.7)$$

$$d_p = \arg \max_{v \in S} \{\hat{F}(p, v)\}, \quad (4.8)$$

kde index  $p$  pri parametri  $d$  vyjadruje závislosť parametra  $d$  od rádu autoregresie.

Ku kompletnej špecifikácii modelu potrebujeme určiť ešte hodnoty prahových premenných  $r_i$ . Táto procedúra však vyžaduje špeciálny prístup. V práci použijeme špeciálne metódy, ktoré používajú pri lokalizácii prahových premenných analýzu bodových grafov rôznych štatistík verzus špecifikovaná prahová premenná. Štandardne sa používa metóda navrhnutá Tongom a Limom v roku 1980, ktorá analyzuje bodový graf prediktívnych reziduálov získaných v rekurzívnych lineárnych regresiach pri teste nelinearity verzus príslušnú prahovú premennú modelu  $X_{t-d_p}$ .

## 4.2 Autoregresné modely hladkého prechodu STAR

Najväčšou nevýhodou modelov SETAR je ostrý zlom modelov pri prechode z jedného režimu do druhého. Tento nedostatok sa snažia odstrániť autoregresné modely hladkého prechodu STAR (Smooth Transition Auto-regressive Model), ktoré používajú tzv. vážený prístup do režimov, ktorý závisí na realizácii nejakej premennej  $u_t$ . Vážený prístup nám zabezpečuje spojitá prechodová funkcia  $G(u_t; \gamma, r)$ , ktorá vyjadruje váhu druhého režimu, a jej hodnoty sú medzi 0 a 1.

**Definícia 4.2.1** Autoregresný model hladkého prechodu STAR je definovaný ako

$$X_t = \left( \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} \right) (1 - G(u_t; \gamma, r)) + \left( \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} \right) G(u_t; \gamma, r) + \varepsilon_t, \quad (4.9)$$

kde  $u_t$  je prechodová premenná, ktorá je daná buď posunutou endogénnou premennou, napr.  $u_t = X_{t-d}$  pre  $d > 0$ , exogénnou premennou alebo aj funkciou niekoľkých

posunutých endogénnych a exogénnych premenných. Prechodová funkcia obsahuje dva parametre, kde prvý z nich je prah  $r$  a druhý  $\gamma$ , je parameter hladkosti a  $\varepsilon_t$  je biely šum.

V praxi sa najčastejšie používajú dva typy prechodovej funkcie, a to logistická a exponenciálna funkcia. Logistická prechodová funkcia má tvar

$$G(u_t; \gamma, r) = \frac{1}{1 + \exp(-\gamma(u_t - r))}, \quad (4.10)$$

nám zabezpečuje rôzne správanie modelu v takých hodnotách prechodovej premennej  $u_t$ , ktoré neprekračujú hodnotu prahu  $r$ . To znamená, že model sa mení monotónne vzhľadom na prechodovú premennú. Model s logistickou prechodovou funkciou označujeme LSTAR. Pre extrémne hodnoty parametra hladkosti model LSTAR prechádza do dvojrežimového modelu SETAR ak  $\gamma \rightarrow 0$  a do lineárneho AR modelu, ak  $\gamma \rightarrow \infty$ .

Exponenciálna prechodová funkcia má tvar

$$G(u_t; \gamma, r) = 1 - \exp(-\gamma(u_t - r)^2). \quad (4.11)$$

Táto prechodová funkcia nám zabezpečuje rôzne správanie modelu v malých i veľkých odchýlkach hodnoty prechodovej premennej  $u_t$  od hodnoty prahu  $r$ . To znamená, že model sa mení symetricky k hodnote prahu. Model s exponenciálnou prechodovou funkciou budeme označovať ESTAR. Pre obe extrémne hodnoty parametra hladkosti model ESTAR prechádza do lineárneho AR modelu.

#### **Proces modelovania modelu STAR:**

- (i) Zistenie východného AR modelu.
- (ii) Otestovanie linearity modelu pre rôzne hodnoty parametra omeškania  $d$ .  
V prípade zamietnutia nulovej hypotézy linearity, špecifikovať  $d$ .
- (iii) Voľba typu prechodovej funkcie a modelu medzi LSTAR a ESTAR.
- (iv) Odhad parametrov.

Modelovanie procesov STAR modelmi má oproti lineárnym modelom niekoľko výhod. Každý proces je špecifický, a preto je najlepšie začať lineárnymi modelmi  $AR(p)$ . Na špecifikáciu parametra  $p$  sa odporúča vybrať niekoľko alternatívnych modelov a vhodný model určiť podľa informačných kritérií. Základom modelovania modelov STAR je test linearity a výber vhodnej prechodovej funkcie  $G(u_t; \gamma, r)$ . Nech STAR model je v tvare

(4.9) s prechodovou premennou  $X_{t-d}$ ,  $d > 0$ . Luukkonen, Saikkonen a Teräsvirta v roku 1988 navrhli niekoľko testov, ktoré môžu byť použité v celej triede modelov STAR s neznámym  $d$ , v ktorej prechodová funkcia  $G(u_t; \gamma, r)$  spĺňa nasledujúce podmienky

- (i) Prechodová funkcia  $G(u; \cdot, \cdot)$  je vo svojej premennej nepárna, rýdzo rastúca a pre nejaké  $a > 0$  a  $s \geq 0$  existuje na  $(-a, a)$  nenulová derivácia rádu  $2s+1$ .
- (ii)  $G(0; \cdot, \cdot) = 0$  a  $[\partial^k G(u; \cdot, \cdot) / \partial u^k]_{u=0} \neq 0$  pre všetky také nepárne  $k$ , kde platí  $1 \leq k \leq 2s+1$ .

Navrhnuté testy testujú, či sa model (5.9) redukuje na lineárny v tvare

$$X_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (4.12)$$

Za platnosti nulovej hypotézy o redukcii modelu na lineárny tvar sa nedajú určiť parametre modelu. Hore uvedení autori tento problém odstránili nahradením prechodovej funkcie aproximáciou, v tvare Taylorovho polynómu. Pomocou Lagrangeovho multiplikátora so štandardným asymptotickým  $\chi^2$  rozdelením testujeme linearitu pri platnosti nulovej hypotézy.

Ak sú splnené hore uvedené podmienky pre  $s = 1$ , tak je možné funkciu  $G(u; \cdot, \cdot)$  aproximovať pomocou Taylorovho polynómu tretieho rádu

$$T_3(u) = g_1 u + g_3 u^3, \quad (4.13)$$

kde

$$g_1 = [\partial G(u; \cdot, \cdot) / \partial u]_{u=0}, g_3 = \frac{1}{6} [\partial^3 G(u; \cdot, \cdot) / \partial u^3]_{u=0}. \quad (4.14)$$

Dosadením  $u_t = X_{t-d}$  a nahradením funkcie  $G$  funkciou  $T_3$  dostaneme pomocný model v tvare

$$X_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \phi_{ij} X_{t-i} X_{t-j} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \zeta_{ij} X_{t-i} X_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \xi_{ij} X_{t-i} X_{t-j}^3 + \varepsilon_t \quad (4.15)$$

Pomocou modelu budeme testovať hypotézu

$$H_0: \phi_{ij} = 0, \zeta_{ij} = 0, \xi_{ij} = 0 \text{ pre všetky } i, j = 1, \dots, p$$

oproti alternatívnej hypotéze

$H_1$ : aspoň jeden z koeficientov  $\phi_{ij}, \zeta_{ij}, \xi_{ij}$  je nenulový.

Pri teste postupujeme nasledovne:

1. Zbehneme regresiu na  $X_t$  na  $\{1, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}\}$ , vypočítať reziduá  $\varepsilon_t$  a súčet ich štvorcov, t.j.

$$SSR_0 = \sum_{t=n-p+1}^n \hat{\varepsilon}_t^2 \quad (4.16)$$

2. V prípade, že  $d$  nie je známe, spraviť regresiu  $\hat{\varepsilon}_t$  na

$$\{1, X_{t-i}, i = 1, 2, \dots, p, X_{t-i}X_{t-j}, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, p, X_{t-i}X_{t-j}^k, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, p, k = 2, 3\}$$

v prípade, že  $d$  poznáme, spravíme regresiu  $\hat{\varepsilon}_t$  na

$$\{1, X_{t-i}, i = 1, 2, \dots, p, X_{t-i}X_{t-d}, i = 1, 2, \dots, p, X_{t-i}X_{t-d}^k, i = 1, 2, \dots, p, k = 2, 3\}$$

a vypočítame reziduály  $\hat{\eta}_t$  a súčet ich štvorcov

$$SSR_3 = \sum_{t=n-p+1}^n \hat{\eta}_t^2 \quad (4.17)$$

3. Vypočítať štatistiku

$$S_3 = (n - p) \frac{SSR_0 - SSR_3}{SSR_0} \quad (4.18)$$

**Veta 4.2.1** Nech  $X_t$  je stacionárny, invertovateľný autoregresný proces rádu  $p$  s reprezentáciou

$$X_t = \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \varepsilon_t \quad (4.19)$$

kde  $\varepsilon_t$  sú nezávislé náhodné premenné z rovnakého rozdelenia s nulovou strednou hodnotou, rovnakým rozptylom a konečným štvrtým momentom. Potom za platnosti

hypotézy  $H_0$  má  $S_3$  asymptoticky  $\chi^2$  rozdelenie so  $\frac{1}{2}p(p+1) + 2p^2$  stupňami voľnosti,

ak  $d$  nie je známe a s  $3p$ , ak  $d$  poznáme.

Tento test je testom linearity modelu proti nelinearite typu LSTAR. Saikkonen a Luukkonen vo svojej práci navrhli tiež test, kde ako alternatívnu hypotézu k lineárnemu AR modelu postavíme model typu ESTAR. Vtedy sa pomocný model modifikuje na nasledujúci tvar

$$X_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \varphi_{ij} X_{t-i} X_{t-j} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \zeta_{ij} X_{t-i} X_{t-j}^2 + \varepsilon_t. \quad (4.20)$$

Pomocou modelu budeme testovať hypotézu

$$H_0: \varphi_{ij} = 0, \zeta_{ij} = 0, \text{ pre všetky } i, j = 1, \dots, p$$

oproti alternatívnej hypotéze

$$H_1: \text{aspoň jeden z koeficientov } \varphi_{ij}, \zeta_{ij} \text{ je nenulový.}$$

Postup testovania hypotézy je rovnaký ako v predchádzajúcom prípade a testovacia štatistika je

$$S_2 = (n - p) \frac{SSR_0 - SSR_2}{SSR_0} \quad (4.21)$$

**Veta 4.2.2** Nech  $X_t$  spĺňa predpoklady vety 4.2.1. Potom za platnosti hypotézy  $H_0$  má  $S_2$

asymptoticky  $\chi^2$  rozdelenie so  $\frac{1}{2} p(p+1) + p^2$  stupňami voľnosti, ak  $d$  nie je známe

a s  $2p$ , ak  $d$  poznáme.

Escribano a Jordá tvrdia vo svojej práci z roku 1999, že aproximácia Taylorovým polynómom prvého rádu je nedostatočná a nevystihuje charakteristickú vlastnosť exponenciálnej prechodovej funkcie. Preto navrhli aproximáciu prechodovej funkcie Taylorovým polynómom druhého rádu, ktorá vedie k pomocnému modelu

$$\begin{aligned} X_t = & \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \varphi_{ij} X_{t-i} X_{t-j} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \zeta_{ij} X_{t-i} X_{t-j}^2 \\ & + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \xi_{ij} X_{t-i} X_{t-j}^3 + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \psi_{ij} X_{t-i} X_{t-j}^4 + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (4.22)$$

Opäť testujeme hypotézu

$$H_0: \varphi_{ij} = 0, \zeta_{ij} = 0, \xi_{ij} = 0, \psi_{ij} = 0 \text{ pre všetky } i, j = 1, \dots, p$$

oproti alternatívnej hypotéze

$$H_1: \text{aspoň jeden z koeficientov } \varphi_{ij}, \zeta_{ij}, \xi_{ij}, \psi_{ij} \text{ je nenulový}$$

pri rovnakom postupe ako v prvom teste. Testovacia štatistika má tvar

$$S_4 = (n - p) \frac{SSR_0 - SSR_4}{SSR_0} \quad (4.23)$$

**Veta 4.2.3** Nech  $X_t$  splňa predpoklady vety 4.2.1. Potom za platnosti hypotézy  $H_0$  má  $S_4$  asymptoticky  $\chi^2$  rozdelenie so  $\frac{1}{2}p(p+1) + 3p^2$  stupňami voľnosti, ak  $d$  nie je známe a s  $4p$ , ak  $d$  poznáme.

V prípade zamietnutia linearitu modelu, použijeme na modelovanie daného časového radu STAR model. Na určenie parametrov modelu môžeme použiť nelineárnu metódu najmenších štvorcov

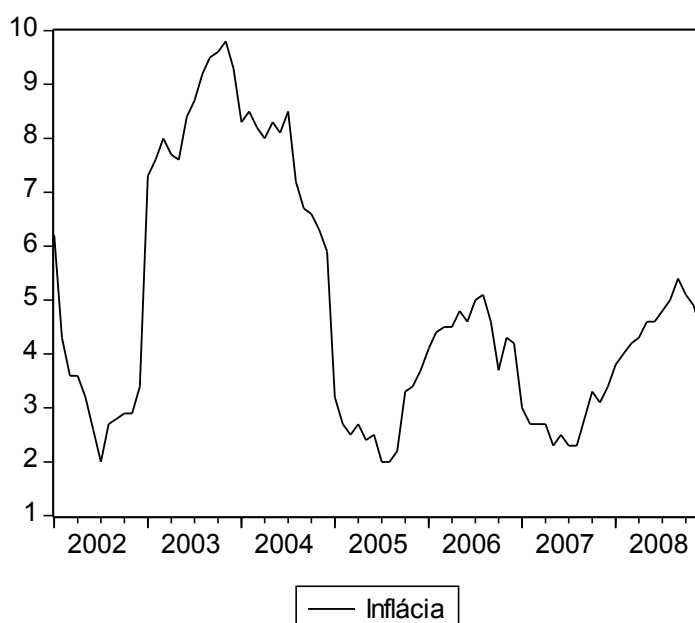
$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{t=0}^N (x_t - F(\mathbf{X}_t; \theta))^2, \quad (4.24)$$

kde

$$F(\mathbf{X}_t; \theta) = \phi' \mathbf{X}_t (1 - G(u_t; \gamma, r)) + \varphi' \mathbf{X}_t G(u_t; \gamma, r). \quad (4.25)$$

## 5 Analýza časového radu inflácie Slovenska

V tejto kapitole sa budeme zaoberať modelovaním časového radu inflácie Slovenska od januára 2002 do decembra 2008 autoregresnými modelmi. Hlavnou úlohou je nájsť vhodný model a aplikovať teóriu lineárneho a nelineárneho modelovania časových radov. Najprv začneme časový rad skúmať pomocou lineárnych modelov AR(p), MA(q), ARMA(p,q), a potom prejdeme na nelineárne modely SETAR a STAR, ktorých východiskom je nájdenie vhodného lineárneho modelu. Pri praktickej analýze sme využili Eviews 5, Matlab 7 a Mathematicu 5.2. Na obrázku 5.1 vidíme časový rad inflácie Slovenska.



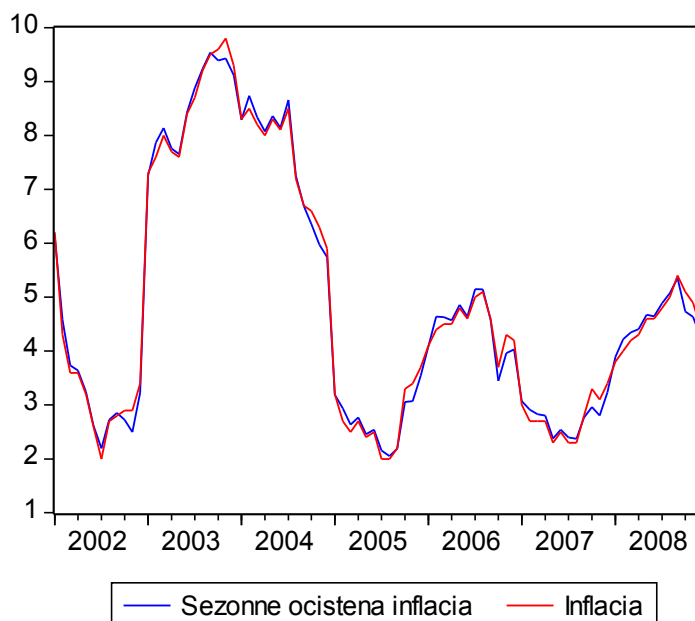
Obr. 5.1: Mesačná inflácia Slovenska od januára 2002 do decembra 2008

Vhodnosť modelu budeme posudzovať najmä podľa nasledujúcich kritérií:

- $R^2$  – vyjadruje, ako dobre sú data odhadnuté pomocou lineárnej regresie. Hodnota  $R^2 = 1$  (100%)
- parsinomita (najmenší počet parametrov) modelu
- Akaikeho informačné kritérium (AIC), preferuje sa čo najmenšia hodnota

## 5.1 Dekompozícia časového radu a test stacionarity

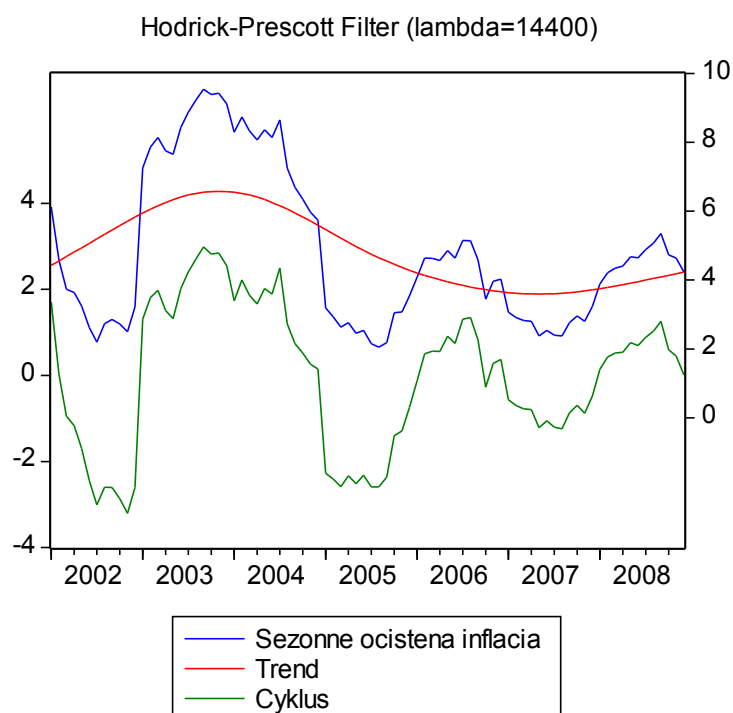
Na začiatku urobíme dekompozíciu časového radu pomocou softvéru Eviews 5. Data očistíme od sezónnych vplyvov pomocou Census X12 filtra, kde nastavíme X11 metódu na aditívnu, t.j. používame aditívnu dekompozíciu časového radu definovanú vzťahom (2.14). Sezónne očistenú infláciu v porovnaní s pôvodnou vidíme na obrázku 5.2.



Obr. 5.2: Sezónne očistená inflácia pomocou Census X12 filtra

V ďalšom kroku odstránime trendovú zložku sezónne očistenej inflácie. Na odstránenie trendu použijeme Hodrick-Prescott filter. Výsledný graf vidíme na obrázku 5.3.





Obr. 5.3: Odstránená trendová zložka sezónne očistenej inflácie

V časovom rade nám zostali už len dve zložky a to cyklická a reziduálna. Pretože cyklická zložka je veľmi ťažko identifikovateľná, túto zložku zanedbáme a budeme predpokladať, že nám ostala len reziduálna zložka. Túto zložku otestujeme na stacionaritu pomocou testu jednotkového koreňa (Unit root test).

Null Hypothesis: CYCLEINF\_SA has a unit root  
 Exogenous: None  
 Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=11)

	t-Statistic	Prob.*
<b>Augmented Dickey-Fuller test statistic</b>	-2.042106	0.0401
Test critical values:		
1% level	-2.593121	
5% level	-1.944762	
10% level	-1.614204	

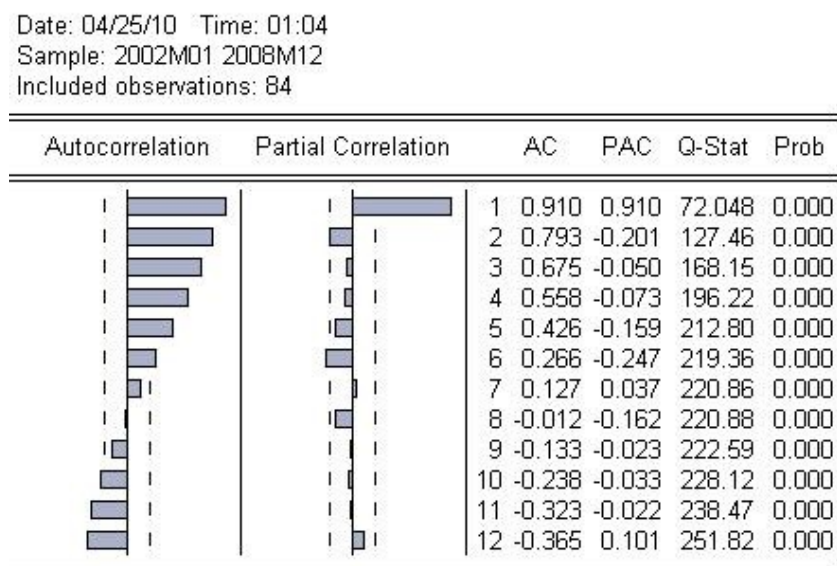
\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Tab. 5.1: Výstup z Eviews 5 - Unit Root Test reziduálnej zložky

V tabuľke 5.1. vidíme výstup z testu jednotkového koreňa reziduálnej zložky, kde nulovú hypotézu o existencii jednotkového koreňa zamietame na hladine významnosti 5% (Prob. = 0,0401). Z testu nám vyplýva, že všetky korene charakteristického polynómu ležia mimo jednotkovej kružnice, t.j. v dátach máme identifikovanú stacionaritu a môžeme začať modelovanie časového radu pomocou lineárnych modelov.

## 5.2 $AR(p)$ model

V časovom rade reziduálnej zložky máme identifikovanú stacionaritu, a preto môžeme pristúpiť k modelovaniu pomocou  $AR(p)$  modelu. Významné  $AR$ -koeficienty vyberáme pomocou ACF a PACF. Kde nám hodnoty týchto funkcií presiahnu hranicu, tam je identifikovaná vysoká korelácia, a tieto členy významne ovplyvňujú ďalšie členy časového radu. Na obrázku 5.4 vidíme korelogram s 12 oneskoreniami. Z neho vyberieme významné členy, v našom prípade sú to členy  $AR(1)$ ,  $AR(2)$  a  $AR(6)$ . V tabuľke 5.2 vidíme odhad koeficientov  $AR(1)$ ,  $AR(2)$ ,  $AR(6)$  pomocou metódy najmenších štvorcov.



Obr. 5.4: Korelogram reziduálnej zložky s 12 oneskoreniami

Dependent Variable: CYCLEINF\_SA  
 Method: Least Squares  
 Date: 04/25/10 Time: 01:15  
 Sample (adjusted): 2002M07 2008M12  
 Included observations: 78 after adjustments  
 Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	1.038031	0.110331	9.408364	0.0000
AR(2)	-0.070294	0.119991	-0.585822	0.5598
AR(6)	-0.139365	0.051427	-2.709944	0.0083
R-squared	0.871044	Mean dependent var		0.058136
Adjusted R-squared	0.867606	S.D. dependent var		1.690076
S.E. of regression	0.614952	Akaike info criterion		1.903156
Sum squared resid	28.36242	Schwarz criterion		1.993799
Log likelihood	-71.22309	Durbin-Watson stat		2.003774

Tab. 5.2: Odhad rovnice AR – modelu

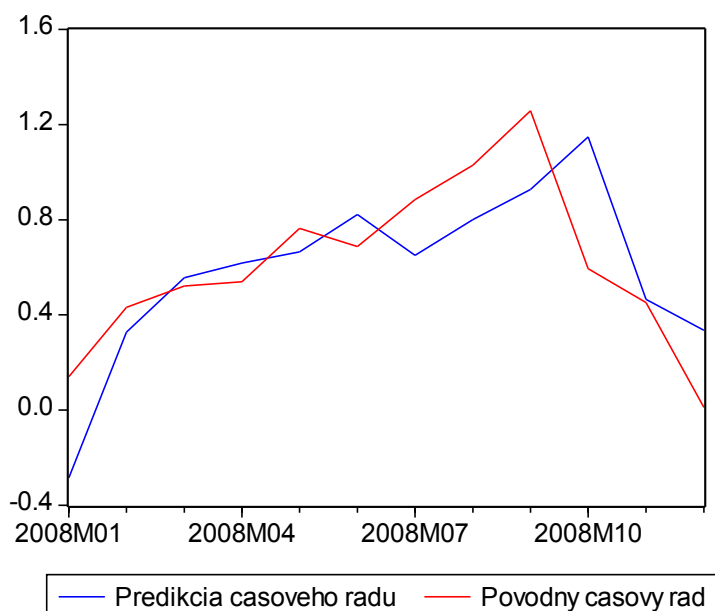
Ak v štvrtom stĺpci (Prob.) je p-hodnota väčšia ako 0,05, tak tento parameter z modelu odstránime, pretože nie je významný a vplyv na časový rad sa nepreukázal. Výsledný model aj s odhadom parametrov vidíme v tabuľke 5.3.

Dependent Variable: CYCLEINF\_SA  
 Method: Least Squares  
 Date: 04/24/10 Time: 16:28  
 Sample (adjusted): 2002M07 2008M12  
 Included observations: 78 after adjustments  
 Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	0.979196	0.045479	21.53082	0.0000
AR(6)	-0.153657	0.045077	-3.408778	0.0010
R-squared	0.870454	Mean dependent var		0.058136
Adjusted R-squared	0.868750	S.D. dependent var		1.690076
S.E. of regression	0.612289	Akaike info criterion		1.882081
Sum squared resid	28.49220	Schwarz criterion		1.942509
Log likelihood	-71.40114	Durbin-Watson stat		1.893345

Tab. 5.3: Odhad parametrov výsledného AR-modelu

Získaný model je uspokojivý, pretože má vysoký  $R^2 = 0,870454$ , taktiež má nízke AIC = 1,882081. Pomocou výslednej rovnice odhadneme časový rad od januára 2008 až do decembra 2008. Porovnanie predikcie a pôvodného časového radu vidíme na obrázku 5.5.



Obr. 5.5: Predikcia AR- modelu v porovnaní s pôvodným časovým radom

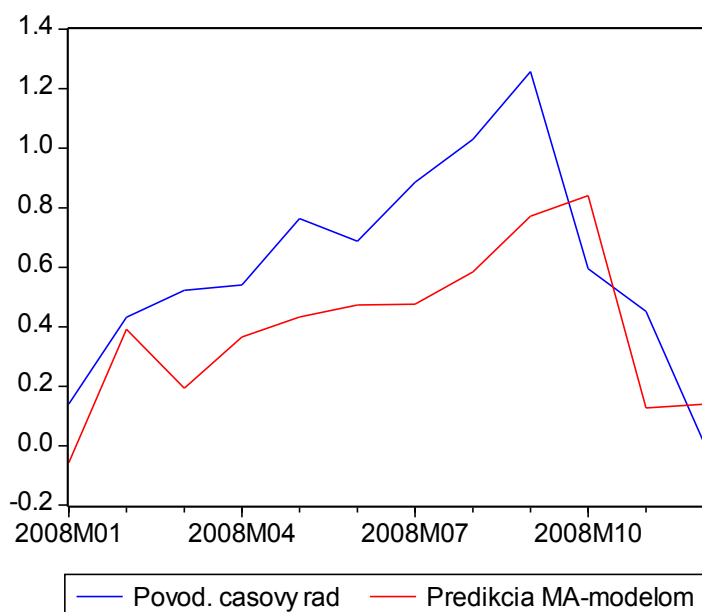
### 5.3 *MA(q) model*

Pri modelovaní modelom  $MA(q)$  postupujeme rovnako ako pri modelovaní  $AR(p)$  modelu. Opäť budeme vychádzať z obrázka 5.5, kde máme korelogram, z ktorého vyberieme podľa PACF významné  $MA(q)$  koeficienty. V našom prípade sú to  $MA(1)$ ,  $MA(2)$  a  $MA(6)$ . Koeficient  $MA(6)$  sa preukázal ako nesignifikantný, a preto bol z modelu odstránený. Výsledný model s odhadom parametrov môžeme vidieť v tabuľke 5.4. Získaný model je o niečo horší ako AR-model, pretože má nižšie  $R^2 = 0,780599$ , parsinomita modelu je rovnaká ako u AR-modelu a taktiež má vyššie AIC = 2,394147. Opäť sa pokúsime predikovať pôvodný časový rad pomocou MA-modelu od januára 2008 do decembra 2008 a predikciu porovnáme s pôvodným časovým radom. Vid' obrázok 5.6.

Dependent Variable: CYCLEINF\_SA  
 Method: Least Squares  
 Date: 04/25/10 Time: 02:36  
 Sample: 2002M01 2008M12  
 Included observations: 84  
 Convergence achieved after 10 iterations  
 Backcast: 2001M11 2001M12

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	1.017288	0.077412	13.14124	0.0000
MA(2)	0.775438	0.057318	13.52861	0.0000
R-squared	0.780599	Mean dependent var	-8.60E-13	
Adjusted R-squared	0.777923	S.D. dependent var	1.679909	
S.E. of regression	0.791658	Akaike info criterion	2.394147	
Sum squared resid	51.39122	Schwarz criterion	2.452023	
Log likelihood	-98.55416	Durbin-Watson stat	1.280521	

Tab. 5.4: Odhad parametrov výsledného MA-modelu



Obr. 5.6: Predikcia MA-modelom v porovnaní s pôvodným časovým radom

## 5.4 ARMA(p,q) model

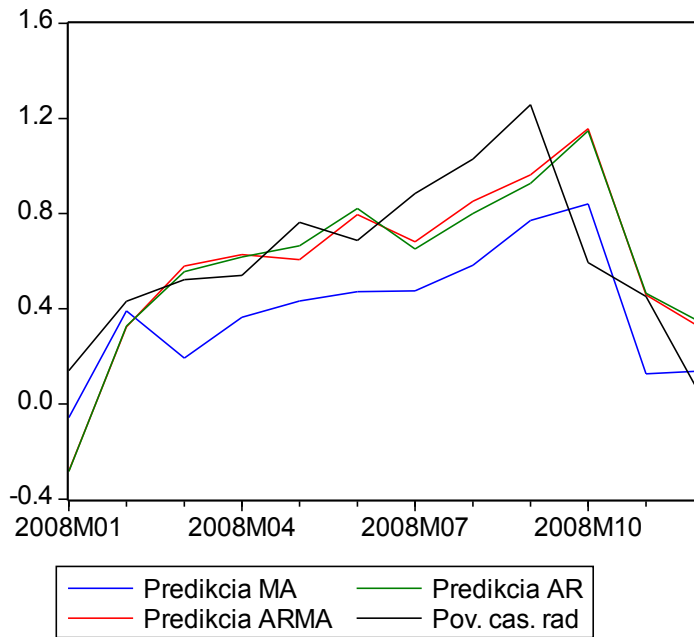
Model ARMA(p,q) je spojením AR(p) a MA(q) modelu. Budeme vychádzať z obrázku 5.4, kde podľa ACF a PACF vyberieme členy AR(p) a podľa PACF členy MA(q). Koeficienty počiatočného modelu sú AR(1), AR(2), MA(1), MA(2). Člen MA(2) sa ukázal ako nesignifikantný, a preto ho z modelu odstránime. Najlepší ARMA(p,q) model pre náš časový rad je uvedený v tabuľke 5.5. Získaný ARMA-model je v porovnaní s AR-modelom o niečo lepší.

Dependent Variable: CYCLEINF\_SA  
Method: Least Squares  
Date: 04/25/10 Time: 03:20  
Sample (adjusted): 2002M03 2008M12  
Included observations: 82 after adjustments  
Convergence achieved after 14 iterations  
Backcast: 2002M02

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	1.836498	0.064268	28.57564	0.0000
AR(2)	-0.878929	0.059432	-14.78890	0.0000
MA(1)	-0.839433	0.080232	-10.46259	0.0000
R-squared	0.872190	Mean dependent var	-0.021030	
Adjusted R-squared	0.868955	S.D. dependent var	1.689834	
S.E. of regression	0.611723	Akaike info criterion	1.890826	
Sum squared resid	29.56223	Schwarz criterion	1.978877	
Log likelihood	-74.52387	Durbin-Watson stat	1.944648	

Tab. 5.5: Odhad parametrov výsledného ARMA modelu

V každom lineárnom modeli sme otestovali normalitu reziduí pomocou Jarque-Berra testu. Normalita reziduí sa potvrdila, a preto modely sú správne. Pôvodný časový rad sme postupne namodelovali základnými lineárnymi modelmi a na obrázku 5.7 vidíme porovnanie predikcii jednotlivých lineárnych modelov a pôvodného časového radu.



Obr. 5.8: Porovnanie predikcií lineárnych modelov s pôvodným časovým radom

### 5.5 SETAR(p,d,r) model

Základným stavebným prvkom modelu SETAR je zistenie maximálneho rádu autoregresie, ktorý určíme podľa minimálnej hodnoty PACF z korelogramu pôvodného časového radu uvedeného na obrázku 5.5. Vidíme, že minimum PACF sa rovná  $-0,247$ , preto maximálny rád autoregresie  $p = 6$ . Možné hodnoty omeškania  $d \in \{1,2,3,4,5,6\}$ . Správime test nelinearity modelu pre všetky hodnoty parametra  $d$  a maximálny rád autoregresie  $p$  pomocou F-štatistiky danej vzťahom (4.6). Výsledky testu reprezentuje tabuľka 5.6, kde pre každú hodnotu parametra omeškania  $d$  model vykazuje nelinearitu. Podľa maximálnej hodnoty F-štatistiky vyberieme najvhodnejšiu hodnotu parametra omeškania  $d = 2$ . V ďalšom kroku sa pokúsime špecifikovať počet režimov  $k$  a prahovú hodnotu  $r$ . Analýzou bodových grafov t-štatistík signifikantných AR koeficientov v preusporiadanej autoregresii verzus indikátor režimu  $X_{t-2}$  zistíme hodnoty prahových premenných  $r$ . Z grafov sme vybrali ako hodnotu prahu  $r = -1,3$ . Takže budeme modelovať dvojrežimový SETAR model. Prahová premenná nám rozdelila preusporiadanú autoregresiu na 19 a 59 pozorovaní. Pomocou Akaikeho informačného kritéria určíme významné autoregresné členy pre prvý režim, tak isto aj pre druhý režim modelu. Autoregresné členy v prvom modeli sú AR(1), AR(2), AR(4) a AR(6),

p	D	Kritická hodnota	F-štat
6	1	2,376684	2,629237
6	2	2,376684	3,854968
6	3	2,376684	2,449337
6	4	2,376684	3,099593
6	5	2,376684	2,424795
6	6	2,376684	3,244071

Tab. 5.6: Výsledky testu nelinearity realizovaného pomocou F-štatistiky

v druhom režime sú to autoregresné členy AR(1), AR(5) a AR(6) . Koefficienty modelu odhadneme pomocou lineárnej regresie. Výsledný model má tvar

$$X_t = \begin{cases} 1,0277X_{t-1} - 0,2401X_{t-2} + 0,5214X_{t-4} - 0,4089X_{t-6} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-2} \leq -1,3 \\ 0,9721X_{t-1} + 0,2374X_{t-5} - 0,2914X_{t-6} + \varepsilon_t & \text{ak } X_{t-2} \geq -1,3 \end{cases}$$

Rozhodovacie kritéria pre model SETAR(6,2,2) sú  $R^2 = 0,9112$ , AIC pre celý model je rovné 1,8542. V oboch režimoch sa preukázala normalita reziduí. Podľa rozhodovacích kritérií sme dostali lepší model ako lineárny ARMA model.

## 5.6 LSTAR model

Modelovanie modelu LSTAR realizujeme pomocou programu naprogramovaného v softvéri Mathematica 5.2 Ing. Tomášom Bacigalom zo Slovenskej technickej univerzity v Bratislave. Do programu sme zadali ako vstupy očistené dáta pôvodného časového radu a množinu parametrov  $p = \{1,2,3,4,5,6\}$  a  $d = \{1,2,3\}$  . V prvej procedúre nám program vyberie najlepší kombináciu parametrov  $p$  a  $d$ . Tak ako v modeli SETAR nám vyšlo  $p = 6$  a  $d = 2$ . Ďalej testujeme linearitu modelu Tsayovým testom a LM testom v oboch prípadoch bola linearita zamietnutá na hladine významnosti 5%. V programe zvolíme požadovaný počet prahov a percentuálny podiel pozorovaní v každom z režimov, minimálna hodnota je 15%. My sme zvolili ako počet prahov 3 a percentuálny podiel 25%. Program nám ako prahy určil hodnoty -1,2157; 0,0455 a hodnotu 1,3068. Parameter hladkosti sme nastavili ako množinu



$\gamma = \{0,25; 0,5; 1\}$  a počet režimov výsledného modelu na  $k = 2$ . Po spustení nám program určí optimálne hodnoty prahu a parametra hladkosti. Ako výstup sme dostali hodnotu prahu  $r = -1,2157$  a hodnotu parametra hladkosti  $\gamma = 0,25$ . Pomocou minimálneho AIC opäť zvolíme počet autoregresných členov v jednotlivých modeloch. Ako najlepšiu kombináciu dostávame pre prvý režim autoregresné členy 1 až 6 a pre druhý model len autoregresný člen prvého rádu. Výsledný model má tvar

$$X_t = \left( \begin{array}{l} - 5,3035 + 1,1487X_{t-1} - 1,2960X_{t-2} - 0,1512X_{t-3} \\ + 0,4534X_{t-4} + 0,2362X_{t-5} - 0,7863X_{t-6} \end{array} \right) \\ \left( 1 - \frac{1}{1 + \exp(-0,25(X_{t-2} + 1,2157))} \right) + \\ + (3,7013 + 0,7864X_{t-1}) \left( \frac{1}{1 + \exp(-0,25(X_{t-2} + 1,2157))} \right)$$

V modeli sa nám taktiež preukázala normalita reziduí a  $R^2 = 0,9002$  nám poukazuje na veľmi dobré odhadnutie dát modelom LSTAR.

## Záver

Problematika modelovania časových radov je veľmi obširnou témou, ktorou sa zaoberá mnoho autorov už od sedemdesiatych rokov minulého storočia. My sme sa v tejto práci bližšie pozreli len na autoregresné modely. V úvodných kapitolách sme uviedli nevyhnutnú teoretickú základňu, ktorú sme prakticky využili pri samotnom skúmaní časového radu.

Pri analýze sme začali dekompozíciou časového radu inflácie Slovenska aditívnou metódou a očistili sme ho postupne od sezónnych vplyvov a trendovej zložky. Pre modelovanie sme teda použili len reziduálnu časť časového radu, pretože cyklická zložka sa veľmi ťažko identifikovateľná, dovolili sme si ju zanedbať.

Reziduálnu časť časového radu sme najskôr modelovali pomocou lineárnych modelov, predstavených Boxom a Jenkinsom v ich práci v roku 1970. Analýza radu bola realizovaná softvérom Eviews 5. Nutná podmienka modelovania časového radu lineárnymi modelmi je stacionarita stochastického procesu. V našom prípade bola splnená, ale ak by nebola, museli by sme na modelovanie použiť modifikovaný rad pomocou logaritmickú alebo diferenčnej metódy. Pri vhodnosti voľby autoregresných koeficientov nám pomáha korelogram, kde vidíme hodnoty ACF a PACF. Pomocou odhadovanej rovnice zvolíme štatisticky významné koeficienty a namodelujeme výslednú diferenčnú rovnicu. Vhodnosť modelu rozlišujeme pomocou rozhodovacích kritérií ako je koeficient determinácie  $R^2$ , parsinomita (počet parametrov modelu) a Akaikeho informačné kritérium. V lineárnych modeloch nám koeficient determinácie vychádzal veľmi dobre a jeho hodnota prekračovala 0,75. Parsinomita modelov bola tiež na veľmi dobrej úrovni, pohybovala sa od dvoch do troch autoregresných členov. AIC bolo pod hodnotu 2,1 čo tiež svedčí o dobrom odhade časového radu pomocou výslednej diferenčnej rovnice. Pri každom modeli sme ešte otestovali normalitu reziduí a pozreli sa na ich ACF. Pre všetky modely nám tento test správnosti modelu dáva uspokojivé výsledky. Pre ilustráciu sme pomocou softvéru Eviews 5 spravili predikcie radu na rok 2008 a porovnali ich s namodelovaným časovým radom.

Nakoniec sme časový rad reziduálnej zložky inflácie Slovenska modelovali pomocou nelineárnych modelov, ktoré používajú ako svoj základný prvok lineárne modely. Zaujímali sme sa hlavne o viacrežimové modely SETAR a LSTAR, ktoré predstavili vo svojich prácach autori Tsay, Tong a Young koncom osemdesiatych a začiatkom

deväťdesiatych rokov minulého storočia. Tieto modely vychádzajú z rozdelenia časového radu podľa tzv. prahovej premennej na lineárne časti, ktoré sú modelované lineárnymi modelmi. Konštrukcia modelov je veľmi jednoduchá, no odhad potrebných parametrov modelu býva zväčša veľmi obtiažny a vyžaduje si mnoho úsilia. V tejto práci sme namodelovali model SETAR a model LSTAR. Pre porovnanie sme uviedli ako rozhodovaciu štatistiku koeficient determinácie, ktorý bol lepší ako pri lineárnych modeloch a pohyboval sa okolo 0,85. Parsinomita modelov stúpa podľa režimu na 4 až 6 autoregresných členov.

Autoregresné modely uvedené v tejto práci nám dávajú uspokojivé výsledky a môžu byť použité na odhadovanie budúcich hodnôt časového radu.

## Literatúta

- [1] FAN, J. – YAO, Q. 2003. Nonlinear time series : nonparametric and parametric methods. 2nd title, 3rd Series. New Your: Springer, 2003. 568p. ISBN 0-387-95170-9
- [2] HAMILTON, D. J. 1994. Time series analysis. 1st title. Chichester: Princeton University Press, 1994. 813p. ISBN 0-691-04289-6
- [3] NBS, 2002. Výročná správa NBS. Bratislava [online]. Dostupné na internete <  
[http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/\\_Publikacie%5CVyrocnaSprava%5CVSNBS02.pdf](http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Publikacie%5CVyrocnaSprava%5CVSNBS02.pdf)>
- [4] NBS, 2003. Výročná správa NBS. Bratislava [online]. Dostupné na internete <  
[http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/\\_Publikacie%5CVyrocnaSprava%5CVSNBS03.pdf](http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Publikacie%5CVyrocnaSprava%5CVSNBS03.pdf)>
- [5] NBS, 2004. Výročná správa NBS. Bratislava [online]. Dostupné na internete <  
[http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/\\_Publikacie%5CVyrocnaSprava%5CVSNBS04.pdf](http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Publikacie%5CVyrocnaSprava%5CVSNBS04.pdf)>
- [6] NBS, 2005. Výročná správa NBS. Bratislava [online]. Dostupné na internete <  
[http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/\\_Publikacie%5CVyrocnaSprava%5CVSNBS05.pdf](http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Publikacie%5CVyrocnaSprava%5CVSNBS05.pdf)>
- [7] NBS, 2006. Výročná správa NBS. Bratislava [online]. Dostupné na internete <  
[http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/\\_Publikacie%5CVyrocnaSprava%5CVSNBS06.pdf](http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Publikacie%5CVyrocnaSprava%5CVSNBS06.pdf)>
- [8] NBS, 2007. Výročná správa NBS. Bratislava [online]. Dostupné na internete <  
[http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/\\_Publikacie%5CVyrocnaSprava%5CVSNBS07.pdf](http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Publikacie%5CVyrocnaSprava%5CVSNBS07.pdf)>

- [9] NBS, 2008. Výročná správa NBS. Bratislava [online]. Dostupné na internete <  
[http://www.nbs.sk/\\_img/Documents/\\_Publikacie%5CVyrocnasprava%5CVSNBS08.pdf](http://www.nbs.sk/_img/Documents/_Publikacie%5CVyrocnasprava%5CVSNBS08.pdf)>
- [10] PEKÁR, J. 2004. Autoregresné modely hrubého domáceho produktu Slovenska. 1. vydanie. Bratislava: Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky v Bratislave, 2004, 148 str. ISBN: 89186-04-1
- [11] TERÄSVIRTA, T. 1994. Specification, Estimation, and Evaluation of Smooth Transition Autoregressive Models. *Journal of the American Statistical Association* 89, 208-19
- [12] TSAY, R. S. 1989. Testing and Modeliling Threshold Autoregressive Processes. *Journal of the American Statistical Association* 84, 231-40
- [13] TSAY, R. S. 1998. Testing and Modeling Multivariate Threshold Models. *Journal of the American Statistical Association* 93, 1188-202