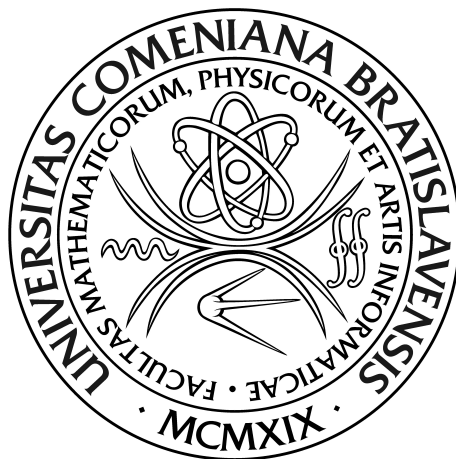


UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



VYUŽITIE OPTIMALIZAČNÝCH METÓD PRI RIADENÍ PORTFÓLIA

Diplomová práca

Bc. Lukáš Harakaľ

BRATISLAVA 2010

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

VYUŽITIE OPTIMALIZAČNÝCH METÓD PRI RIADENÍ PORTFÓLIA

Diplomová práca

Bc. Lukáš Haračal

9.1.9 Aplikovaná matematika
Ekonomická a finančná matematika

Vedúci práce: Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

BRATISLAVA 2010

Pod'akovanie

Na tomto mieste sa chcem úprimne poďakovať svojmu vedúcemu diplomovej práce Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za poskytnutú literatúru, cenné pripomienky a odbornú pomoc, ktoré mi poskytol pri písaní tejto práce. Súčasne ďakujem mojej rodine a priateľom za ich podporu počas celého štúdia.

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som prácu vypracoval samostatne s využitím svojich poznatkov a s použitím uvedenej literatúry.

.....

Lukáš Harakaľ

Bratislava 25.4.2010

Abstrakt

Harakaľ, Lukáš: *Využitie optimalizačných metód pri riadení portfólia.* Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Diplomová práca, 2010, 62 s.

Školiteľ: Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

V práci sa sústreďíme na viacperiódový model výberu optimálnej skladby aktív. Tento model je založený buď na maximalizácii strednej hodnoty kvadratickej funkcie užitočnosti, alebo na Markowitzovom mean-variance prístupe. Portfólio optimalizujeme prostredníctvom stochastického programovania. Zaujímá nás ako zavedenie transakčných nákladov do uvažovaných modelov ovplyvní vývoj portfólia a jednotlivé pre rozdelenia aktív počas plánovacieho horizontu. Tieto modely následne testujeme na reálnych dátach.

Kľúčové slová: aktívum, portfólio, optimalizácia portfólia, viacperiódové modely, stochastické programovanie.

Abstract

Harakaľ, Lukáš: *The use of optimization methods in the management of portfolio.*
Faculty of mathematics, physics and informatics, Comenius University Bratislava,
Department of Applied Mathematics and Statistics. Master Thesis, 2010, 62 p.

Thesis consultant: Mgr. Igor Melicherčik, PhD.

The work focuses on a multiperiod model of selection of the optimal mix of assets. This model is based either on maximizing the expected quadratic utility function or on the Markowitz mean-variance approach. Portfolio is optimized through stochastic programming. We are interested in the effect of integration of transaction costs into consideration models on the evolvement of portfolio and individual assets reallocations during planing horizon. These models are further tested on real data.

Key words: asset, portfolio, portfolio optimization, multiperiod models, stochastic programming.

Zoznam obrázkov a tabuliek

Obr. 1.1: Časový vývoj cien akciového indexu CAC 40

Obr. 1.2: Časový vývoj výnosov akciového indexu CAC 40

Obr. 2.1: Kvadratická funkcia užitočnosti $U(W) = W - \alpha W^2$

Obr. 5.1: Dvojperiódový model s tromi scenármi

Obr. 5.2: Trojperiódový model s dvomi scenármi

Obr. 5.8: Tabuľka 1

Obr. 5.8: Tabuľka 2

Obr. 5.8: Tabuľka 3

Obr. 5.8: Tabuľka 4

Obr. 5.8: Tabuľka 5

Obr. 5.8: Tabuľka 6

Obr. 5.8: Tabuľka 7

Obr. 5.8: Tabuľka 8

Obsah

Úvod	1
1 Teória portfólia	3
1.1 Motivácia	3
1.2 Optimálny výber portfólia	4
1.3 Viacperiódová optimalizácia	5
2 Jednoperiódové modely	6
2.1 Všeobecné vlastnosti a označenia	6
2.1.1 Transakčné náklady a rozpočtové ohraničenia	7
2.2 Prístup založený na funkcii užitočnosti	8
2.2.1 Postoj k riziku a kvadratická funkcia užitočnosti	8
2.3 Mean-variance prístup	10
2.3.1 Odvodenie mean-variance prístupu pomocou teórie užitočnosti	11
2.3.2 Kritický pohľad	12
3 Viacperiódové modely	14
3.1 Predpoklady pravdepodobnostného rozdelenia	14
3.2 Vývoj majetku	15
3.3 Všeobecná definícia viacperiódového modelu	16
3.4 Mean-variance model	18
3.4.1 Zhodnosť mean-variance prístupu s teóriou užitočnosti	19
4 Optimalizácia portfólia pomocou stochastického programovania	21

4.1	Strom scenárov	22
4.2	Formulácia úlohy v deterministickom tvare	22
5	Testovanie a porovnanie modelov	26
5.1	Formulácia modelov	26
5.2	Príprava pred aplikáciou funkcie quadprog	28
5.3	Aplikácia programu na dáta	34
	Záver	40
	Prílohy	41
	Literatúra	61

Úvod

Ak vlastnime voľné finančné prostriedky a chceme ich výhodne zhodnotiť, zaujímavou alternatívou investovania našich peňazí je investovanie do rôznych typov aktív. Pokiaľ sme sa rozhodli pre túto možnosť investície, je pre nás prirodzené zostaviť si čo najvhodnejšiu kombináciu aktív v našom portfóliu tak, aby spĺňali stanovené podmienky. Naším cieľom je v tomto prípade nadobudnúť v budúcnosti taký majetok, ktorý nám prinesie čo najväčší osobný úžitok. Otázkou preto zostáva ako si zostaviť optimálne portfólio. Pre výber optimálneho portfólia je navrhnutých niekoľko prístupov, my sa však budeme zaoberať dvomi najpoužívanejšími. Jedným je prístup založený na maximalizácii strednej hodnoty funkcie užitočnosti, druhým klasický mean-variance prístup navrhnutý H. M. Markowitzom, v ktorom sa snažíme minimalizovať varianciu výnosov pri pevne stanovenom očakávanom výnose.

Cieľom našej práce je zistiť do akej miery majú transakčné náklady vplyv na rebalansovanie portfólia v jednotlivých periódach. Uvažujeme oba typy modelov, ktorých optimalizácia je založená na stochastickom programovaní.

Práca pozostáva zo piatich kapitol. V prvej kapitole uvádzame základné pojmy a myšlienky teórie portfólia. Druhá kapitola sa zaoberá jednoperiódovými modelmi optimalizácie portfólia. Zameraná je na transakčné náklady a rozpočtové ohraničenia pre oba typy vyššie spomínaných modelov s jednou periódou. Na konci druhej kapitoli poukazujeme na konzistentnosť oboch prístupov. Obsahom tretej kapitoly je rozšírenie týchto modelov pre viacperiódové prostredie, ktoré je lepšou aproximáciou skutočnosti. Sú v nej definované predpoklady pravdepodobnostného rozdelenia, rovnice popisujúce vývoj majetku v portfóliu a všeobecná formulácia viacperiódového modelu. Štvrtá kapitola nás uvádza do problematiky optimalizácie portfólia pomocou stochastického programovania, predstavený je v nej strom scenárov a úloha v deterministickom tvare. Stredobodom pozornosti piatej kapitoly je praktické testovanie a porovnávanie modelov optimalizácie portfólia. Na základe predchádzajúcich

kapitol sú v piatej kapitole sformulované oba typy prístupov, založených na stochastickom programovaní. Kapitola sa sústreďí na porovnanie oboch modelov a skúma či transakčné náklady vplyvajú na rebalansovanie portfólia. K naprogramovaniu oboch modelov sme využili matematický softvér Matlab, konkrétne funkciu quadprog. Oba modely sú preto pretransformované do takej štruktúry, s akou vie funkcia quadprog pracovať. Programy aplikujeme na dáta a na základe pozorovaní vyvodíme závery.

Kapitola 1

Teória portfólia

Teória portfólia vo svete financií patrí medzi mikroekonomické disciplíny. Zaoberá sa výberom vhodnej kombinácie aktív do portfólia tak, aby spĺňalo vopred stanovené vlastnosti. Každý investor sa snaží zostaviť si čo najvýkonnejšie portfólio, t.j. optimalizuje ho s ohľadom na jeho postoj k riziku [9].

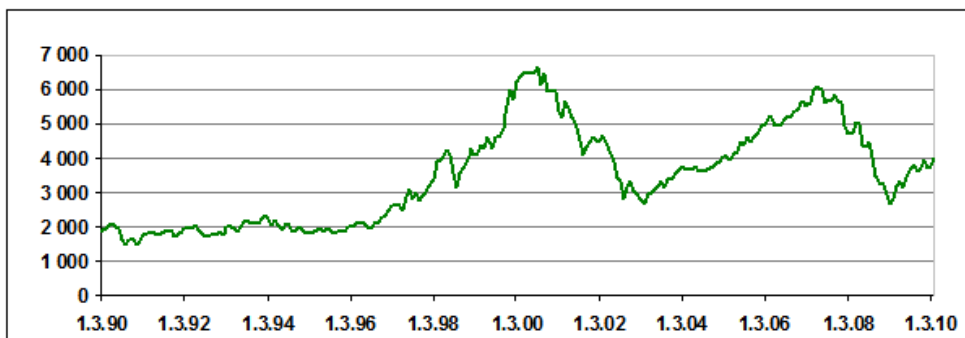
Aktívum chápeme ako investičný nástroj, ktorý je možné predávať alebo kupovať. Súbor aktív nazývame *portfólio*. V portfóliu môžeme držať rôzne počty odlišných aktív ako napr. akcie, akciové indexy, meny, dlhopisy, peňažnú hotovosť, výmenné kurzy, úrokové sadzby, opcie, komodity, nehnuteľnosti a pod [2].

1.1 Motivácia

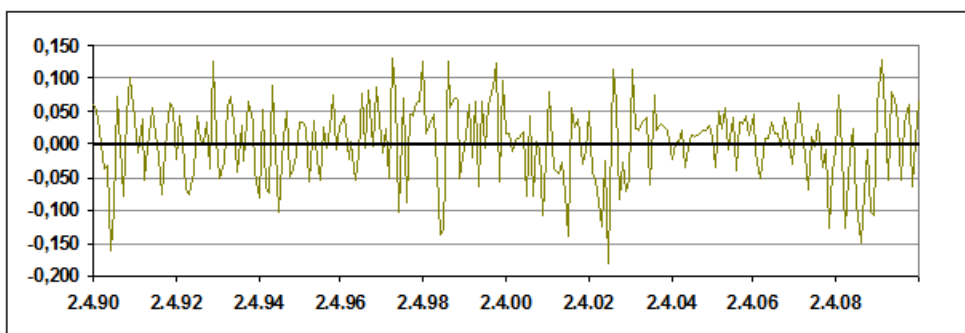
Keby sme poznali budúcnosť, výber nášho portfólia by bola jednoduchá záležitosť. Celý majetok by sme investovali do aktíva s najvyšším výnosom. K preskupeniu portfólia by došlo len v prípade, ak by sme neskôr objavili aktívum s vyšším výnosom. Optimalizácia portfólia by bola zbytočná [1].

Časový vývoj aktív je však nestály. Výnosy aktív a tým aj celé portfólio ustavične podliehajú *riziku*. Riziko je najčastejšie dôsledkom náhodného kolísania cien aktív. Tieto zmeny sú zapríčinené vplyvom burzového a mimoburzového trhu na cenu aktíva. Ponuka a dopyt po konkrétnom aktíve modelujú jeho časový priebeh [3].

Pri optimalizácii portfólia počítajú matematické metódy s rozličnými typmi aktív, zvyčajne sa však zameriavame na významnejšie akciové indexy, vládne, prípadne korporáčne dlhopisové indexy a na peňažný ekvivalent.



Obr. 1.1: Časový vývoj cien akciového indexu CAC 40



Obr. 1.2: Časový vývoj výnosov akciového indexu CAC 40

1.2 Optimálny výber portfólia

Pri voľbe aktív do nášho portfólia zohľadňujeme ich nestálosť a skutočnosť, že diverzifikácia znižuje riziko. Výber aktív je často ohraničený rozpočtovými a riadiacimi podmienkami.

Základnú myšlienku voľby portfólia možno popísať nasledovne. Najprv si stanovíme cieľ, ktorý chceme dosiahnuť. Potom si vyberieme najvhodnejšie portfólio, pomocou ktorého sa k stanovenému cieľu dopracujeme. Výber portfólia je preto realizovaný optimalizáciou.

Ako stanovený cieľ možno uvažovať očakávaný výnos. V skutočnosti však dávame prednosť osobnému zisku z výnosov, ktorý označujeme ako *užitočnosť*. Užitočnosť stavia do rovnováhy výnosy a riziká na základe vlastného prístupu. Priama aplikácia takéhoto postupu sa však ukázala byť ako náročná úloha, keďže prideliť užitočnosť výnosu jednotlivým investorom je veľmi komplikované.

Doposiaľ sme riziko chápali ako nestálosť výnosov jednotlivých aktív, prípadne ako nestálosť portfólia ukrytú v očakávanej užitočnosti. Riziko však vieme definovať

priamo cez *varianciu*, alebo cez jej druhú odmocninu t.j. *volatilitu* (*štandardnú odchýlku*). Tento prístup navrhol v roku 1952 americký ekonóm Harry Max Markowitz a položil tým základy optimalizácie portfólia. Zaviedol postup ako ohodnotiť protichodné ciele, aby sme docielili vysoké výnosy, a aby sme vlastnili portfólio s nízkym rizikom. V roku 1990 získal za svoju priekopnícku prácu cenu Švédskej štátnej banky za ekonomické vedy na pamiatku Alfreda Nobela. Svojou modernou teóriou portfólia dal impulz pre ďalší výskum vo fináčnej ekonómii. Markowitz navrhol metódu založenú na strednej hodnote a variancii t.j. mean-variance metódu, ktorá stále zostáva vďaka svojej jednoduchosti populárnym nástrojom aj napriek viacerým nesúhlasným argumentom. Túto časť práce sme spracovali pomocou literatúry [1] a [10-12].

1.3 Viacperiódová optimalizácia

Viacperiódové modely optimalizácie portfólia sú oveľa realistickejšie ako jednoperiódové. Základný rozdiel medzi nimi spočíva v potrebe zaviesť prerozdelenia aktív medzi jednotlivými periodami, pri ktorých sa nevyhneme plateniu transakčných nákladov. Transakčné náklady vplyvajú na rebalansovanie portfólia v každom rozhodovacom okamihu. Formuláciu a vlastnosti matematického modelu bude preto potrebné rozšíriť.

Pri viacperiódových modeloch si v prvom rade zvolíme plánovací horizont a jednotlivé medziperiódové intervaly. *Plánovací horizont* je časové obdobie začínajúce výberom portfólia a končiace dosiahnutím stanoveného cieľa. V priebehu plánovacieho horizontu nás môže zaujímať pravidelný cash flow a majetok na jeho konci. Dĺžku jednotlivých period si je potrebné určiť ešte pred optimalizáciou. Môže byť konštantná, alebo sa môže od periódy k perióde meniť. Veľké množstvo period však môže znižovať poddajnosť matematického modelu.

Výber portfólia pri viacperiódovom modeli je podobný ako pri jednoperiódovom. Najprv si stanovíme cieľ. Ďalej musí portfólio spĺňať rozpočtové ohraničenia modelu, brať do úvahy transakčné náklady a iné príslušné ohraničenia. Potom optimalizujeme stanovený cieľ t.j účelovú funkciu. Účelové funkcie často preberáme z jednoperiódových modelov, najmä tie, ktoré sú založené na funkcii užitočnosti.

Pôvodné viacperiódové modely založené na dynamickom programovaní majú často veľmi obmedzujúce ohraničenia. Modernejším spôsobom pri optimalizácii viacperiódových modelov je použitie viacstupňového stochastického programovania [1].

Kapitola 2

Jednoperiódové modely

Zaoberať sa jednoperiódovými modelmi výberu portfólia má svoje opodstatnenie. Mnohé ich vlastnosti sa dajú jednoducho pretransformovať pre viacperiódové modely. Ďalšou výhodou je možnosť použitia účelových funkcií týchto jednoperiódových modelov, niekedy rozšírených, pre viacperiódové modely. Kapitola je spracovaná podľa literatúry [1].

2.1 Všeobecné vlastnosti a označenia

Ak máme na začiatku periódy k dispozíciu rizikové aktívum o veľkosti A a jeho počiatočná cena je P_{ini} , do daného aktíva celkovo investujeme AP_{ini} peňazí. Na konci periódy dosahuje aktívum výnos $\mathbf{r} - 1$, keďže došlo k náhodnej zmene ceny P_{ini} na cenu P . V práci bude \mathbf{r} označovať totálny výnos, t.j. $(1 + \text{výnos})$.

$$\mathbf{r} := \frac{AP}{AP_{ini}}$$

V portfóliu vlastnime $n \geq 1$ rizikových aktív s neistým výnosom $\mathbf{r}_i - 1$. Peniaze investované v príslušných rizikových aktívach označíme x_i , kde $i = 1, \dots, n$. Okrem toho držíme v portfóliu určitý objem hotovosti x_0 . Túto pozíciu chápeme ako bezrizikové aktívum s kladným a nemenným výnosom $R - 1 > 0$.

Vektor $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)'$ (označuje riadkový vektor) a R budeme chápať ako výnosy. Spoločne sú zahrnuté v náhodnej premennej $r = (R, \mathbf{r})'$. Pre zjednodušenie výkladu budeme vektorové zastúpenie používať aj pre členy x_i , $i = 0, \dots, n$, preto $x = (x_0, \dots, x_n)'$. Vektor x nazývame portfólio v peňažných jednotkách alebo len

portfólio.

Celkový majetok je daný súčtom všetkých investícií $\sum_{i=0}^n x_i$ a ďalej je chápaný ako skalárny súčin $x'\mathbf{1}$, kde $\mathbf{1}$ je vektor jednotiek.

2.1.1 Transakčné náklady a rozpočtové ohraňovania

Transakčné náklady mnohé optimalizačné modely často zanedbávajú. Pri vzájomnom porovnaní toho istého modelu s nimi a bez nich, sa však optimálne portfólio môže významne meniť z jednej periódy do druhej. Nelineárne modelovanie transakčných nákladov značne znižuje matematickú poddajnosť modelov, najmä tých viacperiódových. Vhodným zjednodušeným spôsobom je možnosť začleniť transakčné náklady do modelu ako určitý pomer k veľkosti obratu.

Do nového portfólia väčšinou prichádzame s nejakým vstupným portfóliom, ktoré je výsledkom predchádzajúceho výberu portfólia a jeho zrealizovaných výnosov. Označujeme ho ako počiatočné portfólio $x_{ini} \in \mathbb{R}^{n+1}$, ktoré pozostáva z n rizikových aktív a peňažnej hotovosti. Náš počiatočný majetok W_{ini} je súčet $x'_{ini}\mathbf{1} =: W_{ini}$ cez všetky jednotlivé aktíva. Pri rebalansovaní počiatočného aktíva dochádza k nákupu $v_i^+ \geq 0$, respektíve k predaju $v_i^- \geq 0$ i -teho rizikového aktíva. Investícia do aktíva sa dá preto vyjadriť ako:

$$x_{ini,i} + v_i^+ - v_i^- =: x_i \quad (2.1)$$

s neistým výnosom $x_i(r_i - 1)$ na konci periódy. Pre peňažnú hotovosť platí rovnica:

$$x_{ini,0} - \sum_{i=1}^n (1 + d_i)v_i^+ + \sum_{i=1}^n (1 - c_i)v_i^- =: x_0 \quad (2.2)$$

kde c_i respektíve d_i sú variabilné transakčné náklady týkajúce sa predaja a nákupu rizikových aktív. Peňažnú hotovosť investujeme do bezrizikového aktíva s vopred známym výnosom $x_0(R - 1)$. Keďže rizikové aktívum možno kupovať aj predávať, aspoň jedna z premenných v_i^+ alebo v_i^- je rovná nule. Zákaz súbežného predaja a nákupu toho istého aktíva však môžeme zanedbať, pretože optimálne rozhodnutie jednoperiódového modelu spĺňa túto vlastnosť. To ale nie vždy platí pri viacperiódových modeloch.

Majetok na konci periódy, ktorý je náhodnou premennou na priestore (Ω, \mathcal{F}, P) vyjadríme rovnicou:

$$W := x'r. \quad (2.3)$$

Ďalšie bežne používané ohraničenia sú $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, aby sme vylúčili krátke pozície a $x_0 \geq 0$, aby sme zabránili požičiavaniu. Ak chceme odvodiť analytické riešenie jednoperiódového modelu musíme pripustiť požičiavanie a krátke pozície a zanedbať transakčné náklady. Potom možno sčítať rovnice (2.1) a (2.2) a dostaneme:

$$W_{ini} = x' \mathbf{1}. \quad (2.4)$$

2.2 Prístup založený na funkcii užitočnosti

Užitočnosť môžeme definovať ako mieru relatívneho uspokojenia konkrétnych potrieb. Preferencie jednotlivých investorov sa však líšia, pretože každý z nich vníma užitočnosť inak. Ak nepoznáme svoju vlastnú funkciu užitočnosti, nedokážeme optimalizovať svoje portfólio. Von Neumann a Morgenstern odvodili axiómy usporiadania preferencií, ktorými by sa mal riadiť racionálny investor. Ukázali, že zloženie preferencií možno vyjadriť pomocou funkcie užitočnosti $U(W)$, ktorá je z matematického hľadiska dvakrát diferencovateľná, rastúca a striktne konkávna funkcia.

Ako už bolo spomenuté, na začiatku periódy čelíme otázke ako rozdeliť svoje počítačné portfólio W_{ini} do n rizikových aktív a bezrizikového aktíva. Portfólio musí spĺňať rozpočtové ohraničenia a našou účelovou funkciou je maximalizovať očakávanú užitočnosť $\mathbf{E}[U(W)]$. V tomto prípade závisí funkcia užitočnosti od konečného majetku. Ak neuvažujeme transakčné náklady a ohraničenia na krátke pozície, formulácia takejto úlohy je v tvare:

$$\begin{aligned} \max_x \mathbf{E}[U(W)] & \quad (2.5) \\ \text{pri podmienkach : } \quad x'r &= W \\ & \quad x'\mathbf{1} = W_{ini}. \end{aligned}$$

Riešenie úlohy vedie k jedinému maximu.

2.2.1 Postoj k riziku a kvadratická funkcia užitočnosti

Riziko vo financiách chápeme ako premenlivosť či nestálosť výnosov našich investícií. Všeobecne platí, že čím vyššia je nestálosť investícií, tým väčšie je ich riziko. Od investícií s väčším rizikom však možno očakávať vyšší výnos. Maximálnu čiastku majetku, ktorej sa je investor ochotný vzdať, aby sa vyhol riziku nazývame prémia za riziko. Podľa postoja k riziku rozdeľujeme investorov na:

- rizikovo averzných,
- rizikovo neutrálnych,
- riziko obľubujúcich.

Postoj k riziku možno ilustrovať na nasledujúcom príklade podľa [2]. Predstavme si žreb, ktorý s pravdepodobnosťou $1/2$ vyhráva 100€ a s pravdepodobnosťou $1/2$ nevyhráva nič. Otázka znie, koľko sme ochotní za takýto žreb zaplatiť. Stredná hodnota výhry je 50€ . Rizikovo neutrálny investor je za žreb ochotný zaplatiť najviac 50€ . "Nevšíma si riziko."

Investor, ktorý riziko obľubuje je za žreb ochotný zaplatiť aj viac ako 50€ , keďže môže vyhrať až 100€ . "Riziko mu vyhovuje."

Väčšina investorov je však rizikovo averzných, t.j. za žreb nie sú ochotní zaplatiť 50€ a preferujú istotu 50€ . "Neochotný prijať primerané riziko." Platí pre nich nerovnosť $U(\mathbf{E}[W]) > \mathbf{E}[U(W)]$ vyjadrujúca konkávnosť funkcie užitočnosti.

Miera averzie k riziku sa niekedy vyjadruje cez *Arrow-Prattov absolútny koeficient averzie k riziku* definovaný ako:

$$K_{A-P}(W) = \frac{-U''(W)}{U'(W)}. \quad (2.6)$$

Čím je tento koeficient väčší, tým má investor k riziku väčšiu averziu.

Mieru averzie k riziku môžeme rovnako vyjadriť aj ako *relatívnu averziu k riziku*:

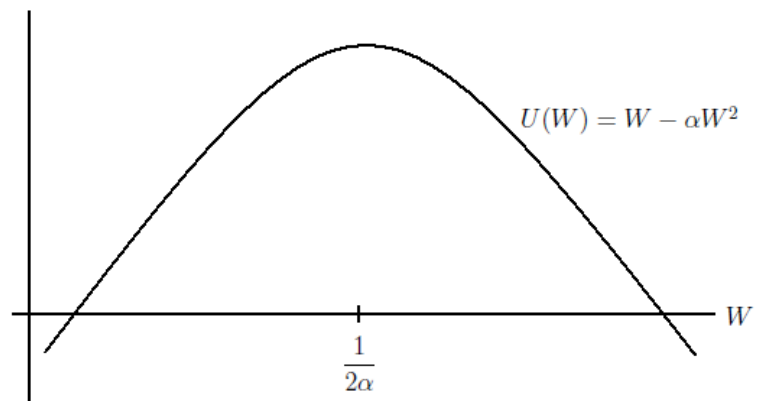
$$K_r(W) = \frac{-WU''(W)}{U'(W)}, \quad (2.7)$$

vyjadrujúcu absolútnu averziu k riziku v pomere k majetku. Konštantné relatívne riziko predpokladá, že investor má rovnakú averziu k pomernej strate majetku, aj keď sa absolútna strata zvyšuje v súlade s rastúcim majetkom. Príkladmi funkcií užitočnosti, ktoré preukazujú konštantnú relatívnu averziu k riziku sú logaritmická a mocninová funkcia užitočnosti. Obe patria do širokej triedy HARA (hyperbolic absolute risk aversion) funkcií užitočnosti. Nás bude z tejto triedy zaujímať kvadratická funkcia užitočnosti, keďže je súčasťou niektorých modelov, ktorými sa v tejto práci zaoberáme.

Výhodou *kvadratickej funkcie užitočnosti* je, že optimálne riešenie modelov, v ktorých ju uvažujeme, možno určiť len na základe prvých dvoch momentov. Jej nevýhodou je však rastúcosť len pre $W < \frac{1}{2\alpha}$. Za týmto bodom presýtenia užitočnosť

klesá aj napriek rastúcemu majetku. Preto kvadratickú funkciu užitočnosti môžeme uvažovať len do bodu presýtenia $\frac{1}{2\alpha}$. Aj napriek tomu ju možno používať pre úlohu (2.5), ak sa hodnoty s ktorými pracujeme nachádzajú dostatočne ďaleko od tohto kritického bodu. Druhou nevýhodou tejto funkcie je rastúca absolútna averzia k riziku. Pre jednoduchosť budeme funkciu uvažovať v tvare $U_t(W) = W - \alpha W^2$ a platí:

$$\mathbf{E}[U(W)] = \mathbf{E}[W] - \alpha(\text{Var}[W] + \mathbf{E}[W]^2). \quad (2.8)$$



Obr. 2.1: Kvadratická funkcia užitočnosti $U(W) = W - \alpha W^2$

2.3 Mean-variance prístup

V klasickom Markowitzovom mean-variance modeli je optimálne portfólio založené len na strednej hodnote a variancii rozdelenia výnosov. Myšlienka modelu spočíva v určení množiny *efektívnych portfólií*, t.j. vopred si stanovíme úroveň výnosov, prípadne očakávaný majetok \bar{W} . Zvolíme si portfólio s najmenším rizikom (varianciou) majetku portfólia. Ak budeme hodnotu nášho očakávaného majetku \bar{W} obmieňať, získame množinu efektívnych portfólií a nazývame ju *efektívna hranica*. Príslušná kvadratická úloha je v tvare

$$\min_x x' \Sigma x \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \text{pri podmienkach : } \quad x' \bar{r} &= \bar{W}, \\ x' \mathbf{1} &= W_{ini}. \end{aligned}$$

Ohraničenia úlohy slúžia na to, aby sme dosiahli očakávaný majetok, a aby sa súčet jednotlivých zložiek portfólia rovnal počiatočnému majetku. Úloha (2.9) má jediné riešenie vďaka kladnej definitnosti kovariačnej matice Σ . Z praktických dôvodov je potrebné do úlohy začleniť ďalšie ohraničenie, aby sme sa vyhli krátkym pozíciám a transakčné náklady.

K modelovaniu variancie využíva účelová funkcia (2.9) iba rizikové aktíva. Účelovú funkciu však vieme previesť na konvexný kvadratický tvar, ktorý závisí od x a má jediné riešenie a to nahradením účelovej funkcie vzťahom:

$$x'\Sigma x = x' \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix} + \bar{r}\bar{r}' \right) x - x'\bar{r}\bar{r}'x = x'Qx - \bar{W}^2. \quad (2.10)$$

2.3.1 Odvodenie mean-variance prístupu pomocou teórie užitočnosti

Uvažujme úlohu (2.5). Predpokladajme, že očakávaná užitočnosť môže byť vyjadrená v tvare závislom len na prvých dvoch momentoch konečného majetku a účelovú funkciu máme v tvare:

$$\mathbf{E}[U(W)] = \mathbf{E}[W] - \alpha(\mathbf{E}[W]^2 + Var[W]). \quad (2.11)$$

Ak ju vynásobíme $-\alpha$, vezmeme $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix} + \bar{r}\bar{r}'$ a úlohu minimalizujeme dostávame príslušný lagrangián v tvare:

$$L = x'Qx - \frac{1}{\alpha}x'\bar{r} - \lambda(x'\mathbf{1} - W_{ini}). \quad (2.12)$$

Malou úpravou preformulujeme lagrangián mean-variance úlohy (2.9) na formu:

$$L = x'Qx - \gamma x'\bar{r} - \lambda(x'\mathbf{1} - W_{ini}) + \gamma\bar{W} - \bar{W}^2. \quad (2.13)$$

Derivovaním vyššie uvedených Lagrangeových podmienok dostávame podmienky prvého rádu jednotlivých úloh. Parciálne derivácie podľa premenných x a λ sú až na malú výnimku ($\frac{1}{\alpha}$ nahrádza γ) zhodné v obidvoch úlohách. Mean-variance model má ešte navyše deriváciu podľa γ .

Riešením mean-variance modelu pre vopred určené \bar{W} dostávame optimálne portfólio s príslušným lagrangiánovým multiplikátorom γ . Ak v účelovej funkcii (2.11) zvolíme $\alpha = \frac{1}{\gamma}$ dostaneme rovnaké podmienky optimality ako v mean-variance modeli z tohto dôvodu aj identické optimálne portfólio [1].

Funkcia užitočnosti daná vzťahom (2.11) je odvodená na základe nasledovných predpokladov. Predpokladáme, že funkcia U je nekonečne diferencovateľná, a že existujú všetky momenty W . Funkciu môžeme rozvinúť pomocou Taylorovho radu pre hodnotu očakávaného konečného majetku:

$$U(W) = U(\mathbf{E}[W]) + U'(\mathbf{E})(W - \mathbf{E}[W]) + \frac{1}{2}U''(\mathbf{E}[W])(W - \mathbf{E}[W])^2 + \mathcal{R} \quad (2.14)$$

kde

$$\mathcal{R} = \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i!} U^{(i)}(\mathbf{E}[W])(W - \mathbf{E}[W])^i \quad (2.15)$$

sú členy vyššieho ako druhého rádu. Pre strednú hodnotu funkcie užitočnosti platí:

$$\mathbf{E}[U(W)] = U(\mathbf{E}[W]) + \frac{1}{2}U''(\mathbf{E}[W])\mathbf{E}[W - \mathbf{E}[W]]^2 + \mathbf{E}[\mathcal{R}]. \quad (2.16)$$

Očakávaná užitočnosť ale nie je určená len varianciou a strednou hodnotou pre ľubovoľné pravdepodobnostné rozdelenia výnosov. Je to kvôli zvyšku, ktorý má na svedomí vyššie momenty.

Ak teda uvažujeme kvadratickú funkciu užitočnosti alebo viacrozmerné normálne rozdelenie výnosov môžeme odvodiť mean-variance princíp na základe teórie užitočnosti. Ak pre vzťah (2.16) platí $\mathbf{E}[\mathcal{R}] = 0$, je vo všeobecnosti dobrou aproximáciou očakávanej užitočnosti.

Pri kvadratickej funkcii užitočnosti $U(W) = W - \alpha W^2$ sú všetky derivácie U vyššie ako druhého rádu rovné 0. Zámenou funkcie užitočnosti v rovnici (2.16) dostaneme podmienku (2.11) s rovnakými vlastnosťami ako má lagrangián úlohy (2.5).

2.3.2 Kritický pohľad

Mean-variance model je platný ak sú výnosy aktív z normálneho rozdelenia, alebo ak pre model uvažujeme kvadratickú funkciu užitočnosti. Každý investor uprednostňuje portfólio s minimálnou volatilitou pre daný očakávaný výnos. Tieto predpoklady sa však zdajú byť pochybné. Predpoklad normality výnosov aktív obmedzuje aktíva na akcie, ktoré vlastnime dlhý čas. Pre nástroje citlivé na zmeny úrokovej miery, alebo stále viac používané opcie nie je stanovený predpoklad normality. Ukázalo sa, že tieto nástroje majú asymetrické rozdelenie. Pre nesúlads von Neumann a Morgensternovými axiómami je predpoklad kvadratickej užitočnosti zvyčajne zamietnutý. Ďalším sporným bodom je samotná účelová funkcia. Používanie variancie ako miery rizika nezohľadňuje hornú odchýlku od strednej hodnoty a prikladá rovnakú váhu aj

dolnej odchýlke. Isto sa snažíme vyvarovať malým alebo záporným výnosom, avšak vyššie horné odchýlky znamenajú aj vyššie výnosy. Chápanie rizika investorom preto nie je symetricky rozdelené okolo strednej hodnoty.

Kritka účelových funkcií mean-variance modelu viedla preto k vzniku iných post-moderných účelových funkcií založených na riziku. Ide o tzv. mean-risk efektívne portfólia s alternatívnou efektívnou hranicou. Patrí sem napríklad bezpečné prvé pravidlo (safety first rule), alebo účelová funkcia v tvare strednej hodnoty absolútnej odchýlky (mean absolute deviation) $\mathbf{E}[|W - \mathbf{E}[W]|] = \mathbf{E}[|(r - \bar{r})x|]$. Safety first rule úplne zanedbáva horné štandardné odchýlky a do úvahy berie len dolnú časť, čiže iba dolné parciálne momenty [1].

Kapitola 3

Viacperiódové modely

Pri modelovaní vývoja portfólia sú vo všeobecnosti viacperiódové modely oveľa lepšou aproximáciou skutočnosti ako modely s jedinou periódou. Pri viacperiódových modeloch je plánovací horizont rozdelený na T periód rôznej alebo rovnakej dĺžky. Keďže sa portfólio x s časom mení, budeme ho označovať indexom t , $t = 0, \dots, T - 1$ pre jednotlivé prisluchajúce periód. Na konci každej periód sa portfólio zhodnotí. Zhodnotenú investíciu sme opäť investovať. Na základe nových dostupných informácií môžeme naše portfólio na začiatku nasledujúcej periód usporiadať nanovo. Rebalansovanie je však spojené s transakčnými nákladmi za nákup a predaj aktív. Celý priebeh optimalizácie berie ohľad na dosiahnutie vopred stanoveného cieľa, teda nadobudnutia majetku, ktorý očakávame na konci plánovacieho horizontu. Kapitola bude vychádzať z [1].

3.1 Predpoklady pravdepodobnostného rozdelenia

Ak chceme popísať vlastnosti pravdepodobnostného rozdelenia výnosov viacperiódového modelu, potrebujeme zdefinovať pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{F}, P) nad plánovacím horizontom, kde Ω je daná množina všetkých možných výsledkov alebo množina elementárnych udalostí, \mathcal{F} je σ -algebra merateľných množín, t.j. systém všetkých udalostí na Ω a P je pravdepodobnostná miera na Ω .

Ak označíme Ω_t zobrazenie Ω v ktoromkoľvek čase t , potom $\Omega = \prod_{t=1}^T \Omega_t$. Výnosy v priebehu plánovacieho horizontu $(r_{t-1})_{t=1, \dots, T}$ sú určené stochastickým procesom, ktorý je definovaný na priestore $(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{B}(\mathbb{R}^{(n+1)}))$. Stochastický proces je súbor náhodných premenných $r = \{r_t, t = 1, \dots, T - 1\}$, kde pre každé t je

$\omega \rightarrow r_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$ náhodná premenná. Ak náhodná premenná r_t je totálny výnos periódy medzi časmi t a $t+1$, potom platí pre totálny výnos počas celého plánovacieho horizontu vzťah $r := \prod_{t=0}^{T-1} r_t$.

Nech systém udalostí v konkrétnom čase t $(\mathcal{F}_t)_{t=1,\dots,T}$ je kanonická filtrácia vytvorená procesom $(r_{t-1})_{t=1,\dots,T}$. Filtrácia $\mathcal{F} = \sigma(r_s, s < t)$ je rastúca postupnosť podmnožín σ -algebrií na merateľnom priestore $\mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}$ a $\sigma(\cdot)$ určuje najmenšiu možnú σ -algebru, ktorá obsahuje uvažovanú množinu. V čase t poznáme len výnos bezrizikového aktíva $r_{t,0} = R_t$, ktorý je \mathcal{F}_t -merateľný. Výnosy rizikového aktíva $r_{t,i}$, $i = 1, \dots, n$ nastávajúcej periódy však nepoznáme, pretože ich hodnoty sú nám známe až na začiatku novej periódy v čase $t+1$. Výnosy rizikového aktíva sú z tohto dôvodu iba \mathcal{F}_{t+1} -merateľné a ich rozdelenie je určené pomocou P .

Ak chceme vyjadriť závislosť výnosov r_t v každom čase od výsledkov množiny Ω priamo, nepotrebuje uvažovať budúce množiny začínajúc Ω_{t+2} . Preto $r_t = r_t(\omega^{t+1})$ kde $\omega^{t+1} = (\omega_1, \dots, \omega_{t+1}) \in (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_{t+1})$. Výnosy rizikových aktív takto závisia na nedávnom výsledku ω_{t+1} . Výnosy všetkých aktív závisia tiež od náhodných výsledkov predchádzajúcich periód $\omega_1 \in \Omega_1, \dots, \omega_t \in \Omega_t$ a navyše sú výnosy rizikových aktív aj navzájom závislé.

3.2 Vývoj majetku

Dôležitou súčasťou optimalizačných modelov portfólia sú ich rozpočtové ohraničenia. Rozpočtové ohraničenia riadia vývoj nášho majetku medzi jednotlivými periódami prostredníctvom našich rozhodnutí a pomocou výnosov, ktoré nám prináša vlastníctvo aktív. Teoretické poznatky tejto časti vychádzajú z [4] a [1].

Pre prvú periódu viacperiódového modelu platí rovnaké rozpočtové ohraničenie ako pri jednoperiódovom modeli. Do portfólia vstupujeme s počiatočným portfóliom $x_{ini} \in \mathbb{R}^{n+1}$ zloženým z n rizikových aktív a peňažného ekvivalentu. Nákupom $v_{0,i}^+$ alebo predajom $v_{0,i}^-$ aktív prerozdélime počiatočné portfólio. Preto:

$$x_{ini,i} + v_{0,i}^+ - v_{0,i}^- =: x_{0,i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Pre vývoj peňazí, ktoré sú tiež súčasťou preskupení dostávame vzťah:

$$x_{ini,0} - \sum_{i=1}^n (1 + d_i) v_{0,i}^+ + \sum_{i=1}^n (1 - c_i) v_{0,i}^- =: x_{0,0}. \quad (3.2)$$

Od počiatočných peňazí musíme odpočítať transakčné náklady a peniaze, ktoré sme minuli na nákup nových aktív a pripočítať peniaze, ktoré sme zase získali predajom iných aktív.

Na začiatku druhej periódy nám aktíva prinesú výnos. Majetok investovaný v jednotlivých aktívach sa preto zmení $x_{0,i}r_{0,i}$, $i = 0, \dots, n$ a stáva sa počiatočným portfóliom druhej periódy. Potom opäť predáme a nakúpime aktíva t.j. portfólio vhodne rebalansujeme. Takto to prebieha až do predposlednej periódy $T - 1$ a daný proces možno popísať rovnicami:

$$x_{t-1,i}r_{t-1,i} + v_{t,i}^+ - v_{t,i}^- =: x_{t,i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

$$x_{t-1,0}r_{t-1,0} - \sum_{i=1}^n (1 + d_i)v_{t,i}^+ + \sum_{i=1}^n (1 - c_i)v_{t,i}^- =: x_{t,0}. \quad (3.4)$$

pre $t = 1, \dots, T - 1$. Majetok v čase t pred prerozdelením portfólia určuje vzťah $W_t := x'_{t-1}r_{t-1}$. Po preskupení aktív je v čase t celková hodnota majetku $x'1$. Na konci plánovacieho horizontu dostávame majetok $x'_{T-1}r_{T-1}$ s ktorým už v čase T nerobíme nič. V predchádzajúcich rovnicach (3.3) a (3.4) sú dopredu známe len hodnoty transakčných nákladov c a d . Výnosy sú určené stochastickým procesom a poznáme len ich pravdepodobnostné rozdelenie.

3.3 Všeobecná definícia viacperiódového modelu

V tejto podkapitole spracovanej podľa [1] sformulujeme všeobecný viacperiódový model optimalizácie portfólia. Určíme si účelovú funkciu a k danej úlohe pridáme prislúchajúce ohraničenia, ktoré sme si zostavili v predchádzajúcej časti. Označme $y_t = (x'_t, v_t^+, v_t^-)'$ ako vektor všetkých premenných a nech $f_t(y_t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sú \mathcal{F}_t -merateľné náhodné premenné pre všetky y_t a pre všetky $t = 0, \dots, T - 1$. Okrem toho nech $g(y_{T-1}, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je náhodná premenná. Všeobecnú formuláciu úlohy môžeme teraz napísať v stochastickom tvare:

$$\min_{(y_t)_{t=0, \dots, T-1}} \mathbf{E} \left[f_0(y_0) + \sum_{t=1}^{T-1} f_t(y_t, \omega) + g(y_{T-1}, \omega) \right] \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
\text{pri podmienkach : } \quad x_{ini,0} - \sum_{i=1}^n (1 + d_i)v_{0,i}^+ + \sum_{i=1}^n (1 - c_i)v_{0,i}^- &= x_{0,0} \\
& x_{ini,0} + v_{0,i}^+ - v_{0,i}^- = x_{0,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
x_{t-1,0}r_{t-1,0} - \sum_{i=1}^n (1 + d_i)v_{t,i}^+ + \sum_{i=1}^n (1 - c_i)v_{t,i}^- &= x_{t,0} \\
& \forall t = 1, \dots, T - 1 \\
& x_{t-1,i}r_{t-1,i} + v_{t,i}^+ - v_{t,i}^- = x_{t,i}, \quad i = 1, \dots, n \\
& \forall t = 1, \dots, T - 1 \\
& y_t \geq 0 \text{ je } \mathcal{F}_t\text{-merateľné}
\end{aligned}$$

s funkciami f_t a konečnými výsledkami g .

Strednú hodnotu podmienenú časom t vzhľadom k filtrácii vytvorenej procesom $(r_{t-1})_{t=1,\dots,T}$ označíme $\mathbf{E}_t(\cdot) = \mathbf{E}(\cdot|\mathcal{F}_t)$. Na základe podmienených očakávaní môžeme teraz funkcie f_t a g zlíčiť pomocou vnorenia. Účelovú funkciu v úlohe (3.5) prepíšeme takto do tvaru:

$$\begin{aligned}
& \min_{(y_t)_{t=0,\dots,T-1}} f_0(y_0) + \mathbf{E} \left[f_1(y_1, \omega) + \mathbf{E}_1 [f_2(y_2, \omega) + \dots \right. \\
& \left. \dots + \mathbf{E}_{T-2} [f_T - 1(y_T - 1, \omega) + \mathbf{E}_{T-1} [g(y_T - 1, \omega)]] \dots \right]. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Pokiaľ máme účelovú funkciu v tomto tvare, vieme na jej riešenie použiť Bellmanov princíp optimality. Bellmanov princíp optimality hovorí o tom, že optimálna postupnosť rozhodnutí pri úlohe s viackrokovým rozhodovacím procesom má vlastnosť, že bez ohľadu na východiskový stav a rozhodnutia, musia byť zostávajúce rozhodnutia optimálne s ohľadom na stav vyplývajúci z prvých rozhodnutí [15]. Znamená to, že môžeme minimalizovať posledné dva členy vzhľadom na y_{T-1} a príslušné ohraničenia, potom posledné tri členy atď.

Ak za $-g$ dosadíme funkciu v tvare funkcie užitočnosti konečného majetku $U(W_T)$, potom podľa (3.5) dostanem úlohu, v ktorej hľadáme maximum očakávanej užitočnosti cez všetky periódny T . V prípade ak za f_{T-1} dosadíme $Var[r'_{T-1}x_{T-1}]$, t.j. použijeme mean-variance model, úlohou bude nájsť minimálnu varianciu a navyše bude potrebné pridať ohraničenie na očakávaný konečný majetok:

$$\mathbf{E}[x'_{T-1}r_{T-1}] = \bar{W}_T. \quad (3.7)$$

3.4 Mean-variance model

V tejto časti rozoberieme mean-variance prístup pre viaceperiódový model úlohy v tvare (3.5). Účelovou funkciou je nájsť minimálnu varianciu konečného majetku:

$$\min Var[x'_{T-1}r_{T-1}] \quad (3.8)$$

Strednú hodnotu a varianciu konečného majetku ako funkcií závislých len od očakávaného výnosu \bar{r}_{T-1} a kovariančnej matice Σ_{T-1} poslednej periódy, konečného rozhodnutia x_{T-1} a množiny udalostí \mathcal{F}_{T-1} odvodíme nasledovne:

$$\mathbf{E}[x'_{T-1}r_{T-1}] = \mathbf{E} = [x'_{T-1}\mathbf{E}[r_{T-1}|\mathcal{F}_{T-1}]] = \mathbf{E}[x'_{T-1}\bar{r}_{T-1}], \quad (3.9)$$

ktorá sa rovná \bar{W}_T a

$$\begin{aligned} Var[x'_{T-1}r_{T-1}] &= \mathbf{E}[(x'_{T-1}r_{T-1})^2 - (\mathbf{E}[x'_{T-1}r_{T-1}])^2] \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[(x'_{T-1}r_{T-1})^2|\mathcal{F}_{T-1}]] - (\mathbf{E}[\mathbf{E}[x'_{T-1}r_{T-1}|\mathcal{F}_{T-1}]])^2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

keďže $\mathbf{E}[\cdot] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[\cdot|\mathcal{F}_{T-1}]]$. Navyše vzhľadom k udalosti v čase $T - 1$ dostávame podmienenú varianciu:

$$Var[x'_{T-1}r_{T-1}] = \mathbf{E}[(x'_{T-1}r_{T-1})^2|\mathcal{F}_{T-1}] - (\mathbf{E}[(x'_{T-1}r_{T-1})|\mathcal{F}_{T-1}])^2 \quad (3.11)$$

a podmienenú strednú hodnotu

$$\mathbf{E}[(x'_{T-1}r_{T-1})|\mathcal{F}_{T-1}] = x'_{T-1}\mathbf{E}[r_{T-1}|\mathcal{F}_{T-1}] = x'_{T-1}\bar{r}_{T-1}. \quad (3.12)$$

Menšou úpravou rovnice (3.12) dostávame

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(x'_{T-1}r_{T-1})^2|\mathcal{F}_{T-1}] &= Var[x'_{T-1}r_{T-1}] + (\mathbf{E}[(x'_{T-1}r_{T-1})|\mathcal{F}_{T-1}])^2 \\ &= x'_{T-1}(\Sigma_{T-1} + \bar{r}_{T-1}\bar{r}'_{T-1})x_{T-1}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

kde \bar{r}_{T-1} je podmienená stredná hodnota a Σ_{T-1} podmienená kovariančná matica poslednej periódy. Takto dostaneme varianciu poslednej periódy v tvare:

$$\mathbf{Var}[x'_{T-1}r_{T-1}] = \mathbf{E} [x'_{T-1} (\Sigma_{T-1} + \bar{r}_{T-1}\bar{r}'_{T-1}) x_{T-1}] - (\mathbf{E} [x'_{T-1}\bar{r}_{T-1}])^2, \quad (3.14)$$

s konštantným členom $(\mathbf{E} [x'_{T-1}\bar{r}_{T-1}])^2 = \bar{W}_T$, ktorý pri derivácii zaniká a možno ho pri optimalizácii kľudne vynechať. Z tohto dôvodu pokiaľ ide o úlohu (3.5), si postačuje určiť iba účelovú funkciu vzťahujúcu sa na poslednú periódu:

$$f_{T-1}(y_{T-1,\omega}) = x'_{T-1}(\Sigma_{T-1}(\omega) + \bar{r}_{T-1}(\omega)\bar{r}'_{T-1}(\omega))x_{T-1}. \quad (3.15)$$

Člen $f_0(y_0) = -\bar{W}_T^2$, aby zodpovedal konštantnému členu v (3.14) a všetky ostatné funkcie položíme rovné nule.

3.4.1 Zhodnosť mean-variance prístupu s teóriou užitočnosti

Podmienku (2.11) pre jednoperiódový model môžeme teraz prepísať do tvaru pre viacperiódový model vzhľadom na konečný majetok, ktorá spĺňa podmienky kvadratickej funkcie užitočnosti:

$$\mathbf{E}[U(W_T)] = \mathbf{E}[W_T] - \alpha(\mathbf{E}[W_T]^2 + \mathbf{Var}[W_T]). \quad (3.16)$$

Označme $h(w, r)$ ako vektorovú funkciu pozostávajúcu zo všetkých ohraničení úlohy (3.6). Lagrangián pre viacperiódový mean-variance model je v tvare:

$$L = \mathbf{E} \left[x'_{T-1} (\Sigma_{T-1} + \bar{r}_{T-1} \bar{r}'_{T-1}) x_{T-1} \right] - \lambda' h(w, r) + \gamma \bar{W}_T + \bar{W}_T^2. \quad (3.17)$$

Aby sme preskúmali podmienky kvadratickej funkcie užitočnosti, účelovú funkciu prepíšeme pomocou rovnakých úprav ako pri jednoperiódovom modeli v podkapitole (3.8) zaoberajúcej sa odvodením mean-variance prístupu na základe teórie užitočnosti. Lagrangián k tejto úlohe je daný ako:

$$L = \mathbf{E} \left[x'_{T-1} (\Sigma_{T-1} + \bar{r}_{T-1} \bar{r}'_{T-1}) x_{T-1} - \frac{1}{\alpha} x'_{T-1} \bar{r}'_{T-1} \right] - \lambda' h(w, r). \quad (3.18)$$

Derivovaním vyššie uvedených Lagrangeových podmienok opäť ako v prípade jednoperiódového modelu dostávame podmienky prvého rádu jednotlivých úloh. Parciálne derivácie podľa premenných x a λ sú až na malú výnimku ($\frac{1}{\alpha}$ nahrádza γ) opätovne zhodné v oboch úlohách. Mean-variance model má ešte navyše deriváciu podľa γ .

Riešením viacperiódového mean-variance modelu pre vopred určené \bar{W}_T dostávame optimálne portfólio s príslušným lagrangiánovým multiplikátorom γ prislúchajúcim k ohraničeniu (3.5). Ak aj tu v kvadratickej účelovej funkcii konečného majetku zvolíme $\alpha = \frac{1}{\gamma}$ dostaneme rovnaké podmienky optimality ako v mean-variance modeli a z tohto dôvodu aj identické optimálne portfólio.

Za zmienku stojí upozorniť na jeden menší nedostatok modelu. Ak v kvadratickej účelovej funkcii položíme parameter $\alpha = \frac{1}{\gamma}$, čo zodpovedá celkovému očakávanému majetku \bar{W}_T , funkcia užitočnosti má rovnaký tvar ako funkcia na obr. (2.1) s maximálnou hodnotou v $W_T = \frac{1}{2\alpha}$.

Predpokladajme, že $T = 2$, a že výnosy majú pravdepodobnostné rozdelenie s hodnotami na množine \mathbb{R}^+ . Potom na začiatku prvej periódy s kladnou pravdepodobnosťou platí $W_1 > \frac{1}{2\alpha}$. Ak zoberieme hodnotu s touto vlastnosťou, aj napriek tomu, že investujeme do aktíva s najnižším očakávaným výnosom, t.j. do bezrizikového aktíva, náš majetok sa neustále zväčšuje, hoci sa už nachádzame na klesajúcej časti funkcie

užitočnosti. Keby sa nám podarilo zmenšiť hodnotu majetku, užitočnosť a tým pádom aj hodnota účelovej funkcie by vzrástli. Lineárne ohraničenia úlohy však nezakazujú súčasný nákup aj predaj aktív spojený s transakčnými nákladmi, ktoré znižujú hodnotu majetku. Preto ak majetok na začiatku poslednej periódy presahuje $\frac{1}{2\alpha R} = \frac{\gamma}{2R}$, všetok ho investujeme do rizikového aktíva, ktoré zvyšuje varianciu. Účelová funkcia sa takýmto nevhodným spôsobom zbavuje peňazí a snaží sa zlepšovať účelovú funkciu, čo vedie i k nižšej variancii pre daný očakávaný konečný majetok \bar{W}_T [1].

Kapitola 4

Optimalizácia portfólia pomocou stochastického programovania

Rozšírené jednoperiódové modely pretransformované do viacperiódového prostredia (3.5) môžeme riešiť pomocou dynamického programovania. Ak však chceme k modelu pridať ďalšie ohraničenia, napr. ohraničenie (3.7) na vopred stanovený očakávaný výnos, nemusí to byť jednoduchá záležitosť. Veľa úloh typu (3.5) preto riešime s účelovou funkciou v tvare maximalizácie očakávanej užitočnosti. Ďalší veľký problém spočíva vo výpočte optimálneho riešenia Bellmanovej rovnice.

Stochastické programovanie predstavuje efektívny nástroj na riešenie problému rozhodovania v podmienkach neistoty. Používa sa na modelovanie rôznych aplikácií, ktorých vstupné údaje nepoznáme s určitosťou. Ak majú vstupné údaje diskkrétne rozdelenie, používame na ich zastúpenie strom pravdepodobných scenárov [14]. V tejto práci sa budeme sústrediť na scenáre, ktoré reprezentujú vývoj výnosov. V scenároch môžu byť výnosy z akéhokoľvek rozdelenia. Týmto spôsobom môžeme svoju optimalizáciu založiť na realistických predpokladoch správania sa výnosu. Nevýhodou tejto metódy je predpoklad konečnej množiny scenárov, zatiaľ čo viacmenej predpokladáme alebo pozorujeme spojité pravdepodobnostné rozdelenia.

V práci sa budeme zaoberať len viacúrovňovým stochastickým programovaním, ktoré je prispôbené výberu portfólia na základe formulácie úlohy (3.5) s konečným počtom scenárov. Modely založené na dynamickom výbere portfólia môžu byť priamo prepísané do tvaru viacúrovňovej stochastickej úlohy opierajúcej sa o scenáre, ak je pravdepodobnostný priestor diskrétny [1].

4.1 Strom scenárov

Aj pri stochastickej optimalizácii budeme naďalej uvažovať vlastnosti pravdepodobnostného rozdelenia výnosov pri viacperiódových modeloch, ktoré sme si popísali v časti (3.1). Nech Ω je diskretná množina možných výsledkov, ktorá sa zobrazuje na opäť diskretné množiny Ω_t v každom čase t . Náhodné vlastnosti potom vieme vyjadriť pomocou stromu scenárov alebo udalostí.

Označme $\Pi_t : \Omega \rightarrow (\Omega_1, \dots, \Omega_t)$ zobrazenie Ω na stochastický vývoj do času t . Nech

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &:= \{\omega_1 \in \Omega_1 | \Pi_1(\omega) = \omega_1 \text{ kde } \{\omega\} \in \mathcal{F}_T, P(\omega) > 0\} \\ \mathcal{A}_t(\omega^{t-1}) &:= \{\omega_t \in \Omega_t | \Pi_t(\omega) = (\omega_t, \omega^{t-1}) \text{ kde } \{\omega\} \in \mathcal{F}_T, P(\omega) > 0\}\end{aligned}$$

označujú množinu konečného počtu výsledkov ω_t podmienenú jej históriou $\omega^{t-1} = (\omega_1, \dots, \omega_{t-1})$. $\mathcal{A}_t(\omega^{t-1})$ chápeme ako množinu nástupcov (detí) ω^{t-1} , ktoré sú na striedačku predchodcami (rodičmi) prvkov z $\mathcal{A}_t(\omega^{t-1})$. Rodiča prvkov z množiny \mathcal{A}_1 nazývame koreň stromu scenárov. Všetky prvky z $\mathcal{A}_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, T$ nazývame uzly stromu, ktoré sú pospájané vetvami s ich predchodcom. Prvky z množiny $\mathcal{A}_T(\cdot)$ zvykneme nazývať listy stromu. Pravdepodobnosti pridelné zobrazeniam označíme:

$$P(\omega^t) := P(\{\omega | \Pi_t(\omega) = \omega^t, \{\omega\} \in \mathcal{F}_T\})$$

a podmienené pravdepodobnosti prvkov $\mathcal{A}_t(\cdot)$ ako:

$$P(\omega_t | \omega^{t-1}) := \frac{P((\omega_t, \omega^{t-1}))}{P(\omega^{t-1})},$$

ktoré sú pridelené vetvám spájajúcim uzly ω_t s ich rodičmi. Strom scenárov zdefinujeme ako množinu:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= \{\omega \in \Omega | \{\omega\} \in \mathcal{F}_T \text{ kde } P(\omega_T > 0)\} \\ &= \{\omega^T \in (\Omega_1 \times \dots \times \Omega_T) | \omega^T \in \mathcal{A}(\omega^{t-1}) \forall t > 1\}.\end{aligned}$$

Prvky tejto množiny nazývame scenáre s pravdepodobnosťou $P(\omega^T)$ kde $\omega^T \in \mathcal{A}$. Zobrazenie \mathcal{A} na plánovací horizont $(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_T)$ je definované $\Pi_t(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^t$ [1].

4.2 Formulácia úlohy v deterministickom tvare

Podľa kapitoly 3. je zrejmé, že i deterministickú formuláciu stochastickej úlohy v tvare (3.5) vieme previesť na tvar úlohy dynamického programovania (3.6). Aby sme mohli

vyjadriť stochastický vývoj pomocou scenárov, zdefinujeme si matice E a $G_{t-1}(\omega^t)$ pre čas $t = 1, \dots, T - 1$:

$$E = \left(-I \left| \begin{array}{c|c} -\mathbf{1}' - d\mathbf{1}' & \mathbf{1}' - c\mathbf{1}' \\ \hline I & -I \end{array} \right. \right) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (3n+1)} \quad (4.1)$$

$$G_{t-1}(\omega^t) = \left(\text{diag}(r_{t-1}(\omega^t)) \left| \begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right. \right) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (3n+1)} \quad (4.2)$$

Vektor premenných $y_t(\omega^t) = (x'_t(\omega^t), v'_t^+(\omega^t), v'_t^-(\omega^t))'$ zastupuje všetky naše rozhodnutia a výnosy vo vzťahu k času budeme označovať $r_{t-1}(\omega^t)$. Prvú úroveň úlohy vyjadříme:

$$\begin{aligned} \min_{y_0} f_0(y_0) + \Phi_1(y_0) & \quad (4.3) \\ \text{pri podmienkach : } E y_0 & = x_{ini} \\ y_0 & \geq 0. \end{aligned}$$

Funkciou $\Phi_1(y_0)$ sú vyjadrené všetky budúce náhodné výsledky ďalších rozhodnutí a pravdepodobnostné vlastnosti rozhodnutí prvej periódy. Pre časy $t = 1, \dots, T - 1$ pomocou:

$$\Phi_t(y_{t-1}, \omega^{t-1}) = \sum_{\omega_t \in \mathcal{A}_t(\omega^{t-1})} \phi_t(y_{t-1}, \omega^t) P(\omega_t | \omega^{t-1}) \quad (4.4)$$

definujeme podmienené očakávania budúcich rozhodnutí začínajúc periódou $t + 1$ pre dané ω^{t-1} :

$$\begin{aligned} \phi(y_{t-1}, \omega^t) & = \min_{y_t(\omega^t)} f_t(y_t(\omega^t), \omega^t) + \Phi_{t+1}(y_t(\omega^t), \omega^t) & (4.5) \\ \text{pri podmienkach : } G_{t-1}(\omega^t) y_{t-1} + E y_t(\omega^t) & = 0 \\ y_t(\omega^t) & \geq 0. \end{aligned}$$

Koncovú podmienka je daná vzťahom $\phi_T(y_{T-1}, \omega^T) = g(y_{T-1}, \omega^T)$.

Matica prechodu G_{t-1} v rozpočtových ohraničeniach má na diagonále $n + 1$ prvých stĺpcov neisté výnosy a určuje portfólio $G_{t-1}(\omega^t)x_{t-1}(\omega^{t-1})$. Toto zhmotnené portfólio vlastnime na začiatku periódy t a pred novou investíciou ho ešte vhodne preskupíme. Preskupenie má za úlohu matice E , ktorá má na svojich $n + 1$ stĺpcoch zápornú jednotkovú maticu. Ďalších $2n$ stĺpcov sa týka nákup a predaja aktív. Riadky 2 až n prislúchajú rizikovým aktívam, preto kladná jednotková matice zastupuje nákup aktív a záporná jednotková matice zase ich predaj. Prvý riadok matice E dáva do súčtu nákup a predaj aktív a odčítuje transakčné náklady. Neisté výnosy $r_{T-1}(\omega^T)$

konečnej periódy sa v rozpočtových ohraničeniach nevyskytujú, sú však začlenené v koncovej podmienke pre konečný majetok.

Počet prvkov množiny \mathcal{A}^t (množina pravdepodobných realizácií do času t) označíme $|\mathcal{A}^t| = S_t$. Pravdepodobnosť i -tej udalosti $\omega_{t,i}$ je daná pravdepodobnostnou mierou P a označíme ju $p_{t,i}$. Jednotlivé závislosti v strome scenárov označíme pomocou $a_t(i)$, ktoré určuje v perióde t rodič uzla $i = 1, \dots, S_t$. Rozpočtové ohraničenia úlohy (3.1-3.4) vieme teraz prepísať do tvaru nasledujúcich lineárnych rovníc:

$$\begin{array}{rcl}
 Ey_0 & & = x_{ini} \\
 G_{0,1}y_0 + Ey_{1,1} & & = 0 \\
 \vdots & & \vdots \\
 G_{0,S_1}y_0 + Ey_{1,S_1} & & = 0 \\
 G_{1,1}y_{1,a_2(1)} + Ey_{2,1} & & = 0 \\
 & \ddots & \vdots \\
 & & G_{1,S_2}y_{1,a_2(S_2)} + Ey_{T-1,1} = 0 \\
 & & \vdots \\
 & & G_{T-2,1}y_{T-2,a_{T-1}(S_{T-1})} + Ey_{T-1,S_{T-1}} = 0 \\
 y_0 \geq 0, y_{t,i} \geq 0 \forall i = 1, \dots, S_t, t = 1, \dots, T-1, & &
 \end{array} \quad (4.6)$$

kde $y_{t,i} = (x'_{t,i}, v'_{t,i}, v'_{t,i})'$ je vektor rozhodnutí pre všetky scenáre v čase $t = 1, \dots, T-1$. Lineárne ohraničenia často píšeme vo forme matíc s typickou veľmi riedkou blokovou štruktúrou.

Okrem matice G , podliehajú neistote aj účelové funkcie, ktoré vieme vyjadriť v diskretnom tvare:

$$\begin{aligned}
 \min f_0(y_0) + \sum_{i=1}^{S_1} f_{t,i}(y_{t,i})p_{1,i} + \dots \\
 \dots + \sum_{i=1}^{S_{T-1}} f_{T-1,i}(y_{T-1,i})p_{T-1,i} + \sum_{i=1}^{S_T} g_i(y_{T-1,a_T(i)})p_{T,i}, \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

s funkciami $f_{t,i}$ a g_i , ktoré závisia od času a scenárov. Obidve funkcie môžu byť v zásade akéhokoľvek typu, avšak z dôvodu numerickej riešiteľnosti by mali byť lineárne, po častiach lineárne, kvadratické alebo aspoň konvexné.

V nasledujúcej kapitole sa budeme zaoberať dvomi modelmi optimalizácie portfólia a to modelom s účelovou funkciou v tvare kvadratickej funkcie užitočnosti a mean-variance modelom.

Pri kvadratickej funkcii užitočnosti v účelovej funkcii (4.7) sú jednotlivé členy nastavené nasledovne:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_{t,i} &= 0 && i = 1, \dots, S_t, t = 1, \dots, T-1 \\ g_i &= x'_{T-1, a_T(i)} - \alpha \left(x'_{T-1, a_T(i)} r_{T-1, i} \right)^2 && i = 1, \dots, S_T, \end{aligned}$$

Nech $\bar{r}_{T-1, i}$ a $\Sigma_{T-1, i}$ sú očakávaný výnos a kovariančná matica výnosu r_{T-1} podmienené rodičovským uzlom $i \in S_{T-1}$. Ak zoberieme všetky podmienené očakávania poslednej periódy, očakávanie $g(i)$ vieme prepísať na jednoduchší tvar:

$$\sum_{i=1}^{S_T} (g(i)) = \sum_{i=1}^{S_T} \left(x'_{T-1, i} \bar{r}_{T-1, i} - \alpha x'_{T-1, i} \left(\Sigma_{T-1, i} + \bar{r}_{T-1, i} \bar{r}'_{T-1, i} \right) x'_{T-1, i} \right) p_{T-1, i}. \quad (4.8)$$

Takto môžeme účelovú funkciu skrútiť aj ak nastavíme $g_i = 0$ a člen z (4.8) v zátvorkách použijeme pre funkciu $f_{T-1, i}$.

Ak chceme pri viacperiódovom mean-variance modeli, ktorý sme odvodili v časti (3.4) aplikovať stochastické programovanie, účelovú funkciu si potrebujeme vyjadriť v diskretnej forme pomocou (3.15) v tvare:

$$f_{T-1, i} = x'_{T-1, i} \left(\Sigma_{T-1, i} + \bar{r}_{T-1, i} \bar{r}'_{T-1, i} \right) x'_{T-1, i}. \quad (4.9)$$

Konštantný člen je v tvare $f_0 = -\bar{W}_T^2$, avšak na optimálne riešenie nemá žiadny vplyv. Vzhľadom na vopred stanovený konečný majetok, t.j. očakávaný majetok \bar{W}_T pridáme k ohraničeniam ešte diskretnú formu ohraničenia (3.9):

$$\bar{W}_T = \sum_{i=1}^{S_{T-1}} x'_{T-1, i} \bar{r}_{T-1, i} p_{T-1, i}. \quad (4.10)$$

Všetky ostatné funkcie v účelovej funkcii sú rovné nule. V tejto kapitole sme vychádzali z [1] a [5].

Kapitola 5

Testovanie a porovnanie modelov

5.1 Formulácia modelov

V tejto kapitole, ako už prezrádza samotný názov, sa budeme zaoberať testovaním a porovaním modelov optimalizácie portfólia. Zameriame sa na konfrontáciu modelu bez transakčných nákladov (ďalej len model bez TC) a jeho rozšírenej formy, ktorá ich zohľadňuje (ďalej len model s TC). Pokúsime sa zistiť, aký vplyv má ich zavedenie na vývoj portfólia. V predchádzajúcich kapitolách sme si postupne predstavili prechod od jednoperiódových modelov k viacperiódovým a odvodili si pre ne rôzne typy v súčasnosti často používaných a skúmaných modelov. My sa budeme zaoberať viacperiódovými modelmi založenými na stochastickom programovaní. Testovať budeme viacperiódový mean-variance model, ako však neskôr zistíme, bude potrebné sa venovať aj modelu s účelovou funkciou v tvare strednej hodnoty z kvadratickej funkcie užitočnosti. Dôležité pre nás budú stromy pravdepodobných scenárov, ktoré reprezentujú vývoj výnosov. Vychádzať budeme najmä zo 4. kapitoly, kde sme si predstavili jednotlivé podmienky a teoretické vlastnosti optimalizácie portfólia pomocou stochastického programovania. Nasledujúce modely sú odvodené pomocou vlastností mean-variance modelu, ktoré sme si popísali v kapitolách 3. a 4. V časti 3.4 sme odvodili varianciu poslednej periódy pre viacperiódový mean-variance model:

$$\mathbf{Var}[x'_{T-1}r_{T-1}] = \mathbf{E} [x'_{T-1} (\Sigma_{T-1} + \bar{r}_{T-1}\bar{r}'_{T-1}) x_{T-1}] - (\mathbf{E} [x'_{T-1}\bar{r}_{T-1}])^2,$$

s konštantným členom $(\mathbf{E} [x'_{T-1}\bar{r}_{T-1}])^2 = \bar{W}_T$. Vychádzajúc zo všeobecnej formulácie viacperiódového modelu (3.5), pre ktorú postačuje určiť účelovú funkcie vzťahujúcu

sa k poslednej perióde

$$f_{T-1}(y_{T-1,\omega}) = x'_{T-1}(\Sigma_{T-1}(\omega) + \bar{r}_{T-1}(\omega)\bar{r}'_{T-1}(\omega))x_{T-1},$$

nastavením $f_0(y_0) = -\bar{W}_T^2$, aby zodpovedal konštantnému členu $(\mathbf{E}[x'_{T-1}\bar{r}_{T-1}])^2$ a zapojením stochastického programovania dostávame nasledujúce formulácie modelov.

Uvažujeme dva nasledovné modely podľa [1]. Model bez TC:

$$\min_x \sum_{i=1}^{S_{T-1}} x'_{T-1,i} (\Sigma_{T-1,i} + \bar{r}_{T-1,i}\bar{r}'_{T-1,i}) x_{T-1,i} p_{T-1,i} - \bar{W}_T^2 \quad (5.1)$$

$$\text{pri podmienkach : } x'_0 \mathbf{1} - W_{ini} = 0$$

$$x'_{t-1,a_t(i)} r_{t-1,i} - x'_{t,i} \mathbf{1} = 0$$

$$\forall i = 1, \dots, S_t, \quad t = 1, \dots, T-1$$

$$\sum_{i=1}^{S_{T-1}} x'_{T-1,i} \bar{r}_{T-1,i} p_{T-1,i} - \bar{W}_T = 0$$

$$x_{t,i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, S_t, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

a model s TC:

$$\min_{x,v} \sum_{i=1}^{S_{T-1}} x'_{T-1,i} (\Sigma_{T-1,i} + \bar{r}_{T-1,i}\bar{r}'_{T-1,i}) x_{T-1,i} p_{T-1,i} - \bar{W}_T^2 \quad (5.2)$$

$$\text{pri podmienkach : } E'v_0 - x_0 + W_{ini} = 0$$

$$G_{t,i}x_{t-1,a_t(i)} + E'v_{t,i} - x_{t,i} = 0$$

$$\forall i = 1, \dots, S_t, \quad t = 1, \dots, T-1$$

$$\sum_{i=1}^{S_{T-1}} x'_{T-1,i} \bar{r}_{T-1,i} p_{T-1,i} - \bar{W}_T = 0$$

$$x_{t,i} \geq 0, \quad v_{t,i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, S_t, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

kde

$$E' = \left(\begin{array}{c|c} -\mathbf{1}' - d\mathbf{1}' & \mathbf{1}' - c\mathbf{1}' \\ \hline I & -I \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 2n},$$

$$G_{t,i} = \left(\text{Diag}(r_{t,i}) \right) \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

5.2 Príprava pred aplikáciou funkcie quadprog

Uvažované modely budeme optimalizovať pomocou matematického softvéru Matlab, konkrétne využijeme funkciu quadprog. Funkcia quadprog rieši úlohy kvadratického programovania, čo je prípad našej účelovej funkcie. Úloha, ktorú chceme danou funkciou vypočítať musí byť v nasledovnom tvare:

$$\min_x \frac{1}{2}x'Hx + f'x \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \text{pri podmienkach : } \quad A \cdot x &\leq b, \\ Aeq \cdot x &= beq, \\ lb &\leq x \leq ub, \end{aligned}$$

kde H , A a Aeq sú matice a f , b , beq , lb , ub a x sú vektory. Formulácie našich úloh je preto potrebné pretransformovať do tejto štruktúry.

Účelové funkcie sú v oboch prípadoch rovnaké, líšia sa len tým, že úlohu bez TC minimalizujeme iba cez x , kým úlohu s TC cez dve premenné x a v . Matica H v matlabovskej funkcii bude preto pre obe úlohy zastupovať členy $(\Sigma_{T-1,i} + \bar{r}_{T-1,i}\bar{r}'_{T-1,i})p_{T-1,i}$ pre $i = 1, \dots, S_{T-1}$. Indexom i označujeme jednotlivé scenáre (vetvy) stromu v príslušnej perióde, v účelovej funkcii ide o scenáre predposlednej periódy $T - 1$. Pre zjednodušenie úlohy budeme pre každý predposledný scenár používať rovnakú kovariančnú maticu Σ_{T-1} a strom scenárov budeme uvažovať ako rovnomerne rozdelený. Pod pojmom rovnomerne rozdelený rozumieme, že ak z koreňa vychádza S scenárov (vetiev), tak každý uzol na konci týchto S scenárov sa delí na ďalších S atď. Na každom scenári v strome máme akoby umiestnené možné realizácie výnosov aktív. Pre scenáre predposlednej periódy však počítame so strednou hodnotu výnosov všetkých scenárov, ktoré majú rovnakého rodiča. Strom si potom zjednodušene môžeme predstaviť tak, že z každého predposledného uzla nám vychádza jeden, akoby priemerný scenár, ktorý smeruje ku svojmu konečnému uzlu, kedy očakávame nadobudnutie vopred stanoveného majetku. Pravdepodobnosti vďaka rovnomernému rozdeleniu stromu p_{T-1} môžeme rovnako písať bez indexu i . Pri terminálnej podmienke teda v podstate pôjde o vážený priemer.

Predtým než si pre oba modely vyjadríme matice H ešte stručne charakterizujeme ich quadprogovské vektory x . Pre model bez TC vektor x berieme ako vektor vektorov, t.j. prvých n zložiek vektora bude optimálna skladba portfólia v jednotlivých aktívach

pre koreň stromu, druhá zložka bude n zložiek vektora pre prvý uzol prvej periódy atď. až po S -tý uzol prvej periódy, a takto to bude aj pre všetky ďalšie periódy až do periódy $T - 1$. Vektor x je teda v tvare:

$$x = (x_0^0, x_0^1, \dots, x_0^{(n-1)}, x_{1,1}^0, x_{1,1}^1, \dots, x_{1,1}^{(n-1)}, x_{1,2}^0, \dots, x_{1,2}^{n-1}, \dots, x_{t,1}^0, \dots, x_{t,S}^{(n-1)}, \dots, x_{T-1,1}^0, \dots, x_{T-1,S}^{(n-1)})' \quad (5.4)$$

Pri úlohe s TC bude vektor x trochu rozšírený, a to o zložky $v_{t,i}^+$ a $v_{t,i}^- \forall i = 1, \dots, S$ označujúce nákup a predaj rizikových aktív v portfóliu pri rebalancovaní. Optimálny vektor, ktorý budeme hľadať je preto v tvare:

$$x = (\quad x_0^0, \quad x_0^1, \dots, x_0^{(n-1)}, v_0^{1+}, \dots, v_0^{(n-1)+}, v_0^{1-}, \dots, v_0^{(n-1)-} \\ x_{1,1}^0, \quad x_{1,1}^1, \dots, x_{1,1}^{(n-1)}, v_{1,1}^{1+}, \dots, v_{1,1}^{(n-1)+}, v_{1,1}^{1-}, \dots, v_{1,1}^{(n-1)-}, \\ x_{1,2}^0, \quad \dots, x_{1,2}^{n-1}, v_{1,2}^{1+}, \dots, v_{1,2}^{(n-1)+}, v_{1,2}^{1-}, \dots, v_{1,2}^{(n-1)-}, \\ \dots, \quad x_{t,1}^0, \dots, x_{t,S}^{(n-1)}, v_{t,1}^{1+}, \dots, v_{t,S}^{(n-1)+}, v_{t,S}^{1-}, \dots, v_{t,S}^{(n-1)-} \dots, \\ x_{T-1,1}^0, \quad \dots, x_{T-1,S}^{(n-1)}, v_{T-1,1}^{1+}, \dots, v_{T-1,S}^{(n-1)+}, v_{T-1,1}^{1-}, \dots, v_{T-1,S}^{(n-1)-})' \quad (5.5)$$

Horný index členov vektora sa vzťahuje k jednotlivým aktívam. Index 0 prislúcha bezrizikóvemu aktívu, indexy 1 až $(n - 1)$ rizikovým aktívam. Spolu máme teda v portfóliu n aktív. Je to menšia zmena oproti zápisu úlohy, kde uvažujeme n rizikových aktív a 1 bezrizikové aktívum, aby sme si sprehľadnili indexovanie.

V účelovej funkcii nám vystupujú iba členy z periódy $T - 1$, preto maticu H vyjadríme ako riedku blokovú maticu, kde prvý blok bude nulová matica o rozmere $n \times$ počet uzlov do času $T - 1$ pre model bez TC, a o rozmere $n + 2(n - 1)$, čo zohľadňuje aj premenné nákupu a predaja a to celé krát počet uzlov do času $T - 1$ pre model s TC.

Pre model bez TC budú na diagonále nasledovať jednotlivé matice $H_{T-1,i}$ pre $i = 1, \dots, S$ charakterizujúce každý scenár všetkých uzlov v čase $T - 1$.

Pre model s TC budú na diagonále nasledovať jednotlivé matice $H_{T-1,i}$ pre $i = 1, \dots, S$ charakterizujúce každý scenár všetkých uzlov v čase $T - 1$ vždy na striedačku s nulovým blokom na diagonále rozmeru $2(n - 1) \times 2(n - 1)$.

Výsledné vstupné matice H účelovej funkcie vyzerajú preto nasledovne. Pre model

bez TC:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & H_{T-1,1} & & & \\ & & H_{T-1,2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & H_{T-1,S} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Pre model s TC:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & H_{T-1,1} & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & H_{T-1,2} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & H_{T-1,S} \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Keďže člen \bar{W}_T^2 v (5.1) a (5.2) je konštantný, v účelových funkciách ho nie je potrebné uvažovať. Ďalej v úlohe nevystupujú žiadne lineárne členy, preto vektor f vo funkcii quadprog nastavíme na nulu.

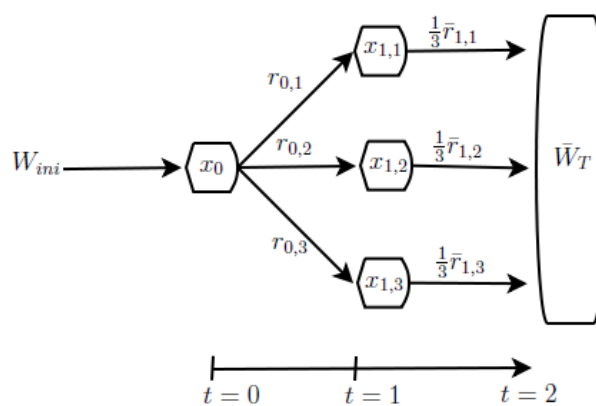
Rovnako potrebné je pretransformovať do jednej matice všetky ohraničenia, keďže vstupy funkcie quadprog musia spĺňať vyššie uvedenú štruktúru. V úlohe máme len ohraničenia typu rovností, ktoré musíme previesť do tvaru $Aeq \cdot x = beq$ a ohraničenie s nerovnosťou typu spodnej hranice $x_{t,i} \geq 0$ resp. $v_{t,i} \geq 0$, ktoré slúžia na zabránenie požičiavaniu si a krátkych pozícií. Ohraničenia typu $A \cdot x \leq b$ sa v úlohách nevyskytujú. Ohraničenie typu rovnosti pre úlohu bez TC sú preto pretransformované do nasledujúcej matice :

Ak označíme a celkový počet vetiev spájajúcich jednotlivé uzly do času $T - 1$ a b počet uzlov vrátane koreňa do času $T - 1$, potom má matica Aeq vždy $2 + a$ riadkov a $b \cdot n$ stĺpcov.

Diagonála matice Aeq pozostáva z blokov riadkových vektorov dĺžky n . Prvý blok je vektor jednotiek, všetky ostatné bloky na diagonále sú vektory mínus jednotiek. Ďalej sa v matici nachádzajú výnosy, ktoré sú v matici Aeq umiestnené podľa nasledujúceho vzoru (5.8). Výnosy sú taktiež riadkové vektory dĺžky n , keďže prislúchajú jednotlivým aktívam v portfóliu.

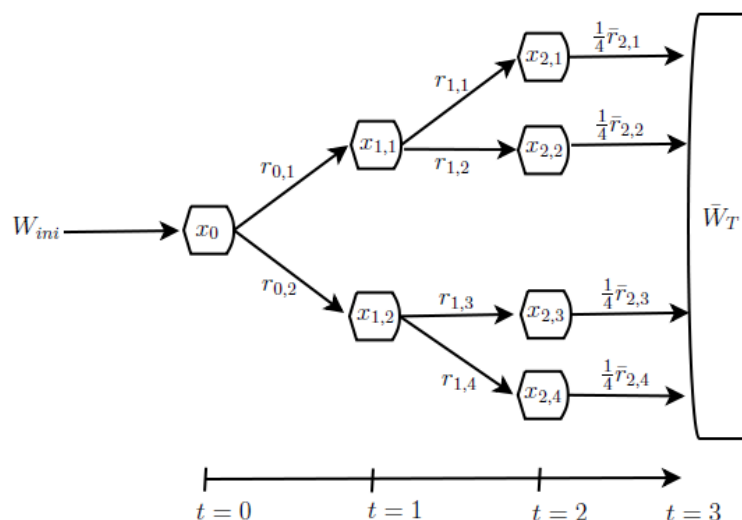
$$\begin{pmatrix}
 r_{0,1} \\
 \vdots \\
 r_{0,S} \\
 \ddots \\
 r_{t-1,1} \\
 \vdots \\
 r_{t-1,S} \\
 \ddots \\
 r_{t-1,S^t-S+1} \\
 \vdots \\
 r_{t-1,S^t} \\
 \ddots \\
 r_{T-2,S^{T-1}-S-1} \\
 \vdots \\
 r_{T-2,S^{T-1}} \\
 \bar{r}_{T-1,1}p_{T-1} \quad \dots \quad \bar{r}_{T-1,S^{T-1}}p_{T-1}
 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Prvý riadok matice Aeq reprezentuje ohraničenie $x'_0 \mathbf{1} - W_{ini} = 0$, ďalšie stoja za bilančnými ohraňčeniami $x'_{t-1, \alpha_t(i)} r_{t-1,i} - x'_{t,i} \mathbf{1} = 0$ a posledný riadok zodpovedá ohraňčeniu na koncový stav $\sum_{i=1}^S x'_{T-1,i} \bar{r}_{T-1,i} p_{T-1,i} - \bar{W}_T = 0$. Pre lepšie pochopenie uvádzame ohraňčenia $Aeq \cdot x = beq$ aj s ilustračnými zjednodušenými vývojovými diagramami pre dvojperiódový model s tromi scenármi a trojperiódový model s dvomi scenármi.



Obr. 5.1: Dvojperiódový model s tromi scenármi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ r_{0,1} & -1 & 0 & 0 \\ r_{0,2} & 0 & -1 & 0 \\ r_{0,3} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3}\bar{r}_{1,1} & \frac{1}{3}\bar{r}_{1,2} & \frac{1}{3}\bar{r}_{1,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{ini} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{W}_T \end{pmatrix} \quad (5.9)$$



Obr. 5.2: Trojperiódový model s dvomi scenármi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{0,1} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{0,2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,1} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{1,2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,3} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1,4} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\bar{r}_{2,1} & \frac{1}{4}\bar{r}_{2,2} & \frac{1}{4}\bar{r}_{2,3} & \frac{1}{4}\bar{r}_{2,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{ini} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{W}_T \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

V modeli s TC sa bude matica Aeq trochu odlišovať od tej pre model bez TC. Ak n je počet aktív a opäť a je celkový počet vetiev spájajúcich jednotlivé uzly do času $T - 1$ a b počet uzlov vrátane koreňa do času $T - 1$, potom má matica Aeq v tomto prípade vždy $1 + n + a \cdot n$ riadkov a $b \cdot n + 2(n - 1)$ stĺpcov. Diagonála matice Aeq

pre model s TC pozostáva z blokov v tvare:

$$\begin{pmatrix} -1 & & & (-1-d) & \dots & (-1-d) & (1-c) & \dots & (1-c) \\ & -1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

Rozmer blokov je $n \times n + 2(n - 1)$. Výnosy sú v matici umiestnené, tak ako v modeli bez TC, avšak s tým rozdielom, že už nie sú pod sebou v riadkoch, ale na diagonálach. Pre lepšie nahliadnutie a pochopenie si aj pri tomto modeli napíšeme ohraničenia pre vzorový model z obrázka (5.1), keď uvažujeme, že máme v portfóliu dve aktíva x^0 a x^1 . Aktívum x^0 vždy berieme ako bezrizikové. Matica Aeq je preto v tomto prípade v tvare:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & (-1-d) & (1-c) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{0,1}^0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & (-1-d) & (1-c) \\ 0 & r_{0,1}^1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ r_{0,2}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{0,2}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_{0,3}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{0,3}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}r_{1,1}^0 & \frac{1}{3}r_{1,1}^1 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & (-1-d) & (1-c) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & (-1-d) & (1-c) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3}r_{1,2}^0 & \frac{1}{3}r_{1,2}^1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}r_{1,3}^0 & \frac{1}{3}r_{1,3}^1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Príslušný vektor x k tejto matici je v tvare:

$$x = (x_0^0, x_0^1, v_0^{1+}, v_0^{1-}, x_{1,1}^0, x_{1,1}^1, v_{1,1}^{1+}, v_{1,1}^{1-}, x_{1,2}^0, x_{1,2}^1, v_{1,2}^{1+}, v_{1,2}^{1-}, x_{1,3}^0, x_{1,3}^1, v_{1,3}^{1+}, v_{1,3}^{1-})' \quad (5.13)$$

a príslušný vektor beq v tvare:

$$beq = (x_{ini}^0, x_{ini}^1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \bar{W}_T)' \quad (5.14)$$

Všeobecne je prvých n zložiek vektora beq pre model s TC počiatkové rozloženie aktív W_{ini} , s ktorým vchádzame do stromu. Pri modeli bez TC to dôležité nie je, keďže

nemusíme pri prvotnom prerozdeľovaní jednotlivých aktív zohľadňovať transakčné náklady. Prvých n riadkov matice Aeq modelu s TC zastupujúce počiatkové ohraničenia, pričom prvá rovnica sa vždy vzťahuje k bezrizikovému aktívu x^0 , zvyšných $n - 1$ rovníc zase k rizikovým aktívam. Rovnice sú v nasledovných tvaroch:

$$\begin{aligned}
-x_0^0 + (-1 - d)v_0^{1+} + \dots + (-1 - d)v_0^{(n-1)+} + \\
+(1 - c)v_0^{1-} \dots (1 - c)v_0^{(n-1)-} &= -x_{ini}^0 \\
-x_0^1 + v_0^{1+} - v_0^{1-} &= x_{ini}^1 \\
&\vdots \\
-x_0^{(n-1)} + v_0^{(n-1)+} - v_0^{(n-1)-} &= x_{ini}^{(n-1)}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Ostatné rovnice stoja za bilančnými ohraničeniami pre jednotlivé uzly:

$$\begin{aligned}
-x_{t-1, a_t(i)}^0 r_{t-1, i}^0 + (-1 - d)v_{t, i}^{1+} + \dots + (-1 - d)v_{t, i}^{(n-1)+} + \\
+(1 - c)v_{t, i}^{1-} \dots (1 - c)v_{t, i}^{(n-1)-} - x_{t, i}^0 &= 0 \\
-x_{t-1, a_t(i)}^1 r_{t-1, i}^1 + v_{t, i}^{1+} - v_{t, i}^{1-} - x_{t, i}^1 &= 0 \\
&\vdots \\
-x_{t-1, a_t(i)}^{(n-1)} r_{t-1, i}^{(n-1)} + v_{t, i}^{(n-1)+} - v_{t, i}^{(n-1)-} - x_{t, i}^{(n-1)} &= 0 \\
\forall i = 1, \dots, S \quad t = 1, \dots, T - 1.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Posledný riadok opäť zodpovedá ohraničeniu na koncový stav $\sum_{i=1}^S x'_{T-1, i} \bar{r}_{T-1, i} p_{T-1, i} - \bar{W}_T = 0$. Takto máme vhodne pretransformované modely (5.1) a (5.2), ktoré už funkcia quadprog vie riešiť. V ďalšej sekcii budeme modely testovať na dátach.

5.3 Aplikácia programu na dáta

Najprv si ukážeme aplikáciu programu na jednoduchý strom. Pôjde o dvojperiódový model s dvomi scenármi a piatimi aktívami. Potom si predstavíme ešte trojperiódový model s dvomi scenármi a tromi aktívami. Všetky periódy v úlohách majú rovnakú dĺžku. My sa budeme zaoberať polročným rebalancovaním. Programy sú schopné počítať so stromami s oveľa väčším počtom scenárov, periód a aktív. Výstupné vektory sú však v týchto prípadoch taktiež veľkých rozmerov a sledovať ich správanie s meniacimi sa transakčnými nákladmi vedie k obrovskému počtu dát, ktoré

z praktických dôvodov nebudeme v práci prezentovať. Všeobecne sa však správajú ako úlohy s menšími rozmermi. Cieľom bude sledovať vplyv transakčných nákladov na vývoj portfólia. Pripomenieme, že pre zjednodušenie úlohy budeme uvažovať rovnaké transakčné náklady pre nákup aj predaj rizikových aktív, t.j. $c = d$.

Pracovať budeme s dátami 4 európskych akciových indexov ATX, CAC 40, DAC a EURONEXT BEL-20, ktorých hodnoty máme od 1. januára 1993 až po 31. december 2009. Ako bezrizikové aktívum si zvolíme vklad s polročným 1% úrokom. Výnosy jednotlivých aktív budeme počítat nasledovne. Ak ceny aktív označíme P , tak výnosy r sú:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-\Delta t}}{P_{t-\Delta t}}. \quad (5.17)$$

Na modelovanie výnosov budeme používať veličinu:

$$\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-\Delta t}}\right) = \ln\left(1 + \frac{P_t - P_{t-\Delta t}}{P_{t-\Delta t}}\right) \approx \frac{P_t - P_{t-\Delta t}}{P_{t-\Delta t}}. \quad (5.18)$$

Kovariančnú maticu Σ_{T-1} si vypočítame na základe nezávislých týždenných výnosov indexov počas obdobia 17 rokov. Ak kovariančnú maticu týždenných výnosov prenásobíme polovičnou hodnotou celkovej počtu obchodovaných týždňov v roku, dostávame kovariančnú maticu polročných výnosov, ktorá pre náš jednoduchší model je v tvare:

$$\Sigma_{T-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0251 & 0,0127 & 0,0148 & 0,0123 \\ 0 & 0,0127 & 0,0248 & 0,0225 & 0,0165 \\ 0 & 0,0148 & 0,0225 & 0,0280 & 0,0173 \\ 0 & 0,0123 & 0,0165 & 0,0173 & 0,0195 \end{pmatrix}$$

Jednotlivé výnosy rizikových aktív na vetvách stromu scenárov si pri testovaní týchto úloh zvolíme náhodne pomocou historických dát našich aktív. Nachádzame sa pri koreni stromu x_0 a môžeme predpokladať, že v prípade, ak nastane nejaká očakávaná udalosť budú mať výnosy hodnotu $r_{0,1}$, ak udalosť nenastane, ich hodnota bude $r_{0,2}$. Takto budeme uvažovať opäť v uzloch $x_{1,1}$ a $x_{1,2}$ avšak pre predposlednú periódu, v tomto prípade pre periódu 1, budeme brať pre každý predposledný uzol stromu už len stredné hodnoty scenárov, ktoré danému uzlu prislúchajú. Pri testovaní pôjde akoby o nejakú simuláciu našich predpokladov. Pre prvú úlohu uvažujeme nasledovné polročné výnosy. Bezrizikové aktívum je polročne úročené hodnotou 1% ostatným aktívam sme priradili náhodné polročné výnosy zrealizované počas nezávislých období

v minulosti.

$$\begin{aligned}
 r_{0,1} &= (1,01 \quad 1,13 \quad 1,07 \quad 1,10 \quad 1,12)' \\
 r_{0,2} &= (1,01 \quad 1,18 \quad 1,11 \quad 1,15 \quad 1,14)' \\
 \bar{r}_{1,1} &= (1,01 \quad 1,12 \quad 1,11 \quad 1,12 \quad 1,11)' \\
 \bar{r}_{1,2} &= (1,01 \quad 1,04 \quad 1,08 \quad 1,10 \quad 1,07)'.
 \end{aligned}
 \tag{5.19}$$

V prvej vzorovej úlohe vstupujeme do portfólia s počiatočným majetkom s celkovou hodnotou 1000, ktorého rozloženie priniesli minulé investície a rebalansovania. V tomto prípade sme si zvolili $W_{ini} = (100, 800, 0, 0, 100)'$. Celkový očakávaný výnos si nastavíme najprv na 10%. Testovaním úlohy pomocou nášho programu sme dospeli k zaujímavým pozorovaniam, ktoré možno nahliadnuť na obr. (5.3)-(5.7). Pokiaľ sme si zvolili za \bar{W}_T minimálnu alebo maximálnu hodnotu obr. (5.3), ktorú je možné na danom strome dosiahnuť, tak v prípade veľmi nízkych transakčných nákladov (ďalej už len TC) 0,001% alebo 0,01% sa rozdelenie peňazí do aktív v prípade úlohy s TC takmer rovná úlohe bez TC. Ak však uvažujeme náš očakávaný výnos 10%, teda očakávame konečné bohatstvo $\bar{W}_T = 1100$, pozorujeme, že pre úlohu je optimálne urobiť nákup aj predaj toho istého aktíva pri niektorých uzloch. Tieto nežiadúce výstupy sú na obrázkoch (5.3)-(5.7) zobrazené červenou farbou. Hodnota účelovej funkcie je vtedy dokonca menšia, a teda lepšia ako v prípade bez TC. Tento súčasný nákup a predaj aktív je spôsobený tým, že úloha medzi svojimi ohraničeniami nemá ohraničenie na zamedzenie takejto činnosti. Počiatočné rozdelenie aktív do portfólia sa v prípade bez TC výrazne líši od rozloženia pri úlohe s TC. Pri zvyšovaní TC, však možno pozorovať dve veci. Pri hodnote TC 6% a vyššie až k možno nereálnym 15% (obr.5.4) už nedochádza k súčasnému predaju a kúpe a rovnako prestáva dochádzať k rebalansovaniu v jednotlivých uzloch, dokonca si portfólio na začiatku ponechá také rozloženie, s akým sme do neho vstupovali. Vyššie transakčné náklady očividne zamedzujú rebalansovaniu. Na tomto strome sa dá maximálne dosiahnuť skoro 30% výnos. Skúsime preto nastaviť očakávaný majetok postupne na hodnoty 1150, 1175, 1180 a 1200. Pri očakávanej hodnote 1150, ešte stále dochádza k súčasnému nákupu a predaju aktív, no pri vyšších hodnotách už nie. Pre model je preto neefektívne zvoliť si očakávaný majetok o dosť menší ako maximálna hodnota majetku, ktorú na danom strome možno očakávať. Všimnime si že, všetky predpokladané výnosy na tomto strome sú kladné t.j. väčšie ako 1. Pre model je preto optimálne zbavovať sa peňazí prostredníctvom transakčných nákladov súčasným nákupom a predajom

aktív, aby sme dosiahli menší očakávaný výnos.

Model sme otestovali na viacerých typoch stromov. Veľakrát pri malom očakávanom výnose oproti maximálnej možnej hodnote dochádzalo k problému so súčasným nákupom a predajom aktív. V prípade veľmi malých hodnôt TC napr. 0,00001%, ak sme sa chceli priblížiť k úlohe bez TC si metóda, pomocou ktorej softvér úlohu optimalizoval s týmto nevedela poradiť. Niekedy bola pre metódu veľkosť hľadaného smeru príliš malá, niekedy nepostačoval na získanie optimálnej hodnoty ani obrovský počet iterácií či ponúknutý štartovací bod.

Teraz sa pokúsime dané modely (5.1) a (5.2) previesť na iný ale konzistentný tvar, ako sme si už dokázali v kapitole 3. Namiesto minimalizácie rizika budeme maximalizovať strednú hodnotu kvadratickej funkcie užitočnosti, v podstate pôjde o minimalizáciu jej zápornej hodnoty a odpadne nám ohraničenie na koncový stav. Stredná hodnota kvadratickej funkcie užitočnosti je v tvare:

$$\mathbf{E}[U(W)] = \mathbf{E}[W] - \alpha(\mathbf{E}[W]^2 + Var[W]),$$

odkiaľ dostávame:

$$\mathbf{E}[U(W)] = \bar{W} - \alpha\mathbf{E}[W^2].$$

Účelová funkcia pre danú úlohu bez TC je:

$$\min_x - \left(\sum_{i=1}^{S_{T-1}} x'_{T-1,i} \bar{r}_{T-1,i} p_{T-1,i} - \alpha \sum_{i=1}^{S_{T-1}} x'_{T-1,i} (\Sigma_{T-1,i} + \bar{r}_{T-1,i} \bar{r}'_{T-1,i}) x_{T-1,i} p_{T-1,i} \right) \quad (5.20)$$

$$\text{pri podmienkach : } x'_0 \mathbf{1} - W_{ini} = 0$$

$$x'_{t-1,at(i)} r_{t-1,i} - x'_{t,i} \mathbf{1} = 0$$

$$\forall i = 1, \dots, S_t, \quad t = 1, \dots, T-1$$

$$x_{t,i} \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, S_t, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

Pre úlohu s TC je účelová funkcia rovnaká ako v prípade bez TC, len s tým rozdielom, že opäť minimalizujeme cez dve premenné x a v a aj tu sme odstránili podmienku koncového stavu, ktorá sa presunula do účelovej funkcie. Ostatné ohraničenia sú také ako pri formulácii (5.20).

Pre program táto zmena znamená, že vo funkcii quadprog pridáme v účelovej funkcii lineárny člen f , čo vlastne budú pôvodné posledné riadky z matíc A_{eq} . Program si inak nevyžaduje ďalšie zmeny. Ešte nám zostáva si zvoliť parameter α . Podľa

definície kvadratickej funkcie uitočnosti $U(W) = W - \alpha W^2$ je vrchol (bod nasýtenia) v hodnote $W_* = \frac{1}{2\alpha}$ preto $\alpha = \frac{1}{2W_*}$. My si najprv zvolíme $W_* = 2W_{ini}$. Teraz nový modely aplikujeme na predchádzajúcu úlohu.

Na obr. 5.6 je pekne vidieť, že model (5.20) si vie s daným stromom scenárov pre daný parameter α poradiť. Aj pri tejto formulácii úlohy pozorujeme s rastúcimi TC zníženú schopnosť portfólio rebalansovať a rovnako sa znižuje aj maximálna hodnota konečného majetku.

Ak však budeme postupne meniť parameter Beta, kde Beta v podstate určuje bod obratu na kvadratickej funkcii užitočnosti, pozorujeme podobnú vlastnosť ako pri mean-variance modeli. Hodnotu W_* vlastne počítame ako $W_* = Beta \cdot W_{ini}$. Na obr. 5.7 je vidieť, že pri malých hodnotách Beta, teda väčších hodnotách α dochádza opäť k súčasnému nákupu a predaju aktív. Tento menší nedostatok modelu bol už spomenutý v závere 3. kapitoly. Keďže sa v našom strome majetok neustále zväčšuje aj napriek tomu, že sa už nachádzame na klesajúcej časti funkcie užitočnosti zmenšením hodnoty majetku by užitočnosť a tým pádom aj hodnota účelovej funkcie vzrástli. Lineárne ohraničenia úlohy nezakazujú súčasný nákup aj predaj aktív spojený s transakčnými nákladmi preto to model využíva k zmenšeniu hodnoty majetku.

Aplikáciu formulácií minimalizácie rizika aj maximalizácie užitočnosti si teraz ešte predvedieme na už spomínanom príklade, ktorý má tri periódy, dva scenáre a tri aktíva. Aktíva sme si zvolili v tomto prípade menej, aby tabuľka kvôli väčšiemu počtu periód nebola príliš rozsiahla. V portfóliu budeme mať akciové indexy CAC 40 a DAC a opäť bezrizikové aktívum s polročným 1% úrokom. Príslušná polročná kovariančná matica je:

$$\Sigma_{T-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0248 & 0,0225 \\ 0 & 0,0225 & 0,0280 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

a výnosy na jednotlivých vetvách sú:

$$\begin{aligned}r_{0,1} &= (1,01 \quad 1,05 \quad 1,02)' \\r_{0,2} &= (1,01 \quad 1,03 \quad 1,04)' \\r_{1,1} &= (1,01 \quad 1,10 \quad 1,03)' \\r_{1,2} &= (1,01 \quad 1,04 \quad 1,05)' \\r_{1,3} &= (1,01 \quad 0,99 \quad 1,05)' \\r_{1,4} &= (1,01 \quad 1,03 \quad 1,07)' \\r_{2,1} &= (1,01 \quad 1,08 \quad 1,03)' \\r_{2,2} &= (1,01 \quad 1,03 \quad 1,04)' \\r_{2,3} &= (1,01 \quad 0,87 \quad 1,04)' \\r_{2,4} &= (1,01 \quad 1,04 \quad 1,04)'.\end{aligned}$$

(5.22)

Očakávaný konečný majetok sme si pre tento príklad zvolili na hodnotu 1090. Výsledky vidieť na obr. 5.8-5.10. Do koreňa portfólia vstupujeme s počiatočným majetkom $W_{ini} = (200, 300, 500)'$ v jednotlivých aktívach. Na rozdiel od predchádzajúceho príkladu tu nedochádza k súčasnému nákupu a predaju toho istého aktíva v rovnakom čase, keďže rozdiel maximálnej a minimálnej možnej očakávanej hodnoty je malý. Opäť pozorujeme s narastajúcimi TC spomaľovanie rebalancovania, ba až jeho zastavenie a ponechanie si portfólia v takom stave s akým sme do stromu vstúpili takmer až do konca horizontu. Očividné je to pri oboch typoch účelovej funkcie.

Záver

V práci sme si postupne predstavili prechod od jednoperiódových modelov k viacperiódovým. Zaoberali sme sa dvomi typmi viacperiódových modelov a to mean-variance modelom a modelom s kvadratickou funkciou užitočnosti. Sformulovali sme úlohu stochastického programovania pre oba typy modelov a tie sme potom pretransformovali do jazyka softvéru Matlab. Naprogramovali sme funkcie, ktoré vedeli uvažované modely optimalizovať. Naším cieľom bolo zistiť do akej miery ovplyvňujú transakčné náklady vývoj portfólia a prerozdelení proces medzi jednotlivými periódami. Ako sme intuitívne predpokladali, v prípade viacperiódových modelov bez transakčných nákladov či už mean-variance prístup, alebo prístup založený na kvadratickej funkcii užitočnosti, môžeme portfólio ľubovoľne preskupovať a jeho zloženie sa môže od periódy k perióde výrazne meniť. Zavedením transakčných poplatkov do modelov možno pozorovať niekoľko zaujímavých vlastností. V prípade malých poplatkov sa portfólio správa približne rovnako ako pri modeli bez nich, ale ako sme zistili, len v prípade ak očakávame rozumné konečné bohatstvo. Pod pojmom rozumné očakávané bohatstvo máme na mysli hodnotu, ktorá nie je príliš vzdialená maximálnej hodnote, ktorú na danom strome môžeme očakávať. V prípade ak si zvolíme menšie očakávané bohatstvo, pre model je optimálne sa zbavovať peňazí súčasným nákupom a predajom toho istého aktíva, niekedy až v obrovských objemoch, aby takto dosiahol tento menší očakávaný majetok. Analogicky pre model počítajúci s užitočnosťou sa to deje pri stanovení malého bodu obratu. V prípade rozumných portfólií možno pozorovať s rastúcimi transakčnými nákladmi zmenšenú schopnosť naše portfólio rebalansovať. V prípade veľmi veľkých poplatkov k rebalansovaniu portfólia medzi jednotlivými periódami už nedochádza vôbec alebo len v zanedbateľnom objeme. V tom prípade máme od začiatku až do konca plánovacieho horizontu to isté počiatočné portfólio, s ktorým sme vstúpili do nového stromu.

Prílohy

V tejto časti uvádzame zdrojové kódy programov jednotlivých optimalizačných modelov a tabuľky s výstupnými dátami.

Mean-variance model bez TC

```
% Mean-variance model bez TC
```

```
function [p,sigma,Omega,Aeq,beq,m,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT]=  
bezTCmultiperiod(n,S,T,R,R_hist,W_ini,W_T)
```

```
%n - počet aktív
```

```
%S - počet scenárov
```

```
%T - počet periód
```

```
%R - matica výnosov (všetky scenáre + očakávané/podmienené výnosy)
```

```
%R_hist - matica výnosov na výpočet kovariančnej matice
```

```
%W_ini - počiatočné bohatstvo
```

```
%W_T - očakávané bohatstvo
```

```
p=1/S^(T-1);
```

```
pom=1; for i=1:(T-2)
```

```
    pom=pom+S^i;
```

```
end
```

```
pom=pom*n; %počet premenných x do času T-2
```

```
sigma=cov(R_hist)*26; %kovariančná matica
```

```
Omega=zeros(pom,pom); %prvý nulový blok matice Omega - účelovej funkcie
```

```
pomH=0; for i=1:(T-1)
    pomH=pomH+S^i;
end

for i=(1+pomH):(pomH+S^(T-1))
    R(i,:);
    R(i,:)'*R(i,:);
    Omega=blkdiag(Omega,(sigma + R(i,:)'*R(i,:))*p); %H_T-1_i matice
end

Omega=2*Omega; %výsledná vstupná matica účelovej funkcie
                %pre quadprog x'Omega x

% Ohraničenia

A1=ones(1,n); %prvý riadok hlavnej A matice (W_ini) 1.časť

pux=0; %počet uzlov x (okrem x_0)
for i=1:(T-1)
    pux=pux+S^i;
end

A2=[]; for i=1:pux
    A2=blkdiag(A2,-ones(1,n)); %riadky mínus jednotiek v
                                %blokovej matici
end A2=[zeros(pux,n),A2];

Apom=[]; A3=[]; M=1; K=S; for i=1:(pux/S)
    for j=M:K
        Apom=[Apom;R(j,:)]; %pomocná matica výnosov
    end
    A3=blkdiag(A3,Apom); %výnosy jednotlivých períód a scenárov
    Apom=[];
    M=M+S;
end
```

```

    K=K+S;
end

A4=[A3,zeros(pux,S^(T-1)*n)];

A5=A2+A4; %prostredná časť hlavnej A matice
        %(ohraničenia  $x'_{t-1}, a_t(i)*r_{t_i}-x'_{t_i}=0$ )

A1=[A1,zeros(1,pux*n)]; %prvý riadok hlavnej A matice ( $W_{ini}$ )

A6=[zeros(1,pom)];
for i=(1+pux):(pux+S^(T-1)) %posledný riadok hlavnej A matice ( $W_T$ )
    A6=[A6,R(i,:)*p];
end

Aeq=[A1;A5;A6]; %matica ohraničení ( $x'_{t-1}, a_t(i)*r_{t_i}-x'_{t_i}=0$ )

beq=[W_ini;zeros(pux,1);W_T];

options = optimset('MaxIter',500); [m,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT]=
quadprog(Omega,zeros(n+pux*n,1),[],[],
Aeq,beq,zeros(n+pux*n,1),[],[],options);

```

Mean-variance model s TC

```

%Mean-variance model s TC

function [p,sigma,Omega,Aeq,beq,w,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT]=
sTCmultiperiod(n,S,T,R,R_hist,W_ini,W_T,d,c)

%n - počet aktív
%S - počet scenárov
%T - počet períód
%R - matica výnosov (všetky scenáre + očakávané/podmienené výnosy)
%R_hist - matica výnosov na výpočet kovariančnej matice
%W_ini - počiatočné bohatstvo

```

```

%W_T - očakávané bohatstvo
%d - transakčné náklady kúpa
%c - transakčné náklady predaj

% -x_0(0) + (-1-d)*v_0(1+) + (-1-d)*v_0(2) +
% (1-c)*v_0(1) + (1-c)*v_0(2) = -W_ini

% -x_0(1) + v_0(1+) - v_0(1-) = 0
% -x_0(2) + v_0(2+) - v_0(2-) = 0

p=1/S^(T-1);
sigma=cov(R_hist)*26; %kovariančná matica

pomp=1; for i=1:(T-2)
    pomp=pomp+S^i;
end
pomp=pomp*(n+(n-1)*2); %počet premenných x a v do času T-2

Omega=zeros(pomp,pomp); %prvý nulový blok matice Omega
%- účelovej funkcie

pomH=0; for i=1:(T-1)
    pomH=pomH+S^i;
end

for i=(1+pomH):(pomH+S^(T-1))
    R(i,:);
    R(i,:)'*R(i,:);
    Omega=blkdiag(Omega,blkdiag((sigma + R(i,:)'*R(i,:))*p),
        zeros((n-1)*2,(n-1)*2)); %H_T-1_i matice
end

Omega=2*Omega; %výsledná vstupná matica účelovej
%funkcie pre quadprog x'Omega x

```

```

%Ohraničenia

A0_1=ones(1,n); A0_1=-diag(A0_1);

A0_2=[]; for i=1:(n-1)
    A0_2=[A0_2,(-1-d)]; %(-1-d)...v(+)
end for i=1:(n-1)
    A0_2=[A0_2,(1-c)]; %(1-c)...v(-)
end

A0_cd=ones(1,(n-1));
A0_cd=[diag(A0_cd),-diag(A0_cd)]; % diag(1) a
                                     %diag(-1)...v(+) a v(-)

A0=[A0_2;A0_cd];
A0=[A0_1,A0]; %bloky hlavnej diagonály /diag(-1),
               %(-1-d), (1-c), diag(1) a diag(-1)

pom=1; for i=1:(T-1)
    pom=pom+S^i; %počet premenných x do času T-1
end

A1=[]; for i=1:pom
    A1=blkdiag(A1,A0);
end

Apom=[]; Ar=[]; M=1; K=S; for i=1:((pom-1)/S)
    for j=M:K
        Apom=[Apom;diag(R(j,:))]; %diagonály výnosov
        %jednotlivých scenárov (1 až S) pre danú periódu
    end
    Ar=blkdiag(Ar,[Apom,zeros(S*n,(n-1)*2)]); %bloky výnosov
                                               %jednotlivých periód (1 až T-1)

    Apom=[];
    M=M+S;

```

```

    K=K+S;
end

Ar=[Ar,zeros((pom-1)*n,S^(T-1)*n+S^(T-1)*(n-1)*2)];
Ar=[zeros(n,pom*(n+(n-1)*2));Ar];

A3=A1+Ar;

pom2=0; for i=1:(T-1)
    pom2=pom2+S^i; %počet premenných x do času T-2, oknmrem x_0
end

Apos=[zeros(1,pomp)];
for i=(1+pom2):(pom2+S^(T-1)) %posledný riadok hlavnej A matice (W_T)
    Apos=[Apos,R(i,:)*p,zeros(1,(n-1)*2)];
end

Aeq=[A3;Apos]; %ohraničenia

%beq=[W_ini*(-1);zeros(pom*n-1,1);W_T];
%prvých n členo treba nastaviť podľa toho s akým W_ini do portfólia
%vstupujeme
beq=[-100;-800;0;0;-100;zeros(pom*n-n,1);W_T];

options = optimset('MaxIter',1500);
[w,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT]=quadprog(Omega,zeros(pom*(n+(n-1)*2),1),[],[],
    Aeq,beq,zeros(pom*(n+(n-1)*2),1),[],[],options);

Model s kvadratickou funkciou užitočnosti bez TC

% FU model bez TC

function
[p,sigma,Omega,Aeq,beq,m,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT,alfa,H]=
bezTCmultiperiodFU(n,S,T,R,R_hist,W_ini)

```

```
%n - počet aktív
%S - počet scenárov
%T - počet períód
%R - matica výnosov (všetky scenáre + očakávané/podmienené výnosy)
%R_hist - matica výnosov na výpočet kovariančnej matice
%W_ini - počiatočné bohatstvo
%W_T - očakávané bohatstvo

p=1/S^(T-1); alfa=1/(2*2*W_ini);

%namiesto 2*W_ini mozme volit napr. 1.5*W_ini

pom=1; for i=1:(T-2)
    pom=pom+S^i;
end
pom=pom*n; %počet premenných x do času T-2

sigma=cov(R_hist)*26; %kovariančná matica

Omega=zeros(pom,pom); %prvý nulový blok matice
                    % Omega - účelovej funkcie

pomH=0; for i=1:(T-1)
    pomH=pomH+S^i;
end

for i=(1+pomH):(pomH+S^(T-1))
    R(i,:);
    R(i,:)'*R(i,:);
    Omega=blkdiag(Omega,(sigma + R(i,:)'*R(i,:))*p); %H_T-1_i matice
end

Omega=2*alfa*Omega; %výsledná vstupná matica
                    %účelovej funkcie pre quadprog x'Omega x
```



```
% Ohraničenia

A1=ones(1,n); %prvý riadok hlavnej A matice (W_ini) 1.časť

pux=0; %počet uzlov x (okrem x_0)
for i=1:(T-1)
    pux=pux+S^i;
end

A2=[]; for i=1:pux
    A2=blkdiag(A2,-ones(1,n)); %riadky mínus
                                %jednotiek v blokovej matici
end A2=[zeros(pux,n),A2];

Apom=[]; A3=[]; M=1; K=S; for i=1:(pux/S)
    for j=M:K
        Apom=[Apom;R(j,:)]; %pomocná matica výnosov
    end
    A3=blkdiag(A3,Apom); %výnosy jednotlivých
                        %periód a scenárov

    Apom=[];
    M=M+S;
    K=K+S;
end

A4=[A3,zeros(pux,S^(T-1)*n)];

A5=A2+A4; %prostredná časť hlavnej A
        %matice (ohraničenia  $x'_{t-1}, a_t(i)*r_{t_i}-x'_{t_i}=0$ )

A1=[A1,zeros(1,pux*n)]; %prvý riadok hlavnej A matice (W_ini)

A6=[zeros(1,pom)];
for i=(1+pux):(pux+S^(T-1)) %vektor f
```

```

    A6=[A6,R(i,:)*p];
end

Aeq=[A1;A5]; %matica ohraničení (x'_t-1,a_t(i)*r_t_i-x'_t_i=0)

beq=[W_ini;zeros(pux,1)];

options = optimset('MaxIter',500);
[m,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT]=quadprog(Omega,-A6,[],[],
Aeq,beq,zeros(n+pux*n,1),[],[],options);

H=A6*m; % majetok

```

Model s kvadratickou funkciou užitočnosti s TC

```
% FU model bez TC
```

```
function
```

```
[p,sigma,Omega,Aeq,beq,w,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT,alfa,H]=
sTCmultiperiodFU(n,S,T,R,R_hist,W_ini,d,c)
```

```
%n - počet aktív
```

```
%S - počet scenárov
```

```
%T - počet periód
```

```
%R - matica výnosov (všetky scenáre + očakávané/podmienené výnosy)
```

```
%R_hist - matica výnosov na výpočet kovariančnej matice
```

```
%W_ini - počiatočné bohatstvo
```

```
%W_T - očakávané bohatstvo
```

```
%d - transakčné náklady kúpa
```

```
%c - transakčné náklady predaj
```

```
% -x_0(0) + (-1-d)*v_0(1+) + (-1-d)*v_0(2)
```

```
% + (1-c)*v_0(1) + (1-c)*v_0(2) = -W_ini
```

```
% -x_0(1) + v_0(1+) - v_0(1-) = 0
```

```
% -x_0(2) + v_0(2+) - v_0(2-) = 0
```

```

p=1/S^(T-1); alfa=1/(2*2*W_ini); %namiesto 2*W_ini môžeme voliť napr. 1.5*W_ini
sigma=cov(R_hist)*26; %kovariančná matica

pomp=1; for i=1:(T-2)
    pomp=pomp+S^i;
end
pomp=pomp*(n+(n-1)*2); %počet premenných x a v do času T-2

Omega=zeros(pomp,pomp); %prvý nulový blok matice
                        %Omega - účelovej funkcie

pomH=0; for i=1:(T-1)
    pomH=pomH+S^i;
end

for i=(1+pomH):(pomH+S^(T-1))
    R(i,:);
    R(i,:)'*R(i,:);
    Omega=blkdiag(Omega,blkdiag((sigma + R(i,:)'*R(i,:))*p),
        zeros((n-1)*2,(n-1)*2)); %H_T-1_i matice
end

Omega=2*alfa*Omega; %výsledná vstupná matica
                    %účelovej funkcie pre quadprog x'Omega x

%Ohraničenia

A0_1=ones(1,n); A0_1=-diag(A0_1);

A0_2=[]; for i=1:(n-1)
    A0_2=[A0_2,(-1-d)]; %(-1-d)...v(+)
end for i=1:(n-1)
    A0_2=[A0_2,(1-c)]; %(1-c)...v(-)
end

```

```

A0_cd=ones(1,(n-1));
A0_cd=[diag(A0_cd),-diag(A0_cd)]; % diag(1)
                                     %a diag(-1)...v(+) a v(-)

A0=[A0_2;A0_cd];
A0=[A0_1,A0]; %bloky hlavnej diagonály /diag(-1),
              %(-1-d), (1-c), diag(1) a diag(-1)

pom=1; for i=1:(T-1)
    pom=pom+S^i; %počet premenných x do času T-1
end

A1=[]; for i=1:pom
    A1=blkdiag(A1,A0);
end

Apom=[]; Ar=[]; M=1; K=S; for i=1:((pom-1)/S)
    for j=M:K
        Apom=[Apom;diag(R(j,:))]; %diagonály výnosov
              %jednotlivých scenárov (1 až S) pre danú periódu
    end
    Ar=blkdiag(Ar,[Apom,zeros(S*n,(n-1)*2)]); %bloky výnosov
                                              %jednotlivých periód (1 až T-1)

    Apom=[];
    M=M+S;
    K=K+S;
end

Ar=[Ar,zeros((pom-1)*n,S^(T-1)*n+S^(T-1)*(n-1)*2)];
Ar=[zeros(n,pom*(n+(n-1)*2));Ar];

A3=A1+Ar;

pom2=0; for i=1:(T-1)

```

```
pom2=pom2+S^i; %počet premenných x do času T-2, okrem x_0
end

Apos=[zeros(1,pomp)];
for i=(1+pom2):(pom2+S^(T-1)) %posledný riadok hlavnej A matice (W_T)
    Apos=[Apos,R(i,:)*p,zeros(1,(n-1)*2)];
end

Aeq=[A3]; %ohraničenia
%prvých n členo treba nastaviť podľa toho s akým W_ini do portfólia
%vstupujeme
beq=[-200;-300;-500;zeros(pom*n-n,1)];

options = optimset('MaxIter',1500);
[w,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT]=quadprog(Omega,-Apos,[],[],
Aeq,beq,zeros(pom*(n+(n-1)*2),1),[],[],options);

H=Apos*w; % hodnota majetku
```

W_T	1 020	1 282	1 282	1 282	1 100	1 100	1 100	1 100	1 100
	bezTC	bezTC	sTC 0,001%	sTC 0,01%	bezTC	sTC 0,01%	sTC 0,1%	sTC 3,5%	sTC 4%
x_0(0)	1 000,0	0,0	0,0	0,0	354,8	0,0	0,0	0,0	0,0
x_0(1)	0,0	1 000,0	1 000,0	1 000,0	0,0	1 000,0	965,0	896,6	896,2
x_0(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_0(3)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_0(4)	0,0	0,0	0,0	0,0	645,2	0,0	0,0	100,0	100,0
v_0(1+)			200,0	200,0		200,0	17 643,0	96,6	96,2
v_0(2+)			0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(3+)			0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(4+)			0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(1-)			0,0	0,0		0,0	17 479,0	0,0	0,0
v_0(2-)			0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(3-)			0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(4-)			100,0	100,0		100,0	100,0	0,0	0,0
x_1,1(0)	1 010,0	0,0	0,0	0,0	1 048,6	1 089,1	1 089,0	1 069,7	1 034,6
x_1,1(1)	0,0	634,4	587,7	606,7	13,1	0,0	0,0	7,0	19,6
x_1,1(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	2,2	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,1(3)	0,0	495,6	406,8	428,5	3,4	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,1(4)	0,0	0,0	135,4	94,6	13,7	0,0	0,0	9,7	27,3
v_1,1(1+)			0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(2+)			0,0	0,0		203 721,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(3+)			406,8	428,5		0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(4+)			135,4	94,6		0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(1-)			542,3	523,2		1 130,0	1 090,0	1 006,2	993,0
v_1,1(2-)			0,0	0,0		203 721,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(3-)			0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(4-)			0,0	0,0		0,0	0,0	102,3	84,7
x_1,2(0)	1 010,0	0,0	0,0	0,0	1 093,9	1 089,1	1 089,0	1 090,1	1 091,8
x_1,2(1)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(3)	0,0	1 180,0	1 180,0	1 179,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(4)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(1+)			0,0	0,0		0,0	24 095,0	583,9	409,6
v_1,2(2+)			0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(3+)			1 180,0	1 179,7		453 688,5	0,0	0,0	0,0
v_1,2(4+)			0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(1-)			1 180,0	1 180,0		1 180,0	25 234,0	1 641,9	1 467,1
v_1,2(2-)			0,0	0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(3-)			0,0	0,0		453 688,5	0,0	0,0	0,0
v_1,2(4-)			0,0	0,0		0,0	0,0	114,0	114,0
FVAL	1 040 604	1 675 860	1 673 252	1 673 465	1 210 032	1 210 000	1 210 000	1 210 003	1 210 026

Obr. 5.3: Tabuľka 1

W_T	1 100	1 100	1 100	1 100	1 100	1 100	1 100	1 100	1 100
	sTC 4,5%	sTC 5%	sTC 5,5%	sTC 6%	sTC 6,5%	sTC 7%	sTC 7,5%	sTC 10%	sTC 15%
x_0(0)	0,0	0,0	0,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
x_0(1)	895,7	895,2	894,8	800,0	800,0	800,0	800,0	800,0	800,0
x_0(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_0(3)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_0(4)	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
v_0(1+)	95,7	95,2	94,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(2+)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(3+)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(4+)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(1-)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(2-)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(3-)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(4-)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,1(0)	1 000,8	968,2	936,7	908,0	873,6	844,3	817,0	691,9	535,0
x_1,1(1)	31,7	43,3	54,4	64,8	77,7	104,8	129,9	247,4	393,5
x_1,1(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,1(3)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,1(4)	44,5	61,2	77,4	92,7	112,0	112,0	112,0	112,0	112,0
v_1,1(1+)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(2+)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(3+)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(4+)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(1-)	980,4	968,3	956,7	839,2	826,3	799,2	774,1	656,6	510,5
v_1,1(2-)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(3-)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(4-)	67,5	50,8	34,6	19,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(0)	1 093,4	1 094,8	1 096,0	1 087,6	1 050,3	1 012,6	977,1	829,4	621,1
x_1,2(1)	0,0	0,0	0,0	1,1	5,9	11,5	17,4	134,7	332,1
x_1,2(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(3)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(4)	0,0	0,0	0,0	7,3	36,8	66,2	93,5	114,0	114,0
v_1,2(1+)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(2+)	0,0	170,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(3+)	276,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(4+)	0,0	0,0	86,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(1-)	1 056,9	1 056,4	1 055,8	942,9	938,1	932,5	926,6	809,3	611,9
v_1,2(2-)	0,0	170,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(3-)	276,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(4-)	114,0	114,0	200,1	106,7	77,2	47,8	20,5	0,0	0,0
FVAL	1 210 068	1 210 125	1 210 196	1 210 266	1 210 361	1 210 489	1 210 646	1 211 773	1 214 608

Obr. 5.4: Tabuľka 2

W_T	1 150	1 150	1 150	1 200	1 200	1 175	1 175	1 180	1 180
	bezTC	sTC 0,01%	sTC 1%	bezTC	sTC 0,01%	bezTC	sTC 1%	bez TC	sTC 1%
x_0(0)	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_0(1)	172,1	1 000,0	899,0	1 000,0	1000	993,4	899,0	1 000,0	899,0
x_0(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_0(3)	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_0(4)	827,9	0,0	100,0	0,0	0	6,6	100,0	0,0	100,0
v_0(1+)		200	99		200		99,0		99,0
v_0(2+)		0	0		0		0,0		0,0
v_0(3+)		0	0		0		0,0		0,0
v_0(4+)		0	0		0		0,0		0,0
v_0(1-)		0	0		0		0,0		0,0
v_0(2-)		0	0		0		0,0		0,0
v_0(3-)		0	0		0		0,0		0,0
v_0(4-)		100	0		100		0,0		0,0
x_1,1(0)	1 038,9	1 080,0	1 000,0	656,3	654,1	966,0	790,5	898,3	732,7
x_1,1(1)	33,5	20,0	51,1	191,6	193,3	66,3	190,6	93,7	228,5
x_1,1(2)	5,5	0,0	0,0	31,6	31,7	10,9	11,2	15,5	18,4
x_1,1(3)	8,8	10,0	0,0	50,4	50,4	17,4	15,1	24,7	21,4
x_1,1(4)	35,0	20,0	66,7	200,1	200,4	69,2	112,0	97,9	118,5
v_1,1(1+)		0	0		0		0,0		0,0
v_1,1(2+)		0	0		31,7		11,2		18,4
v_1,1(3+)		10	0		50,4		15,1		21,4
v_1,1(4+)		20	0		200,4		0,0		6,5
v_1,1(1-)		1110	964,7		936,7		825,3		787,4
v_1,1(2-)		0	0		0		0,0		0,0
v_1,1(3-)		0	0		0		0,0		0,0
v_1,1(4-)		0	45,3		0		0,0		0,0
x_1,2(0)	1 146,9	1 140,0	1 147,3	980,3	978,9	1 179,7	1 030,8	1 150,3	982,3
x_1,2(1)	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(3)	0,0	0,0	0,0	170,9	172,2	0,0	49,4	25,4	67,5
x_1,2(4)	0,0	0,0	0,0	28,8	28,8	0,0	83,2	4,3	113,7
v_1,2(1+)		0	0		0		0,0		0,0
v_1,2(2+)		0	790,3		0		0,0		0,0
v_1,2(3+)		0	0		172,2		49,4		67,5
v_1,2(4+)		187140	0		28,8		0,0		0,0
v_1,2(1-)		1180	1060,8		1180		1 060,8		1 060,8
v_1,2(2-)		0	790,3		0		0,0		0,0
v_1,2(3-)		0	0		0		0,0		0,0
v_1,2(4-)		187140	114		0		30,8		0,3
FVAL	1 322 628	1 322 534	1 322 695	1 442 484	1 442 506	1 381 126	1 381 856	1 393 072	1 394 137

Obr. 5.5: Tabuľka 3

	bezTC FU	sTC FU										
		0,1%	1,0%	1,5%	2,0%	3,0%	4,0%	5,0%	6,0%	10,0%	20,0%	30,0%
x_0(0)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	44,1	100,0
x_0(1)	1 000,0	999,7	899,0	898,5	898,0	800,0	800,0	800,0	800,0	800,0	800,0	800,0
x_0(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_0(3)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	97,1	96,2	95,2	92,6	90,9	46,6	0,0
x_0(4)	0,0	0,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
v_0(1+)		199,7	99,0	98,5	98,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(2+)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(3+)		0,0	0,0	0,0	0,0	97,1	96,2	95,2	92,6	90,9	46,6	0,0
v_0(4+)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(1-)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(2-)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(3-)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(4-)		100,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,1(0)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	44,5	101,0
x_1,1(1)	634,4	701,8	1 015,9	1 015,3	1 014,8	904,0	904,0	904,0	904,0	904,0	904,0	904,0
x_1,1(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,1(3)	495,6	427,0	0,0	0,0	0,0	106,8	105,8	104,8	101,9	100,0	51,2	0,0
x_1,1(4)	0,0	0,0	112,0	112,0	112,0	112,0	112,0	112,0	112,0	112,0	112,0	112,0
v_1,1(1+)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(2+)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(3+)		427,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(4+)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(1-)		427,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(2-)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(3-)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(4-)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(0)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	44,5	101,0
x_1,2(1)	0,0	0,0	0,0	0,0	1,9	688,4	944,0	944,0	944,0	944,0	944,0	944,0
x_1,2(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(3)	1 180,0	1 177,3	1 039,8	1 028,9	1 016,3	352,4	110,6	109,5	106,5	104,5	53,6	0,0
x_1,2(4)	0,0	0,0	114,0	114,0	114,0	114,0	114,0	114,0	114,0	114,0	114,0	114,0
v_1,2(1+)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(2+)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(3+)		1 177,3	1 039,8	1 028,9	1 016,3	240,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(4+)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(1-)		1 179,6	1 060,8	1 060,3	1 057,8	255,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(2-)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(3-)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(4-)		0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
FVAL	-862,8	-862,1	-856,6	-854,4	-852,1	-849,3	-848,7	-848,3	-847,0	-846,2	-842,7	-842,7
W_T	1 281,8	1 279,6	1 263,9	1 257,6	1 251,4	1 241,0	1 240,3	1 239,2	1 235,9	1 233,8	1 223,4	1 222,3

Obr. 5.6: Tabuľka 4

Beta	1,50	1,30	1,20	1,15	1,15	1,10	1,10	1,07	1,07	1,07
	sTC 1%	sTC 1%	sTC 1%	sTC 1%	bezTC	sTC 1%	bez TC	sTC 1%	bez TC	sTC 0,01%
x_0(0)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	11,7	358,0	0,0	599,1	0,0
x_0(1)	899,0	899,0	899,0	899,0	34,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_0(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	620,8	0,0	996,3
x_0(3)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_0(4)	100,0	100,0	100,0	100,0	965,5	971,6	642,0	362,3	400,9	0,0
v_0(1+)	99,0	99,0	99,0	99,0		0,0		0,0		0,0
v_0(2+)	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0		620,8		996,3
v_0(3+)	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0		0,0		17 695,6
v_0(4+)	0,0	0,0	0,0	0,0		871,6		262,3		0,0
v_0(1-)	0,0	0,0	0,0	0,0		800,0		800,0		800,0
v_0(2-)	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0		0,0		0,0
v_0(3-)	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0		0,0		17 695,6
v_0(4-)	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0		0,0		100,0
x_1,1(0)	0,0	501,4	858,1	1 032,9	1 051,1	1 089,1	1 048,4	1 059,4	1 034,0	1 059,4
x_1,1(1)	755,4	365,3	143,7	36,7	28,0	0,0	13,0	0,0	8,1	0,0
x_1,1(2)	0,0	29,5	0,0	0,0	4,6	0,0	2,1	0,0	1,3	0,0
x_1,1(3)	108,3	34,2	5,3	0,0	7,4	0,0	3,4	0,0	2,1	0,0
x_1,1(4)	259,0	189,5	112,0	47,8	29,2	0,0	13,6	0,0	8,5	0,0
v_1,1(1+)	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0		0,0		0,0
v_1,1(2+)	0,0	29,5	0,0	0,0		0,0		0,0		0,0
v_1,1(3+)	108,3	34,2	5,3	0,0		0,0		0,0		32 488,5
v_1,1(4+)	147,0	77,5	0,0	0,0		0,0		0,0		0,0
v_1,1(1-)	260,4	650,5	872,2	979,2		0,0		0,0		0,0
v_1,1(2-)	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0		664,3		1 066,0
v_1,1(3-)	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0		0,0		32 488,5
v_1,1(4-)	0,0	0,0	0,0	64,2		1 088,2		405,8		0,0
x_1,2(0)	362,8	832,7	1 088,9	1 138,6	1 141,4	1 089,1	1 093,5	1 059,4	1 062,1	1 059,4
x_1,2(1)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(3)	680,7	215,4	27,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(4)	114,0	114,0	46,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(1+)	0,0	0,0	0,0	1 223,5		961,9		0,0		0,0
v_1,2(2+)	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0		0,0		0,0
v_1,2(3+)	680,7	215,4	27,7	0,0		0,0		1 588,0		231 722,9
v_1,2(4+)	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0		0,0		0,0
v_1,2(1-)	1 060,8	1 060,8	1 060,8	2 284,3		961,9		0,0		0,0
v_1,2(2-)	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0		689,1		1 105,9
v_1,2(3-)	0,0	0,0	0,0	0,0		0,0		1 588,0		231 722,9
v_1,2(4-)	0,0	0,0	67,3	114,0		1 107,6		413,1		0,0
FVAL	-721,8	-644,2	-599,3	-574,9	-575,0	-550,0	-550,0	-535,0	-535,0	-535,0
W_T	1 246,0	1 198,5	1 169,0	1 143,7	1 145,8	1 100,0	1 099,6	1 070,0	1 069,8	1 070,0

Obr. 5.7: Tabuľka 5

W_T	994,6	1163,5	1163,5	1090	1090	1090	1090	1090
	bezTC	bezTC	sTC 0,0001%	bezTC	sTC 1%	sTC 1,5%	sTC 2%	sTC 2,5%
x_0(0)	1 000,0	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_0(1)	0,0	1 000,0	1 000,0	348	498,0	497,0	396,5	435,0
x_0(2)	0,0	0,0	0,0	652	500,0	500,0	599,6	560,1
v_0(1+)			700,0		198,0	197,0	96,5	135,0
v_0(2+)			0,0		0,0	0,0	99,6	60,1
v_0(1-)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(2-)			500,0		0,0	0,0	0,0	0,0
x_1(0)	1 010,0	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1(1)	0,0	1 050,0	1 050,0	265	522,9	521,9	416,3	456,7
x_1(2)	0,0	0,0	0,0	765	510,0	510,0	611,6	571,3
v_1(1+)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_1(2+)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_1(1-)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_1(2-)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(0)	1 010,0	0,0	0,0	401	0,0	0,0	0,0	190,7
x_1,2(1)	0,0	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0,0	252,4
x_1,2(2)	0,0	1 030,0	1 030,0	636	1 022,8	1 016,8	1 015,9	582,5
v_1,2(1+)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(2+)			1 030,0		502,8	496,8	392,3	0,0
v_1,2(1-)			1 030,0		513,0	512,0	408,4	195,6
v_1,2(2-)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
x_2(0)	1 020,1	0,0	0,0	1 080	1 025,4	811,4	617,4	573,8
x_2(1)	0,0	1 155,0	1 155,0	0	64,8	275,6	457,9	502,4
x_2(2)	0,0	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_2(1+)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_2(2+)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_2(1-)			0,0		510,4	298,4	0,0	0,0
v_2(2-)			0,0		525,3	525,3	630,0	588,5
x_2,2(0)	1 020,1	0,8	0,3	1 079	1 006,2	876,9	752,8	640,1
x_2,2(1)	0,0	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0,0	27,0
x_2,2(2)	0,0	1 091,2	1 091,7	1	63,0	188,0	306,9	391,4
v_2,2(1+)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,2(2+)			1 091,7		0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,2(1-)			1 092,0		543,8	542,8	432,9	448,0
v_2,2(2-)			0,0		472,5	347,5	335,3	208,5
x_2,3(0)	0,1	0,0	0,0	1 064	993,6	850,9	731,2	602,9
x_2,3(1)	1 020,0	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_2,3(2)	0,0	1 081,5	1 081,5	8	70,3	203,9	320,6	440,8
v_2,3(1+)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,3(2+)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,3(1-)			0,0		0,0	0,0	0,0	249,9
v_2,3(2-)			0,0		1 003,6	863,8	746,2	170,9
x_2,4(0)	1 020,1	0,0	0,0	1 085	1 041,3	900,9	783,6	616,3
x_2,4(1)	0,0	768,4	768,2	0	0,0	0,0	0,0	260,0
x_2,4(2)	0,0	333,7	333,9	0	42,6	173,4	287,5	188,8
v_2,4(1+)			768,2		0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,4(2+)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,4(1-)			0,0		0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,4(2-)			768,2		1 051,8	914,6	799,6	434,5
FVAL	9 995 163	1 388 250	1 388 257	1 188 121	1 188 332	1 189 611	1 191 663	1 193 845

Obr. 5.8: Tabuľka 6

W_T	1090	1090	1090	1090	1090	1090	1090
	sTC 3%	sTC 3,5%	sTC 4%	sTC 5%	sTC 8%	sTC 15%	sTC 20%
x_0(0)	200,0	200,0	200	200,0	200,0	200	200,0
x_0(1)	300,0	300,0	300	300,0	300,0	300	300,0
x_0(2)	500,0	500,0	500	500,0	500,0	500	500,0
v_0(1+)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_0(2+)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_0(1-)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_0(2-)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
x_1,1(0)	0,0	1,6	110	202,0	202,0	202	202,0
x_1,1(1)	511,1	508,6	403	315,0	315,0	315	315,0
x_1,1(2)	510,0	510,0	510	510,0	510,0	510	510,0
v_1,1(1+)	196,1	193,6	88	0,0	0,0	0	0,0
v_1,1(2+)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_1,1(1-)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_1,1(2-)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
x_1,2(0)	222,4	202,0	202	202,0	202,0	202	202,0
x_1,2(1)	288,0	309,0	309	309,0	309,0	309	309,0
x_1,2(2)	520,0	520,0	520	520,0	520,0	520	520,0
v_1,2(1+)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_1,2(2+)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_1,2(1-)	21,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_1,2(2-)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
x_2,1(0)	509,5	508,6	501	450,7	358,6	253	204,0
x_2,1(1)	562,2	559,4	443	346,5	346,5	347	346,5
x_2,1(2)	0,0	0,0	119	265,7	357,3	468	525,3
v_2,1(1+)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_2,1(2+)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_2,1(1-)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_2,1(2-)	525,3	525,3	406	259,6	168,0	57	0,0
x_2,2(0)	555,0	485,1	408	357,7	258,3	204	204,0
x_2,2(1)	61,6	98,0	139	197,6	324,1	328	327,6
x_2,2(2)	433,3	465,4	507	503,7	480,0	536	535,5
v_2,2(1+)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_2,2(2+)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_2,2(1-)	470,0	430,9	280	130,0	3,5	0	0,0
v_2,2(2-)	102,2	70,1	29	31,8	55,5	0	0,0
x_2,3(0)	554,3	499,2	498	494,6	485,5	464	429,9
x_2,3(1)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	23,6
x_2,3(2)	491,2	546,0	546	546,0	546,0	546	546,0
v_2,3(1+)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_2,3(2+)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_2,3(1-)	285,1	305,9	306	305,9	305,9	306	282,4
v_2,3(2-)	54,8	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
x_2,4(0)	565,2	508,0	430	379,4	305,1	223	204,0
x_2,4(1)	296,7	318,3	318	318,3	318,3	318	318,3
x_2,4(2)	205,2	241,4	321	371,8	446,5	534	556,4
v_2,4(1+)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_2,4(2+)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_2,4(1-)	0,0	0,0	0	0,0	0,0	0	0,0
v_2,4(2-)	351,2	315,0	236	184,6	109,9	23	0,0
FVAL	1 195 318	1 196 452	1 197 509	1 198 716	1 201 196	1 204 422	1 206 050

Obr. 5.9: Tabuľka 7

	bezTC FU	sTC FU						
		0,1%	1,0%	2,0%	4,0%	6,0%	10,0%	20,0%
x_0(0)	0,0	0,0	0,0	0,0	200,0	200,0	200,0	200,0
x_0(1)	1 000,0	998,8	498,0	496,1	300,0	300,0	300,0	300,0
x_0(2)	0,0	0,0	500,0	500,0	500,0	500,0	500,0	500,0
v_0(1+)		698,8012	198,0	196,1	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(2+)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(1-)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_0(2-)		500	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,1(0)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	202,0	202,0
x_1,1(1)	1 050,0	1 048,7	1 022,8	863,7	509,2	505,6	315,0	315,0
x_1,1(2)	0,0	0,0	0,0	153,2	510,0	510,0	510,0	510,0
v_1,1(1+)		0	499,9	342,8	194,2	190,6	0,0	0,0
v_1,1(2+)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(1-)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,1(2-)		0	510,0	356,8	0,0	0,0	0,0	0,0
x_1,2(0)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	202,0	202,0	202,0
x_1,2(1)	0,0	0,0	0,0	0,0	309,0	309,0	309,0	309,0
x_1,2(2)	1 030,0	1 026,7	1 022,8	1 010,9	714,2	520,0	520,0	520,0
v_1,2(1+)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(2+)		1026,71	502,8	490,9	194,2	0,0	0,0	0,0
v_1,2(1-)		1028,765	513,0	511,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_1,2(2-)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_2,1(0)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	204,0	204,0
x_2,1(1)	1 155,0	1 153,6	1 125,1	1 101,7	560,2	556,1	346,5	346,5
x_2,1(2)	0,0	0,0	0,0	0,0	525,3	525,3	525,3	525,3
v_2,1(1+)		0	0,0	151,6	0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,1(2+)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,1(1-)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,1(2-)		0	0,0	157,8	0,0	0,0	0,0	0,0
x_2,2(0)	159,6	183,4	0,0	0,0	0,0	0,0	204,0	204,0
x_2,2(1)	0,0	0,0	1 063,7	898,3	529,6	525,8	327,6	327,6
x_2,2(2)	932,4	905,3	0,0	160,8	535,5	535,5	535,5	535,5
v_2,2(1+)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,2(2+)		905,303	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,2(1-)		1090,691	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,2(2-)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_2,3(0)	138,1	99,9	0,0	0,0	293,7	491,6	479,3	204,0
x_2,3(1)	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	305,9
x_2,3(2)	943,4	978,0	1 073,9	1 061,5	749,9	546,0	546,0	546,0
v_2,3(1+)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,3(2+)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,3(1-)		0	0,0	0,0	305,9	305,9	305,9	0,0
v_2,3(2-)		100,0402	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
x_2,4(0)	38,9	42,4	0,0	0,0	0,0	204,0	204,0	204,0
x_2,4(1)	741,3	515,7	0,0	0,0	318,3	318,3	318,3	318,3
x_2,4(2)	321,9	539,4	1 094,4	1 081,7	764,2	556,4	556,4	556,4
v_2,4(1+)		515,7243	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,4(2+)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,4(1-)		0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
v_2,4(2-)		559,2169	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
FVAL	-817	-815	-807	-802	-797	-794	-792	-790,0
W_T	1 161	1 158	1 141	1 128	1 113	1 105	1 097	1 094,4

Obr. 5.10: Tabuľka 8

Literatúra

- [1] SIEDE, H. 2000. *Multi-Period Portfolio Optimization with Emphasis on Mean-Variance Criterion*. Bamberg: Difo-Druck GmbH, 2000. ISBN:80-8057-651-3
- [2] MELICHERČÍK, I. - OLŠÁROVÁ, L. - ÚRADNÍČEK, V. 2005. *Kapitoly z finančnej matematiky*. Bratislava, Epos, 2005.
- [3] ŠEVČOVIČ, D. - STEHLÍKOVÁ, B. - MIKULA, K. 2009. *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Bratislava: Nakladateľstvo STU, 2009, p. 9-26. ISBN: 978-80-227-3014-3
- [4] CHEN, A. H. Y. - JEN, F. C. - ZIONTS, S. 1972. The Optimal portfolio policy. *Journal of Business*. 1972, vol.44, p. 51-61.
- [5] FRAUENDORFER, K. - SIEDE, H. 1998. Portfolio selection using multistage stochastic programming. Tech. rep., University of St. Gallen, 1998.
- [6] MARKOWITZ, H. 1952. Portfolio selection. *Journal of Finance*. 1952, vol. 7, p. 77-91.
- [7] MARKOWITZ, H. 1956. The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Navel Research Logistic Quarterly*, vol. 3, p. 111-133.
- [8] MARKOWITZ, H. 1959. *Portfolio selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: Wiley, 1959.
- [9] <http://www.euroekonom.sk/financie/investicne-strategie/teoria-portfolia/>
- [10] http://en.wikipedia.org/wiki/Modern_portfolio_theory
- [11] http://en.wikipedia.org/wiki/Asset_allocation
- [12] http://en.wikipedia.org/wiki/Harry_Markowitz

[13] <http://finance.yahoo.com/>

[14] http://www.ui.savba.sk/math/s_vega_l_anot.doc

[15] <http://www.answers.com/topic/bellman-apos-s-principle-of-optimality>