

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Neparametrické a semiparametrické metódy
odhadu Value at Risk

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2010

Martin Harcek

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Neparametrické a semiparametrické metódy
odhadu Value at Risk

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Martin Harcek

Vedúci diplomovej práce: Doc. Mgr. Marián Grendár, PhD.

Pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Bratislava 2010

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s využitím teoretických vedomostí a s použitím uvedenej literatúry.

Bratislava, apríl 2010

.....

Martin Harcek

Pod'akovanie

Chcel by som sa poďakovať Doc. Mariánovi Grendárovi za odborné vedenie a cenné rady, ktoré mi poskytol pri tvorení tejto práce a mojim rodičom a starým rodičom za pomoc a podporu počas môjho štúdia.

Abstrakt

HARCEK, Martin: Neparametrické a semiparametrické metódy odhadu Value at Risk. [Diplomová práca] - Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. - Vedúci diplomovej práce: Doc. Mgr. Marián Grendár, PhD., - Bratislava: FMFI UK, 2010. /73 s./

Práca sa zaoberá neparametrickými a semiparametrickými metódami odhadu rizikovej miery „Value at Risk“. Z neparametrických metód je v práci obsiahnutá metóda dvojitého jadra a historickej simulácie, zo semiparametrických metód podmienený autoregresný model a metóda filtrovanej historickej simulácie. V práci sú okrem spomínaných modelov spracované kritériá pre ich kvalitatívne hodnotenie a vzájomné porovnanie. V praktickej časti práce sú uvedené metódy aplikované na štyri testovacie súbory denných výnosov aktív s cieľom identifikácie najvhodnejšieho modelu. Okrem štandardných hodnotiacich kritérií je v práci hodnotený aj rozptyl a vývoj kumulatívnej priemernej hodnoty odhadov v čase. Okrajovo je skúmaný aj vplyv negatívnych šokov na ceny aktív, ktoré sú charakteristické pre obdobia recesie, na kvalitu predikcií generovaných jednotlivými modelmi.

Kľúčové slová: Value at Risk, kvantilová regresia, CAViaR, filtrovaná historická simulácia, metóda dvojitého jadra

Obsah

Úvod	7
1 Riadenie rizík vo finančníctve	8
1.1 Definícia rizík a základné delenie	8
1.2 Legislatíva upravujúca riadenie rizík	9
1.2.1 Basilejská dohoda	9
1.2.2 Opatrenie Národnej banky Slovenska	10
1.3 Riadenie rizík a finančná kríza	10
2 Value at Risk ako miera trhového rizika	12
2.1 Definícia VaR	12
2.2 Metódy odhadu	13
2.2.1 Parametrické modely	14
2.2.2 Neparametrické modely	15
2.2.3 Semiparametrické modely	15
2.3 Časový horizont odhadu VaR	15
2.4 Individuálny vs. portfóliový odhad	15
2.5 Kritika VaR a alternatívne miery	16
3 Podmienенý autoregresný model	17
3.1 Všeobecný tvar CAViaR modelov	17
3.2 Základné špecifikácie CAViaR modelov	18
3.2.1 Adaptívny model	19
3.2.2 Symetrický model	20
3.2.3 Asymetrický model	20
3.2.4 Nepriamy GARCH(1,1)	20
3.2.5 AR(1)-GARCH(1,1) model	21
3.3 Kvantilová regresia	21

4	Metóda dvojitého jadra	23
4.1	Konštrukcia lokálnej konštantnej váženej kvantilovej regresie	25
4.2	Rozšírenie na lokálnu lineárnu váženú kvantilovú regresiu	25
4.3	Konštrukcia modelu dvojitého jadra	26
5	Historická a filtrovaná historická simulácia	27
5.1	Historická simulácia	27
5.2	Filtrovaná historická simulácia	29
6	Parametrické metódy	31
6.1	Parametrické modely s predpokladom normálneho rozdelenia	32
6.2	Parametrické modely s predpokladom Studentovho t rozdelenia	33
7	Meranie výkonnosti VaR modelov	36
7.1	Spätné testovanie modelov	37
7.2	Kupiecov test nepodmieneného krytia	37
7.3	Christoffersenov test podmieneného krytia	38
7.4	Analýza priemernej predikovanej hodnoty VaR	39
7.5	Analýza rozptylu predikovanej hodnoty VaR	39
8	Ciele práce	40
9	Empirická analýza VaR modelov	41
9.1	Definícia merania	41
9.2	Analyzované údaje	42
10	Výsledky merania	45
10.1	Modely CAViaR	45
10.2	Model dvojitého jadra	52
10.3	Modely historickej a filtrovanej historickej simulácie	57
10.4	Parametrické modely	62
10.5	Vzájomné porovnanie modelov	68
	Záver	71
	Zoznam použitej literatúry	72
	Príloha	74

Úvod

Meranie finančných rizík je v súčasnosti dôležitým procesom riadenia každej finančnej inštitúcie. V práci sa zaoberáme jednou z najznámejších rizikových mier, tzv. „hodnotou v riziku“ („Value at Risk“), so zameraním na neparametrické a semi-parametrické metódy jej výpočtu. Práca pozostáva z desiatich kapitol.

V prvých dvoch kapitolách sme spracovali základné teoretické poznatky o finančných rizikách a tiež o miere „Value at Risk“, jej vlastnostiach a rôznych prístupoch jej efektívneho odhadu. Základné princípy fungovania vybraných metód sme bližšie vysvetlili v tretej až šiestej kapitole, zamerali sme sa na metódy podmienenej autoregresnej hodnoty v riziku, metódu dvojitého jadra, historickú a filtrovanú historickú simuláciu a tiež parametrické modely s predpokladom normálneho a Studentovho t rozdelenia. V siedmej kapitole sme definovali hodnotiace kritériá, ktoré sme použili pre vzájomné porovnanie jednotlivých modelov v praktickej časti práce.

Ôsma kapitola obsahuje definované ciele práce. Praktická časť je obsiahnutá v deviatej a desiatej kapitole, obsahuje vyhodnotenie výsledkov jednotlivých modelov podľa kritérií definovaných v siedmej kapitole. V desiatej kapitole sú tiež spracované výsledky vzájomného porovnania najpresnejších modelov a vplyv negatívnych šokov na ceny aktív na kvalitu odhadov.

Kapitola 1

Riadenie rizík vo finančníctve

1.1 Definícia rizík a základné delenie

Vyhodnocovanie a riadenie rizík je v súčasnosti veľmi dôležitým procesom v každej finančnej inštitúcii. Hlavnou úlohou týchto procesov je efektívne kvantifikovať či už súčasné, alebo aj budúce možné riziká vyplývajúce z aktívnej participácii inštitúcie na finančných trhoch a tieto tzv. „finančné riziká“ kontrolovať.

S každou investičnou činnosťou je do určitej miery spojené riziko, že počiatočná investícia nebude navrátená. Pre lepšie pochopenie uvedieme niekoľko príkladov:

- v prípade poskytnutia pôžičky musí veriteľ čeliť riziku, že úver nebude protistranou splatený,
- každá investícia na akciových trhoch je spojená s rizikom nečakaného poklesu ceny aktíva a z toho vyplývajúcou stratou investovaných prostriedkov,
- banka musí neustále analyzovať veľkosti vkladov a výberov a vždy musí mať dostatočné množstvo likvidity¹ na uspokojenie očakávaného množstva výberov v každom čase,
- s každou investíciou v cudzej mene je spojené riziko, že investíciu ohrozí nečakaný vývoj výmenného kurzu cudzej a domácej meny,
- s každou bankovou operáciou je spojené riziko podvodu a z toho vyplývajúcou stratou finančných prostriedkov.

¹Miera momentálnej schopnosti inštitúcie uhradiť splatné záväzky (schopnosť okamžitej premeny aktív na pasíva).

Vyššie uvedené situácie naznačujú základné delenie finančných rizík, ktoré uvádzame v nasledovnom texte:

- o *kreditné riziko* - riziko, že obchodujúca protistrana nebude schopná splatiť svoje záväzky (insolventnosť), kreditné riziko je spojené najmä s poskytovaním úverov,
- o *trhové riziko* - trhové riziko je spojené s expozíciou inštitúcie na finančných trhoch, v prípade prudkej zmeny hodnoty portfólia môže inštitúcia stratiť investované prostriedky,
- o *riziko likvidity* - je spojené s potrebou neustále vlastniť dostatok finančných prostriedkov na úhradu záväzkov, či už v krátkodobom, alebo aj dlhodobejšom horizonte,
- o *kurzové riziko* - súvisí s držaním investícií v cudzích menách, v prípade nepriaznivého vývoja výmenného kurzu môže inštitúcia stratiť investované prostriedky,
- o *operačné riziko* - každý proces vo finančnej inštitúcii nesie so sebou riziko straty finančných prostriedkov, či už ako dôsledok chybného procesu, alebo ako zle zabezpečeného procesu.

1.2 Legislatíva upravujúca riadenie rizík

Procesy riadenia vyššie popísaných rizík sú v súčasnosti upravované platnou legislatívou na národnej, ale aj nadnárodnej úrovni. V Slovenskej Republike je garantom dodržiavania platnej legislatívy Národná banka Slovenska.

1.2.1 Basilejská dohoda

V súčasnosti asi najvýznamnejším dokumentom upravujúcim procesy riadenia rizík v bankovom sektore je „Basilejská dohoda o kapitáli II“² (skratka BASEL II), ktorá bola vydaná Basilejskou komisiou pre bankový dohľad (skratka BCBS³) a vstúpila do platnosti v roku 2004 (dokument vychádzal z dovtedy platného BASEL I vydaného v roku 1974).

²Voľne preložené z anglického názvu „The Basel Capital Accord II“.

³Basel Committee on Banking Supervision

Komisia zasadá v Banke pre medzinárodné zúčtovanie (skratka BIS⁴), organizácii združujúcej národné banky so sídlom v Basileji⁵.

Dokument BASEL II vznikol za účelom štandardizácie a stabilizácie bankového sektora na nadnárodnej úrovni. Obsahuje odporúčania pre riadenie rizík zhrnuté do troch tematických celkov (tzv. pilierov):

- o **Pilier I** - definuje minimálne kapitálové požiadavky pre rôzne stupne kreditného, operačného a trhového rizika a tiež postupy pre vyhodnotenie jednotlivých druhov rizík (ako hlavnú mieru pre stanovenie trhového rizika dokument definuje tzv. „hodnotu v riziku“, ktorou sa zaoberáme v tejto práci).
- o **Pilier II** - odporúčania pre regulatórnu kontrolu a dohľad nad procesmi riadenia rizík v bankových inštitúciách na národnej úrovni.
- o **Pilier III** - odporúčania pre zabezpečenie prístupu k informáciám o rizikovej expozícii jednotlivých finančných inštitúcií.

1.2.2 Opatrenie Národnej banky Slovenska

V Slovenskej Republike upravuje prístupy k meraniu finančných rizík Opatrenie Národnej banky Slovenska z 20. decembra 2006 č. 15/2006, ktorým sa mení a dopĺňa opatrenie č. 12/2004. Toto vychádza priamo z dokumentu BASEL II a upravuje požiadavky kladené na riadenie rizík na národnej úrovni.

1.3 Riadenie rizík a finančná kríza

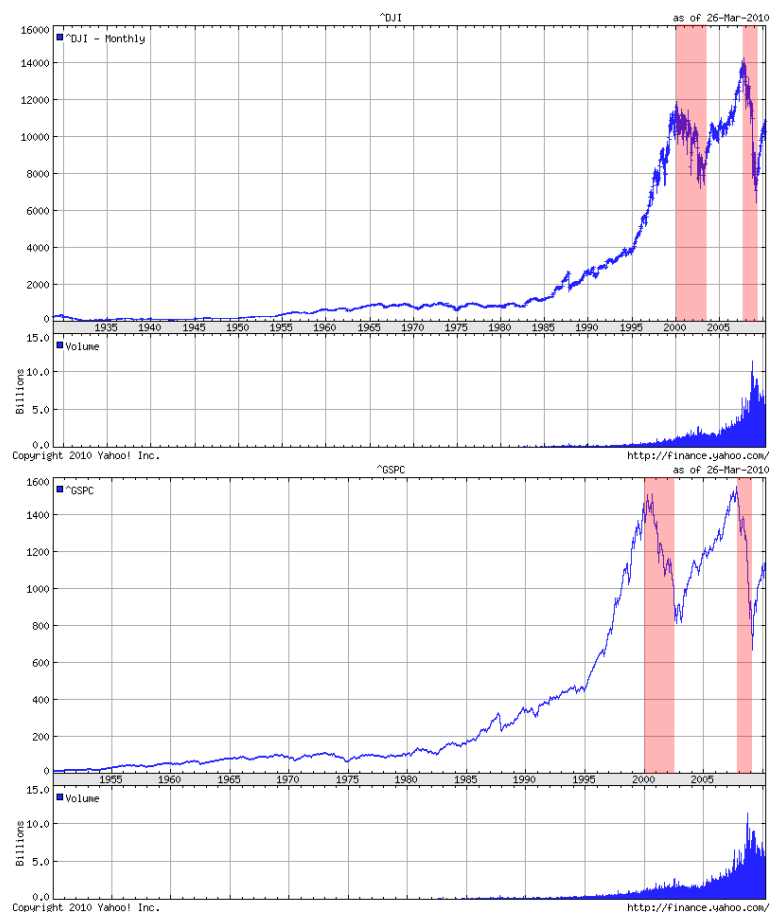
Finančné trhy prešli v uplynulých desaťročiach výraznými zmenami. Vplyvom globalizácie a vstupom modernej výpočtovej techniky do finančného sektora narástla volatilita na trhoch do ešte donedávna nevídaných hodnôt. Na obrázku 1.1 uvádzame graf vývoja zatváracích cien indexov Dow Jones Industrial a S&P 500, na ktorom je nárast volatility pomerne zrejmý.

V spojení so zväčšovaním neistoty svet zažil v uplynulých desaťročiach niekoľko krachov na svetových burzách, ktoré sú známe pod jednotným označením „finančné krízy“. Práve tie ukázali, akú dôležitú úlohu má dôsledná kontrola rizík v procesoch

⁴The Bank for International Settlements

⁵V súčasnosti má BIS 56 členov prevažne z Európy a z Ázie, vrátane Slovenska (zdroj: www.bis.org).

každej finančnej inštitúcie. História už niekoľkokrát dokázala, že podcenenie riadenia rizík môže mať pre inštitúcie zničujúce následky bez ohľadu na ich veľkosť⁶.



Obr. 1.1: Vývoj indexov Dow Jones Industrial (horný graf) a S&P 500 (dolný graf) od tridsiatych rokov minulého storočia po súčasnosť. Na grafe sú červeným pozadím označené obdobia recesie tzv. „dot-com“ krízy z roku 2000 a tzv. „hypotekárnej“ krízy z roku 2008 (zdroj: *finance.yahoo.com*)

⁶Krach investičných bánk Lehman Brothers, Bear Stearns a ostatných viac ako 100 amerických bánk v roku 2009 (zdroj: Agentúra SITA).

Kapitola 2

Value at Risk ako miera trhového rizika

2.1 Definícia VaR

Pod názvom „Value at Risk“¹ (skratka VaR) sa ukrýva komplexný systém pre hodnotenie rizík vo finančnom sektore, stručne by sme VaR mohli definovať ako „mieru rizika“.

Táto miera sa vo svete teší veľkej obľube vďaka svojej jednoduchosti (VaR dokáže zhrnúť viacero rizikových faktorov do jediného čísla) a univerzálnosti (možno ju aplikovať na rôzne druhy rizík, či už ide o riziká kreditné, trhové, operačné a iné), aj keď je terčom rozsiahlej kritiky zo strany odbornej verejnosti.

Odhad VaR predstavuje jediné číslo, ktoré navyše nie je bezrozmerné. Výstupom VaR modelu je hodnota (suma) vyjadrená v príslušnej mene, ktorá sa podľa VaR nachádza v riziku.

Miera VaR vo všeobecnosti odpovedá na otázku:

„Ak *je* zajtra „zlý deň“ na finančných trhoch, akú *minimálnu* stratu na mojom portfóliu mám očakávať?“.

Resp. na jej obmenu:

„Ak zajtrajší deň *nie je* „zlým dňom“ pre finančné trhy, akú *maximálnu* stratu stratu na mojom portfóliu mám očakávať?“.

Pre vyčíslenie miery VaR je potrebné zvoliť parameter tzv. „hladiny významnosti“ (označujeme θ), ktorý vyjadruje pravdepodobnosť, resp. očakávanú frekvenciu príchodu „zlého dňa“. Podľa zvolenej hladiny θ sa odhaduje $\theta\%$ VaR. V praxi

¹Voľne preložené ako „Hodnota v riziku“.

sa VaR najčastejšie počíta pre hladiny významnosti 1% a 5%, prípadne ešte menšie pravdepodobnosti ako 1%.

Hodnota 1% VaR predstavuje hraničnú stratu na portfóliu, ktorá na 99% nebude prekročená v čase platnosti predikcie. Na druhej strane to ale znamená, že s pravdepodobnosťou 1% bude strata väčšia² ako hodnota VaR, avšak o veľkosti tejto straty už miera neposkytuje žiadnu informáciu.

Z vyššie uvedených vlastností VaR vyplýva, že strata v čase t by mala byť väčšia ako hodnota $\theta\%$ VaR pre čas t (označme $\text{VaR}_t(\theta)$) s pravdepodobnosťou θ :

$$P(r_t < -\text{VaR}_t(\theta) | \Omega_t) = \theta, \quad (2.1)$$

kde r_t je výnos analyzovaného aktíva v čase t a Ω_t je informačná množina v čase t . Tento vzťah zodpovedá definícii zápornej hodnoty θ -kvantilu rozdelenia výnosov v čase t :

$$\text{VaR}_t(\theta) = -F_{\Omega_t}^{-1}(\theta), \quad (2.2)$$

kde $F_{\Omega_t}^{-1}(\cdot)$ je kvantilová funkcia rozdelenia výnosov v čase t .

Poznámka 1. *Hodnota VaR vyjadruje stratu, ktorá bude v čase t prekročená s určitou pravdepodobnosťou. Aj keď strata predstavuje záporné číslo, z historických dôvodov sa VaR definuje ako kladné číslo, preto je VaR definovaná ako záporná hodnota kvantilu (obrázok 2.1).*

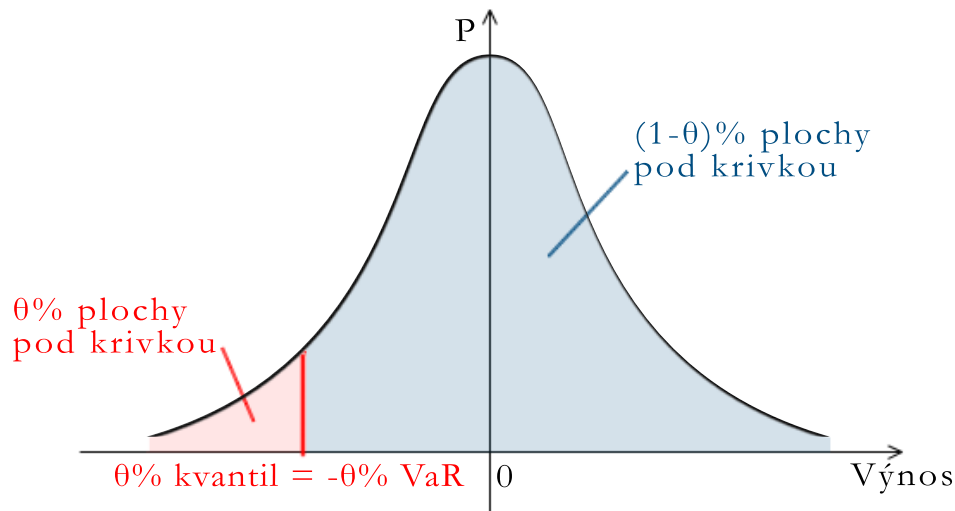
2.2 Metódy odhadu

Aj keď samotná idea fungovania VaR je pomerne jednoduchá a priamočiara, samotný odhad hodnoty VaR je pomerne náročná matematická úloha. Ak v čase t chceme predikovať hodnotu VaR pre čas $t+1$ ($\text{VaR}_{t+1}(\theta)$), potrebujeme odhadnúť rozdelenie výnosov v čase $t+1$. Aj keď bolo od objavenia tejto miery predstavených viacero metód výpočtu s rôznym stupňom výpočtovej zložitosti pracujúcich na odlišných princípoch, ich presnosť je stále predmetom rozsiahleho výskumu.

Podľa stupňa parametrizácie výpočtových modelov by sme tieto mohli rozdeliť do troch základných skupín:

²V definícii papametra θ literatúra nie je úplne jednotná. V niektorých prácach je parameter θ definovaný ako pravdepodobnosť, že hodnota $\theta\%$ VaR *nebude prekročená* (v prácach neuvažujú $\theta = 5\%$ a $\theta = 1\%$, ale $\theta = 95\%$ a $\theta = 99\%$). V tejto práci θ vždy chápeme ako pravdepodobnosť *prekročenia* hodnoty VaR.

Vzt'ah medzi VaR a rozdelením výnosov

Obr. 2.1: Miera $\theta\%$ VaR ako záporná hodnota θ -kvantilu rozdelenia výnosov portfólia

- *parametrické modely* - patria sem metódy, ktoré sú závislé na odhade parametrov,
- *neparametrické modely* - odhad VaR nie je závislý na dodaných parametroch,
- *semiparametrické modely* - tieto metódy sú prienikom medzi neparametrickými a parametrickými metódami.

Viac informácií o jednotlivých typoch VaR modelov uvádzame v nasledovnom texte.

2.2.1 Parametrické modely

Parametrické modely predpokladajú, že analyzované výnosy pochádzajú zo zvoleného pravdepodobnostného rozdelenia. To je na výnosy nakalibrované vhodným odhadom jedného, prípadne aj viacerých parametrov (v závislosti od použitého rozdelenia). Po zostrojení odhadu tohto rozdelenia je dopočítaná záporná hodnota θ -kvantilu.

V praxi sa najčastejšie pre odhad rozdelenia výnosov používajú normálne rozdelenie, Studentovo t rozdelenie, lognormálne a prípadne aj iné. Slabou stránkou parametrických metód sú predpoklady kladené na rozdelenie výnosov.

2.2.2 Neparametrické modely

Neparametrické modely pracujú s empirickým rozdelením výnosov (historická simulácia, metóda dvojitého jadra), prípadne s modifikovaným rozdelením výnosov (vážená historická simulácia). Najväčšou výhodou týchto metód sú minimálne, v niektorých prípadoch dokonca žiadne požiadavky na rozdelenie analyzovaných údajov.

2.2.3 Semiparametrické modely

Do tejto skupiny je zaradená najmä metóda tzv. „podmienenej autoregresnej hodnoty v riziku“, ktorá nepracuje s celým rozdelením výnosov, miesto toho modeluje priamo vývoj θ -kvantilu v čase. Autoregresný model je nakalibrovaný k analyzovanému súboru údajov prostredníctvom parametrov, z čoho vyplýva jeho semiparametricita.

2.3 Časový horizont odhadu VaR

V tejto práci budeme o VaR uvažovať ako o miere trhového rizika predikovanej na 1 deň dopredu (tzv. „jednodenný“ VaR). Okrem jednoduchých predikcií sa v praxi používajú aj predikcie na desať, prípadne aj viac dní, ktoré vychádzajú z jednoduchých odhadov, avšak pre ich konečný výpočet sa zväčša používajú iné prístupy ako tie, ktoré sú spracované v tejto práci.

2.4 Individuálny vs. portfóliový odhad

VaR hodnotu môžeme predikovať pre jedno aktívum (tzv. „individuálny prístup“), alebo aj pre celé portfólio aktív (tzv. „portfóliový prístup“). V tejto práci budeme o VaR uvažovať ako o miere rizika pre jedno aktívum. Aj keď niektoré zo spracovaných metód ponúkajú jednoduché rozšírenie na mieru rizika pre viaceré aktíva, takéto zameranie by presahovalo rozsah tejto práce a preto ho ponechávame pre ďalší výskum (portfóliový odhad VaR parametrickou tzv. „variačno-kovariačnou“ metódou bol spracovaný napr. v práci Štalmach (2007), odhad s použitím tzv. „kopulových“ funkcií napr. v práci Potisková (2009)).

2.5 Kritika VaR a alternatívne miery

Kritici VaR argumentujú, že VaR neposkytuje o miere rizika žiadnu použiteľnú informáciu: VaR informuje iba o strate, ktorá nebude s určitou pravdepodobnosťou prekročená, no o skutočnej veľkosti straty VaR nepodáva žiadnu informáciu. Na druhej strane označenie VaR ako „miery rizika“ môže bez dôsledného porozumenia tejto miere navádzať k nesprávnemu pocitu, že VaR vyjadruje stratu maximálnu. Nesprávna interpretácia tejto rizikovej miery môže viesť riadiacich pracovníkov finančných inštitúcií k rizikovejším rozhodnutiam.

VaR býva kritizovaná aj kvôli tomu, že nespĺňa vlastnosti tzv. „koherentnej rizikovej miery“ (viď Artzner, Delbaen, Eber a Heath, 1998).

Vyššie spomenuté nedostatky sa u VaR nedajú odstrániť, nakoľko vychádzajú priamo z princípu fungovania tejto miery. To spôsobilo vývoj alternatívnych rizikových mier, ktorých existuje v súčasnosti už niekoľko. Najznámejšou (po VaR) je asi miera „očakávanej straty“ (skratka ES³), ktorá vyjadruje priemernú stratu, ktorú možno očakávať pri prekročení hodnoty VaR. ES spĺňa aj vlastnosti koherentnej rizikovej miery.

³Expected Shortfall

Kapitola 3

Podmienený autoregresný model

Väčšina metód výpočtu VaR popísaných v predošlej kapitole je založených na princípe odhadu celého rozdelenia výnosov aktíva, z ktorého je potrebné dopočítať príslušný θ -kvantil. Na odlišnom princípe funguje metóda tzv. „podmienenej autoregresnej hodnoty v riziku“ (skratka CAViaR¹), ako ju nazvali jej autori Engle a Manganelli (2004).

CAViaR pre výpočet $\theta\%$ VaR nemodeluje celé rozdelenie výnosov aktíva, ale iba vývoj θ -kvantilu v čase. Tento pomerne inovátorský prístup k riešeniu problému odhadovania VaR prináša hneď niekoľko výhod:

- modely CAViaR netrpia žiadnymi apriórnymi predpokladmi o rozdelení výnosov, ako napríklad nezávislosť výnosov a nemennosť ich rozdelenia v čase,
- modely CAViaR obsahujú autoregresné členy, ktorých úlohou je modelovať autokoreláciu vstupných premenných, ktorá je charakteristická pre finančné časové rady (zhlukovanie volatility, heteroskedasticita).

3.1 Všeobecný tvar CAViaR modelov

Pred predstavením základných špecifikácii CAViaR modelov si kvôli zrozumiteľnosti a lepšej orientácii v použitom značení zadefinujeme základné pojmy:

Označme $\{r_t\}_{t=1}^T$ postupnosť výnosov aktíva s počtom pozorovaní T . Nech θ je pravdepodobnosť prekročenia hodnoty $\theta\%$ VaR výnosom r_t v ľubovoľnom čase t , x_t je vektor pozorovateľných premenných v čase t a $\beta(\theta) \equiv \beta$ je vektor neznámych parametrov závislý od θ . Nech $q(x_{t-1}, \beta) \equiv q_t(\beta)$ označuje θ -kvantil podmieneného

¹Conditional Autoregressive Value at Risk

rozdelenia výnosov portfólia (za podmienky x) v čase t , inak povedané, $q_t(\beta)$ predstavuje jednoduchú² predikciu kvantilu pre čas t .

Mieru rizika $\text{VaR}_t(\beta)$ pre dané portfólio v čase t definujeme ako:

$$\text{VaR}_t(\beta) = -q_t(\beta) \quad (3.1)$$

Poznámka 2. Mieru rizika $\text{VaR}_t(\cdot)$ sme definovali ako zápornú hodnotu kvantilovej funkcie $q_t(\cdot)$. V ďalšom texte, kvôli zjednodušeniu matematických zápisov, miestami abstrahujeme od miery VaR, ktorá je predmetom nášho skúmania, a budeme narábať iba s kvantilovou funkciou $q_t(\cdot)$, keďže priamy vzťah medzi oboma veličinami je zo vzťahu 3.1 zrejmý.

Zovšeobecnený tvar CAViaR modelov vyjadruje nasledovný predpis:

$$q_t(\beta) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i q_{t-i}(\beta) + \sum_{j=1}^n \alpha_{m+j} l(x_{t-j}, \delta),$$

kde $\beta^T = (\alpha^T, \gamma^T, \delta^T)$ a $l(\cdot)$ je funkcia pozorovateľných premenných x_t .

Autoregresné členy $\alpha_i q_{t-i}(\beta)$ zabezpečujú plynulý vývoj modelovaného kvantilu v čase. Úlohou členov $\alpha_{m+j} l(x_{t-j}, \delta)$ je pripojiť modelovaný kvantil $q_t(\beta)$ k informačnej množine. Najjednoduchšou voľbou x_t je samotná, v čase o jedna posunutá (tzv. „lagovaná“) hodnota výnosu aktíva (Engle a Manganelli, 2004).

Empirické štúdie VaR ukázali, že je vhodné zostrojiť model tak, aby hodnota VaR bola symetricky ovplyvňovaná absolútnou hodnotou výnosu aktíva $|r_{t-1}|$ (Duffie a Singleton, 2003). To znamená, že hodnota VaR_t by sa mala zvýšiť, ak je výnos r_{t-1} extrémne nízky, ale taktiež by sa mala zvýšiť aj v prípade, ak je výnos r_{t-1} extrémne vysoký (dôvodom pre uvedenú vlastnosť správania modelu VaR je zvýšená volatilita výnosov portfólia ako dôsledok extrémnych výnosov v minulosti).

3.2 Základné špecifikácie CAViaR modelov

V tejto časti si predstavíme štyri základné špecifikácie CAViaR modelov, ktoré vo svojej práci navrhli Engle a Manganelli (2004) a jednu špecifikáciu, ktorá bola predstavená v práci Kuester, Mittnik a Paolella (2006).

²V prípade, že pracujeme s dennými výnosmi.

3.2.1 Adaptívny model

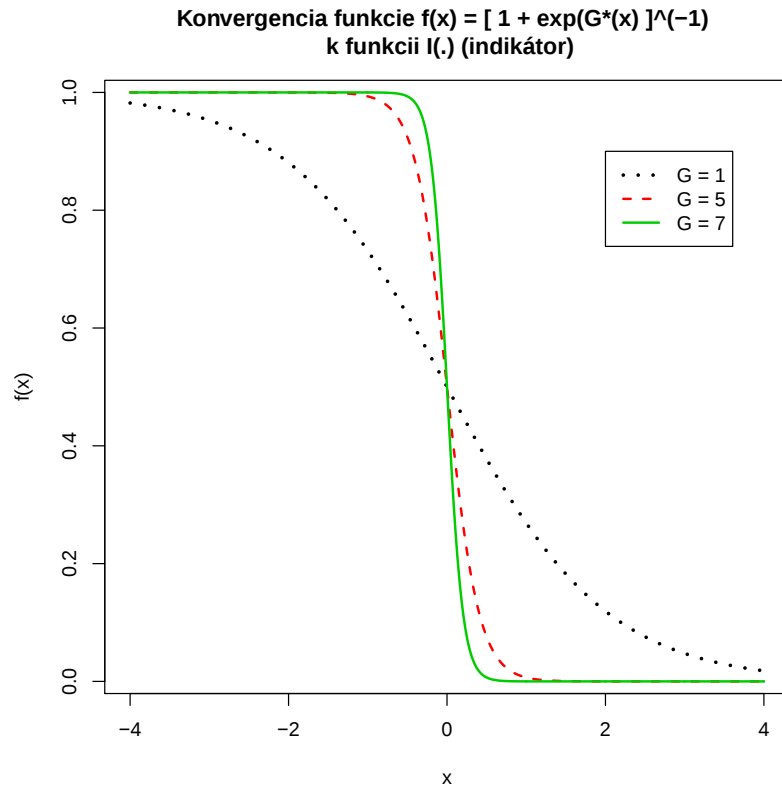
Adaptívny model je definovaný nasledovnou autoregresnou rovnicou:

$$q_t(\beta_1) = q_{t-1}(\beta_1) + \beta_1 \left(\left(1 + \exp \left(G(r_{t-1} - q_{t-1}(\beta_1)) \right) \right)^{-1} - \theta \right),$$

kde $G \in (0, \infty)$ je voľný parameter. Stojí za povšimnutie, že ak $G \rightarrow \infty$, posledný člen adaptívneho modelu konverguje skoro všade ku:

$$\beta_1 \left(I(r_{t-1} \leq q_{t-1}(\beta_1)) - \theta \right),$$

kde $I(\cdot)$ označuje funkciu typu „indikátor“³. Pre konečné G je uvedený model „vyhladená“ verzia schodovitej funkcie, ako je naznačené na obrázku 3.1.



Obr. 3.1: Konvergenca posledného člena adaptívneho modelu k funkcii „indikátor“ $I(r_{t-1} - q_{t-1}(\beta_1) \leq 0)$

Adaptívny model reaguje na zmeny výnosov aktíva nasledovne: vždy, keď bola hodnota VaR v čase $t - 1$ prekročená, v čase t sa zvýši, ale keď hodnota VaR prekročená nebola, v čase t sa zníži veľmi jemne. Takéto správanie modelu znižuje

³Funkcia indikátor $I(\cdot)$ vráti hodnotu 1, ak je podmienka v argumente splnená, inak vráti hodnotu 0.

pravdepodobnosť výskytu dlhších sekvencií prekročení hodnoty VaR, ale na druhej strane taktiež zabraňuje situácii, kedy by hodnota VaR nebola prekročená vôbec. V prípade prekročenia hodnoty VaR výnosom aktíva model reaguje rovnako, bez ohľadu na to, či bola hranica prekročená výrazne alebo iba jemne a vďaka členu $[1 + \exp(G[r_{t-1} - q_{t-1}(\beta_1)])]^{-1}$ model reaguje aj na hodnoty výnosov r_{t-1} , ktoré sa k hodnote $q_{t-1}(\cdot)$ dostatočne priblížili bez nutnosti jej prekročenia (závisí od voľby parametra G).

3.2.2 Symetrický model

Symetrický CAViaR je definovaný autoregresnou rovnicou:

$$q_t(\beta) = \beta_1 + \beta_2 q_{t-1}(\beta) + \beta_3 |r_{t-1}|.$$

Uvedená špecifikácia CAViaR modelu reaguje rovnakým spôsobom (symetricky) na rast, resp. pokles hodnoty aktíva v čase $t - 1$. S rastúcimi výchylkami výnosov r_{t-1} rastie aj volatilita aktíva, preto model hodnotu VaR v takýchto prípadoch zvýši.

3.2.3 Asymetrický model

Asymetrický CAViaR model je zovšeobecnením symetrického modelu. Definovaný je rovnicou:

$$q_t(\beta) = \beta_1 + \beta_2 q_{t-1}(\beta) + \beta_3 (r_{t-1})^+ + \beta_4 (r_{t-1})^-,$$

kde $(x)^+ = \max(x, 0)$ a $(x)^- = -\min(x, 0)$. Na rozdiel od predošlej (a aj nasledujúcej) špecifikácie model nereaguje symetricky na rast, resp. pokles hodnoty aktíva v čase $t - 1$. Vďaka „rozkladu“ absolútnej hodnoty výnosu v čase $t - 1$ v symetrickom modeli na členy $(r_{t-1})^+$ a $(r_{t-1})^-$ umožňuje táto špecifikácia použitie rôznych koeficientov β_3 a β_4 , čoho dôsledkom je rôzna citlivosť modelu na výnosy s opačnými znamienkami.

3.2.4 Nepriamy GARCH(1,1)

Táto špecifikácia je definovaná autoregresnou rovnicou:

$$q_t(\beta) = \left(\beta_1 + \beta_2 q_{t-1}^2(\beta) + \beta_3 r_{t-1}^2 \right)^{1/2}.$$

Model reaguje rovnako (symetricky) na rast, resp. pokles hodnoty aktíva v čase $t - 1$ (Engle a Manganelli, 2004).

3.2.5 AR(1)-GARCH(1,1) model

Kuester, Mittnik a Paolella (2006) vo svojej práci rozšírili modely triedy CAViaR o špecifikáciu zachytávajúcu vývoj strednej hodnoty výnosov v čase. Táto je priamym zovšeobecnením modelu Nepriamy GARCH(1,1).

Na zachytenie vývoja strednej hodnoty použijú AR(1) proces:

$$r_t = \alpha r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

ktorý po zapojení do GARCH(1,1) procesu definuje rovnicu AR(1)-GARCH(1,1) špecifikácie:

$$q_t(\beta) = -\alpha r_{t-1} + (\beta_0 + \beta_1(\alpha r_{t-2} - q_{t-1}(\beta))^2 + \beta_2(r_{t-1} - \alpha r_{t-2})^2)^{1/2}.$$

3.3 Kvantilová regresia

Špecifikácie CAViaR modelov popísané v predošlom texte obsahujú vektor parametrov β , ktorého odhad nie je triviálny. Pre zopakovanie uvedieme, že r_t sme označili výnosy portfólia v čase t , $q_t(\beta)$ zápornú hodnotu predikcie VaR pre čas t (viď rovnicu 3.1) a θ pravdepodobnosť prekročenia hodnoty $\theta\%$ VaR v ľubovoľnom čase t . Vektor parametrov β odhadujeme s ohľadom na parameter θ . Pre odhad použijeme metódu nelineárnej kvantilovej regresie, ktorej autormi sú Koenker a Bassett (1978).

Koenker a Bassett ukázali, ako možno empirický kvantil rozšíriť na lineárny regresný model. Nech $r_1, \dots, r_T$ sú pozorovania náhodnej premennej. Potom empirický θ -kvantil, kde $\theta \in (0, 1)$, je definovaný ako riešenie optimalizačnej úlohy:

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{t:r_t \geq \beta} \theta |r_t - \beta| + \sum_{t:r_t < \beta} (1 - \theta) |r_t - \beta| \right\}.$$

Rozšírenie na kvantilovú regresiu zostrojíme nasledovne. Uvažujme vzorku pozorovaní $r_1, \dots, r_T$ generovaných procesom:

$$\varepsilon_{t\theta} = r_t - x_t^T \beta^0, \quad \text{Quant}_\theta(\varepsilon_{t\theta} | x_t) = 0,$$

kde x_t je vektor regresorov a $\text{Quant}_\theta(\varepsilon_{t\theta} | x_t)$ je podmienený θ -kvantil náhodnej zložky $\varepsilon_{t\theta}$ za podmienky x_t . θ regresný kvantil je potom definovaný ako riešenie optimalizačnej úlohy:

$$\min_{\beta \in \mathbb{R}^d} \left\{ \sum_{t:r_t \geq x_t^T \beta} \theta |r_t - x_t^T \beta| + \sum_{t:r_t < x_t^T \beta} (1 - \theta) |r_t - x_t^T \beta| \right\}.$$

Vyššie uvedenú definíciu rozšírime pre naše potreby nasledovne: uvažujme funkciu $q_t(\beta)$, kde $\beta \in \mathbb{R}^d$. Odhad θ regresného kvantilu je potom definovaný ako riešenie úlohy:

$$\min_{\beta} \frac{1}{T} \left\{ \sum_{t:r_t \geq q_t(\beta)} \theta |r_t - q_t(\beta)| + \sum_{t:r_t < q_t(\beta)} (1 - \theta) |r_t - q_t(\beta)| \right\}.$$

Pokiaľ je funkcia $q_t(\beta)$ lineárna v β , na nájdenie β je možné použiť metódy lineárneho programovania. Ak je však funkcia $q_t(\beta)$ nelineárna v β , úlohu je nutné riešiť ako úlohu nelineárneho programovania, čo môže byť problematické kvôli členu s absolútnou hodnotou, vďaka ktorej je účelová funkcia optimalizačnej úlohy nediferencovateľná.

Absolútnu hodnotu môžeme rozložiť na dva členy pomocou členov $(x)^+ = \max(x, 0)$ a $(x)^- = -\min(x, 0)$ a upraviť tak účelovú funkciu na tvar s využitím funkcie indikátor (Picková, 2008):

$$\begin{aligned} & \min_{\beta} \frac{1}{T} \left\{ \sum_{t:r_t \geq q_t(\beta)} \theta |r_t - q_t(\beta)| + \sum_{t:r_t < q_t(\beta)} (1 - \theta) |r_t - q_t(\beta)| \right\} \\ &= \min_{\beta} \frac{1}{T} \left\{ \sum_{t=1}^T \left[I(r_t \geq q_t(\beta)) \theta |r_t - q_t(\beta)| + I(r_t < q_t(\beta)) (1 - \theta) |r_t - q_t(\beta)| \right] \right\} \\ &= \min_{\beta} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ \left[I(r_t \geq q_t(\beta)) \theta - I(r_t < q_t(\beta)) (1 - \theta) \right] [r_t - q_t(\beta)] \right\} \\ &= \min_{\beta} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ \left[I(r_t \geq q_t(\beta)) \theta + I(r_t < q_t(\beta)) (\theta - 1) \right] [r_t - q_t(\beta)] \right\} \\ &= \min_{\beta} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ \left[\theta - I(r_t < q_t(\beta)) \right] [r_t - q_t(\beta)] \right\}. \end{aligned}$$

Pre odhad vektora parametrov $\beta(\theta)$, ktorý vystupuje vo všetkých špecifikáciách CAViaR modelov musíme riešiť nelineárnu optimalizačnú úlohu:

$$\min_{\beta} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left\{ \left[\theta - I(r_t < q_t(\beta)) \right] [r_t - q_t(\beta)] \right\}. \quad (3.2)$$

Kapitola 4

Metóda dvojitého jadra

Neparametrická regresia, resp. vyhladzovanie podkladových údajov pomocou tzv. „jadrových“ funkcií sa v posledných rokoch teší medzi štatistikmi veľkej obľube. Jadro nie je nič iné, ako symetrická funkcia hustoty pravdepodobnostného rozdelenia, ktorej úloha v regresii je priradiť jednotlivým pozorovaniám váhy významnosti na základe ich vzdialenosti od miesta samotného regresného odhadu. Formálne by sme jadro mohli definovať nasledovne:

Definícia 1. Jadro $K(\cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ je nezáporná integrovateľná funkcia spĺňajúca nasledovné podmienky:

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1,$$

$$(ii) K(-x) = K(x).$$

Prvá podmienka zaručuje, že funkcia $K(\cdot)$ bude naozaj hustotou pravdepodobnostného rozdelenia. Druhá podmienka naznačuje symetriu funkcie $K(\cdot)$ okolo nadroviny určenej $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Vďaka symetrii bude funkcia $K(\cdot)$ pridelovať rovnaké váhy bodom rovnako vzdialeným od nadroviny $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bez ohľadu na to, na ktorej strane budú ležať.

Dôležitým parametrom funkcie jadra je tzv. „šírka okna“¹, pomocou ktorej je možné vhodne nastaviť vlastnosti odhadu vzhľadom na kvalitatívne vlastnosti analyzovaných údajov.

Definícia 2. Nech $K(x)$ je funkcia jadra. Potom funkciu $K_h(x)$ definujeme ako:

$$K_h(x) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x}{h}\right),$$

¹V anglickej literatúre označené ako „bandwidth“.

kde h je parameter šírky okna.

Pre úplnosť informácií v tabuľke 4.1 uvádzame prehľad najznámejších funkcií jadier (Qi a Racine, 2007). V neparametrických odhadoch kvantilu (resp. VaR) býva v kombinácii s funkciou jadra použitá metóda tzv. „lokálnej lineárnej“ (príp. polynomiálnej) regresie. Takýto prístup býva potom označovaný ako lokálna lineárna (polynomiálna) vážená kvantilová regresia.

Odhad kvantilovej funkcie $q_\theta(x)$, kde θ je pravdepodobnosť, ktorou je príslušný kvantil určený, je založený na minimalizácii lokálnej lineárnej vázenej verzii² všeobecného vzťahu:

$$E\{\rho_\theta(Y - a)|X = x\},$$

kde $\rho_\theta(\cdot)$ je tzv. „deliaca“ funkcia určená vzťahom:

$$\rho_\theta(z) = \theta z I(z \geq 0) - (1 - \theta) z I(z < 0). \quad (4.1)$$

Úlohou „deliacej“ funkcie je priradiť okolitým údajom váhy θ a $1 - \theta$ podľa toho, či ležia naľavo, resp. napravo od odhadovaného kvantilu.

Uvedená metóda dovoľuje zapojiť do odhadu funkciu jadra (ako tzv. „lokalizačnú funkciu“), ktorej úlohou je jednotlivým údajom priradiť váhy na základe ich polohy (Yu a Jones, 1998).

Tabuľka 4.1: Prehľad najčastejšie používaných funkcií jadier

Rovnomerné jadro	$K(x) = \frac{1}{2}I(x \leq 1)$
Gausove jadro	$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$
Epanechnikovo jadro	$K(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)I(x \leq 1)$
Trojuholníkové jadro	$K(x) = (1 - x)I(x \leq 1)$
Kvadratické jadro	$K(x) = \frac{15}{16}(1 - x^2)^2I(x \leq 1)$
Kubické jadro	$K(x) = \frac{35}{12}(1 - x^2)^3I(x \leq 1)$
Kosínusové jadro	$K(x) = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)I(x \leq 1)$

²V anglickej literatúre nazývané tiež „local linear kernel weighted“.

4.1 Konštrukcia lokálnej konštantnej váženej kvantilovej regresie

Uvažujeme postupnosť navzájom nezávislých pozorovaní $\{(X_t, Y_t)\}_{t=1}^T$ z rozdelenia charakterizovaného distribučnou funkciou $F(x, y)$ a hustotou $f(x, y)$. Označme $F(y|x)$ distribučnú funkciu a $f(y|x)$ hustotu podmieneného rozdelenia náhodnej premennej Y za podmienky $X = x$.

Všeobecný vzorec pre odhad podmieneného θ -teho kvantilu $q_\theta(x)$ je potom:

$$\hat{q}_\theta(x) = \operatorname{argmin}_a E\{\rho_\theta(Y - a)|X = x\},$$

kde $\rho_\theta(\cdot)$ je tzv. „deliaca“ funkcia definovaná v rovnici 4.1.

Pomocou metódy lokálnej konštantnej váženej kvantilovej regresie môžeme kvantil $q_\theta(x)$ odhadnúť ako:

$$\hat{q}_\theta(x) = \operatorname{argmin}_a \sum_{t=1}^T \rho_\theta(Y_t - a) K\left(\frac{x - X_t}{h}\right),$$

kde $K(\cdot)$ je funkcia jadra a h je parameter šírky okna.

4.2 Rozšírenie na lokálnu lineárnu váženú kvantilovú regresiu

V tejto časti naznačíme postup pre zostrojenie odhadu kvantilovej funkcie $q_\theta(x)$ pomocou lokálnej lineárnej regresie, ktorá sa ukazuje byť kvalitatívne lepšia ako lokálna konštantná regresia, ako ukázal napr. Stone (1977). Priame porovnanie oboch spomínaných metód spracovali tiež Yu a Jones (1997).

Princíp fungovania lokálnej lineárnej kvantilovej regresie je nasledovný. Odhad neznámeho θ -teho kvantilu $q_\theta(x)$ vykonáme pomocou lineárnej funkcie:

$$q_\theta(z) = q_\theta(x) + q'_\theta(x)(z - x) \equiv a + b(z - x)$$

pre každý bod z v okolí bodu x .

Uvedený vzťah použijeme vo výpočte kvantilu metódou lokálnej lineárnej váženej kvantilovej regresie nasledovne: Označme $\hat{q}_\theta(x) = \hat{a}$ a $\hat{q}'_\theta(x) = \hat{b}$. Potom $\hat{q}_\theta(x)$ vy počítame ako $\hat{a}$, ktoré rieši:

$$\min_{a,b} \sum_{t=1}^T \rho_\theta(Y_t - a - b(X_t - x)) K\left(\frac{x - X_t}{h}\right).$$

4.3 Konštrukcia modelu dvojitého jadra

Uvažujme inú funkciu jadra $W(\cdot)$ a jej distribučnú funkciu $\Omega(\cdot)$ danú vzťahom:

$$\int_{-\infty}^y W_{h_2}(Y_j - u) du = \Omega\left(\frac{y - Y_j}{h_2}\right). \quad (4.2)$$

Keď šírka okna $h_2 \rightarrow 0$, podmienenú distribučnú funkciu $F(y|x)$ môžeme aproximovať ako:

$$E\left\{\Omega\left(\frac{y - Y}{h_2}\right) | X = x\right\} \approx F(y|x).$$

S pomocou lokálnej lineárnej regresie vieme vzťah ďalej aproximovať:

$$E\left\{\Omega\left(\frac{y - Y}{h_2}\right) | X = z\right\} \approx F(y|z) \approx F(y|x) + \dot{F}(y|x)(z - x) \equiv a + b(z - x),$$

kde $\partial F(x|y)/\partial x \equiv \dot{F}(y|x)$. Potom $\hat{F}_{h_1, h_2} = \hat{a}$, kde $\hat{a}$ je dané ako:

$$(\hat{a}, \hat{b}) = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^N \left(\Omega\left(\frac{y - Y_i}{h_2}\right) - a - b(X_i - x) \right)^2 K\left(\frac{x - X_i}{h_1}\right).$$

Odhad podmienenej distribučnej funkcie $\hat{F}_{h_1, h_2}(y|x)$ vychádza z odhadu podmienenej distribučnej funkcie, ktorý zostrojil Fan, Yao a Tong (1996), konkrétne:

$$\hat{F}_{h_1, h_2}(y|x) = \sum_{j=1}^N \frac{\omega_j(x, h_1)}{\sum_{j=1}^N \omega_j(x, h_1)} \Omega\left(\frac{\hat{y} - Y_j}{h_2}\right), \quad (4.3)$$

kde

$$\omega_j(x, h_1) = K\left(\frac{x - X_j}{h_1}\right) (S_{n,2} - (x - X_j)S_{n,1}) \quad (4.4)$$

$$S_{n,l} = \sum_{i=1}^N K\left(\frac{x - X_i}{h_1}\right) (x - X_i)^l. \quad (4.5)$$

Nakoniec, odhad kvantilu $\hat{q}_\theta(x)$ metódou dvojitého jadra³ je definovaný ako:

$$\hat{q}_\theta(x) = \hat{F}_{h_1, h_2}^{-1} = \hat{y}. \quad (4.6)$$

Je nutné poznamenať, že funkcia $\hat{F}_{h_1, h_2}$ môže nadobúdať hodnoty mimo intervalu $[0, 1]$ a v niektorých prípadoch môže byť nemonotónna, čo znamená, že môže existovať viacero riešení $\hat{q}_\theta(x)$. V takýchto prípadoch Yu a Jones (1998) odporúčajú vybrať najväčšiu hodnotu $\hat{q}_\theta(x)$ pre $\theta > 1/2$, najmenšiu hodnotu $\hat{q}_\theta(x)$ pre $\theta < 1/2$ a ľubovoľné $\hat{q}_\theta(x)$ pre $\theta = 1/2$.

³V anglickej literatúre označovaná ako „double kernel local linear“.

Kapitola 5

Metódy historickej a filtrovanej historickej simulácie

5.1 Historická simulácia

Historická simulácia pracuje na princípe zostavenia empirického rozdelenia historických výnosov aktíva a následného výpočtu hodnoty $\theta\%$ VaR ako zápornej hodnoty príslušného θ -kvantilu z tohto rozdelenia.

Jednou z najväčších predností historickej simulácie je pomerne jednoduchá implementácia, vďaka čomu bola táto metóda ešte donedávna veľmi populárna (v súčasnosti je nahradzovaná presnejšími metódami).

Metóda vychádza z predpokladu, že analyzované údaje sú *nezávislé a rovnako rozdelené*. Tento pomerne silný predpoklad musí byť zvyčajne zvoľnený kvôli nepriaznivým štatistickým vlastnostiam, ktoré sú charakteristické pre finančné časové rady, ako napríklad meniace sa volatilita a jej zhlukovanie v čase.

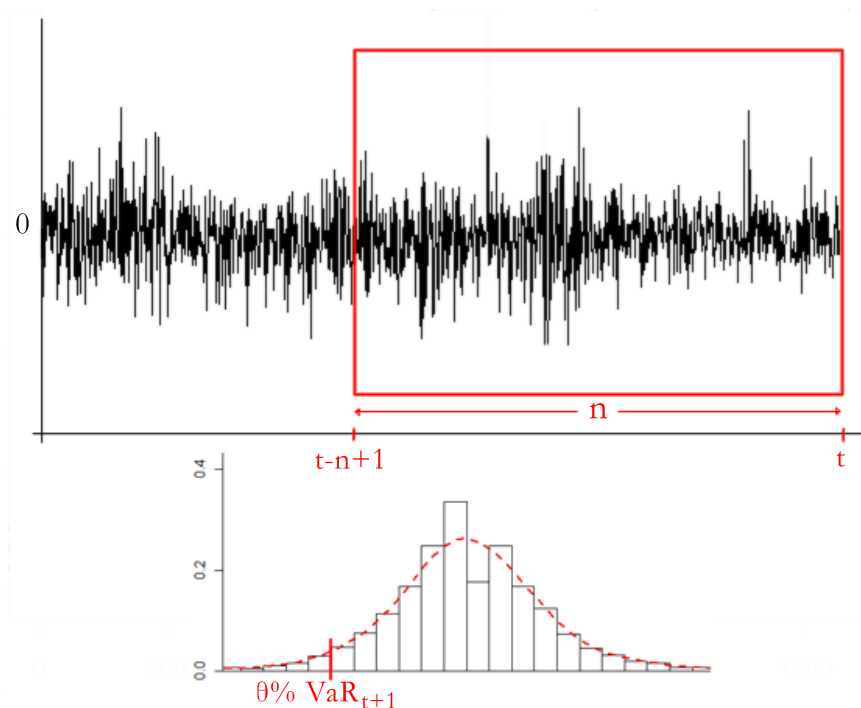
Pre výpočet odhadu VaR metódou historickej simulácie je potrebné zvoliť parameter „veľkosti okna“ (označme n), ktorý definuje počet pozorovaní, z ktorých je zostavené empirické rozdelenie.

Formálne môžeme odhad $\theta\%$ VaR pre čas $t + 1$ metódou historickej simulácie definovať nasledovne:

$$\widehat{\text{VaR}}_{t+1}(\theta) = -\text{Quant}_{\theta}(r_{t-n+1}, r_{t-n+2}, \dots, r_{t-1}, r_t), \quad (5.1)$$

kde r_t je výnos v čase t ($t \in \{t - n + 1, t - n + 2, \dots, t\}$), n je parameter vyjadrujúci veľkosť okna a $\text{Quant}_{\theta}(\cdot)$ je funkcia θ -kvantilu.

Je zrejmé, že s rastúcou veľkosťou okna sa zvyšuje presnosť odhadu kvantilu,



Obr. 5.1: Odhad VaR metódou historickej simulácie pre zvolené n - empirické rozdelenie je zostavené z posledných n pozorovaní

najmä ak ide o odhad kvantilov na tzv. „chvostoch“ rozdelenia ako napr. pre $\theta = 1\%$. Formálne správne by bolo pre odhad voliť $n \rightarrow \infty$, nakoľko iba v tomto prípade je odhad kvantilu z empirického rozdelenia konzistentný. Na druhej strane však voľbou veľmi veľkého okna do empirického rozdelenia zaraďujeme aj pomerne „staré“ pozorovania, ktorých rozdelenie nemusí zodpovedať súčasným podmienkam na trhu (porušenie predpokladu o rovnakom rozdelení pozorovaní).

Uvažujme situáciu, keď pohybujeme oknom v čase a počítame odhad VaR pre rôzne časy t . Ak okno prechádza z oblasti s nižšou volatilitou do oblasti s vyššou volatilitou, bude to mať za následok, že odhad hodnoty VaR bude vychýlený smerom nadol. To znamená, že odhadnutá VaR podcení riziko na trhu. Naopak, ak sa okno bude pohybovať z oblasti s vyššou volatilitou do oblasti s nižšou volatilitou, odhadnutá VaR bude vychýlená smerom nahor, čo znamená, že VaR bude udávať vyššie riziko, nezodpovedajúce súčasnej situácii na trhu.

Optimálna dĺžka okna je preto vždy kompromisom a zohľadňuje reálne obmedzenia vyplývajúce z analyzovaných údajov. V praxi sa najčastejšie používajú hodnoty $n = 250$ a $n = 1000$, čo zodpovedá pozorovaniam za jeden a štyri kalendárne roky, v prípade denných výnosov.

Nakoľko metóda historickej simulácie je pomerne jednoduchá na implementáciu,

avšak v praxi nedosahuje uspokojivú presnosť, bolo vyvinutých niekoľko modifikácií a rozšírení¹. Veľmi úspešným rozšírením sa ukázala byť tzv. „filtrovaná historická simulácia“, ako ju nazvali jej autori Barone-Adesi, Giannopoulos, a Vosper (1999), ktorú popisujeme v ďalšom texte.

5.2 Filtrovaná historická simulácia

Metóda filtrovanej historickej simulácie je priamym rozšírením jednoduchšej historickej simulácie, ktorá trpí viacerými nedostatkami, čo má za následok pomerne malú predikčnú schopnosť tejto triviálnej metódy. Asi najobmedzujúcejším je pomerne silný predpoklad o nezávislosti a nemennosti rozdelenia analyzovaných údajov. Ako sme uviedli aj v predošlej kapitole, tento predpoklad musí byť častokrát zvoľnený, nakoľko finančné časové rady sú charakteristické meniacou sa volatilitou, čo má však za následok vychýlenie odhadu VaR zostrojeného metódou historickej simulácie.

Nemenej významným nedostatkom historickej simulácie je neschopnosť tejto metódy predikovať hodnotu VaR vyššiu, ako vôbec najvyššie dosiahnuté straty v minulosti a taktiež výskyt období, kedy je odhad hodnoty VaR fixovaný na veľmi vysokej hodnote, čo je priamym dôsledkom výskytu niekoľkých veľmi vysokých strát nachádzajúcich sa v oblasti okna.

Rozšírenie metódy historickej simulácie autormi Barone-Adesi, Giannopoulos, a Vosper (1999) o proces vhodného preškálovania (filtrácie) historických pozorovaní na súčasné podmienky sa snaží eliminovať vyššie uvedené nedostatky.

Táto metóda nepredpokladá rovnaké rozdelenie pozorovaní, miesto toho sa pokúša modelovať vývoj volatility v čase a túto zapojiť do procesu výpočtu hodnoty VaR. Na zachytenie meniacej sa volatility v čase autori navrhujú použitie GARCH² modelov.

Za predpokladu, že poznáme vývoj volatility pre každý čas t , môžeme pozorovania tzv. „štandardizovať“ (preškálovať) na konštantnú „jednotkovú“ volatilitu. Takéto „štandardizované“ výnosy je možné preškálovať na súčasné podmienky s použitím aktuálnej volatility, čím všetky pozorovania prispôbíme súčasným podmienkam na trhu (eliminujeme rozdiely vo volatilitě medzi staršími a novšími pozorovaniami).

Uvažujme autoregresný proces typu ARMA(1,1)-GARCH(1,1) charakterizovaný

¹Tieto boli popísané napríklad v prácach Dowd (2002), Christoffersen, Hahn a Inoue (2001).

²V anglickej literatúre tzv. „generalized autoregressive conditional heteroskedasticity“ model (Bollerslev, 1986; Kirchgässner a Wolters, 2007).

systémom rovníc:

$$r_t = \alpha r_{t-1} + \beta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim \sigma_t \Psi \quad (5.2)$$

$$\sigma_t^2 = \zeta + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 + \delta \sigma_{t-1}^2, \quad (5.3)$$

kde r_t je výnos aktíva v čase t , ε_t je náhodná zložka s varianciou σ_t^2 v čase t a Ψ je štandardizované rozdelenie tzv. „centrálnej tendencie“. Pôvodný GARCH proces predpokladá $\Psi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ avšak jeho rozšírenia už uvažujú aj s inými rozdeleniami³. Členy α , β , γ , δ a ζ sú parametre.

Po nakalibrovaní vyššie uvedeného procesu na analyzované údaje získame vývoj variance náhodnej zložky v čase. Pomocou nej vieme náhodnú zložku štandardizovať v každom čase t s použitím vzťahu:

$$\hat{\varepsilon}_t^1 = \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\sigma}_t},$$

kde $\hat{\varepsilon}_t^1$ je náhodná zložka so štandardizovanou varianciou. Túto musíme preškálovať na súčasnú situáciu na trhu a to vynásobením aktuálnej (resp. predikovanej) variance náhodnej zložky σ_{t+1} pre čas $t + 1$. Označme $\hat{\varepsilon}_t^{t+1}$ náhodnú zložku s varianciou naškálovanou na súčasné podmienky, ktorú vypočítame ako:

$$\hat{\varepsilon}_t^{t+1} = \hat{\varepsilon}_t^1 \hat{\sigma}_{t+1},$$

kde odhad $\hat{\sigma}_{t+1}$ vypočítame ako predikciu pre čas $t + 1$ zo vzťahu 5.3:

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2 = \hat{\zeta} + \hat{\gamma} \hat{\varepsilon}_t^2 + \hat{\delta} \hat{\sigma}_t^2.$$

Takto preškálované náhodné zložky $\hat{\varepsilon}_t^{t+1}$ nám umožňujú prefiltrovať analyzované údaje s použitím upraveného vzťahu 5.2, v ktorom miesto triviálnej náhodnej zložky uvažujeme „prefiltrovanú“ zložku $\hat{\varepsilon}_t^{t+1}$:

$$\hat{r}_t^{t+1} = \hat{\alpha} r_{t-1} + \hat{\beta} \hat{\varepsilon}_{t-1}^{t+1} + \hat{\varepsilon}_t^{t+1},$$

kde $\hat{r}_t^{t+1}$ je prefiltrovaný výnos v čase t . Ďalší postup výpočtu hodnoty VaR je triviálny. Vzhľadom k zvolenej veľkosti okna n vypočítame hodnotu $\theta\%$ VaR ako zápornú hodnotu θ -kvantilu empirického rozdelenia filtrovaných historických výnosov, formálne:

$$\widehat{\text{VaR}}_{t+1}(\theta) = -\text{Quant}_{\theta}(\hat{r}_{t-n+1}^{t+1}, \hat{r}_{t-n+2}^{t+1}, \dots, \hat{r}_{t-1}^{t+1}, \hat{r}_t^{t+1}) \quad (5.4)$$

³V práci Kuester, Mittnik a Paoletta (2006) autori uvažujú okrem normálneho rozdelenia Studentovo t rozdelenie a tzv. „zovšeobecnené asymetrické Studentovo t rozdelenie“.

Kapitola 6

Parametrické metódy

Hodnotu $\theta\%$ VaR v čase t sme definovali ako záporný θ -kvantil rozdelenia výnosov v čase t . Problém odhadu tohto rozdelenia riešia parametrické metódy úplne odlišným spôsobom ako metódy neparametrické a semiparametrické.

Parametrické, nazývané tiež „analytické“ metódy predpokladajú, že analyzované výnosy sú nezávislé a rovnako rozdelené a pochádzajú z niektorej z parametrických tried rozdelení tzv. „centrálnej tendencie“.

Ako prvá sa začala používať trieda normálnych rozdelení. Metóda predpokladala, že analyzované výnosy aktíva pochádzajú z normálneho rozdelenia $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Overeniu predpokladu o „normalite“ trhových výnosov sa venovalo viacero prác, no normalita nebola potvrdená (pozri napr. Fama, 1965 a Ané a Geman, 2000). V nadväznosti na tieto výsledky sa na modelovanie rozdelenia výnosov začali používať aj iné triedy parametrizovaných rozdelení, ako napríklad zovšeobecnené Studentovo t rozdelenie, trieda lognormálnych rozdelení a iné.

Aj keď parametrické metódy nie sú predmetom výskumu tejto práce, použijeme ich ako kvalitatívnu normu (tzv. „benchmark“) pre porovnanie vlastností neparametrických a semiparametrických modelov. V prípade záujmu o detailnejšie informácie odkazujeme čitateľa napríklad na práce Štalmach (2007) a Rimarčík (2004).

V nasledujúcom texte načrtujeme základný postup pre odhad hodnoty VaR analytickou metódou s použitím triedy normálnych rozdelení a zovšeobecneného Studentovho t rozdelenia.

6.1 Parametrické modely s predpokladom normálneho rozdelenia

Táto metóda predpokladá, že výnosy aktíva r_t pochádzajú z normálneho rozdelenia. Každé normálne rozdelenie vieme s použitím vzťahu 6.1 „preškálovať“ na štandardizované normálne rozdelenie. Túto vlastnosť využijeme v ďalšom odvodzovaní.

Analytická metóda s použitím normálneho rozdelenia sa aj napriek svojej kritike teší veľkej obľube, najmä vďaka jednoduchej implementácii a možnosti rozšírenia na odhad VaR celého portfólia (s použitím multivariačného normálneho rozdelenia). Takáto metóda sa potom nazýva tzv. „variačno-kovariačná“ (pre viac informácií o tejto metóde čitateľov odkazujeme napr. na práce Linsmeier a Pearson, 1999 a Rimarčík, 2004).

Predpokladajme, že výnosy aktíva r_t pochádzajú z normálneho rozdelenia, ktoré vieme vhodnou transformáciou preškálovať na štandardizované normálne rozdelenie:

$$\begin{aligned} r_t &\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ \frac{r_t - \mu}{\sigma} &\sim \mathcal{N}(0, 1). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Hodnotu $\theta\%$ VaR sme definovali ako zápornú hodnotu θ -kvantilu rozdelenia výnosov. Pre θ -kvantil platí:

$$P\left(r_t \leq -\text{VaR}(\theta)\right) = \theta.$$

S použitím vzťahu 6.1 štandardizujeme náhodnú premennú. Vďaka tejto transformácii vieme do výpočtu zapojiť distribučnú funkciu štandardizovaného normálneho rozdelenia:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{r_t - \mu}{\sigma} \leq \frac{-\text{VaR}(\theta) - \mu}{\sigma}\right) &= \theta \\ \Phi\left(\frac{-\text{VaR}(\theta) - \mu}{\sigma}\right) &= \theta, \end{aligned}$$

kde $\Phi(\cdot)$ je distribučná funkcia štandardizovaného normálneho rozdelenia. Z uvedeného vzťahu vieme hodnotu VaR odvodiť invertovaním distribučnej funkcie $\Phi(\cdot)$ a následnou lineárnou transformáciou:

$$\begin{aligned} \frac{-\text{VaR}(\theta) - \mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(\theta) \\ \text{VaR}(\theta) &= -\mu - \sigma\Phi^{-1}(\theta), \end{aligned} \quad (6.2)$$

kde $\Phi^{-1}(\cdot)$ je kvantilová funkcia štandardizovaného normálneho rozdelenia.

Pre výpočet hodnoty VaR je potrebné odhadnúť parametre μ a σ rozdelenia výnosov. Ako odhad parametra μ sa zvyčajne používa hodnota $\hat{\mu} = 0$, prípadne sa $\hat{\mu}$ odhadne pomocou výberovej strednej hodnoty podľa vzťahu:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_t, \quad (6.3)$$

parameter variability σ^2 odhadneme pomocou výberovej variancie podľa vzťahu:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^N (r_t - \hat{\mu})^2, \quad (6.4)$$

kde N je počet výnosov.

6.2 Parametrické modely s predpokladom Studentovho t rozdelenia

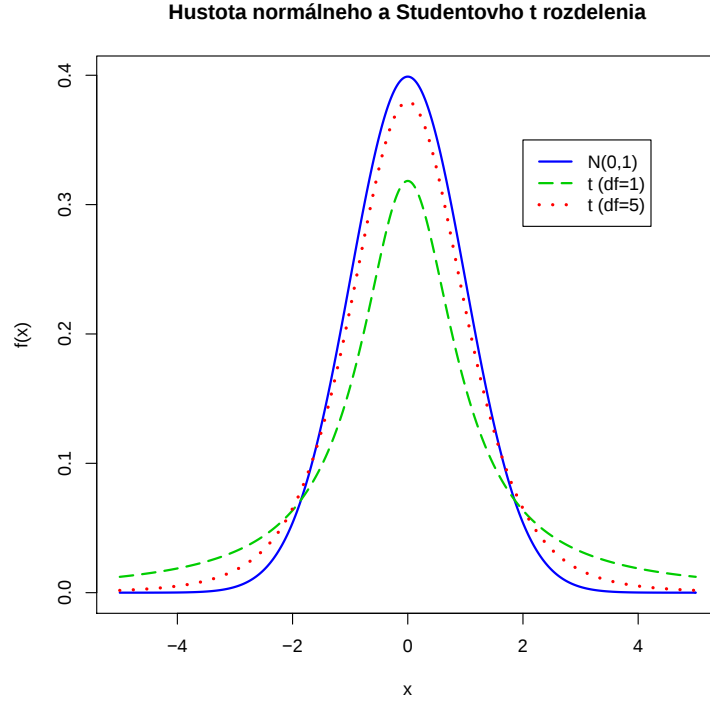
Analytická metóda založená na predpoklade o normalite výnosov čelila od začiatku svojej existencie rozsiahlej kritike. Empirické štúdie nepotvrdili ich normalitu, zistili však, že ich rozdelenie má tzv. „širšie chvosty“, čo znamená, že pravdepodobnosť výskytu extrémne nízkych (resp. extrémne vysokých) výnosov je väčšia, ako pravdepodobnosť modelovaná s použitím normálneho rozdelenia. To viedlo k vychýleniu odhadu VaR, čoho dôsledkom bolo systematické podceňovanie rizika. Hustota normálneho a Studentovho t rozdelenia sú porovnané na obrázku 6.1.

Studentovo t rozdelenie parametrizované tzv. „stupňom voľnosti“ (označme ν) má vhodnejšie vlastnosti pre modelovanie rozdelenia výnosov, nakoľko je v porovnaní s normálnym špicatejšie a má širšie chvosty. Navyše, ako naznačuje obrázok 5.1, Studentovo t rozdelenie konverguje pre $\nu \rightarrow \infty$ k normálnemu rozdeleniu, preto metódu s použitím t rozdelenia môžeme chápať ako zovšeobecnenie metódy s predpokladom normality.

Tak ako normálne rozdelenia, aj Studentove t rozdelenia sa dajú parametrizovať parametrom polohy, škály a navyše aj stupňom voľnosti. Takto parametrizované rozdelenia definujú triedu tzv. „zovšeobecnených Studentových t rozdelení“. Zovšeobecnené Studentovo t rozdelenie je preto dané vzťahom:

$$\mathcal{T}(\mu, \sigma^*; \nu) = \mu + \sigma^* T(\nu),$$

kde μ je parameter polohy, σ^* je parameter škály a $T(\nu)$ je Studentovo t rozdelenie s ν stupňami voľnosti. Pre vzťah medzi varianciou rozdelenia σ^2 a parametrom škály

Obr. 6.1: Porovnanie Studentovho t a normálneho rozdelenia

σ^* platí:

$$\sigma^* = \sigma \sqrt{\frac{v-2}{2}}. \quad (6.5)$$

Každé zovšeobecnené Studentovo t rozdelenie vieme s použitím vzťahu 6.6 preškálovať na jednoduché Studentovo t rozdelenie, čo využijeme v konštrukcii odhadu.

Pre odhad hodnoty $\theta\%$ VaR predpokladajme, že výnosy r_t pochádzajú zo zovšeobecneného Studentovho t rozdelenia:

$$\begin{aligned} r_t &\sim \mathcal{T}(\mu, \sigma^*; v) \\ \frac{r_t - \mu}{\sigma^*} &\sim \mathcal{T}(v). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Hodnotu $\theta\%$ VaR sme definovali ako zápornú hodnotu θ -kvantilu rozdelenia výnosov. Pre θ -kvantil platí:

$$P\left(r_t \leq -\text{VaR}(\theta)\right) = \theta.$$

S použitím vzťahu 6.6 štandardizujeme náhodné premenné. Vďaka tejto transformácii vieme do výpočtu zapojiť distribučnú funkciu štandardizovaného t rozdelenia:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{r_t - \mu}{\sigma^*} \leq \frac{-\text{VaR}(\theta) - \mu}{\sigma^*}\right) &= \theta \\ F_{\mathcal{T}(v)}\left(\frac{-\text{VaR}(\theta) - \mu}{\sigma^*}\right) &= \theta, \end{aligned}$$

kde $F_{\mathcal{T}(v)}(\cdot)$ je distribučná funkcia Studentovho t rozdelenia so stupňom voľnosti v . Invertovaním funkcie $F_{\mathcal{T}(v)}(\cdot)$ a následnou lineárnou transformáciou odvodíme vzťah pre výpočet $\theta\%$ VaR:

$$\begin{aligned} \frac{-\text{VaR}(\theta) - \mu}{\sigma^*} &= F_{\mathcal{T}(v)}^{-1}(\theta) \\ \text{VaR}(\theta) &= -\mu - \sigma^* F_{\mathcal{T}(v)}^{-1}(\theta). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Dosadením vzťahu 6.5 dostaneme výsledný vzťah pre výpočet $\theta\%$ VaR:

$$\text{VaR}(\theta) = -\mu - \sigma \sqrt{\frac{v-2}{2}} F_{\mathcal{T};v}^{-1}(\theta), \quad (6.8)$$

kde μ je parameter polohy, σ je parameter škály rozdelenia, $F_{\mathcal{T}(v)}^{-1}(\cdot)$ je kvantilová funkcia Studentovho t rozdelenia a v je parameter stupňa voľnosti. Tieto parametre je potrebné pre výpočet hodnoty VaR vhodne odhadnúť.

Ako odhad parametra μ sa zvyčajne používa $\hat{\mu} = 0$, prípadne sa parameter odhadne pomocou výberovej strednej hodnoty (rovnica 6.3), štandardná odchýlka $\hat{\sigma}$ sa odhaduje pomocou výberovej variancie (rovnica 6.4) a stupeň voľnosti sa odhaduje ako:

$$\hat{v} = \frac{4\kappa - 6}{\kappa - 3}, \quad (6.9)$$

kde κ je parameter špicatosti rozdelenia výnosov (tzv. kurtóza), ktorú odhadneme pomocou výberovej špicatosti, podľa vzťahu:

$$\hat{\kappa} = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}. \quad (6.10)$$

Kapitola 7

Meranie výkonnosti VaR modelov

Predikované hodnoty VaR sa môžu v niektorých prípadoch výrazne líšiť v závislosti od použitého modelu. Metódy pracujúce s nepodmieneným rozdelením výnosov, ako napríklad historická simulácia, sú charakteristické pomerne stabilnou VaR predpoveďou, ktorá sa vychýľuje iba v malom rozsahu. Modely pracujúce s podmieneným rozdelením výnosov sú charakteristické veľkým rozptylom predikovaných hodnôt (Kuester, Mittnik a Paolella, 2006). Aby sme vedeli jednotlivé modely kvalitatívne porovnať, je potrebné definovať viacero hodnotiacich kritérií.

Ako prvé v tejto práci spätne testujeme predikované hodnoty VaR a testujeme tiež štatistické vlastnosti modelov s použitím dvoch testov:

Kupiecov test nepodmieneného krytia overí významnosť odchýlky počtu pozorovaných prekročení hodnoty VaR od očakávaného počtu pre daný parameter θ . Rozšírením Kupiecovho testu je Christoffersenov test podmieneného krytia, ktorý okrem nepodmieneného krytia testuje aj vzájomnú závislosť pozorovaných prekročení.

Vyššie uvedené prístupy sú štandardne používané na testovanie VaR modelov v odbornej literatúre. Okrem nich budeme v tejto práci hodnotiť aj vývoj odhadnutých hodnôt VaR v čase, ich rozptyl a taktiež vývoj priemernej hodnoty, nakoľko v praxi sú častokrát práve tieto kritériá rozhodujúce pre výber najvhodnejšieho modelu.

Viac informácií o jednotlivých hodnotiacich kritériách uvádzame v nasledujúcom texte.

7.1 Spätné testovanie modelov

„Spätné testovanie“¹ je základnou metódou pre verifikáciu a kvalitatívne porovnanie prediktívnych modelov. Pre testovanie VaR modelov je postup verifikácie intuitívny a jednoduchý: V čase t model predikuje $\theta\%$ VaR pre čas $t + 1$, čo je inými slovami predikcia zápornej hodnoty θ -kvantilu rozdelenia výnosov v čase $t + 1$ (viď rovnica 2.2).

Z definície kvantilu (rovnica 2.1) vyplýva, že pravdepodobnosť jeho prekročenia by mala byť rovná θ . Označme počet prekročení hodnoty $\theta\%$ VaR výnosom r_t ako N^{HIT} , kde N^{HIT} vypočítame ako:

$$N^{HIT} = \sum_{t=1}^N I(r_t < -\text{VaR}(\theta)),$$

kde N je počet pozorovaní vo výbere a $I(\cdot)$ je funkcia typu „indikátor“. Potom výberovú pravdepodobnosť prekročenia hodnoty $\theta\%$ VaR definujeme ako pomer prekročených odhadov ku všetkým:

$$\hat{P}(r_t \leq -\widehat{\text{VaR}}_t(\theta)) = \frac{N^{HIT}}{N} \equiv \hat{\theta}$$

Očakávame, že odhad VaR hodnoty bude pre danú vzorku odhadov prekročený s pravdepodobnosťou blížiacou sa k hodnote θ . Pre veľký počet meraní bude pomer prekročení VaR hodnoty odhadnutej lepším modelom k celkovému počtu meraní menej vzdialený od tejto hodnoty. Navyše, ako lepší VaR model hodnotíme ten, ktorý sa k hodnote θ bude blížiť zdola, nakoľko väčší počet prekročení ako θ nie je žiadúci.

7.2 Kupiecov test nepodmieneného krytia

Štandardným prístupom k testovaniu správnosti modelov odhadujúcich hodnotu VaR je Kupiecov test nepodmieneného krytia. Test overuje nulovú hypotézu, že pomer počtu prekročených odhadov VaR (označujeme N^{HIT}) a všetkých vykonaných odhadov (označujeme N) nie je významne odchylený od θ . Ak je odchýlka θ a $\hat{\theta}$ významná, model neposkytuje uspokojivé výsledky.

Vierohodnostná funkcia za nulovej hypotézy je definovaná (Christoffersen, Hahn a Inoue, 2001):

$$\mathcal{L}(I_1, I_2, \dots, I_T; \theta) = (1 - \theta)^{N - N^{HIT}} \theta^{N^{HIT}}.$$

¹V anglickej literatúre nazývané „Backtesting“.

Vierohodnostná funkcia za alternatívnej hypotézy je definovaná:

$$\mathcal{L}(I_1, I_2, \dots, I_T; \hat{\theta}) = (1 - \hat{\theta})^{N - N^{HIT}} \hat{\theta}^{N^{HIT}}.$$

Testovacia štatistika pre pomer nepodmieneného krytia je odvodená od testu založeného na pomere vierohodností (Christoffersen, Hahn a Inoue, 2001):

$$\begin{aligned} \mathcal{LR}_{UC} &= -2 \ln \left(\frac{\mathcal{L}(I_1, I_2, \dots, I_T; \theta)}{\mathcal{L}(I_1, I_2, \dots, I_T; \hat{\theta})} \right) \\ &= -2 \ln \left(\frac{(1 - \theta)^{N - N^{HIT}} \theta^{N^{HIT}}}{(1 - \hat{\theta})^{N - N^{HIT}} \hat{\theta}^{N^{HIT}}} \right) \sim \chi^2(1). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Nulovú hypotézu nezamietame pre danú hladinu významnosti α , ak pre testovaciu štatistiku $\mathcal{LR}_{UC}$ platí nerovnosť:

$$\mathcal{F}_{\chi^2}^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2}; 1 \right) \leq \mathcal{LR}_{UC} \leq \mathcal{F}_{\chi^2}^{-1} \left(\frac{\alpha}{2}; 1 \right), \quad (7.2)$$

kde $\mathcal{F}_{\chi^2}^{-1}(\cdot; v)$ je kvantilová funkcia $\chi^2(v)$ rozdelenia a v je parameter stupňa voľnosti.

Kupiecov test skúma iba počet prekročení odhadu hodnoty VaR, neberie do úvahy prípadné zhlukovanie prekročení, ktoré naznačuje zlý odhad VaR v danej oblasti. Preto sa pri testovaní VaR modelov odporúča testovať aj vzájomná nezávislosť odhadov, napríklad Christoffersenovým testom popísaným v ďalšom texte.

7.3 Christoffersenov test podmieneného krytia

Christoffersen, Hahn a Inoue (2001) rozšírili nepodmienený test o testovanie nezávislosti prekročení a podmieneného krytia. Nepodmienené testovanie funguje na podobnom princípe ako Kupiecov test a test podmieneného krytia zachytáva oblasti s koreláciou v množine odhadov VaR, ktoré boli prekročené.

Ideou testu je rozdeliť podmienené krytie na dve časti. Test nepodmieneného krytia $\mathcal{LR}_{UC}$ sme definovali v rovnici 7.1. Test $\mathcal{LR}_{IND}$ definovaný nižšie vyhodnocuje náhodnosť (nezávislosť) výskytu prekročení.

$$\begin{aligned} \mathcal{LR}_{IND} &= -2 \ln \left(\frac{\mathcal{L}(I_1, I_2, \dots, I_T; \lambda_2)}{\mathcal{L}(I_1, I_2, \dots, I_T; \lambda_{01,11})} \right) \\ &= -2 \ln \left(\frac{(1 - \lambda_2)^{n_{00} + n_{10}} \lambda_2^{n_{01} + n_{11}}}{(1 - \lambda_{01})^{n_{00}} \lambda_{01}^{n_{01}} (1 - \lambda_{11})^{n_{10}} \lambda_{11}^{n_{11}}} \right) \sim \chi^2(1) \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\lambda_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00} + n_{01}} \quad \lambda_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}} \quad \lambda_2 = \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{10} + n_{01} + n_{11}}, \quad (7.4)$$

kde n_{ij} je počet pozorovaní nachádzajúcich sa v čase $t - 1$ v stave i (stav 1 označuje prekročenú hodnotu VaR a stav 0 neprekročenú hodnotu VaR) a v čase t nachádzajúcich sa v stave j (počet prechodov zo stavu i do stavu j). Koefficienty λ_{ij} označujú pravdepodobnosti týchto prechodov (zo stavu i do stavu j), koeficient λ_2 pravdepodobnosť, že ľubovoľné pozorovanie prejde do stavu 1.

Test podmieneného krytia $\mathcal{LR}_{CC}$, ktorý má rozdelenie χ^2 s parametrom stupňa voľnosti $v = 2$, je definovaný ako súčet testov $\mathcal{LR}_{UC}$ a $\mathcal{LR}_{IND}$:

$$\mathcal{L}_{CC} = \mathcal{L}_{UC} + \mathcal{L}_{IND} \sim \chi^2(2). \quad (7.5)$$

Nulovú hypotézu nezamietame pre danú hladinu významnosti α , ak sa testovacia štatistika $\mathcal{L}_{CC}$ nachádza v intervale:

$$\mathcal{F}_{\chi^2}^{-1}\left(1 - \frac{\theta}{2}; 2\right) \leq \mathcal{L}_{CC} \leq \mathcal{F}_{\chi^2}^{-1}\left(\frac{\theta}{2}; 2\right). \quad (7.6)$$

7.4 Analýza priemernej predikovanej hodnoty VaR

U jednotlivých VaR modelov je vhodné analyzovať aj vývoj predikovaných hodnôt v čase. Nakoľko VaR modely bývajú v praxi používané ako východiskové nástroje pre stanovenie výšky kapitálových požiadaviek kladených na finančné inštitúcie regulátornými orgánmi (tieto závisia od typu konkrétnej finančnej inštitúcie), je výhodné používať model predikujúci nízke hodnoty VaR, nakoľko viazaný kapitál implikuje náklady. Výšku predikovaných VaR hodnôt v tejto práci meriame pomocou kumulatívneho aritmetického priemeru odhadov:

$$\overline{\text{VaR}}_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \text{VaR}_i. \quad (7.7)$$

7.5 Analýza rozptylu predikovanej hodnoty VaR

Nakoľko náklady finančných inštitúcií nie sú spojené iba s držaním kapitálu, ale aj s každou zmenou výšky kapitálovej požiadavky, optimálny VaR model predikuje odhady s čo možno najnižším rozptylom. Vývoj rozptylu VaR odhadov v tejto práci meriame pomocou kumulatívnej výberovej variancie VaR odhadov:

$$\sigma_{\text{VaR}_t}^2 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (r_t - \overline{\text{VaR}}_t)^2. \quad (7.8)$$

Kapitola 8

Ciele práce

Cieľom práce je empirická analýza vlastností neparametrických a semiparametrických VaR modelov spracovaných v predošlých kapitolách. Podobné práce skúmajúce vlastnosti VaR metód sa väčšinou zameriavajú iba na jeden typ modelov. V tejto práci konfrontujeme viacero typov neparametrických a semiparametrických modelov na rovnakých súboroch pozorovaní, takže dokážeme určiť absolútne najvhodnejší model pre každý súbor a pre každú hodnotu parametra „hladiny významnosti“. Pridanou hodnotou tejto práce je najmä porovnanie vlastností modelov dvojitého jadra, modelov CAViaR a modelov filtrovanej historickej simulácie, nakoľko práve tieto by mohli dosahovať najlepšie výsledky.

Pre porovnanie modelov využijeme všetky kvalitatívne aj kvantitatívne hodnotiace kritériá spracované v siedmej kapitole. Analyzovať budeme nielen statické kumulované výsledky za celý súbor odhadov, ale aj vývoj počtu prekročení a priemernej hodnoty predikovaných VaR hodnôt v čase.

V každom údajovom súbore sa okrem pozorovaní z obdobia hospodárskeho rastu nachádzajú aj pozorovania z obdobia recesie, ktoré sú charakteristické negatívnymi šokmi na ceny aktív. V práci analyzujeme vlastnosti modelov v období rastu aj v období recesie.

Na testovacie sady pozorovaní okrem modelov neparametrických a semiparametrických aplikujeme aj parametrické modely, ktoré v tejto práci použijeme ako kvalitatívnu normu (tzv. „benchmark“) pre vlastnosti ostatných modelov.

Kapitola 9

Empirická analýza VaR modelov

9.1 Definícia merania

V práci analyzujeme schopnosť spracovaných neparametrických, semiparametrických a parametrických modelov odhadnúť jednodňový VaR pre podkladové aktíva. Merania uskutočníme pre dve hladiny významnosti:

1. $\theta = 0,05$ (5% VaR),
2. $\theta = 0,01$ (1% VaR).

Uvedené hladiny významnosti sú bežne používané pre odhad VaR hodnôt v praxi.

Pre všetky modely uskutočníme merania s použitím trénovacieho okna $n = 1000$ pozorovaní¹ a pre všetky okrem CAViaR modelov aj s oknom $n = 250$ pozorovaní². CAViaR modely s použitím väčších okien boli analyzované napríklad v práci Picková (2008).

V ďalšom texte budeme jednotlivé modely označovať skratkami kvôli lepšej prehľadnosti. Skratky definujeme nasledovne:

1. Semiparametrické modely triedy CAViaR:
 - adaptívny model (CAV-AD),
 - symetrický model (CAV-SY),
 - asymetrický model (CAV-AS),
 - nepriamy GARCH(1,1) model (CAV-IG),

¹Zodpovedá pozorovaniam z obdobia štyroch rokov v prípade denných výnosov.

²Pre modely triedy CAViaR sa okno $n = 250$ ukázalo byť nevhodné, čo sa prejavilo vychýleným odhadom parametrov.

- AR(1)-GARCH(1,1) model (CAV-AG).
- 2. Neparametrické modely dvojitého jadra (DK).
- 3. Neparametrické modely historickej simulácie (HS).
- 4. Semiparametrické modely filtrovanej historickej simulácie (FHS).
- 5. Parametrické modely:
 - s použitím normálneho rozdelenia (PAR-N),
 - s použitím Studentovho t rozdelenia (PAR-T).

Všetky merania boli vykonané v prostredí štatistického softvéru R , ver. 2.10.0 s využitím prídavných knižníc *gsl*, *subplex*, *tseries*, *stats*, *moments* a *RODBC*. Knižnicu funkcií pre odhad jednodňovej VaR, ktorú sme vytvorili pre potreby tejto práce pripájame v prílohe.

9.2 Analyzované údaje

Predikčnú schopnosť modelov sme analyzovali na výnosoch štyroch finančných aktív (tzv. „akcií“) obchodovaných na svetových burzách. Časové rady historických tzv. „zatváracích“ (Close) cien aktív sme získali zo stránky *finance.yahoo.com*. Z historických cien sme pre každé zo štyroch aktív vytvorili časové rady denných logaritmovaných výnosov podľa vzťahu:

$$r_t = 100 \cdot \ln \left(\frac{p_t}{p_{t-1}} \right), \quad (9.1)$$

kde r_t je výnos aktíva v čase t a p_t je zatváracia cena aktíva v čase t .

Názvy spoločností, skratky jednotlivých aktív a tiež rozsah použitých pozorovaní uvádzame v nasledovnom prehľade:

1. Sony Electronics (SNE) - ceny od 6.4.1983 do 26.2.2010,
2. Apple Corp. (AAPL) - ceny od 7.9.1984 do 26.2.2010,
3. GlaxoSmithKline (GSK) - ceny od 9.7.1986 do 26.2.2010,
4. Petrochina (PTR) - ceny od 23.6.2000 do 26.2.2010.

Tabuľka 9.1: Popisné štatistiky analyzovaných údajov

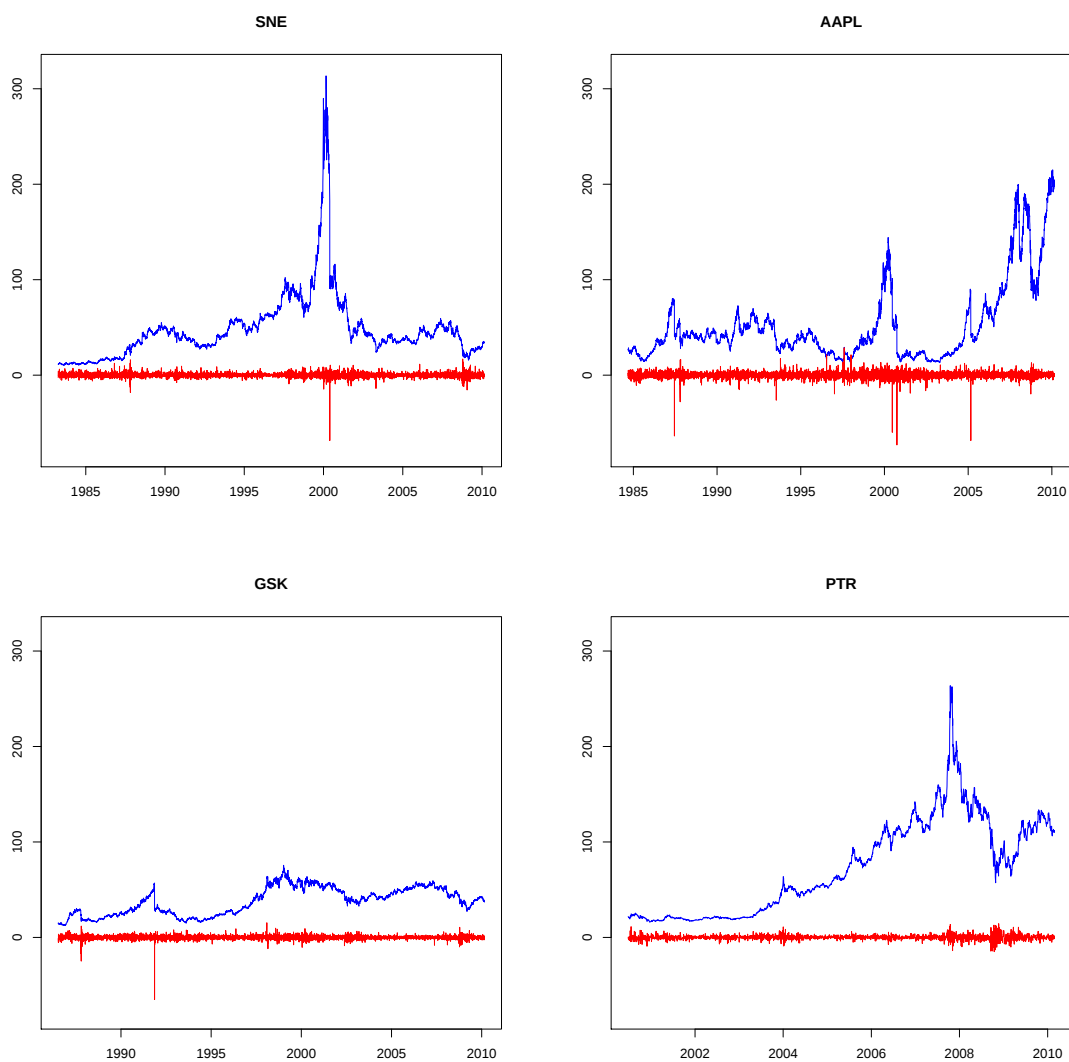
	SNE	AAPL	GSK	PTR
	($n = 6778$)	($n = 6424$)	($n = 5960$)	($n = 2428$)
Priemer	0,0157	0,0318	0,0149	0,0672
Št. odchýlka	2,3054	3,4618	2,0430	2,5925
Min.	-68,4962	-73,1247	-65,0222	-14,9027
Max.	16,8992	28,6796	15,3699	14,4147
Šikmosť	-3,7509	-4,4767	-5,7007	-0,0387
Špicatosť	118,9684	89,8162	178,0939	4,8917

Pre úplnosť informácie o pozorovaniach vstupujúcich do analýzy uvádzame v tabuľke 9.1 popisné štatistiky jednotlivých časových radov a na obrázku 9.1 grafy vývoja zatváracích cien a logaritmovaných denných výnosov jednotlivých aktív.

Hodnoty popisných štatistík a grafy vývoja historických cien naznačujú odlišný charakter jednotlivých súborov pozorovaní. Najmenšou volatilitou počas celého pozorovaného obdobia je charakteristické aktívum GSK, najväčšou volatilitou aktívum AAPL. Dopad finančnej krízy v roku 2000³ je zreteľný na aktívach SNE a AAPL, dopad finančnej krízy v roku 2008⁴ na aktívach SNE, AAPL a PTR.

³Tzv. „Dot-com“ kríza - vznikla ako dôsledok špekulatívnych obchodov, ktoré viedli k prudkému rastu hodnoty aktív tzv. „internetových“ spoločností a spoločností v príbuzných odvetviach.

⁴Tzv. „hypotekárna“ kríza, alebo „kríza likvidity“.



Obr. 9.1: Vývoj zatváracích cien akcií (modrou farbou) Sony Electronics (SNE), Apple Corp. (AAPL), GlaxoSmithKline (GSK) a Petrochina (PTR) a logaritmovaných denných výnosov (červená farba)

Kapitola 10

Výsledky merania

10.1 Modely CAViaR

Pre nakalibrovanie CAViaR modelov na analyzované údaje bolo potrebné vyriešiť optimalizačnú úlohu danú rovnicou kvantilovej regresie (rovnica 3.2) a pre model CAV-AG odhadnúť AR(1) koeficient.

Optimalizačnú procedúru sme zostavili podobne, ako navrhujú Engle a Manganelli (2004). Ako štartovacie body pre optimalizačnú procedúru sme vygenerovali 1500 vektorov β_0 , pre ktoré sme vypočítali hodnotu účelovej funkcie (rovnica 3.2). Samotnú optimalizáciu sme spustili pre 15 štartovacích vektorov β_0 generujúcich najnižšiu hodnotu účelovej funkcie. Výsledný vektor $\hat{\beta}_0$ sme určili ako vektor s minimálnou hodnotou účelovej funkcie po optimalizácii. Prvú hodnotu VaR sme určili ako záporný θ -kvantil empirického rozdelenia výnosov zostaveného z prvých 120 pozorovaní.

Po nakalibrovaní modelu sme vykonali 250 jednoduchých odhadov VaR, pričom autoregresný model sa natrénoval na posledných 1000 pozorovaniach. Po vykonaní 250 odhadov bol model (resp. vektor parametrov β) prekalibrovaný s použitím novších pozorovaní (metóda tzv. „posuvného okna“). Obdobie 250 odhadov približne zodpovedá obdobiu jedného kalendárneho roku v prípade denných výnosov aktíva. Odhad hodnôt pre obdobie dlhšie ako jeden rok bez opätovného prekalibrovania parametrov modelu môže viesť k vychýleniu odhadu VaR hodnoty ako dôsledku zmeny trendu na finančných trhoch¹.

Vývoj 5% VaR odhadov pre aktívum GSK v čase pre jednotlivé CAViaR špeci-

¹Odhad 1% a 5% VaR pomocou CAViaR modelov na obdobie 4 rokov bez opätovného nakalibrovania modelu bolo vykonané v práci Picková (2008).

fikácie je uvedený na obrázku 10.1 (vývoj 1% CAViaR odhadov v práci neuvádzame nakoľko trajektórie majú podobný charakter ako 5% odhady).

V tabuľkách 10.1 až 10.10 uvádzame analýzu vykonaných odhadov 5% a 1% VaR CAViaR modelmi na podkladových aktívach.

Výsledky spätného testovania odhadov 5% VaR potvrdzujú správnu kalibráciu všetkých CAViaR modelov. Pre dve zo štyroch aktív (SNE, AAPL) dosiahol najlepší výsledok model CAV-IG. Poznamenajme, že išlo paradoxne o aktíva s najmenšou a najväčšou volatilitou. Pre zvyšné dve aktíva sa ukázali byť najvhodnejšie CAV-AD a CAV-AG model. CAV-SY a CAV-AS model dosiahli pre všetky aktíva najslabšie výsledky. Aj keď je CAV-AS model zovšeobecnením CAV-SY modelu, pre všetky aktíva dosiahol horšie výsledky.

Testom nepodmieneného krytia bol pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$ zamiet-

Tabuľka 10.1: Výsledky spätného testovania CAViaR modelov pre $\theta = 0,05$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Spätné testovanie odhadov VaR ($n = 1000$, $\theta = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
CAV-AD	0,0523	0,0503	0,0526	0,0525
CAV-SY	0,0526	0,0516	0,0571	0,0602
CAV-AS	0,0578	0,0544	0,0589	0,0623
CAV-IG	0,0514	0,0485	0,0498	0,0581
CAV-AG	0,0481	0,0503	0,0506	0,0616

Tabuľka 10.2: Test nepodmieneného krytia CAViaR modelov pre $\theta = 0,05$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Kupiecov test, p-hodnota ($n = 1000$, $\theta = 0,05$, $\alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
CAV-AD	0,5677	0,0892	0,5991	0,3355
CAV-SY	0,6340	0,4146	0,9744	0,9146
CAV-AS	0,9922(!)	0,8565	0,9948(!)	0,9607
CAV-IG	0,3736	0,3923	0,0520	0,8307
CAV-AG	0,4920	0,0892	0,1547	0,9486

Tabuľka 10.3: Test podmieneného krytia CAViaR modelov pre $\theta = 0,05$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Christoff. test, p-hodnota ($n = 1000, \theta = 0,05, \alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
CAV-AD	0,9466	0,9999(!)	0,4237	0,9419
CAV-SY	0,8590	0,9938(!)	0,9210	0,8067
CAV-AS	0,9985(!)	0,9698	0,9828(!)	0,9088
CAV-IG	0,9869(!)	0,9999(!)	0,0063(!)	0,6427
CAV-AG	0,7556	0,9966(!)	0,0863	0,8530

nutý iba model CAV-AS. Test podmieneného krytia zamietol každý model aspoň pre jedno aktívum, čo svedčí o závislosti výskytov prekročených VaR hodnôt.

Priemerné hodnoty VaR odhadov generovaných jednotlivými CAViaR modelmi sú negatívne korelované s výsledkami spätného testovania; modely s nižším výskytom prekročení majú priemernú VaR hodnotu vyššiu, čo zodpovedá racionálnym očakávaniam (vyššia VaR hodnota je daňou za dodržanie požadovanej miery prekročení).

Podobne ako priemerná hodnota, aj rozptyl VaR odhadov je vyšší u modelov s mierou pozorovaných prekročení bližšie k očakávanej hodnote θ , naopak, najpriateľnejšie hodnoty rozptylu dosahujú modely s najmenšou presnosťou.

CAV-AG model, ktorý je zovšeobecnením CAV-IG modelu nedosiahol v našom meraní výrazne presnejšie výsledky, čo je v rozpore s výsledkami uvedenými v práci Kuester, Mittnik a Paoletta (2006).

Modely CAViaR boli menej úspešné v odhadovaní „extrémnejšej“ 1% VaR. V spätnom testovaní boli striedavo úspešné tri modely, naopak CAV-SY a CAV-AG nezaznamenali uspokojujú presnosť pre žiadne zo štyroch aktív.

V testovaní podmieneného a nepodmieneného krytia sa ani jednému z piatich CAViaR modelov nepodarilo prejsť žiadnym z testov pre všetky analyzované aktíva súčasne (pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$). Najmenšiu priemernú hodnotu VaR odhadov dosiahol pre tri zo štyroch aktív CAV-SY, najmenší rozptyl odhadov zoznamenali CAV-AD a CAV-SY, každý pre dve aktíva.

Ani pre odhad 1% VaR CAV-AG modelom sme nezaznamenali pozitívnejšie výsledky a preto jeho prínos k spresneniu odhadu VaR považujeme za nejednoznačný.

Tabuľka 10.4: Výsledky analýzy priemernej hodnoty odhadov CAViaR modelov pre $\theta = 0,05$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Priemerná hodnota VaR ($n = 1000, \theta = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
CAV-AD	3,0195	4,4283	2,7500	4,0168
CAV-SY	2,9982	4,3659	2,6766	3,6316
CAV-AS	2,9758	4,3537	2,6270	3,6663
CAV-IG	3,1368	4,5274	2,8173	3,7995
CAV-AG	3,1635	4,4237	2,7636	3,6470

Tabuľka 10.5: Výsledky analýzy rozptylu odhadov CAViaR modelov pre $\theta = 0,05$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Variancia VaR ($n = 1000, \theta = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
CAV-AD	1,3482	1,8576	0,5495	4,1660
CAV-SY	1,3778	1,1428	0,4184	3,7489
CAV-AS	2,0300	1,7689	0,4384	4,6660
CAV-IG	2,4194	2,6217	1,0264	4,9373
CAV-AG	2,8621	2,1005	0,7310	4,0185

Tabuľka 10.6: Výsledky spätného testovania CAViaR modelov pre $\theta = \mathbf{0,01}$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Spätné testovanie odhadov VaR ($n = 1000, \theta = 0,01$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
CAV-AD	0,0132	0,0125	0,0119	0,0119
CAV-SY	0,0178	0,0122	0,0143	0,0105
CAV-AS	0,0149	0,0107	0,0147	0,0098
CAV-IG	0,0137	0,0101	0,0123	0,0091
CAV-AG	0,0164	0,0116	0,0131	0,0112

Tabuľka 10.7: Test nepodomieneného krytia CAViaR modelov pre $\theta = \mathbf{0,01}$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Kupiecov test, p-hodnota ($n = 1000, \theta = 0,01, \alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
CAV-AD	0,9784(!)	0,9292	0,8073	0,5175
CAV-SY	1,0000(!)	0,8794	0,9959(!)	0,1506
CAV-AS	0,9995(!)	0,3881	0,9982(!)	0,0596
CAV-IG	0,9921(!)	0,0824	0,8837	0,2704
CAV-AG	1,0000(!)	0,7562	0,9640	0,3464

Tabuľka 10.8: Test podmieneného krytia CAViaR modelov pre $\theta = \mathbf{0,01}$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

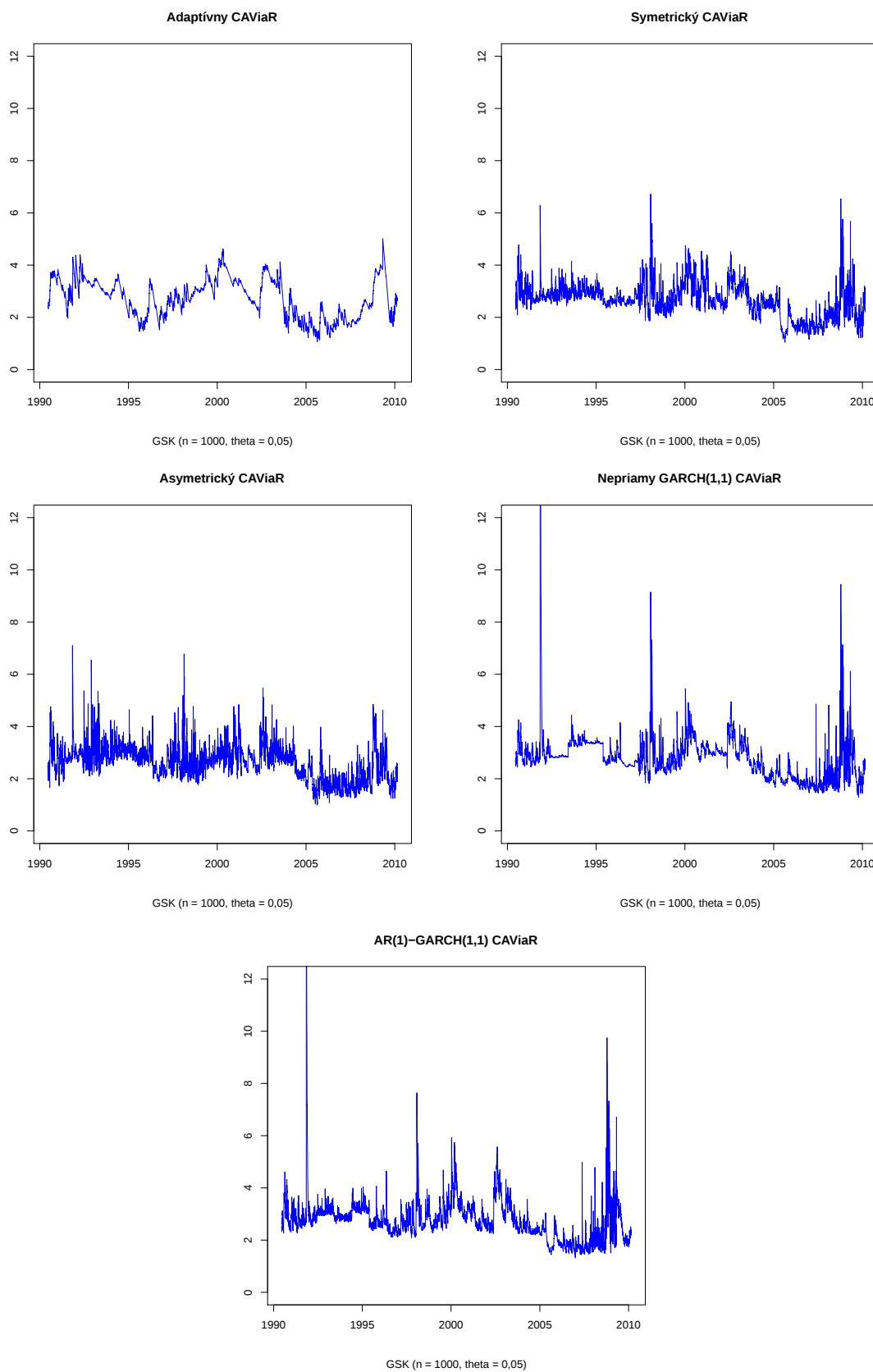
Christoff. test, p-hodnota ($n = 1000, \theta = 0,01, \alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
CAV-AD	0,9815(!)	0,9998(!)	0,9502	0,3634
CAV-SY	1,0000(!)	0,9984(!)	0,9956(!)	0,1625
CAV-AS	0,9997(!)	0,5304	0,9945(!)	0,1319
CAV-IG	0,9974(!)	0,9906(!)	0,9603	0,1641
CAV-AG	1,0000(!)	0,9875(!)	0,9955(!)	0,2458

Tabuľka 10.9: Výsledky analýzy priemernej hodnoty odhadov CAViaR modelov pre $\theta = 0,01$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Priemerná hodnota VaR ($n = 1000, \theta = 0,01$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
CAV-AD	5,7149	8,2441	4,4055	6,6871
CAV-SY	4,6670	7,3550	4,1908	6,1905
CAV-AS	4,8918	7,5421	4,2051	6,6169
CAV-IG	4,8051	8,0545	4,3192	6,3532
CAV-AG	4,7324	7,9105	4,3096	6,1636

Tabuľka 10.10: Výsledky analýzy rozptylu odhadov CAViaR modelov pre $\theta = 0,01$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Variancia VaR ($n = 1000, \theta = 0,01$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
CAV-AD	7,0040	17,3645	1,1558	8,6337
CAV-SY	2,9602	3,4068	1,2389	13,2292
CAV-AS	6,3564	5,3911	1,4106	14,9014
CAV-IG	6,1187	10,2550	2,1262	15,0357
CAV-AG	6,2380	9,0050	3,1138	13,7570



Obr. 10.1: Vývoj 5% VaR odhadov pre akciu GSK generovaných CAViaR modelmi v čase

10.2 Model dvojitého jadra

Modely dvojitého jadra sme testovali pre veľkosti okien $n = 250$ a $n = 1000$ pozorovaní. Pred uskutočnením každého odhadu bolo potrebné správne nastaviť tzv. „vyhladzovacie“ parametre h_1 a h_2 , ktoré vystupujú v oboch jadrových funkciách. Aj keď existuje viacero algoritmov pre vhodné nastavenie týchto parametrov, vzhľadom na charakter analyzovaných údajov a samotného modelu sme zvolili odlišný prístup.

V špecifikácii modelu 4.3 vystupuje v menovateli člen:

$$\sum_{j=1}^N \omega_j(x, h_1) = \sum_{j=1}^N K\left(\frac{x - X_j}{h_1}\right) (S_{n,2} - (x - X_j)S_{n,1}),$$

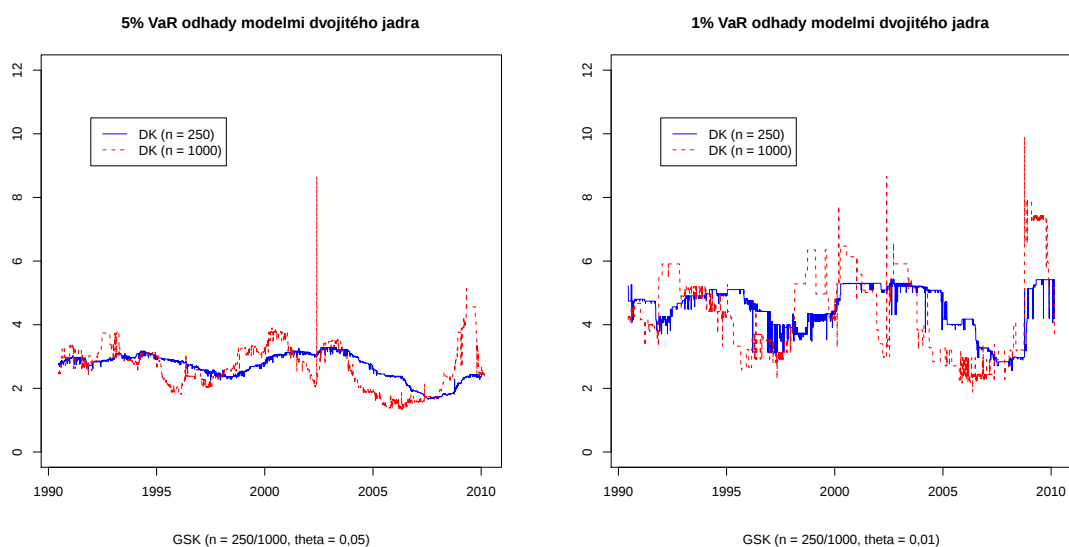
ktorý musí pre každý odhad nadobúdať hodnotu rôznu od 0. Platnosť uvedenej podmienky zaručíme vhodným nastavením veľkosti okna h_1 . Algoritmus, ktorý sme použili, nastaví pre každú tréningovú množinu parameter h_1 iba o málo väčší ako maximálny rozdiel $(x - X_j)$. Tým je zaručená vyššie uvedená podmienka a zároveň je okno dostatočne veľké na to, aby každému z tréningových pozorovaní jadro priradilo nenulovú váhu.

Pre odhad parametra šírky okna h_2 sa vyššie uvedený postup ukázal byť v praxi nevhodný. Po nasimulovaní výsledkov s viacerými hodnotami sme parameter h_2 fixovali na hodnotu 0,001, nakoľko s takýmto nastavením model dosahoval najpriateľnejšie výsledky. Ako jadrové funkcie sme použili „Epanechnikove“ jadrá (pozri tab. 4.1).

Vývoj 5% a 1% VaR odhadov pre aktívum GSK v čase pre modely dvojitého jadra je uvedený na obrázku 10.2, analýza vykonaných odhadov v tabuľkách 10.11 až 10.20.

Tabuľka 10.11: Výsledky spätného testovania modelov dvojitého jadra pre $\theta = 0,05$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Spätné testovanie odhadov VaR ($\theta = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
DK ($n = 250$)	0,0585	0,0505	0,0529	0,0556
DK ($n = 1000$)	0,0621	0,0565	0,0513	0,0784



Obr. 10.2: Vývoj 5% a 1% VaR odhadov pre akciu GSK generovaných modelmi dvojitého jadra

Tabuľka 10.12: Test nepodmieneného krytia modelov dvojitého jadra pre $\theta = 0,05$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Kupiecov test, p-hodnota ($\theta = 0,05$, $\alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
DK ($n = 250$)	0,9998(!)	0,1526	0,6793	0,7579
DK ($n = 1000$)	1,0000(!)	0,3270	0,9590	1,0000(!)

Tabuľka 10.13: Test podmieneného krytia modelov dvojitého jadra pre $\theta = 0,05$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Christoff. test, p-hodnota ($\theta = 0,05$, $\alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
DK ($n = 250$)	1,0000(!)	1,0000(!)	0,9154	0,9977(!)
DK ($n = 1000$)	1,0000(!)	0,9995(!)	0,9486	1,0000(!)

Tabuľka 10.14: Výsledky analýzy priemernej hodnoty odhadov modelov dvojitého jadra pre $\theta = 0,05$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Priemerná hodnota VaR ($\theta = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
DK ($n = 250$)	2,8839	4,4485	2,7287	3,6024
DK ($n = 1000$)	2,9355	2,6898	4,4836	3,3344

Tabuľka 10.15: Výsledky analýzy rozptylu odhadov modelov dvojitého jadra pre $\theta = 0,05$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Variancia VaR ($\theta = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
DK ($n = 250$)	0,9421	1,1369	0,6060	2,5789
DK ($n = 1000$)	0,4048	0,1752	0,6697	0,7802

V analýze spätného testovania pre odhady 5% VaR dosiahol pre tri zo štyroch aktív prijateľnejšie výsledky model s tréningovým oknom $n = 250$ pozorovaní. Model s oknom $n = 1000$ generoval presnejšie odhady iba pre aktívum GSK, ktoré je charakteristické najmenšou volatilitou.

Vo všeobecnosti výsledky u oboch modelov vykazujú systematické podceňovanie rizika, čo sa prejavilo relatívne vysokým počtom prekročení odhadnutých VaR hodnôt.

V testoch nepodmieneného a podmieneného krytia sa taktiež ukázal byť vhodnejším model pre $n = 250$. Kupiecov test ho zamietol iba pre aktívum SNE, Christoffersenov test nezamietol oba modely iba v prípade analýzy najmenej volatilného aktíva GSK. Vo výsledkoch analýzy priemernej hodnoty a rozptylu odhadov boli oba modely striedavo úspešné.

Tieto výsledky spolu s výsledkami spätného testovania naznačujú neschopnosť modelov dvojitého jadra zachytiť väčšiu volatilitu, ktorá je charakteristická pre finančné časové rady. Na výsledkoch sa mohla podpísať aj nevhodne zvolená procedúra pre nastavenie vyhladzovacích parametrov.

Tabuľka 10.16: Výsledky spätného testovania modelov dvojitého jadra pre $\theta = 0,01$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Spätné testovanie odhadov VaR ($\theta = 0,01$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
DK ($n = 250$)	0,0136	0,0131	0,0137	0,0129
DK ($n = 1000$)	0,0147	0,0122	0,0125	0,0154

Tabuľka 10.17: Test nepodomieneného krytia modelov dvojitého jadra pre $\theta = 0,01$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Kupiecov test, p-hodnota ($\theta = 0,01, \alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
DK ($n = 250$)	0,9948(!)	0,9813(!)	0,9915(!)	0,8005
DK ($n = 1000$)	0,9992(!)	0,8794	0,9115	0,9429

Výsledky spätného testovania pre 1% VaR odhady dopadli striedavo pozitívne pre oba modely; model s trénovacím oknom $n = 1000$ dosiahol najlepšie výsledky pre aktíva AAPL a GSK, čo sú paradoxne aktíva s najväčšou a najmenšou volatilitou (podobný jav sme pozorovali už pri CAViaR modeloch).

Test nepodomieneného krytia dopadol lepšie pre model s oknom $n = 1000$, test ho zamietol iba pre aktívum SNE. Test podmieneného krytia zamietol oba modely pre tri zo štyroch aktív.

Tabuľka 10.18: Test podmieneného krytia modelov dvojitého jadra pre $\theta = 0,01$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Christoff. test, p-hodnota ($\theta = 0,01, \alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
DK ($n = 250$)	0,9975(!)	1,0000(!)	0,9974(!)	0,6951
DK ($n = 1000$)	1,0000(!)	0,9998(!)	0,9655	0,9783(!)

Tabuľka 10.19: Výsledky analýzy priemernej hodnoty odhadov modelov dvojitého jadra pre $\theta = 0,01$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Priemerná hodnota VaR ($\theta = 0,01$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
DK ($n = 250$)	5,3230	7,9606	4,6046	6,6797
DK ($n = 1000$)	5,1605	7,5028	4,5253	6,6039

Tabuľka 10.20: Výsledky analýzy rozptylu odhadov modelov dvojitého jadra pre $\theta = 0,01$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Variancia VaR ($\theta = 0,01$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
DK ($n = 250$)	5,5563	12,2965	2,9050	9,6032
DK ($n = 1000$)	1,7320	1,3271	0,5441	2,8765

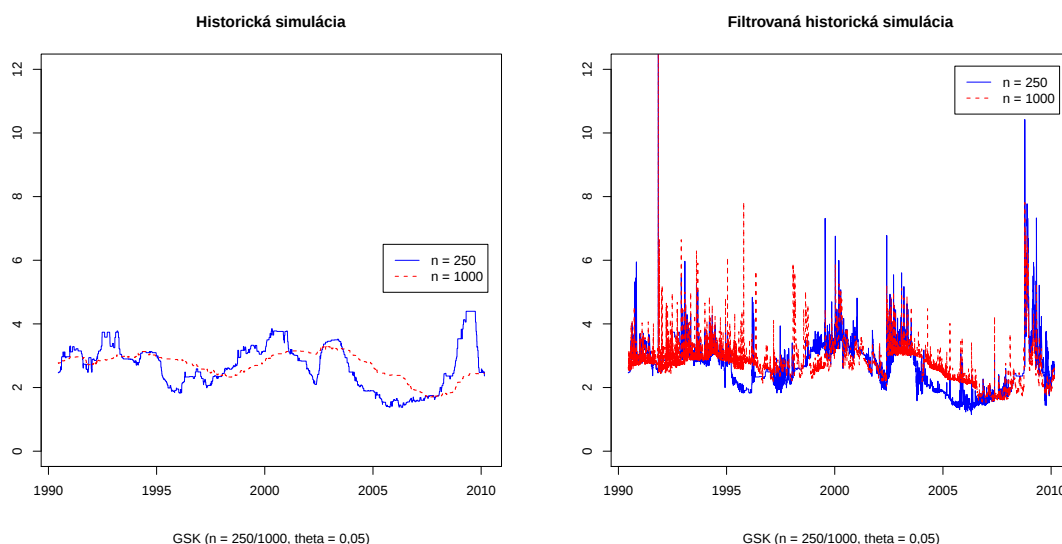
Model s oknom $n = 1000$ dosiahol prekvapivo dobré výsledky v analýze priemernej hodnoty a rozptylu; pre všetky aktíva v oboch kritériách napredoval pred modelom s oknom $n = 250$.

Celkovo dosiahol lepšie výsledky pre odhad 1% VaR model s tréningovým oknom $n = 1000$, čo je v rozpore výsledkami analýzy 5% VaR odhadov. Tento jav by sa dal vysvetliť nedostatočným množstvom pozorovaní, s ktorými pracuje model s oknom $n = 250$, pre modelovanie tak extrémneho kvantilu akým je 1%-kvantil.

10.3 Modely historickej a filtrovanej historickej simulácie

Odhad VaR hodnôt metódou historickej simulácie a filtrovanej historickej simulácie sme vykonali v dvoch variantách: s posuvným oknom $n = 250$ (zodpovedajúcim obdobiu jedného roku) a s posuvným oknom $n = 1000$ (zodpovedajúcim obdobiu štyroch rokov). Pre filtrovanie pozorovaní modelmi FHS sme použili ARMA(1,1)-GARCH(1,1) model s predpokladom normálne rozdelených reziduí. Koeficienty modelu boli opätovne prepočítané pre každý odhad VaR.

Vývoj 5% VaR odhadov pre aktívum GSK v čase generovaných modelmi historickej simulácie a filtrovanej historickej simulácie pre obe veľkosti okien sú uvedené na obrázku 10.3.



Obr. 10.3: Vývoj 5% VaR odhadov pre akciu GSK generovaných modelmi historickej a filtrovanej historickej simulácie pre veľkosti okien $n = 250$ a $n = 1000$ v čase

V tabuľkách 10.21 až 10.30 uvádzame analýzu vykonaných odhadov 5% a 1% VaR. Z výsledkov spätného testovania odhadu 5% VaR je zrejماً dominancia modelov FHS nad modelmi HS. Pre modely FHS nevieme jednoznačne určiť optimálnu veľkosť okna, nakoľko oba modely FHS dosahovali striedavo presnejšie výsledky. HS model vykazuje presnejšie výsledky pre okno $n = 250$.

Kupiecov test zamietol iba model HS ($n = 1000$) pre aktíva SNE a PTR, Christofersenov test však zamietol všetky modely minimálne pre dve zo štyroch aktív, čo svedčí o závislých výskytoch prekročených hodnôt VaR.

Tabuľka 10.21: Výsledky spätného testovania modelov historickej simulácie pre $\theta = \mathbf{0,05}$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Spätné testovanie odhadov VaR ($\theta = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
HS ($n = 250$)	0,0555	0,0509	0,0534	0,0551
HS ($n = 1000$)	0,0616	0,0509	0,0563	0,0784
FHS ($n = 250$)	0,0519	0,0499	0,0536	0,0459
FHS ($n = 1000$)	0,0459	0,0507	0,0486	0,0574

Tabuľka 10.22: Test nepodomieneného krytia modelov historickej simulácie pre $\theta = \mathbf{0,05}$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Kupiecov test, p-hodnota ($\theta = 0,05, \alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
HS ($n = 250$)	0,9532	0,2424	0,7587	0,7174
HS ($n = 1000$)	1,0000(!)	0,2345	0,9525	1,0000(!)
FHS ($n = 250$)	0,5231	0,0326	0,7817	0,6248
FHS ($n = 1000$)	0,8563	0,1867	0,3531	0,7918

Tabuľka 10.23: Test podmieneného krytia modelov historickej simulácie pre $\theta = \mathbf{0,05}$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Christoff. test, p-hodnota ($\theta = 0,05, \alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
HS ($n = 250$)	1,0000(!)	1,0000(!)	0,8738	0,9979(!)
HS ($n = 1000$)	1,0000(!)	0,9996(!)	0,9440(!)	0,5515
FHS ($n = 250$)	0,9983(!)	0,9998(!)	0,6238	0,4570(!)
FHS ($n = 1000$)	0,9910(!)	0,9396	0,1213	1,0000(!)

Tabuľka 10.24: Výsledky analýzy priemernej hodnoty odhadov modelov historickej simulácie pre $\theta = 0,05$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Priemerná hodnota VaR ($\theta = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
HS ($n = 250$)	2,9312	4,4303	2,6992	3,5895
HS ($n = 1000$)	2,9404	4,4954	2,6901	3,3663
FHS ($n = 250$)	3,0424	4,4565	2,7259	3,7932
FHS ($n = 1000$)	3,2578	4,5557	2,8177	3,7434

Tabuľka 10.25: Výsledky analýzy rozptylu odhadov modelov historickej simulácie pre $\theta = 0,05$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Variancia VaR ($\theta = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
HS ($n = 250$)	0,9437	1,1076	0,4899	2,5526
HS ($n = 1000$)	0,3906	0,6689	0,1712	0,8283
FHS ($n = 250$)	1,8365	2,6466	0,7513	4,6572
FHS ($n = 1000$)	4,8579	3,0985	1,7432	4,5844

V hodnotení priemernej hodnoty a rozptylu odhadov VaR dominovala historická simulácia, čo sa dalo očakávať podľa grafov vývoja odhadnutých hodnôt (na grafoch vývoja FHS bol výrazný rozptyl v porovnaní s triviálnym modelom).

V spätnom testovaní odhadov 1% VaR dominoval model FHS ($n = 1000$), ktorý dosiahol najpresnejšie výsledky pre tri zo štyroch aktív. Model nebol zamietnutý ani jedným z testov (pre každé z aktív), čo sa nepodarilo ani jednému z ostatných modelov.

Tabuľka 10.26: Výsledky spätného testovania modelov historickej simulácie pre $\theta = \mathbf{0,01}$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Spätné testovanie odhadov VaR ($\theta = 0,01$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
HS ($n = 250$)	0,0156	0,0139	0,0149	0,0138
HS ($n = 1000$)	0,0147	0,0122	0,0129	0,0154
FHS ($n = 250$)	0,0149	0,0136	0,0149	0,0106
FHS ($n = 1000$)	0,0095	0,0116	0,0103	0,0112

Tabuľka 10.27: Test nepodomieneného krytia modelov historickej simulácie pre $\theta = \mathbf{0,01}$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Kupiecov test, p-hodnota ($\theta = 0,01, \alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
HS ($n = 250$)	1,0000(!)	0,9966(!)	0,9995(!)	0,9060
HS ($n = 1000$)	0,9992(!)	0,8794	0,9508	0,9429
FHS ($n = 250$)	0,9998(!)	0,9930(!)	0,9995(!)	0,2054
FHS ($n = 1000$)	0,2890	0,7562	0,1876	0,3464

Tabuľka 10.28: Test podmieneného krytia modelov historickej simulácie pre $\theta = \mathbf{0,01}$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Christoff. test, p-hodnota ($\theta = 0,01, \alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
HS ($n = 250$)	1,0000(!)	1,0000(!)	1,0000(!)	0,8381
HS ($n = 1000$)	1,0000(!)	0,9998(!)	0,9754(!)	0,9783(!)
FHS ($n = 250$)	0,9998(!)	0,9800(!)	0,9996(!)	0,2938
FHS ($n = 1000$)	0,2161	0,7650	0,7178	0,2458

Tabuľka 10.29: Výsledky analýzy priemernej hodnoty odhadov modelov historickej simulácie pre $\theta = 0,01$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Priemerná hodnota VaR ($\theta = 0,01$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
HS ($n = 250$)	5,0968	7,4105	4,4261	6,4378
HS ($n = 1000$)	5,1473	7,4700	4,4971	6,6058
FHS ($n = 250$)	4,9883	7,4343	4,5245	6,2996
FHS ($n = 1000$)	5,3621	7,6142	4,4644	6,3702

Tabuľka 10.30: Výsledky analýzy rozptylu odhadov modelov historickej simulácie pre $\theta = 0,01$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Variancia VaR ($\theta = 0,01$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
HS ($n = 250$)	4,7302	6,3303	2,4652	9,1575
HS ($n = 1000$)	1,6871	1,2864	0,5114	2,8009
FHS ($n = 250$)	6,1397	10,7224	4,5674	12,7222
FHS ($n = 1000$)	12,8602	8,3385	3,6619	12,7937

Zaujímavo dopadli výsledky analýzy priemernej hodnoty VaR odhadov. Aj napriek veľkému rozptylu VaR hodnôt odhadnutých FHS modelmi v porovnaní s triviálnym modelom historickej simulácie dosiahol model FHS ($n = 250$) pre dve zo štyroch aktív najmenšiu priemernú hodnotu odhadov. To je dôkaz toho, že predpovede s väčším rozptylom, ktoré sú charakteristické pre presnejšie modely nemusia nutne viesť k neprimerane veľkým VaR hodnotám, čo by znemožnilo ich použitie v praxi.

10.4 Parametrické modely

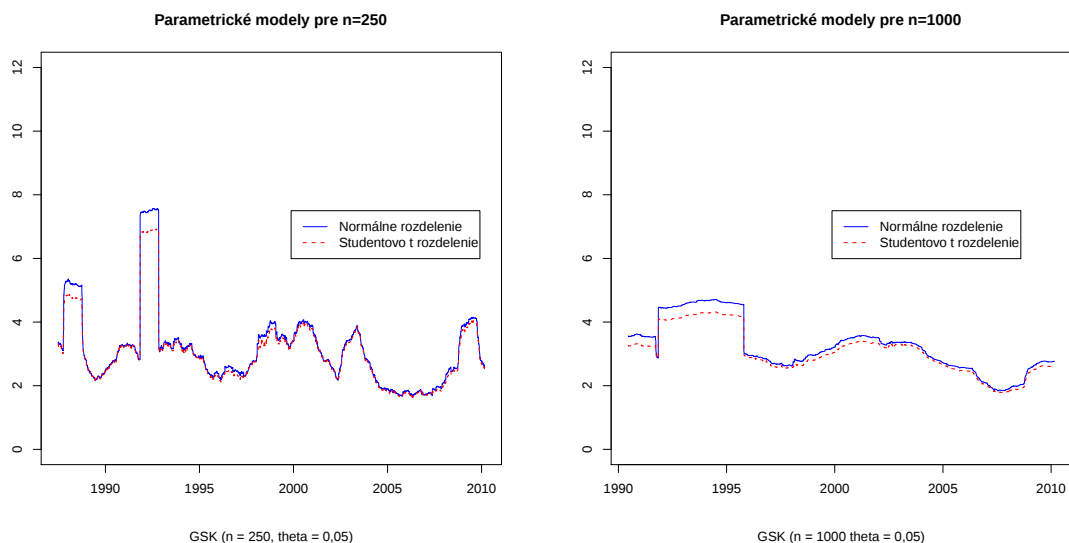
Meranie sme vykonali pre modely s predpokladom normálneho a Studentovho t rozdelenia, pre každý v dvoch variantách: pre $n = 250$ a $n = 1000$ pozorovaní.

Pre model s predpokladom normálneho rozdelenia sme parameter polohy μ fixovali na hodnotu $\hat{\mu} = 0$ a parameter variability σ^2 sme odhadli ako výberový rozptyl pre pozorovania z tréningového okna (rovnica 6.4).

Pre model s predpokladom Studentovho t rozdelenia sme parameter stupňa voľnosti ν odhadli podľa vzťahu 6.9, parameter polohy sme fixovali na hodnotu $\hat{\mu} = 0$ a parameter variability σ^2 podľa rovnice 6.4, tak ako pre model s normálnym rozdelením, s použitím pozorovaní nachádzajúcich sa v okne.

Všetky parametre sme prepočítali pre každý nový odhad VaR.

Vývoj 5% VaR odhadov pre aktívum GSK v čase pre parametrické modely pre obe veľkosti okien sú uvedené na obrázku 10.4.



Obr. 10.4: Vývoj 5% VaR odhadov pre akciu GSK generovaných parametrickými modelmi pre veľkosti okien $n = 250$ a $n = 1000$

V tabuľkách 10.31 až 10.40 uvádzame analýzu vykonaných odhadov 5% a 1% VaR parametrickými modelmi pre veľkosti okien $n = 250$ a $n = 1000$ pozorovaní.

Výsledky spätného testovania pre odhad 5% VaR dokázali dominanciu modelov PAR-T nad modelmi PAR-N (najpresnejšie odhady generoval model PAR-T ($n = 250$)). Takmer všetky modely systematicky precenili riziko, čo sa prejavilo menším počtom prekročení odhadnutých VaR hodnôt. Jedine pri aktíve PTR bola

Tabuľka 10.31: Výsledky spätného testovania parametrických modelov pre $\theta = 0,05$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Spätné testovanie odhadov VaR ($\theta = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
PAR-N ($n = 250$)	0,0363	0,0356	0,0389	0,0422
PAR-N ($n = 1000$)	0,0391	0,0301	0,0357	0,0602
PAR-T ($n = 250$)	0,0384	0,0382	0,0412	0,0445
PAR-T ($n = 1000$)	0,0433	0,0345	0,0407	0,0644

Tabuľka 10.32: Test nepodomieneného krytia parametrických modelov pre $\theta = 0,05$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Kupiecov test, p-hodnota ($\theta = 0,05, \alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
PAR-N ($n = 250$)	1,0000(!)	1,0000(!)	1,0000(!)	0,9118
PAR-N ($n = 1000$)	1,0000(!)	1,0000(!)	1,0000(!)	0,9146
PAR-T ($n = 250$)	1,0000(!)	1,0000(!)	0,9984(!)	0,7664
PAR-T ($n = 1000$)	0,9837(!)	1,0000(!)	0,9980(!)	0,9836(!)

Tabuľka 10.33: Test podmieneného krytia parametrických modelov pre $\theta = 0,05$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Christoff. test, p-hodnota ($\theta = 0,05, \alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
PAR-N ($n = 250$)	1,0000(!)	1,0000(!)	1,0000(!)	0,9947(!)
PAR-N ($n = 1000$)	1,0000(!)	1,0000(!)	1,0000(!)	0,9403
PAR-T ($n = 250$)	1,0000(!)	1,0000(!)	0,9994(!)	0,9919(!)
PAR-T ($n = 1000$)	1,0000(!)	1,0000(!)	0,9947(!)	0,9855(!)

Tabuľka 10.34: Výsledky analýzy priemernej hodnoty odhadov parametrických modelov pre $\theta = \mathbf{0,05}$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Priemerná hodnota VaR ($\theta = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
PAR-N ($n = 250$)	3,5221	5,4069	3,1524	3,9671
PAR-N ($n = 1000$)	3,6002	5,6899	3,2371	3,7810
PAR-T ($n = 250$)	3,3940	5,1560	3,0439	3,8768
PAR-T ($n = 1000$)	3,4028	5,2960	3,0612	3,6289

Tabuľka 10.35: Výsledky analýzy rozptylu odhadov parametrických modelov pre $\theta = \mathbf{0,05}$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Variancia VaR ($\theta = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
PAR-N ($n = 250$)	2,0932	3,8780	1,5156	2,5058
PAR-N ($n = 1000$)	1,1506	1,4418	0,6598	0,6085
PAR-T ($n = 250$)	1,7723	3,0471	1,2309	2,3690
PAR-T ($n = 1000$)	0,8945	1,0958	0,5012	0,5488

hranica 0,05 prekročená a to oboma modelmi s oknom $n = 1000$. Tento jav by sa dal interpretovať ako dôsledok nevhodnej veľkosti okna; okno s počtom pozorovaní $n = 1000$ je pravdepodobne príliš veľké na to, aby vedelo včas zachytiť zmeny na finančnom trhu.

Z grafov na obrázku 10.4 vyplýva zaujímavý poznatok. Modely s predpokladom Studentovho t rozdelenia generovali vo väčšine prípadov menšie odhady VaR ako modely s normálnym rozdelením, čo sa prejavilo aj na výsledkoch spätného testovania. To je však v rozpore s ideou použitia Studentovho t rozdelenia. To je preferované nad normálnym rozdelením práve kvôli tzv. „ťažkým“ chvostom, ktoré by mali odstrániť podceňovanie rizika, pre ktoré bývajú kritizované modely s predpokladom normality. Výsledky merania však naznačujú, že 5%-kvantil modelovaného rozdelenia výnosov nie je dosť extrémny na to, aby sa prejavil spomínaný efekt „ťažkých

chvostov“, naopak nachádza sa v oblasti, kde má ťažšie chvosty normálne rozdelenie (dôkazom čoho je aj prečenenie rizika vyplývajúce z výsledkov spätného testovania). Tento jav má však paradoxne taktiež pozitívny efekt na presnosť odhadov v prospech PAR-T modelov (pre porovnanie normálneho a Studentovho t rozdelenia viď obrázok 6.1).

Testy podmieneného a nepodmieneného krytia zamietli všetky parametrické modely. Jednou z hlavných príčin boli pomerne nepresné výsledky spätného testovania ako dôsledok systematického prečenenia rizika.

V hodnotení priemernej hodnoty a rozptylu dosiahli lepšie výsledky taktiež modely so Studentovým t rozdelením. Modely s oknom $n = 1000$ sú charakteristické menším rozptylom, avšak aj napriek väčšiemu výskytu extrémnych hodnôt dosiahol model PART-T ($n = 250$) najnižšiu priemernú hodnotu VaR odhadov pre tri zo štyroch aktív.

Tabuľka 10.36: Výsledky spätného testovania parametrických modelov pre $\theta = 0,01$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Spätné testovanie odhadov VaR ($\theta = 0,01$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
PAR-N ($n = 250$)	0,0150	0,01144	0,0149	0,0179
PAR-N ($n = 1000$)	0,0168	0,0112	0,0131	0,0266
PAR-T ($n = 250$)	0,0113	0,0112	0,0117	0,0142
PAR-T ($n = 1000$)	0,0118	0,0085	0,0089	0,0189

Tabuľka 10.37: Test nepodomieneného krytia parametrických modelov pre $\theta = 0,01$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Kupiecov test, p-hodnota ($\theta = 0,01, \alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
PAR-N ($n = 250$)	0,9998(!)	0,9990(!)	0,9995(!)	0,9992(!)
PAR-N ($n = 1000$)	1,0000(!)	0,6342	0,9640	1,0000(!)
PAR-T ($n = 250$)	0,7118	0,6379	0,8000	0,9380
PAR-T ($n = 1000$)	0,8113	0,7518	0,5848	0,9974(!)

Tabuľka 10.38: Test podmieneného krytia parametrických modelov pre $\theta = \mathbf{0,01}$ (znakom (!) je označené zamietnutie modelu testom pre hladinu významnosti $\alpha = 0,05$)

Christoff. test, p-hodnota ($\theta = 0,01, \alpha = 0,05$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
PAR-N ($n = 250$)	1,0000(!)	1,0000(!)	1,0000(!)	0,9964(!)
PAR-N ($n = 1000$)	1,0000(!)	0,9982(!)	0,9955(!)	1,0000(!)
PAR-T ($n = 250$)	0,9962(!)	0,9803(!)	0,9978(!)	0,8881
PAR-T ($n = 1000$)	1,0000(!)	0,9987(!)	0,8713	0,9995(!)

Tabuľka 10.39: Výsledky analýzy priemernej hodnoty odhadov parametrických modelov pre $\theta = \mathbf{0,01}$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Priemerná hodnota VaR ($\theta = 0,01$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
PAR-N ($n = 250$)	4,9814	7,6470	4,4586	5,6108
PAR-N ($n = 1000$)	5,0918	8,0474	4,5783	5,3476
PAR-T ($n = 250$)	5,4616	8,4386	4,8450	6,0592
PAR-T ($n = 1000$)	5,7018	9,0931	5,1109	5,9266

Tabuľka 10.40: Výsledky analýzy rozptylu odhadov parametrických modelov pre $\theta = \mathbf{0,01}$ (najlepší výsledok pre každé aktívum je zvýraznený hrubým písmom)

Variancia VaR ($\theta = 0,01$)				
Model	SNE	AAPL	GSK	PTR
PAR-N ($n = 250$)	4,1870	7,7572	3,0316	5,0124
PAR-N ($n = 1000$)	2,3016	2,8841	1,3198	1,2171
PAR-T ($n = 250$)	5,4773	10,6664	4,0980	5,9964
PAR-T ($n = 1000$)	3,1258	3,9496	1,8302	1,5298

Pre odhad 1% VaR dosiahli v spätnom testovaní lepšie výsledky opäť PAR-T modely. Vo výsledkoch vieme na rozdiel od výsledkov odhadu 5% VaR jasne identifikovať efekt systematického „podcenenia“ rizika PAR-N modelmi, ktoré dosiahli pri všetkých testovaných aktívach väčší počet prekročení, ako očakávané 1%.

Kupiecov test pre všetky aktíva nezamietol iba model PAR-T ($n = 250$), Christoffersenov test však zamietol všetky parametrické modely.

Najmenšiu priemernú hodnotu VaR odhadov dosiahol model PAR-N ($n = 250$), čo sa dalo očakávať vzhľadom na spomínané podcenenie rizika, vyplývajúce z vlastností samotného rozdelenia. Najmenší rozptyl odhadov dosiahol model PAR-N ($n = 1000$).

Výsledky parametrických modelov pre obe hladiny parametra θ potvrdili, že Studentovo t rozdelenie má v porovnaní s normálnym vhodnejšie vlastnosti pre modelovanie rozdelenia výnosov finančných aktív.

10.5 Vzájomné porovnanie modelov

Nakoľko sa VaR odhady generované jednotlivými modelmi kvalitatívne značne líšia (viď vývoj 5% VaR odhadov pre aktívum GSK na obr. 10.1, 10.2, 10.3 a 10.4), ich vzájomné porovnanie nie je triviálne. V tejto práci sme zvolili nepriamy prístup porovnania štatistických vlastností jednotlivých odhadov a ich vývoja v čase.

Hodnotiť budeme najmä vývoj výsledkov spätného testovania v čase (pomer pozorovaného počtu prekročených hodnôt a všetkých vykonaných odhadov) a tiež vývoj kumulatívnej priemernej hodnoty generovaných odhadov v čase (vzťah 7.7).

Porovnanie uskutočníme pre hladiny $\theta = 0,05$ a $\theta = 0,01$. Do porovnania zaradíme z každej triedy najpresnejší model (pre každú hladinu θ), pričom presnosť modelov v rámci jednotlivých tried sme posudzovali najmä podľa výsledkov spätného testovania a testovania podmieneného krytia.

Pre odhad 5% aj 1% VaR dosiahol spomedzi CAViaR modelov najväčšiu presnosť model CAV-IG, z modelov dvojitého jadra pre $\theta = 0,05$ model DK ($n = 250$), ktorý dosiahol najvyššiu presnosť pre tri zo štyroch aktív. Pre hladinu $\theta = 0,01$ sa ukázal byť vhodnejší model DK ($n = 1000$) (na základe výsledkov Kupiecovho testu).

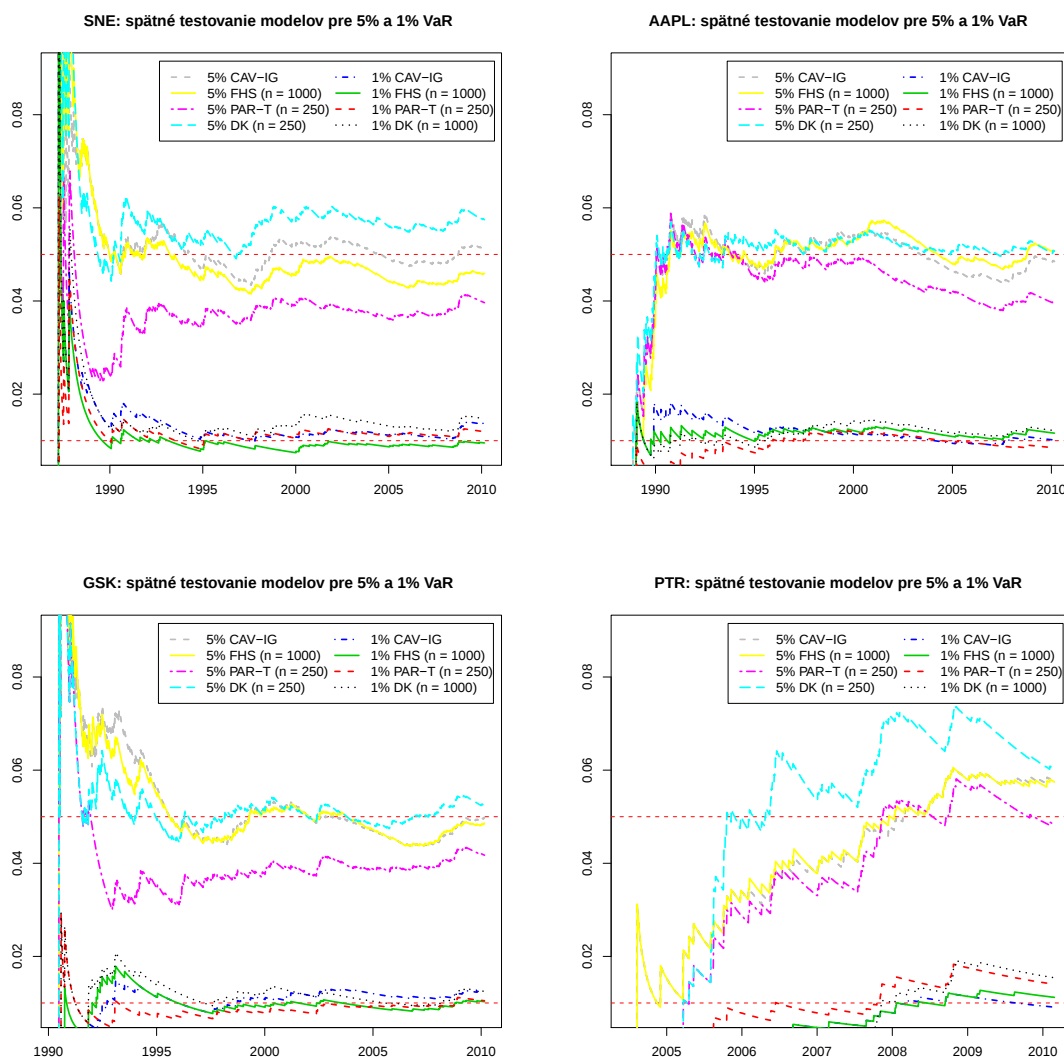
Medzi metódami historickej simulácie dosiahli najlepšie výsledky v spätnom testovaní oba modely FHS. V testoch podmieneného krytia dosiahol lepšie výsledky model FHS ($n = 1000$), preto sme zvolili tento. Parametrické modely sme pre porovnanie taktiež zaradili do analýzy. Z nich dosiahol najväčšiu presnosť model PAR-T ($n = 250$).

Na obrázku 10.5 uvádzame vývoj výsledkov spätného testovania a na obrázku 10.6 vývoj priemernej hodnoty VaR odhadov v čase.

Na grafoch je dobre viditeľný rozdiel v rozptyle medzi trajektóriami výsledkov spätného testovania jednotlivých modelov pre rôzne hladiny θ . Rozdiely medzi jednotlivými VaR modelmi sú rádovo menšie pre odhad 1% VaR ako pre odhad menej extrémneho 5%-kvantilu.

Najnižšie výsledky v spätnom testovaní dosahuje takmer v každom čase model PAR-T ($n=250$) (precenenie rizika), naopak najvyššie výsledky modely DK ($n = 250$) a DK ($n = 1000$).

Aj keď pre aktívum SNE dosiahli pomerne veľkú presnosť modely CAV-IG a FHS ($n = 1000$) (kladne hodnotíme najmä trajektóriu modelu FHS ($n = 1000$), nakoľko nedochádza k prekročeniu kritickej hodnoty 0,05, trajektória sa k hranici blíži zdola), u ostatných aktív nie je jednoznačné určenie najpresnejšieho z modelov možné.

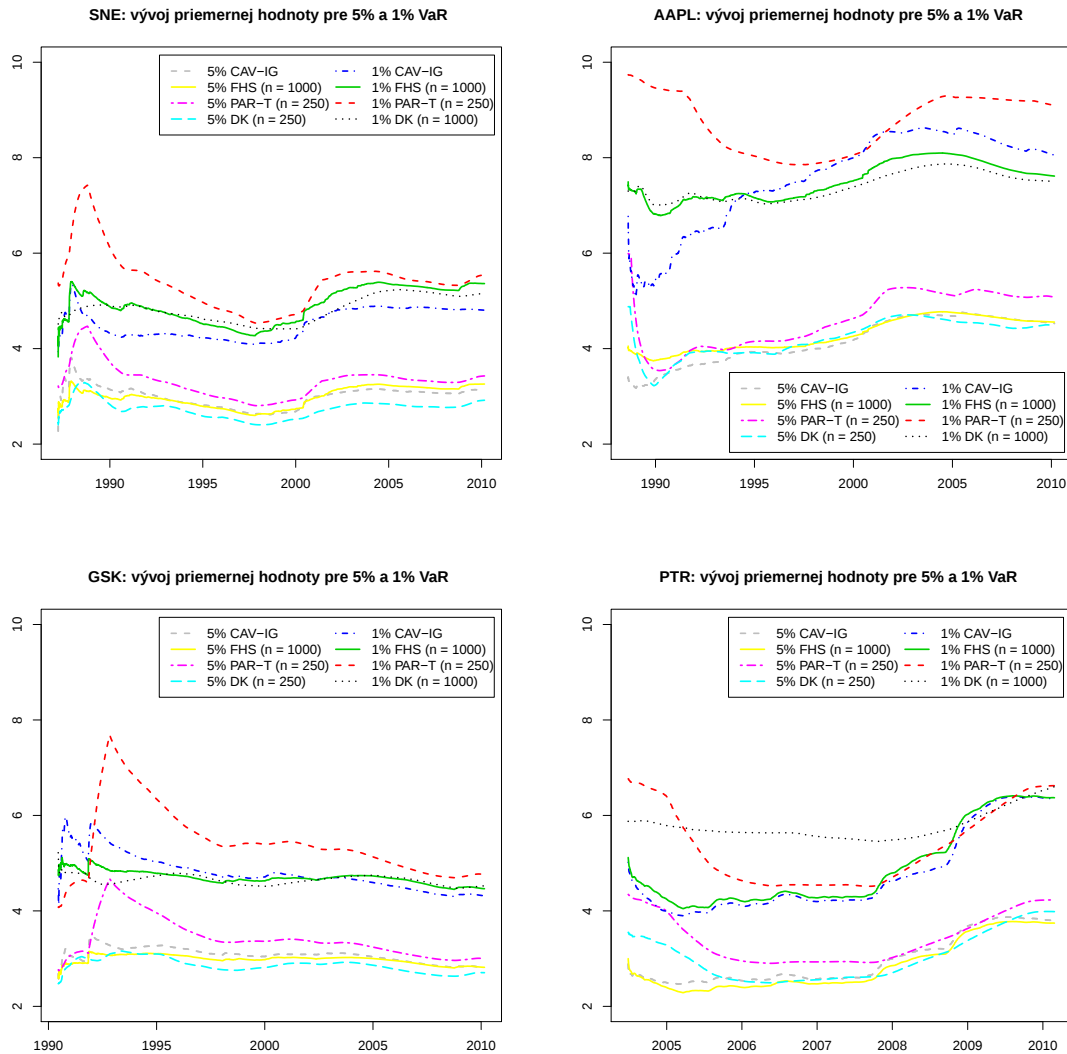


Obr. 10.5: Výsledky spätného testovania modelov CAV-IG, FHS($n = 1000$), DK($n = 250/1000$) a PAR-T ($n = 250$) pre $\theta = 0,05$ a $\theta = 0,01$

Pomerne zaujímavý je vývoj výsledkov spätného testovania pre aktívum PTR, kde je vidno relatívne pomalú konvergenciu modelov k hladine 0,05, resp. 0,01, čo naznačuje zlyhanie modelov pre toto aktívum. Vo všeobecnosti výsledky spätného testovania nepotvrdili absolútnu dominanciu žiadneho z testovaných modelov.

Vývoj kumulovanej priemernej hodnoty VaR odhadov po vylúčení modelov PAR-T a DK (vzhľadom k relatívne neuspokojivým výsledkom spätného testovania) naznačujú podobné vlastnosti CAV-IG a FHS modelov, no ani z tohto pohľadu nie je možné jednoznačne identifikovať lepší model.

Aj keď sa v analyzovaných časových radoch nachádzajú dve obdobia recesie (jedno v roku 2000 a jedno v roku 2008), grafy naznačujú, že všetky modely sú približne rovnakým spôsobom ovplyvňované negatívnymi šokmi na výnosy aktív, ktoré sú pre tieto obdobia charakteristické. Ani po prechode cez obdobie recesie nedochádza k výraznejšiemu skríženiu jednotlivých trajektórií a tým pádom zmeny kvalitatívneho poradia jednotlivých modelov.



Obr. 10.6: Vývoj priemernej hodnoty VaR odhadov v čase pre modely CAV-IG, FHS($n = 1000$), DK($n = 250/1000$) a PAR-T ($n = 250$) pre $\theta = 0,05$ a $\theta = 0,01$

Záver

V práci sme sa zaoberali rizikovou mierou „Value at Risk“ a metódami jej odhadu. Cieľom práce bolo spracovanie vybraných neparametrických a semiparametrických metód a ich vzájomné porovnanie na viacerých súboroch pozorovaní. Pridanou hodnotou práce bolo najmä porovnanie modelov dvojitého jadra, podmieneného autoregresného modelu a metódy filtrovanej historickej simulácie, nakoľko práve tieto majú najväčšie predpoklady k dosiahnutiu presných výsledkov.

Z výsledkov vzájomného porovnania nemožno určiť najvhodnejší model, nakoľko relatívna presnosť jednotlivých metód je viazaná na charakter analyzovaných údajov. Aj keď žiadny zo skúmaných modelov nedosiahol absolútnu dominanciu pre všetky testovacie súbory, relatívne vysokú presnosť dosahovali najmä podmienený autoregresný model tzv. „Nepriamy GARCH(1,1)“, a model filtrovanej historickej simulácie s „trénovacím“ oknom 1000 pozorovaní. Kladne hodnotíme najmä druhú zo spomenutých metód, ktorej výsledky spätného testovania boli v menšej miere nad očakávanou hranicou prekročení. V neprospech prvého z modelov je aj jeho pomerne veľká výpočtová zložitosť.

Modelom dvojitého jadra sa nepodarilo dosiahnuť výraznejšiu presnosť, čo mohlo byť spôsobené nevhodne zvolenou procedúrou pre odhad parametrov samotných jadrových funkcií. Pre odhad 5% VaR sa ukázal byť vhodnejší model s oknom 250 pozorovaní a pre odhad extrémnejšej 1% VaR model s oknom 1000 pozorovaní. U oboch modelov sme pozorovali neschopnosť zachytenia oblastí s vyššou volatilitou.

Pre žiadny z hodnotených modelov sme nepozorovali neštandardný vplyv negatívnych šokov na ceny aktív (charakteristických pre obdobia recesie), ktoré boli obsiahnuté vo všetkých testovacích súboroch. Výskyt takýchto období sa u všetkých modeloch prejavil relatívne miernym zvýšením počtu prekročení odhadovaných hodnôt výnosmi, inak nebola pozorovaná žiadna zmena v kvalite odhadov.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M. a Heath, D.: *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, No. 9, 1999, s. 203 - 228
- [2] Engle, R. F. a Manganelli, S.: *CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles*, Journal of Business & Economic Statistics, 2004, s. 367-381
- [3] Duffie, D. a Singleton, K. J.: *Pricing, Measurement, and Management*, Princeton University Press, Princeton, 2003, 417 s.
- [4] Koenker, R. a Bassett, G.: *Regression Quantiles*, Econometrica, Vol. 46, No. 1, 1978, s. 33-50
- [5] Barone-Adesi, G., Giannopoulos, K. a Vosper, L.: *VaR without correlations for portfolio od derivative securities*, U.S.I Lugano, Univerzity of Westminster London, The London Clearing House Ltd., 1997, revidované 1999, 29 s.
- [6] Kirchgässner, G. a Wolters, J.: *Introduction to Modern Time Series Analysis*, Springer Berlin Heidelberg New York, Berlin, 2007, 276 s., ISBN 978-3-540-73290-7
- [7] Kuester, K., Mittnik, S. a Paolella, M. S.: *Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies*, Journal of Financial Econometrics, Vol. 4, No. 1, 2006, s. 53-89
- [8] Qi, L., Racine, J. S.: *Nonparametric Econometrics: Theory and Practice*, Princeton University Press, New Jersey, 2007, ISBN 0691-121-613
- [9] Yu, K. a Jones, M. C.: *Local Linear Quantile Reression*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 93, No. 441, 1998, s. 228-237

- [10] Yu, K. a Jones, M. C.: *A comparison of Local Constant and Local Linear Regression Quantile Estimation*, Computational Statistics and data analysis, No. 25, 1997, s. 159 - 166
- [11] Stone, C. J.: *Consistent Nonparametric Regression*, The annuals of Statistics, No. 4, 1977, s. 595 - 645
- [12] Fan, J., Yao, Q. a Tong, H.: *Estimation of Conditional Densities and sensitivity Measures*, Biometrika, No. 83, 1996, s. 189 - 206
- [13] Štalmach, M.: *Value-at-Risk: nástroj na meranie trhového rizika*, Diplomová práca, Univerzita Komenského v Bratislave, Bratislava, 2007, 95 s.
- [14] Picková, R.: *Value-at-Risk estimation - non standard approaches*, SVOČ, Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2008, 47 s.
- [15] Potisková, L.: *Odhad Value-at-Risk pomocou copula funkcií*, Diplomová práca, Univerzita Komenského v Bratislave, Bratislava, 2009, 60 s.
- [16] Rimarčík, M.: *Využitie metód Value-at-Risk na meranie kurzového rizika*, Dizertačná práca, Ekonomická Univerzita v Bratislave, Košice, 2004, 181 s.
- [17] Linsmeier, T. a Pearson, N. D.: *Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk*, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1996, revidované 1999, 46 s.
- [18] Christoffersen, P., Hahn, J. a Inoue, A.: *Testing and Comparing Value-at-Risk Measures*, Scientific Series, Montreal, 2001, 22 s., ISSN 1198-8177
- [19] Dowd, K.: *Measuring market risk*, Chichester, John Wiley & Sons, 2002, ISBN 9780-470855-218
- [20] Bollerslev, T.: *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, No. 31, 1986, s. 307 - 327
- [21] Fama, E.: *The behavior of Stock-Market Prices*, The Journal of Business, Vol. 38, No. 1, 1965, s. 34 - 105
- [22] Ané, T. a Geman, H.: *Order Flow, Transaction Clock, and Normality of Asset Returns*, The Journal of Finance, Vol. 55, No. 5, 2000, s. 2259 - 2284

Príloha

Obsahom tejto prílohy je knižnica z prostredia štatistického programu *R*, ktorá bola vytvorená za účelom testovania a vzájomného porovnania VaR modelov popísaných v tejto práci. Okrem jednotlivých VaR modelov sa v knižnici tiež nachádzajú testy nepodmieneného a podmieneného krytia.

```
##
## PACKAGES REQUIRED
##
library(gsl)
library(subplex)
library(tseries)
library(stats)
library(moments)

#####
# 01 Evaluating theta-VaR using CAViaR spec
#####
caviar<-function(stock,spec=2,theta=0.05,beta=c(0,0,0,0),alfa=0,
  info=TRUE) {
#evaluate VAR for T+1 day using CAViaR models (Engle & Manganelli
  , 2004)
#stock: vector of asset returns of t in 1:T
#spec = list(1,2,3,4,5): ID of specification to be used: 1.
  ADAPTIVE, 2. SYMETRIC 3. ASYMETRIC SLOPE 4. INDIRECT HARCH 5.
  AR(1)-GARCH(1,1)
#theta: probability related with VaR
#beta: if 0, function will optimize vector of parametres beta
  during each call,
#      else will use given beta parametres (for long term
  simulations and model testing)
#alfa: if 0, function will estimate AR(1) parameter using OLS
  during each call,
#      else will use given beta parametres (for long term
  simulations and model testing)
#CONSTANTS:
# numHS<-30 #first numHS lags will use for evaluating f[1]
  value
# K<-10 #constant parameter in adaptive specification (size
  of correction step)
#SUB-FUNCTIONS:
#FUNCTION-BODY:
  #evaluating parameter alfa for ARCH GARCH model if needed
```

```

if ( alfa==0 & spec==5) {
  mar<-ar.ols(stock ,order.max=1,intercept=FALSE,aic=FALSE)
  alfa<-mar$ar[1]
}
#evaluating vector of parametres beta if needed
if (beta[1]==0 & beta[2]==0 & beta[3]==0 & beta[4]==0) {
  beta<-betahat(stock ,spec ,theta ,numHS,K, alfa) #treba
optimalizovat
}
caviarout<-(quant(stock ,spec ,theta ,beta ,numHS,K, alfa ))
#display info if needed
if (info==TRUE) {
  msg<-paste("nCaviAR estimation for T+1 day:\n")
  msg<-paste(msg," CAViaR specification used: ",spec ,"\n")
  msg<-paste(msg," Probability theta: ",theta ,"\n")
  msg<-paste(msg," N of observ. used for est.: ",length(stock) ,"
\n")
  msg<-paste(msg," Beta est.: [",format(beta
[1] , digits=4) ," ",format(beta[2] , digits=4) ," ",format(beta
[3] , digits=4) ," ",format(beta[4] , digits=4) ," ]\n")
  msg<-paste(msg," Alpha est. (AR(1)): [",format( alfa ,
digits=4) ," \n")
  msg<-paste(msg," CAViaR est. for T+1 day: ",format(
caviarout , digits=4) ," \n")
  cat(msg)
}
invisible(caviarout)
}

#####
# 02 Theta-quantile evaluation using CAViaR
#####
quant<-function(stock ,spec ,theta ,beta ,numHS,K, alfa) {
#evaluate quantile f for T+1 day using CAViaR spec.
#stock: vector of asset returns of t in 1:T
#numHS: number of first lags of stock to be used for f[1]
estimate (as empirical quantile theta of stock[1:numHS]
# first quantile f[1] will be estimated for time t = numHS
+1
#spec: ID of specification to be used: 1. ADAPTIVE, 2. SYMETRIC
3. ASYMETRIC SLOPE 4. INDIRECT GARCH 5. AR(1)-GARCH(1,1)
#beta: vector of parametres
#theta: probability related with VaR
#K: constant parameter in ADAPTIVE MODEL
#alfa: AR(1) coef.
#CONSTANTS:
#SUB-FUNCTIONS:
#FUNCTION-BODY:
  f<-as.numeric() #vector of evaluated VaR of length length(stock
)
  n<-length(stock)
  for (t in c(1:(n+1))) {
    if (t<=numHS) {
      f[t]<-0
      next
    }
    if (t==(numHS+1)) {

```

```

    f[t]<-(hs(stock[1:(t-1)],theta))
  next
}
if (spec==1) { #01 ADAPTIVE MODEL
  f[t]<-(f[t-1] + beta[1] * (1 / (1+exp(K*(stock[t-1] + f[t-1])))) - theta)
}
if (spec==2) { #02 SYMETRIC VALUE SLOPE
  f[t]<-(beta[1] + beta[2] * f[t-1] + beta[3] * abs(stock[t-1]))
}
if (spec==3) { #03 ASSYMETRIC VALUE SLOPE
  f[t]<-(beta[1] + beta[2] * f[t-1] + beta[3]*max(stock[t-1],0) + beta[4]*(-1)*min(stock[t-1],0))
}
if (spec==4) { #04 INDIRECT GARCH
  f[t]<-sqrt(beta[1] + beta[2] * (f[t-1])^2 + beta[3]*(stock[t-1])^2)
}
if (spec==5) { #05 ARCH GARCH
  f[t]<- -alfa*stock[t-1] + sqrt(beta[1] + beta[2]*(f[t-1]+ alfa*stock[t-2])^2 + beta[3]*(stock[t-1]-alfa*stock[t-2])^2)
}
if (spec>5) {
  stop("Wrong specified parameter spec!")
  return(0)
}
}
invisible(f[n+1])
}

```

```

#####
# 03 Evaluating VaR using historical simulation
#####
hs<-function(stock,theta) {
#evaluate empirical quantile f (-f = VAR at time t) for T+1 day
  using Historical simulation method
#stock: vector of asset returns of t in 1:T
#theta: probability related with VaR
  invisible(-min(0,quantile(stock,probs=theta)))
}

```

```

#####
# 04 Optimization routine for beta parametres of CAViaR
#####
betahat<-function(stock,spec,theta,numHS,K,alfa) {
#returns optimal beta vector of parameters for VaR evaluating
  using CAViaR spec
#stock: vector of asset returns of t in 1:T to be used for beta
  estimation
#spec = list(1,2,3,4,5): ID of specification to be used: 1.
  ADAPTIVE, 2. SYMETRIC 3. ASYMETRIC SLOPE 4. INDIRECT GARCH 5.
  AR(1)-GARCH(1,1)
#theta: probability related with VaR and thus beta parametres
#numHS: number of lags to be used for f[1] estimation. As values
  stock[1:numHS] are used for f[1] evaluation
}

```

```

#           therefore only stock[numHS+1:T] are used for
#           autoregressive beta estimation in fact
#K: constant parameter in adaptive specification
#alfa: AR(1) parameter
#CONSTANTS:
  n<-1500 #we generate n beta0 vectors during optimization
          routine
  m<-15 #we choose m beta0 vectors with the lowest objective
        function value
#SUB-FUNCTIONS:
  #####
  # 03.1 Objective function to be minimized
  #####
  qreg<-function(beta) {
    #objective function that is minimized using nonlinear
    programming
    #works with vector stock inherited
    n<-length(stock)
    sum<-0
    #we will save f[t] values in the f vector
    f<-as.numeric() #vector of evaluated VaR of length
                    length(stock)
    t0<-numHS+1 #first lag we set as empirical quantile til
                time numHS
    f[t0] <- (hs(stock[1:numHS],theta))
    if (stock[t0]<-f[t0]) {
      sum <- sum + ( theta-1 ) * ( stock[t0]+f[t0] )
    } else {
      sum <- sum + ( theta-0 ) * ( stock[t0]+f[t0] )
    }
    #then we count others autoregressivly
    if (t0+1>n) {
      stop("Par. numHS too big! Lower the par. or take more
            lags of stock")
      return(0)
    }
    for (t in (t0+1):n) {
      if (spec==1) { #01 ADAPTIVE MODEL
        f[t]<-f[t-1] + beta[1] * (1 / ( 1+exp(K*(stock[t-1]
          + f[t-1])) ) - theta)
      }
      if (spec==2) { #02 SYMETRIC VALUE SLOPE
        f[t]<-(beta[1] + beta[2] * f[t-1] + beta[3] * abs(
          stock[t-1]))
      }
      if (spec==3) { #03 ASSYMETRIC VALUE SLOPE
        f[t]<-(beta[1] + beta[2] * f[t-1] + beta[3]*max(
          stock[t-1],0) + beta[4]*(-1)*min(stock[t-1],0))
      }
      if (spec==4) { #04 INDIRECT GARCH
        if ((beta[1] + beta[2] * (f[t-1])^2 + beta[3]*(
          stock[t-1])^2) < 0) {
          return(999999999)
        }
        f[t]<-sqrt(beta[1] + beta[2] * (f[t-1])^2 + beta[3]
          *(stock[t-1])^2)
      }
    }
  }

```

```

        if (spec==5) { #05 ARCH GARCH
            if ((beta[1] + beta[2]*(f[t-1]+alfa*stock[t-2])^2 +
                beta[3]*(stock[t-1]-alfa*stock[t-2])^2) < 0) {
                return(999999999)
            }
            f[t]<- -alfa*stock[t-1] + sqrt(beta[1] + beta[2]*(f
                [t-1]+alfa*stock[t-2])^2 + beta[3]*(stock[t-1]-
                alfa*stock[t-2])^2)
        }
        if (spec>5) {
            stop("Wrong specified parameter spec!")
            return(0)
        }

        if (stock[t]< -f[t]) {
            sum <- sum + ( theta-1 ) * ( stock[t]+f[t] )
        } else {
            sum <- sum + ( theta-0 ) * ( stock[t]+f[t] )
        }
    }
    invisible(sum/(n-numHS))
}
#FUNCTION-BODY:
beta0<-matrix(nrow=n,ncol=4) #first we generate beta0 as
starting point
for (i in c(1:n)) {
    beta0[i,]<-runif(4,0,1)
}
qregval<-as.numeric() #some declarations here
minobjf<-as.numeric()
minbeta<-as.numeric()
for (i in c(1:n)) { #quantile evaluation for n starting points
    qregval[i]<-qreg(beta0[i,])
}
sorqregval<-sort(qregval)
for (i in c(1:m)) { #we optimize now for m vectors
    whichbeta<-which(qregval==sorqregval[i])[1] #index of used
beta0 for this iteration
    simplexstate<-subplex(beta0[whichbeta,],qreg,control=list(
        maxit=300))
    if (simplexstate$convergence==0) {
        state<-multimin(simplexstate$par,qreg, method="nm", prec="
            0.00001")
    }
    else {
        state<-multimin(beta0[whichbeta,],qreg, method="nm", prec="
            0.00001")
    }
    if (i==1) {
        minobjf<-state$f
        minbeta<-state$x
    } else {
        if (minobjf>state$f) {
            minobjf<-state$f
            minbeta<-state$x
        }
    }
}

```

```

    }
  }
invisible(minbeta)
}

#####
# 05 Evaluating VaR using parametric (analytic) methods (Gauss,
#      Student)
#####
paramvar<-function(stock,theta,distr="norm") {
#evaluate quantile f (-f = VAR at time t) for T+1 day using
#parametric spec based on N(0,sdev^2) distr. or Student distr.
#stock: vector of asset returns of t in 1:T
#theta: probability related with VaR
#distr: ID of distribution for use
  n<-length(stock)
  sdev<-stats::sd(stock)
  if (distr=="norm") {
    pom<- -qnorm(theta, sd = sdev)
  }
  if (distr=="tdist") {
    k<-kurtosis(stock)
    v<-abs(round((4*k-6)/(k-3)))
    stdodch<-stats::sd(stock)
    pom<- -sqrt((v-2)/v)*stdodch*qt(theta, df=v)
  }
invisible(pom)
}

#####
# 06 Evaluating VaR using FILTERED HISTORICAL SIM
#####
fhs<-function(stock,theta) {
#evaluate quantile f (-f = VAR at time t) for T+1 day using
#FILTERED historical simulation
#stock: vector of asset returns of t in 1:T
#theta: probability related with VaR
  n<-length(stock)
  marma<-arma(stock,include.intercept=FALSE)
  n1<-marma$coef[1]
  n2<-marma$coef[2]
  mgarch<-garch(stock,trace=FALSE)
  a1<-mgarch$coef[1]
  a2<-mgarch$coef[2]
  a3<-mgarch$coef[3]
  stockhat<-as.numeric()
  marma$residuals[1]<-0
  e<-as.numeric()
  hhat<-as.numeric()
  e[1]<-0
  hhat[1]<-0
  for (i in 2:n) {
    hhat[i]<-a1 + a2*(marma$residuals[i-1])^2 + a3*hhat[i-1]
    e[i]<-marma$residuals[i]/sqrt(hhat[i])
  }
  hhat[n+1]<-a1 + a2*(marma$residuals[n])^2 + a3*hhat[n]
  stockhat[1]<-stock[1]

```

```

    for (i in 2:n) {
      stockhat[i]<-n1*stock[i-1] + n2*sqrt(hhat[n+1])*e[i-1] + sqrt
        (hhat[n+1])*e[i]
    }
    invisible(hs(stockhat,theta))
  }
}

#####
# 07 Evaluating VaR using double kernel smoothing
#####
kernvar<-function(data,theta=0.05,h1=2,h2=2) {
#evaluate quantile f (-f = VAR at time t) for T+1 day using
  double kernel local linear (using Epanechnikov kernel)
#data: vector of asset returns of t in 1:T
#theta: probability related with VaR
#h1, h2: bandwidths connected with kernel smoothing
  n<-length(data)
  x<-data[n]
# FUNCTIONS:
  kernvaroptim<-function(q) {
    #print(sum( v0(x,data[1:(n-1)])))
    invisible( v0(x,data[1:(n-1)]) %*% Omega(q,data[2:n],h2) /
      sum( v0(x,data[1:(n-1)]) ) - theta)
  }
  Omega<-function(y,Yj,h) {
    #cumulative distribution function for UNIFORM KERNEL
    foo<-as.numeric()
    for (i in 1:length(Yj)) {
      if (y<(Yj[i]-h)) {foo[i]<-0}
      else {
        if (y<=(Yj[i]+h)) {
          #foo[i]<-(1/(2*h) * (y-Yj[i]+h) ) #UNIFORM
          foo[i]<-(3/(4*h) * (y-Yj[i]+h) - 1/(4*h) * (y^3 - (Yj[
            i]-h)^3) ) #EPANECHNIKOV
        }
        else {foo[i]<-(1)}
      }
    }
    invisible(foo)
  }
  K<-function(x) {
    foo<-3/4*(1-x^2)
    #foo<-1/2*x
    foo[abs(x)>1]<-0
    invisible(foo)
  }
  v0<-function(x,Xi) {
    #weight function improved kernel
    foo<-as.numeric()
    for (i in 1:length(Xi)) {
      foo[i]<-K((x-Xi[i])/h1)
    }
    invisible(foo)
  }
#FUNCTION BODY:
  mine<-min(data)
  maxe<-0#max(data)

```

```

foomine<-mine
foomaxe<-maxe
i<-0
if (kernvaroptim(mine) > 0) {
  #i<-0
  while((kernvaroptim(mine) > 0) & (i<=500)) {
    i<-i+1
    mine <- runif(1,foomine,foomaxe)
  }
}
if (kernvaroptim(maxe) < 0) {
  i<-0
  while((kernvaroptim(maxe) < 0) & (i<=500)) {
    i<-i+1
    maxe <- runif(1,foomine,foomaxe)
  }
}
if (i>500) {
  invisible(NA)
} else {
  invisible(-uniroot(kernvaroptim,c(mine,maxe))$root)
}
}

#####
# 08 Bandwidth selection
#####
bwkern<-function(data) {
#function returns bandwidth h1 for doublekernel method
n<-length(data)
msucet<-data[2]-data[1]
for (i in (3:n)) {
  sucet<-abs(data[i]-data[i-1])
  if (msucet <= sucet) {
    msucet<-sucet
  }
}
return(msucet)
cat("bw: ",msucet,"\n")
}

#####
# 09 Kupiec test of unconditional coverage
#####
kupiec<-function(data,theta,alpha=0.05) {
  n<-length(data)
  nhit<-length(data[data==1])
  thetahat<-nhit/n
  val<- -2*log( ((1-theta)/(1-thetahat))^(n-nhit) * (theta/
    thetahat)^nhit )
  lowerlim<-qchisq((alpha/2),1)
  upperlim<-qchisq((1-alpha/2),1)
  pval<-pchisq(val,1)
  msg<-""
  msg<-paste(msg,"      Num. of observations: ",n,"\n")
  msg<-paste(msg,"      Num. of hits: ",nhit,"\n")

```

```

msg<-paste(msg, "                                Theta: ",format(theta,digits
=4),"\n")
msg<-paste(msg, "                                Thetahat: ",format(thetahat,
digits=4),"\n")
msg<-paste(msg, "                                Alpha: ",format(alpha,digits
=4),"\n")
msg<-paste(msg, " Statistics (and Limits): ",format(val,digits
=4), " (",lowerlim, " , ",upperlim,")\n")
msg<-paste(msg, "                                p-value: ",format(pval,digits
=4),"\n")
cat(msg)

invisible(pval)
}

#####
# 10 Christoffersen test of conditional coverage
#####
christoff<-function(data,theta,alpha=0.05) {
  n<-length(data)
  nhit<-length(data[data==1])
  thetahat<-nhit/n
  n00<-as.numeric()
  n01<-as.numeric()
  n10<-as.numeric()
  n11<-as.numeric()
  lambda01<-as.numeric()
  lambda11<-as.numeric()
  lambda2<-as.numeric()
  n00<-0
  n01<-0
  n10<-0
  n11<-0
  lambda01<-0
  lambda11<-0
  lambda2<-0
  for(i in 2:n) {
    if (data[i] == 0 & data[i-1] == 0) {n00<-n00+1}
    if (data[i] == 1 & data[i-1] == 0) {n01<-n01+1}
    if (data[i] == 0 & data[i-1] == 1) {n10<-n10+1}
    if (data[i] == 1 & data[i-1] == 1) {n11<-n11+1}
  }
  lambda01<- n01 / (n01 + n00)
  lambda11<- n11 / (n11 + n10)
  lambda2<- (n01 + n11) / (n01 + n00 +n10 + n11)
  valuc<- -2*log( ((1-theta)/(1-thetahat))^(n-nhit) * (theta/
    thetahat)^nhit )
  valind<- -2*log( (1-lambda2)^(n00+n10) * (lambda2*100)^(n01+n11
    ) / ( (1-lambda01)^n00 * (lambda01*100)^n01 * (1-lambda11)^
    n10 * (lambda11*100)^n11 ) )
  valcc<-valuc+valind
  lowerlim<-qchisq((alpha/2),2)
  upperlim<-qchisq((1-alpha/2),2)
  pval<-pchisq(valcc,2)
  msg<-" "
  msg<-paste(msg, "      Num. of observations: ",n,"\n")
  msg<-paste(msg, "      Num. of hits: ",nhit,"\n")

```

```

msg<-paste(msg,"
msg<-paste(msg,"
msg<-paste(msg,"
msg<-paste(msg,"
msg<-paste(msg,"
      =4),"\\n")
msg<-paste(msg,"
      digits=4),"\\n")
msg<-paste(msg,"
      =4),"\\n")
msg<-paste(msg," Statistics (and Limits): ",format(valcc,digits
      =4)," (",lowerlim," ",",upperlim,")\\n")
msg<-paste(msg,"
      =4),"\\n")
cat(msg)
invisible(pval)
}
n00: ",n00,"\\n")
n10: ",n10,"\\n")
n01: ",n01,"\\n")
n11: ",n11,"\\n")
Theta: ",format(theta,digits
Thetahat: ",format(thetahat,
Alpha: ",format(alpha,digits
p-value: ",format(pval,digits

```