

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

# NUMERICKÉ OCEŇOVANIE OPCÍ

Diplomová práca

Bc. HANA KADLEČÍKOVÁ

2010

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE  
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky



# NUMERICKÉ OCEŇOVANIE OPCÍÍ

Diplomová práca

Bc. HANA KADLEČÍKOVÁ

9.1.9 Aplikovaná matematika  
Ekonomická a finančná matematika

Vedúci práce: RNDr. Ján Bábeľa

BRATISLAVA 2010

## Čestné vyhlásenie

*Čestne vyhlasujem, že ja Hana Kadlečíková,  
som túto prácu napísala na základe svojich  
vedomostí s pomocou odbornej literatúry  
a vedúceho diplomovej práce.*

.....

Bc. Hana Kadlečíková

## Podakovanie

*Touto cestou by som sa chcela poďakovať  
vedúcemu diplomovej práce  
RNDr. Jánovi Bábelovi,  
za vedenie, odbornú pomoc, návrhy,  
pripomienky, motiváciu a trpezlivosť,  
ktoré mi venoval pri písaní tejto práce.*

# Abstrakt

**KADLEČÍKOVÁ Hana:** *Numerické oceňovanie opcií.* Diplomová práca. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského, Bratislava (2010), s. 59.

Školiteľ: RNDr. Ján Bábeľa.

Cieľom diplomovej práce je vytvorenie aplikácie pre oceňovanie vybraných typov opcií. Aplikácia je vytvorená v prostredí Visual Basic. Obsahuje ocenenia pre *Európske opcie* na akcie a výmenné kurzy, *Americké opcie* na akcie a výmenné kurzy, *bariérové opcie* na výmenné kurzy, *Double-no touch opciu* na výmenný kurz a *Range accrual swap* na výmenný kurz.

Pri oceňovaní využívame a popisujeme 2 modely oceňovania opcií. Metódu Monte Carlo simulácie a metódu Binomických stromov. Pre jednotlivé typy opcií uvádzame numerické porovnanie výsledkov ocenenia našou aplikáciou s ocenením softvéru

SUPERDERIVATIVES. Niektoré typy opcií sme porovnávali i s Black-Scholesovými vzorcami.

## **Kľúčové slová:**

call opcia, put opcia, *Európske opcie*, *Americké opcie*, *bariérové opcie*, *Range accrual swap*, *Double no touch opcia*, metóda binomických stromov, Monte Carlo simulácie, Black-Scholesove vzorce

# Abstract

**KADLEČÍKOVÁ Hana:** *Numerical price assessing of options*. Diploma theses. Faculty of mathematics, physics and informatics, Comenius University, Bratislava (2010), p. 59.

Supervisor: RNDr. Ján Bábela.

The purpose of this diploma thesis is to create an application for price assessing of certain selected types of options. This application has been created in Visual Basic environment and contains price assessments for *European stock currency options*, *American stock and currency options*, *barrier currency options*, *Double no touch currency swap* and *Range accrual currency option*.

We are using and describing two methods for price assessing options. Monte Carlo method and Binomial tree method. For each type of option we are comparing numerical results on our own application to that of SUPERDERIVATIVES software. However, some types of options are being compared with Black-Scholes formulas.

## **Key words:**

call option, put option, *European option*, *American option*, *barrier options*, *Range accrual swap*, *Double no touch option*, Binomial tree method, Monte Carlo simulation method, Black-Scholes formulas

# Obsah

<b>Zoznam tabuliek</b>	<b>10</b>
<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>11</b>
Úvod . . . . .	12
<b>1 Pojem opcie a niektoré typy opcií</b>	<b>14</b>
1.1 Európske opcie . . . . .	15
1.1.1 Európska call opcia . . . . .	15
1.1.2 Európska put opcia . . . . .	15
1.2 Americké opcie . . . . .	16
1.3 Opcia s Bermudskou bariérou . . . . .	16
1.4 Opcie s európskym typom bariéry . . . . .	16
1.4.1 Down-and-in opcia . . . . .	17
1.4.2 Up-and-in opcia . . . . .	17
1.4.3 Down-and-out opcia . . . . .	17
1.4.4 Up-and-out opcia . . . . .	18
1.5 Bariérové opcie s americkým typom bariéry . . . . .	18
1.6 Digitálne opcie . . . . .	19
1.7 Range accrual opcia . . . . .	19
<b>2 Black-Scholesov model oceňovania opcií</b>	<b>21</b>

2.1	Oceňovanie amerických bariérových opcií Black-Scholesovým modelom . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Oceňovanie opcií metódou binomických stromov</b>	<b>24</b>
3.1	Jednokrokový binomický strom . . . . .	24
3.2	Dvojkrokový binomický strom . . . . .	26
3.3	Viacrokový binomický strom . . . . .	27
3.4	Oceňovanie amerických opcií použitím binomického stromu . . . . .	28
3.5	Oceňovanie bariérových opcií metódou binomického stromu . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Metóda Monte - Carlo simulácie</b>	<b>31</b>
4.1	Popis metódy pre oceňovanie opcií . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Opcie na výmenné kurzy</b>	<b>33</b>
5.1	Binomický strom pre opcie na výmenné kurzy . . . . .	33
5.2	Model s využitím forwardového kurzu . . . . .	33
5.3	Model s využitím domácej a zahraničnej úrokovej miery . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Testovanie a analýza použitých metód</b>	<b>36</b>
6.1	Európske opcie na akcie . . . . .	37
6.2	Opcie na výmenné kurzy používajúce ako vstup úrokové miery . . . . .	40
6.2.1	Európska call opcia . . . . .	40
6.3	Európske bariérové opcie na výmenné kurzy . . . . .	41
6.4	Americké bariérové opcie . . . . .	44
6.5	Double No-touch opcia . . . . .	48
6.6	Range accrual swap . . . . .	51



Záver . . . . .	53
Príloha . . . . .	54
<b>Literatúra</b>	<b>58</b>

# Zoznam tabuliek

Strom cien akcií . . . . .	28
3.1 Strom cien akcií . . . . .	29
3.2 Strom cien opcí . . . . .	29
6.1 Európska call opcia na akciu . . . . .	38
6.2 Európska put opcia na akciu . . . . .	39
6.3 Európska put opcia s využitím Monte Carlo simulácií . . .	40
6.4 Up and Out call opcia s Európskym typom bariéry . . . .	42
6.5 Down and In call opcia s Európskym typom bariéry . . .	43
6.6 Down-and-In call opcia s americkou bariérou $B = 1.35$ . .	47
6.7 Down-and-Out call opcia s Americkým typom bariéry . .	47
6.8 Výsledky pre Down-and-In a Up-and-Out put opcie s Am- erickým typom bariéry . . . . .	49
6.9 Double No-touch opcia . . . . .	51
6.10 porovnanie cien pre Range accrual swap . . . . .	52

## Zoznam obrázkov

1.1	Priebeh vývoja výmenného kurzu EUR/USD za november a december 2008 a január 2009 . . . . .	20
3.1	jednokrokový binomický strom . . . . .	25
3.2	dvojkrokový binomický strom . . . . .	27
6.1	Európska call opcia na výmenný kurz . . . . .	41
6.2	Up-and-Out call opcia s bariérou amerického typu . . . . .	48
6.3	Up-and-Out put opcia s americkou bariérou . . . . .	49
6.4	Rozdiel ceny Monte Carlo simulácie a Black-Scholesovho vzorca pre Up-and-Out opciu s americkou bariérou . . . . .	50

# Úvod

História opcií siaha až do Starovekého Grécka. Prvý obchod vtedy uzatvoril Tháles z Milétu kúpou práv na prvé použitie lisov olív. Keďže úroda olív bola veľká, každý chcel lisovať čo najskôr, čo umožnilo Thálesovi svoje práva predať s veľkým výnosom. Podobné obchody sa uzatvárali neskôr počas celej histórie.

Na začiatku 19-teho storočia sa v Amerike začalo obchodovať s opciami na akcie. Súvisí to s obdobím vzniku samotných akcií. Zaujímavosťou je, že ak obchodník chcel kúpiť takúto opciu, sám musel vyhľadať predajcu. Od roku 1968 nastal veľký rozmach v obchode s opciami. Je to obdobie, kedy bolo umožnené obchodovanie s opciami na Chicago Board of Trade.

Dôležitým faktorom pri obchode s opciami je ich ocenenie. Existuje veľa modelov oceňovania a rôznych softvérových aplikácií pre oceňovanie opcií. Slúžia obchodníkom na určenie ceny. Cena opcie je veľmi dôležitá. Ak by bola opcia podhodnotená, mohla by byť zneužitá pre vygenerovanie ziskov bez toho, aby kupujúci investoval. Naopak, ak by bola nadhodnotená, nik by o ňu neprejavil záujem.

V dnešnom svete informačných technológií obchodníci plne využívajú rôzne typy softvérov. Tie však stoja nemalé peniaze.

Všeobecná úverová banka vlastní licenciu pre použitie softvéru SUPERDERIVATIVES. Napriek tomu sa občas vyskytne opcia, ktorú nedokáže oceniť. V takýchto prípadoch je nútená sa obrátiť na zahraničnú banku. Tá jej informáciu poskytne za poplatok. Preto vznikla myšlienka vytvoriť určitú metodiku a aplikáciu, ktorá by umožnila oceniť tieto opcie v čo najkrašom čase.

Samotná práca je členená do šiestich kapitol.

Prvá kapitola s venuje stručnému popisu základných vlastností opcií. Obsahuje popisy vyplatných funkcií opcií, ktoré sme oceňovali.

Druhá kapitola obsahuje popis Black-Scholesovho oceňovania opcií. Využívame tu najmä zdroje [7] a [8].

Tretie kapitola popisuje tvorbu Binomického modelu oceňovania opcií. Základné myšlienky čerpáme z [4], [2] a [6].

Štvrtá kapitola oboznamuje čitateľa s metódou Monte Carlo simulácie.

Piata kapitola je venovaná aplikácii modelov na ocenenie opcií na výmenné kurzy.

Šiesta kapitola je najrozsiahlejšia. Obsahuje numerické výsledky nami naprogramovaných metód. Porovnávame ich s Black-Scholesovými vzorcami a softvérom SUPERDERIVATIVES.

# Kapitola 1

## Pojem opcie a niektoré typy opcií

**Opcia** patrí do triedy finančných derivátov. Predstavuje právo, nie však povinnosť, v presne stanovenom čase v budúcnosti, predať alebo kúpiť, podkladové aktívum za vopred dohodnutú cenu. Keďže majiteľ si toto právo môže, ale nemusí uplatniť, je to istá výhoda, za ktorú dostane emitent opcie určitú prémiiu.

Rozlišujeme dva základné typy opcií, call opciu a put opciu.

**Call opcia** predstavuje právo kúpiť podkladové aktívum za presne určenú cenu - *strike*, v presne určenom čase - *expiračný čas*.

**Put opcia** predstavuje právo predať podkladové aktívum za presne určenú cenu - *strike*, v presne určenom expiračnom čase.

Existuje veľa rôznych opcií. Líšia sa napríklad časom, kedy si ich možno uplatniť

- *Európska opcia* - len v expiračnom čase,
- *Americká opcia* - kedykoľvek počas trvania opcie,

alebo podľa typu podkladového aktíva, resp. rôznych obmedzení na tieto podkladové aktíva.

## 1.1 Európske opcie

### 1.1.1 Európska call opcia

Táto opcia dáva právo majiteľovi kúpiť podkladové aktívum  $S$  v expiračnom čase  $T$  za presne stanovenú cenu  $K$ . V čase expirácie opcie môžu nastať nasledujúce dve situácie:

1.  $S_T > K$ ,
2.  $S_T \leq K$ .

V prvom prípade je výhodné si uplatniť právo. Akciu môžeme kúpiť za cenu  $K$  a následne predať za cenu  $S_T$ , čím dosiahneme zisk

$$S_T - K > 0. \quad (1.1)$$

Hovoríme tiež, že opcia je v pozícii *in-the-money*. V druhom prípade sa nám neoplatí uplatniť si právo. Ak nastáva rovnosť, opcia je v pozícii *at-the-money*. V prípade straty sa nachádza opcia v pozícii *out-off-the-money*. Hodnota európskej call opcie v čase expirácie je

$$f_{ec} = \max(S_T - K, 0). \quad (1.2)$$

Táto hodnota však nezahŕňa náklady, ktoré sú spojené s jej nákupom a predajom. I pri ostatných typoch opcií nebudeme uvažovať tieto transakčné náklady.

### 1.1.2 Európska put opcia

Táto opcia má rovnaké podmienky ako *Európska call opcia* len s rozdielom, že dáva majiteľovi právo predať podkladové aktívum. Opäť môžu nastať dva prípady v čase  $T$ :

1.  $S_T \geq K$ ,
2.  $S_T < K$ .

V prvom prípade sa nám opciu neoplatí uplatniť. V druhom prípade získame

uplatnením opcie zisk

$$K - S_T > 0. \quad (1.3)$$

Môžeme predať podkladové aktívum za dohodnutý strike  $K$  a následne ho kúpiť

za cenu  $S_T$ , čím vyrobíme zisk 1.3.

Hodnota Európskej put opcie v čase expirácie je potom

$$f_{ep} = \max(K - S, 0). \quad (1.4)$$

## 1.2 Americké opcie

Tieto opcie dávajú majiteľovi právo kúpiť, resp. predať podkladové aktívum

za vopred určenú cenu  $K$ , kedykoľvek počas životnosti opcie. V čase  $T$  je však hodnota opcie rovnaká ako v prípade európskych opcií.

## 1.3 Opcia s Bermudskou bariérou

Známa i pod menom *Mid-Atlantic opcia*. Je určitým hybridom medzi Európskou a Americkou opciou. Môže byť uplatnená v presne určených diskretných časoch počas životnosti opcie [9].

## 1.4 Opcie s európskym typom bariéry

Tieto opcie patria medzi exotické opcie. Bariéra tu predstavuje dodatočnú podmienku na vývoj hodnoty podkladového aktíva. Pri jej prekročení sa buď opcia stáva aktívnou, "*knock-in*" opcia, alebo naopak sa deaktivuje, "*knock-out*" opcia. Tým sa stáva bezcennou. Ak je opcia v expiračnom čase aktívna, jej výplatná funkcia je rovnaká ako v prípade *Európskej opcie*. Ďalej rozlišujeme, či je bariéra prerazená zhora alebo zdola. V prípade prerazenia zhora dostáva prívlastok "*down*". Pri



prerazení zdola "up". Kombináciou týchto možností môžeme vytvoriť 4 rôzne call opcie a 4 rôzne put opcie.

### 1.4.1 Down-and-in opcia

Opcia je aktívna, ak hodnota podkladového aktíva v čase expirácie je pod bariérou. Budeme uvažovať prípad call opcie. Pri tomto type opcie sa bariéra  $B$  nastavuje nižšie ako je aktuálna hodnota podkladového aktíva. Ak v čase  $T$  je hodnota podkladového aktíva v intervale

$$K < S_T < B, \quad (1.5)$$

opcia dáva majiteľovi možnosť získať kladný zisk. Uplatní si opciu, čiže v našom prípade nakúpi podkladové aktívum za hodnotu  $K$  a predá za cenu  $S_T$ . Hodnota takejto opcie v čase expirácie je

$$f_{ecdib} = \begin{cases} S_T - K & K < S_T < B, \\ 0 & inde. \end{cases} \quad (1.6)$$

### 1.4.2 Up-and-in opcia

Uvažujeme opäť call opciu. Bariéra sa nastavuje nad aktuálnu hodnotu podkladového aktíva. V čase expirácie má opcia nasledujúcu hodnotu:

$$f_{ecuib} = \begin{cases} S_T - K & S_T > B, \\ 0 & inde. \end{cases} \quad (1.7)$$

### 1.4.3 Down-and-out opcia

Opäť uvažujme call opciu. V tomto prípade sa bariéra nastavuje pod aktuálnu hodnotu podkladového aktíva. Hodnota opcie v čase expirácie je daná funkciou

$$f_{ecdob} = \begin{cases} S_T - K & S_T > B, \\ 0 & inde. \end{cases} \quad (1.8)$$

#### 1.4.4 Up-and-out opcia

Hodnota bariéry sa obdobne ako pri opcii 1.4.2 nastavuje nad aktuálnu hodnotu podkladového aktíva. Jej hodnota v čase expirácie je potom

$$f_{ecuob} = \begin{cases} S_T - K & S_T > B, \\ 0 & inde. \end{cases} \quad (1.9)$$

Podobne by sme mohli odvodiť i výplatné funkcie pre put opcie [3].

### 1.5 Bariérové opcie s americkým typom bariéry

Podobne ako to bolo v časti 1.2, kedy sme sledovali hodnotu opcie počas celej životnosti opcie, budeme sledovať vývoj ceny podkladového aktíva počas celej životnosti opcie. Ak hodnota podkladového aktíva prerazí stanovenú bariéru hocikedy počas celej životnosti opcie, v prípade *knock-in opcie* sa stáva aktívnou a v prípade *knock-out opcie* sa stáva bezcennou. Takéto opcie je veľmi ťažké korektne oceniť a sledovať ich aktuálnu hodnotu. Obchoduje sa častejšie s rôznymi ich hybridmi ako napríklad *Mid Atlantic opcia*.

Ako príklad si ukážeme výplatnú funkciu pre *Down-and-in Put* opciu. Táto opcia sa stane aktívnou, ak podkladové aktívum počas životnosti opcie klesne pod stanovenú bariéru. To možno vyjadriť podmienkou  $\min_{0 < t \leq T} S_t < B$ . Ak pre hodnotu podkladového aktíva v čase  $T$  platí  $K > S_T$ , vlastník opcie získava kladný zisk. Sumárne môžeme výplatnú funkciu zapísať nasledovne [3]:

$$f_{epdib} = \begin{cases} K - S_T & \min_{0 \leq t \leq T} S_t < B \quad \wedge \quad S_T < K, \\ 0 & inde. \end{cases} \quad (1.10)$$

## 1.6 Digitálne opcie

*Digitálne opcie*, tiež nazývané *binárne opcie* a *všetko alebo nič opcie*, patria medzi dráhovo závislé opcie. Ich výplata závisí od pohybu hodnôt podkladového aktíva počas života opcie [7].

V porovnaní s *Európskymi opciami* je rozdiel v tom, že ak v čase expirácie je opcia v pozícii *int-the-money*, vypláca určitú fixne stanovenú prémiiu  $X$ .

V opačnom prípade nevypláca nič. Terminálová podmienka môže byť daná i ako interval. V tomto prípade dostaneme výplatnú funkciu ako

$$f_{ed} = \begin{cases} X & S \in [K_1, K_2], \\ 0 & \text{inde.} \end{cases} \quad (1.11)$$

My budeme oceňovať len opciu *Double no-touch*, ktorej výplatnú funkciu sme vyššie popísali.

## 1.7 Range accrual opcia

Tento typ opcií sa zaraďuje medzi najvyhľadávanejšie opcie na výmenné kurzy. Patrí medzi dráhovo závislé opcie. Pre výmenný kurz je stanovené pásmo, v ktorom opcia vypláca. Či sa opcia nachádza v stanovenom pásme sa kontroluje v daných časových intervaloch, zväčša sú to dni. Konečná výplata z tejto opcie je podmienená počtom dní, ktorých bola hodnota výmenného kurzu v stanovenom pásme.

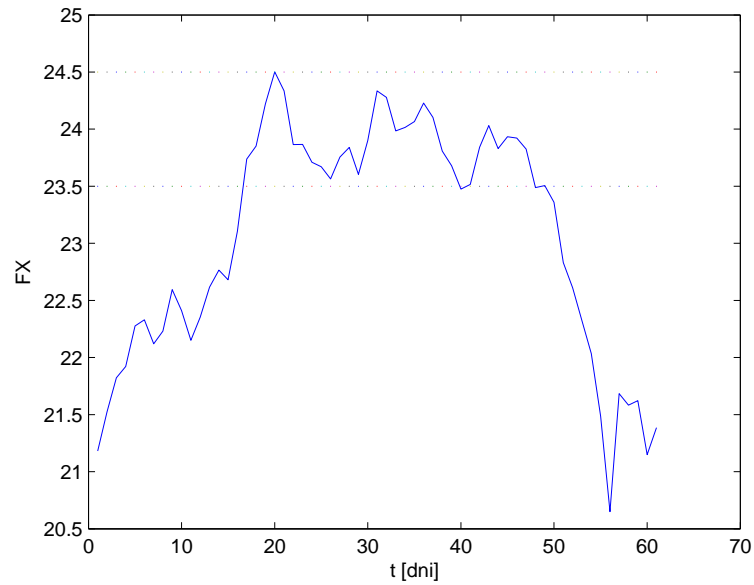
Na obrázku 1.1 je zobrazený priebeh výmenného kurzu EUR/USD za mesiace

november 2008, december 2008 a január 2009<sup>1</sup>. Hodnota 23,5 predstavuje dolnú hranicu a hodnota 24,5 hornú hranicu pre výmenný kurz.

Ako príklad použijeme už vyššie spomínaný výmenný kurz.  $S$  je spotový výmenný kurz.  $B_1$  je horná hranica pre výmenný kurz a  $B_2$  je dolná hranica.  $N$  bude počet dní, počas ktorých testujeme, či  $S_t \in (B_1, B_2)$ .

---

<sup>1</sup>Použitá dáta boli stiahnuté z archívov Národnej banky Slovenska, [www.nbs.sk/sk/statisticke-udaje/kurzovy-listok/kurzovy-listok](http://www.nbs.sk/sk/statisticke-udaje/kurzovy-listok/kurzovy-listok)



Obrázok 1.1: Priebeh vývoja výmenného kurzu EUR/USD za november a december 2008 a január 2009

Výplata v čase expirácia je

$$f_T = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X \chi_i. \quad (1.12)$$

$X$  je prémia, ktorú majiteľ získava v expiračnom čase a  $\chi_i$  charakteristická funkcia.

$$\chi_i = \begin{cases} 1 & S_i \in [B_1, B_2], \\ 0 & \text{inde.} \end{cases} \quad (1.13)$$

## Kapitola 2

# Black-Scholesov model oceňovania opcií

Tento model, vytvorený v roku 1973 Fischerom Blackom a Myronom Scholesom, sa stal prelomovým v oblasti oceňovania opcií na akcie. Poskytne nám

parciálne-diferenciálne rovnice pre niektoré základné typy opcií. Pre tieto opcie budeme potom môcť porovnať ceny získané použitím numerických metód a

Black-Scholesovho modelu. Black-Scholesov model nám bude slúžiť ako porovnávací nástroj a preto jeho odvodenie len načrtne. Bližšie odvodenie napr. [7].

Odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice pozostáva z troch častí. V prvej sa určí stochastická rovnica, podľa ktorej sa správa podkladové aktívum. V našom prípade je to cena akcie  $S$ . V druhom kroku sa odvodí stochastická parciálna diferenciálna rovnica pre vývoj ceny opcie  $f(S, t)$ .  $t \in [0, T]$  predstavuje časovú premennú, kde  $T$  je expiračný čas opcie. V treťom kroku sa zostaví samofinancujúce sa bezrizikové portfólio. Výsledkom je Blacko-Scholesova parciálna diferenciálna rovnica pre oceňovanie finančných derivátov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0, \quad (2.1)$$

kde  $r$  je bezriziková úroková miera a  $\sigma$  je volatilita ceny akcie  $S$ .

Vyriešením Black-Schoesovej rovnice získame vzorec pre presné ocenenie opcie.

Ukážeme si riešenie pre *Európsku call opciu*. Terminálová podmienka pre túto opciu je

$$f(S, T) = S - T \quad \text{pre} \quad S \geq K, \quad (2.2)$$

$$f(S, T) = 0 \quad \text{pre} \quad 0 < S < K. \quad (2.3)$$

Použitím vhodých transformácií a Metódy Greenovej funkcie pre riešenie parabloických diferenciálnych rovníc dostávame riešenie v tvare

$$f(S, 0) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (2.4)$$

kde

$$d_1 = \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \ln \frac{S}{K}}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad (2.5)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}. \quad (2.6)$$

Funkcia  $N(d_1)$  predstavuje kumulatívnu distribučnú funkciu normálneho rozdelenia v bode  $d_1$

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (2.7)$$

Jej hodnoty sú tabelované.  $T - t$  je čas, ktorý ostáva do expirácie opcie. Podrobný postup možno nájsť v [7] resp. [8].

## 2.1 Oceňovanie amerických bariérových opcií Black-Scholesovým modelom

Ako už sme spomenuli, bariérové opcie zaraďujeme medzi dráhovo závislé, resp. slabo dráhovo závislé. Dôvodom je, že nás zaujíma len fakt, či bola počas životnosti opcie bariéra dosiahnutá, alebo nie. V porovnaní s *Vanilla* opciami sú lacnejšie. Je to preto, že je väčšie riziko, či bude resp. nebdue dosiahnutá bariéra.

Podobne ako sme postupovali pri odvodzovaní a riešení Black-Scholesových rovníc pre *Európsku call opciu* budeme postupovať i tu. Hodnotu opcie pred deaktiváciou bariéry stále zabezpečuje rovnica 2.1. Jednotlivé typy bariérových opcií sa budú líšiť okrajovými podmienkami.

### **Okrajové podmienky pre opcie s bariérami typu *Out***

Pri tomto type bariéry sa jej dosiahnutím opcia deaktivuje, čím sa stáva bezcenná. Jej hodnota potom je

$$f(S, t) = 0 \quad \text{pre} \quad t < T \quad \text{a} \quad S = B. \quad (2.8)$$

Ak nie je bariéra dosiahnutá, riešime rovnicu 2.1. Ak je  $B > S$ , riešime rovnicu na intervale  $0 \leq S \leq B$ . Pre  $B < S$  ju riešime na intervale  $B \leq S \leq \infty$ . Koncová podmienka je zhodná s výplatnou funkciou pre *Európske opcie* 1.2 alebo 1.4.

### **Okrajové podmienky pre opcie s bariérami typu *In***

Pri tomto type bariéry je opcia bezcenná, pokiaľ nie je dosiahnutá bariéra. Po dosiahnutí bariéry je výplata z opcie rovnaká ako v prípade *Európskej opcie*. Ak sa teda bariéra počas životnosti nedosiahne, koncová podmienka spĺňa rovnosť

$$f(S, T) = 0. \quad (2.9)$$

Pri dosiahnutí bariéry je hodnota  $f(S, t)$  pre  $S = B$  a  $t < T$  rovnaká ako pre *Európske opcie*.

Black-Scholesove vzorce pre jednotlivé typy *bariérových opcií* nebudeme odvodzovať. Slúžia nám len pre numerické porovnanie výsledkov. Ich tvar je uvedený v kapitole 6.

## Kapitola 3

# Oceňovanie opcií metódou binomických stromov

Tento model bol detailne popísaný v roku 1979 v článku, ktorý vydali Cox, Ross and Rubinstein [4]. Zobrazuje všetky možné cesty, ktorými sa môže hodnota podkladového aktíva vyvíjať. Pri popisovaní základov tohto modelu budeme používať ako podkladové aktívum akciu, ktorá nevypláca dividendy. Rôznymi úpravami môže byť model použitý i na oceňovanie akcií vyplácajúcich dividendy a iné typy podkladových aktív.

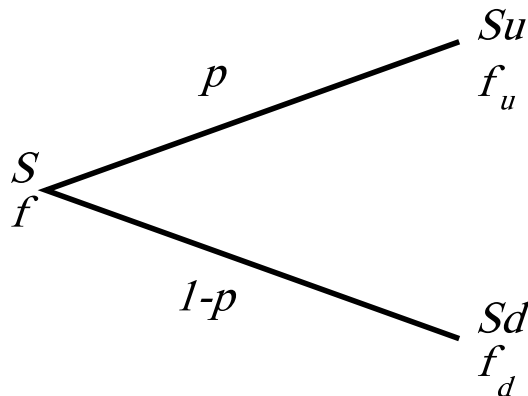
### 3.1 Jednokrokový binomický strom

Základným predpokladom binomického modelu je, že akcia nasleduje binomický proces. To znamená, že za časový interval  $\delta t$ , môže cena akcie buď vzrásť na cenu  $Su$  alebo klesnúť na hodnotu  $Sd$ . Parameter  $d$  predstavuje pohyb ceny akcie nadol a parameter  $u$  pohyb nahor. Cena akcie vzrastie s pravdepodobnosťou  $p$  a klesne s pravdepodobnosťou  $1-p$ .

Základným princípom, s ktorým binomický model pracuje je *bezrizikové oceňovanie* [4]. Bezrizikové oceňovanie vychádza z dvoch základných predpokladov:

1. očakávaný výnos zo všetkých obchodovaných cenných papierov je bezriziková úroková miera,





Obrázok 3.1: jednokrokový binomický strom

2. budúce peňažné výnosy môžu byť ocenené diskontovaním ich očakávanej hodnoty bezrizikovou úrokovou mierou.

Pozrime sa na obrázok 3.1. Očakávaná hodnota akcie v čase expirácie je

$$E(S_T) = pSu + (1 - p)Sd. \quad (3.1)$$

Vychádzajúc z predpokladu 1 sa táto hodnota rovná

$$E(S_T) = Se^{\delta t}r, \quad (3.2)$$

kde  $r$  je bezriziková úroková miera. Spojením 3.1 a 3.2 dostávame

$$p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}. \quad (3.3)$$

Hodnoty opcie  $f_u$  a  $f_d$  v expiračnom čase  $T$  poznáme. Sú to výplatné funkcie opcií. Cenu opcie môžeme potom na základe princípu bezrizikového oceňovania vypočítať ako

$$f = [pf_u + (1 - p)f_d]e^{r\delta t}. \quad (3.4)$$

Parametre  $u > 1$  a  $d < 1$  budeme nastavovať tak, aby odzrkadľovali volatilitu ceny akcie na intervale  $\delta t$ . My budeme používať v našom modeli nasledujúce vzťahy:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}, \quad (3.5)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}. \quad (3.6)$$

Predpokladáme, že štandardná odchýlka zmeny ceny akcie  $S$  na intervale  $\delta t$  je  $\sigma\sqrt{\delta t}$  a teda variancia bude  $\sigma^2\delta t$ . Tú môžeme vyrátať ako

$$E(S^2) - E^2(S) = pS^2u^2 + (1-p)S^2d^2 - S^2[pu + (1-p)d]^2. \quad (3.7)$$

Spojením týchto vťahov 3.7, 3.1, 3.2 a podmienky

$$u = \frac{1}{d} \quad (3.8)$$

dostávame nasledujúce vzťahy

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}, \quad (3.9)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}. \quad (3.10)$$

Podmienka 3.8 vyjadruje, že pokles a rast ceny na intervale  $\delta t$  je rovnaký [2].

## 3.2 Dvojkrovový binomický strom

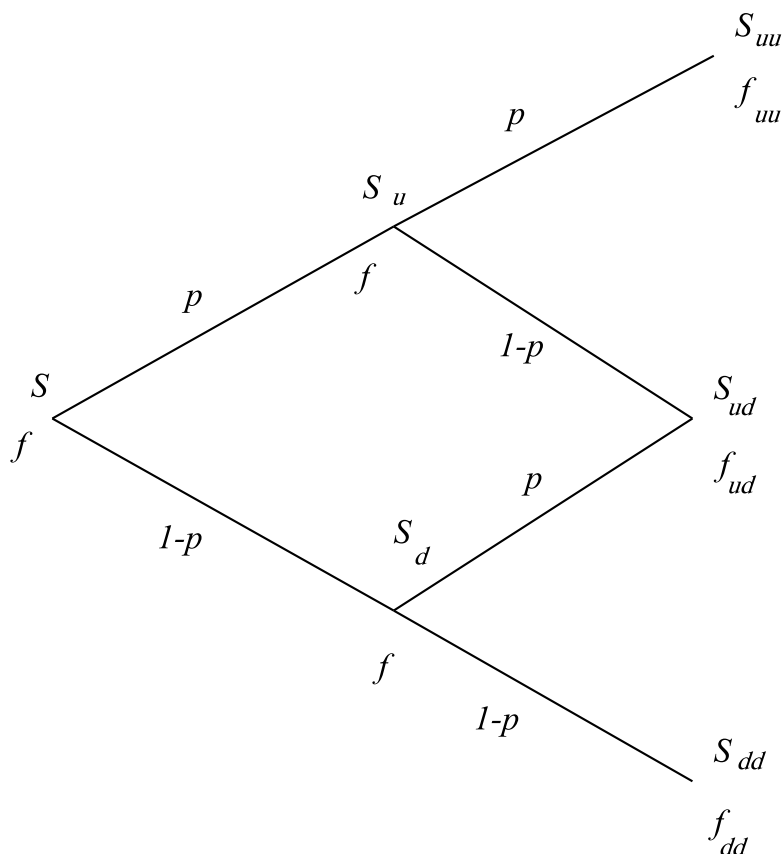
Predstavme si teraz, že dĺžku života opcie  $T$ , možno rozdeliť na dva časové intervaly. Opäť je našim cieľom oceniť opciu na akciu s počiatočnou cenou  $S$ . Tento prípad je zobrazený na obrázku 3.2. Ceny opcií v jednotlivých uzloch môžeme vyrátať podľa nasledujúcich vzťahov

$$f_u = e^{-r\delta t}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}], \quad (3.11)$$

$$f_d = e^{-r\delta t}[pf_{ud} + (1-p)f_{dd}], \quad (3.12)$$

$$f = e^{-r\delta t}[pf_u + (1-p)f_d], \quad (3.13)$$

kde  $\delta t = \frac{T}{2}$  [2]. Pozrime sa na obrázok 3.2. Možno vidieť, že jednotlivé vetvy predstavujú jednokrovové binomické stromy.



Obrázok 3.2: dvojkrokový binomický strom

### 3.3 Viackrokový binomický strom

Podobne, ako sme postupovali v časti 3.2, môžeme rozšíriť teraz dvojkrokový binomický strom na  $n$ -krokový. Čas životnosti opcie si rozdelíme do  $n$  intervalov dĺžky  $\delta t = \frac{T}{n}$ . Každý uzol v strome bude označený dvojicou indexov  $(i, j)$ .  $i$  predstavuje index časového intervalu v ktorom sa nachádzame a  $j$  koľkokrát cena vzrástla v danom časovom intervale. Teda platí, že  $j \leq i$ .

Cena akcie v uzle  $(i, j)$  potom bude

$$S_{i,j} = Su^j d^{i-j}. \quad (3.14)$$

Prislúchajúca cena opcie je potom  $f_{i,j}$ . Pri výpočte ceny opcie postupujeme stromom rekurentne odzadu. Cena opcie  $f$  v počiatočnom vrchole je výslednou cenou opcie.

Uvažujme teraz *Európsku call opciu* na akciu s expiračnou cenou  $K$ . Ak cena akcie v každom časovom intervale porastie,  $j = n$  a naopak, ak bude po celý čas životnosti opcie klesať,  $j = 0$ .

Cena opcie v koncových vrchoch stromu je cena v čase expirácie  $T$

$$f_{n,j} = \max [0, Su^j d^{i-j} - K] \quad \text{pre} \quad j = 0, \dots, n. \quad (3.15)$$

Využijúc vzťahy 3.5, 3.6, 3.3 a analógiu so vzťahmi 3.11, 3.12 a 3.13 vypočítame cenu opcie v jednotlivých uzloch [6]

$$f_{i,j} = e^{-r\delta t} [pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}] \quad (3.16)$$

pre  $i = 0, \dots, n-1$  a  $0 \leq j \leq i$ .

### 3.4 Oceňovanie amerických opcií použitím binomického stromu

Ako už bolo spomenuté v časti 1.2, americkú opciu si môžeme uplatniť v ľubovolnom čase počas životnosti opcie. Pri používaní binomických stromov

na *Americké opcie* budeme postupovať taktiež rekurentne od expiračného času  $T$ . Bude tu však jeden rozdiel. V každom uzle stromu budeme cenu opcie získanú vzorcom 3.16 porovnávať so ziskom, ktorý by sme získali predčasným uplatnením opcie. Ak bude zisk z predčasného uplatnenia vyšší, bude cena opcie v danom uzle rovná tomuto zisku. Vzťah pre výpočet ceny Americkej call opcie je potom daný nasledovne

$$f_{i,j} = \max (K - Su^j d^{i-j}, e^{r\Delta t} [pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]) \quad (3.17)$$

pre  $0 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq j \leq i$ .

### 3.5 Oceňovanie bariérových opcií metódou binomického stromu

Binomické stromy sú vhodné pre oceňovanie bariérových opcií s európskym typom bariéry. Ukážeme si to na príklade.

					$S_{uuuuu}$
				$S_{uuuu}$	21.15
			$S_{uuu}$	20.915	$S_{uuuud}$
		$S_{uu}$	20.682	$S_{uuud}$	20.682
	$S_u$	20.452	$S_{uud}$	20.452	$S_{uuudd}$
S	20.225	$S_{ud}$	20.225	$S_{uudd}$	20.225
20	$S_d$	20	$S_{udd}$	12.32	$S_{uuddd}$
	19.778	$S_{ddd}$	19.778	$S_{uddd}$	19.778
		19.558	$S_{ddd}$	19.558	$S_{udddd}$
			19.34	$S_{dddd}$	19.34
				19.125	$S_{ddddd}$
					18.913

Tabuľka 3.1: Strom cien akcií

					$f_{uuuuu}$
				$f_{uuuu}$	0
			$f_{uuu}$	0	$f_{uuuud}$
		$f_{uu}$	0	$f_{uuud}$	0
	$f_u$	0.028	$f_{uud}$	0	$f_{uudd}$
f	0.07	$f_{ud}$	0.073	$f_{uudd}$	0
0.107	$f_d$	0.135	$f_{udd}$	0.186	$f_{uuddd}$
	0.167	$f_{dd}$	0.232	$f_{uddd}$	0.478
		0.217	$f_{ddd}$	0.306	$f_{udddd}$
			0.195	$f_{dddd}$	0.04
				0.024	$f_{ddddd}$
					0

Tabuľka 3.2: Strom cien opcii

Uvažujme 3 - mesačnú bariérovú *up and out call* opciu. Spotová cena akcie  $S = 20$ , strike  $K = 19,3$ , bariéra  $B = 20,2$ ,  $\sigma = 5\%$  a  $r = 5\%$ . V tabuľke 3.1 je strom vývoja cien akcie. V tabuľke 3.2 je príslušný strom opcií. Keď sa pozrieme na strom cien opcií vidíme, že cena opcie je vo viacerých koncových uzloch nulová. Keďže v binomických stromoch postupujeme rekurentne, časová náročnosť výpočtov je nižšia v porovnaní s použitím Metódy Monte Carlo simulácie, ktorú popisujeme v nasledujúcej kapitole.

# Kapitola 4

## Metóda Monte - Carlo simulácie

V praxi sa stretávame s opciami, ktoré majú komplikovanejšie výplatné funkcie. Výplatná funkcia závisí napríklad od vývoja ceny podkladového aktíva alebo od vývoja viacerých podkladových aktív. V týchto a mnohých iných situáciách, vieme len ťažko analyticky určiť cenu, alebo vôbec. Metóda Monte Carlo simulácie je v niektorých prípadoch vhodným riešením tohto problému. Dáva priestor na implementáciu náhodného správania sa podkladových aktív. Prvý krát použil Monte Carlo metódu na ocenenie opcií Phelim Boyle v roku 1977. Využil ju na ocenenie *Európskych opcií* [6].

### 4.1 Popis metódy pre oceňovanie opcií

My budeme používať túto metódu v prepojení s binomickými stromami. Namiesto rekurentného postupovania spätne cez strom, použijeme Monte carlo simuláciu na náhodné vyberanie ciest v strome. Hlavným cieľom metódy je mnohonásobná simulácia ciest, ktorými sa môže pohybovať vývoj ceny podkladového aktíva [2]. Celý proces oceňovania opcie môžeme rozdeliť do troch hlavných bodov:

1. simulácia vývoja hodnoty podkladového aktíva, resp. výberu cesty z binomického stromu,
2. výpočet ceny opcie pre danú simuláciu,
3. výpočet ceny opcie po  $M$ -tej simulácii.

Uvažujme *Európsku put opciu* na akciu. Spotová (okamžitá) cena akcie nech je  $S$ , expiračná cena  $K$ , okamžitá úroková miera  $r$  a expiračný čas je  $T$ . Časovú periódu  $T$ , počas ktorej budeme simulovať cenu akcie rozdelíme podobne ako pri binomickom strome na  $N$  časových intervalov. Každý bude dĺžky  $\delta t = \frac{T}{N}$ .

**1. Simulácia vývoja ceny podkladového akcie** v našom prípade závisí od pravdepodobnosti  $p$ , s ktorou sa cena aktíva pohybuje smerom nahor a naopak s pravdepodobnosťou  $(1-p)$ , s ktorou sa pohybuje nadol. Pri výpočte budeme používať vzťahy 3.3, 3.5 a 3.6. Na začiatku každého časového intervalu vygenerujeme generátorom náhodne číslo  $l \in (0, 1)$ . Cenu aktíva potom dopočítame zo vzťahov

$$S_{i,j} = S_{i-1,j} \cdot u \quad \text{pre} \quad l \in (0, p), \quad (4.1)$$

$$S_{i,j} = S_{i-1,j} \cdot d \quad \text{pre} \quad l \in (p, 1). \quad (4.2)$$

Index  $j$  predstavuje číslo simulácie, kde  $j = 1, 2, \dots, M$  a  $i$  je index časového intervalu, na začiatku ktorého sa nachádzame.

**2. Výpočet ceny opcie v danej simulácii** je v našom prípade daný výplatnou funkciou pre *Európsku put opciu*

$$C_{T,j} = K - S_{T,j}. \quad (4.3)$$

**3. Výpočet ceny opcie** je daný ako priemerná hodnota opcií v jednotlivých simuláciách diskontovaná bezrizikovou úrokovou mierou k času ocenenia

$$C = \left( \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M C_{T,j} \right) e^{-rT}. \quad (4.4)$$



# Kapitola 5

## Opcie na výmenné kurzy

Opcie na výmenné kurzy tvoria nemalú časť trhu s finančnými derivátmi. Okrem trhov s nimi vo veľkom obchodujú banky, ktoré tak uspokojujú potreby svojich korporátnych klientov. Tí sa pri uzatváraní forwardových kontraktov potrebujú zbaviť čo najviac rizík vyplývajúcich z fluktuácií výmenných kurzov. Týmto poskytujú určitú výhodu, za ktorú treba zaplatiť.

### 5.1 Binomický strom pre opcie na výmenné kurzy

V tejto kapitole si pod označením  $S$  budeme predstavovať spotový výmenný kurz medzi domácou a cudzou menou. To znamená, že 1 jednotka cudzej meny má hodnotu  $S$  jednotiek domácej meny. Čas životnosti opcie si opäť označíme  $T$  a počet krokov v binomickom strome bude  $n$ .

V každom vrchole binomického stromu uvažujeme, že výmenný kurz buď vzrastie s parametrom  $u$  alebo klesne s parametrom  $d$ . Tieto parametre určíme tak, aby zachovávali predpoklad lognormálneho rozdelenia výnosov [9].

### 5.2 Model s využitím forwardového kurzu

Pri tvorbe binomického stromu pre akcie sme vychádzali z predpokladu, že očakávaný výnos z cenných papierov je bezriziková úroková

miera. Uvažujme teraz, že uzavrieme nasledovný forwardový obchod. Zaviažeme sa zrealizovať v čase  $T$  obchod pri výmennom kurze  $F$ . Spotový kurz pri uzatváraní obchodu je  $S$ . Zhodnotenie v tomto prípade bude  $\frac{F}{S}$ . Ak by sme chceli vyjadriť toto zhodnotenie pre jeden krok v binomickom strome, bolo by to  $\left(\frac{F}{S}\right)^{1/n}$ .

Pravdepodobnosť nárastu výmenného kurzu je  $p$  a naopak poklesu  $1-p$ . Vychádzajúc z bezrizikového oceňovania a spojením predchádzajúcich vedomostí dostávame

$$Sp_u + (1-p)Sd = S \left(\frac{F}{S}\right)^{1/n}. \quad (5.1)$$

Z tohto vzťahu potom môžeme vyjadriť pravdepodobnosť nárastu výmenného kurzu ako

$$p = \frac{\left(\frac{F}{S}\right)^{1/n} - d}{u - d}. \quad (5.2)$$

Ďalší postup pri oceňovaní už je analogický s modelom, ktorý sme popísali v časti 3.3. Toto odvodenie modelu je analógiou modelu, ktorým sa oceňujú opcie na akcie. Korektnosť výsledkov metódy overíme v kapitole 6.

### 5.3 Model s využitím domácej a zahraničnej úrokovej miery

Predstavme si nasledujúcu situáciu. Ak by sme investovali jednu jednotku do kúpy \$, navrátnosť investície by bola  $Sr_f$ .  $r_f$  predstavuje dolárovú bezrizikovú úrovň mieru. Môžeme potom výmenný kurz prirovnať k podkladovému aktívu, z ktorého plynie akýsi výnos, resp. akcii vyplácajúcej dividendy.

Opäť budeme vychádzať z konštrukcie bezrizikového portfólia, ktoré sa skladá

z delta jednotiek cudzej meny a jednej opcie na výmenný kurz tejto meny. Z konštrukcie pri podmienke bezrizikovosti portfólia nám teda vyplýva, že bez ohľadu na to, či výmenný kurz posilní alebo oslabí, výnos by mal

byť rovnaký. To môžeme vyjadriť nasledovne

$$Su\Delta - f_u = Sd\Delta - f_d, \quad (5.3)$$

z čoho môžeme vyjadriť

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{Su - Sd}. \quad (5.4)$$

Teraz si predstavme, že by sme  $\Delta$  jednotiek dolára uložili do banky, kde sa bude úročiť bezrizikovou úrokovou mierou  $r_f$ . Dnešná hodnota tejto investície v eurách by bola

$$S\Delta e^{-r_f T}. \quad (5.5)$$

Dnešná hodnota portfólia by potom bola znížená o cenu opcie

$$S\Delta e^{-r_f T} - f. \quad (5.6)$$

Rovnaký výnos by sme mali dostať diskontovaním očakávanej hodnoty portfólia v expiračnom čase

$$(Su\Delta - f_u)e^{-rT}. \quad (5.7)$$

Aby sme zabránili arbitráži, musia sa tieto hodnoty rovnať. Platí teda rovnosť

$$S\Delta e^{-r_f T} - f = (Su\Delta - f_u)e^{-rT}. \quad (5.8)$$

Dosadením vzťahu 5.8 a označením si

$$p = \frac{e^{(r-r_f)T} - d}{u - d} \quad (5.9)$$

môžeme vypočítať cenu opcie

$$f = e^{-(r-r_f)T} [pf_u + (1-p)f_d]. \quad (5.10)$$

Analogicky môžeme použiť na výpočet ceny  $f$  viac-krokový binomický strom.

Model s využitím úrokových mier a model s využitím forwardového kurzu by mali byť ekvivalentné. Ak by sme uzatvorili forwardový obchod na výmenný kurz EUR/USD, jeho hodnota by bola  $F = Se^{(r-r_f)T}$ .  $S$  je výmenný kurz v čase, kedy uzatvárame obchod [9]. Ak by sme predelili túto rovnicu  $S$ -kom, dostaneme zhodnotenie ekvivalentné so zhodnotením v časti 5.3.

## Kapitola 6

# Testovanie a analýza použitých metód

V tejto kapitole sa budeme venovať testovaniu našich programov a numerickému porovnaniu ich správnosti. Výsledky budeme porovnávať s Black-Scholesovým vzorcom pri opciách, pre ktoré existuje. Ďalej pri testovaní budeme využívať softvéry, ktoré vlastní a používa Všeobecná úverová banka. Je to softvér SUPERDERIVATIVES. Keďže našou hlavnou úlohou bolo oceniť opcie, pre ktoré banka nevlastní softvérové nástroje, správnosť bude podporená korektnosťou použitej metodiky.

Opcie boli naprogramované vo vývojom prostredí Visual Basic kancelárskeho programu Microsoft Excell. Programovacie prostredie bolo určené ako požiadavka Všeobecnej úverovej banky, člen skupiny Sanapolo. Užívateľovi je umožnený vstup do jednotlivých zošitov v programe Excell. Každé skupine opcií je určený jeden list. Ukážku užívateľského prostredia si možno pozrieť v Prílohe.

Pri numerickom porovnávaní sa zameriame najmä na opcie s exotickejšou výplatnou funkciou. *Bariérové opcie*, *range accrual opcia*, *double no touch* na výmenné kurzy. Na začiatku spomenieme i *Európske opcie* na akcie, no len okrajovo. Pre každú opciu, ktorú sme ocenili, vytvoríme sekciu. Pri testovaní budeme sledovať ceny pri zmenách jednotlivých parametrov. Budeme meniť volatilitu akíva, čas expirácie, počet krokov v binomickom strome, počet simulácií a expiračnú cenu.

## 6.1 Európske opcie na akcie

Pri testovaní *Európskych opcií* na akcie sme použili hodnoty

$$\begin{aligned}\sigma &= \{0, 1; 0, 2; 0, 4; 0, 5\}, \\ T &\in \{1/4; 1/2; 3/4\}, \\ n &= \{10; 100; 1000; 5000; 6000; 7000\}, \\ r &= 5\%, \\ S &= 100, \\ K &= \{95; 100; 105; 110\}.\end{aligned}$$

Hodnoty  $\sigma, r$  sú ročné a čas  $T = 1/4$  predstavuje opciu vypísanú na čas 3 mesiace.

**Black-Scholesov vzorec pre call opciu** je daný rovnosťou 2.4.

**Black-Scholesov vzorec pre put opcie** je daný rovnosťou

$$f_p = Ee^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1). \quad (6.1)$$

**Algoritmus pre výpočet ceny call opcie pomocou Monte Carlo simulácie:**

$n$		10	100	1000	5000	6000	7000
$\sigma$	$K$						
0.1	95	2.74E-02	4.13E-03	3.59E-04	8.70E-05	7.34E-05	6.85E-06
	100	9.02E-02	9.14E-03	9.15E-04	1.83E-04	1.52E-04	1.31E-04
	105	5.91E-02	2.35E-03	7.45E-04	1.80E-04	6.20E-05	5.69E-05
	110	2.00E-02	6.58E-04	2.90E-05	2.31E-04	2.04E-05	1.19E-04
0.2	95	1.37E-01	1.38E-02	9.89E-04	2.77E-04	2.31E-04	1.84E-04
	100	1.70E-01	1.73E-02	1.73E-03	3.46E-04	2.88E-04	2.47E-04
	105	1.50E-01	1.41E-02	1.50E-03	3.12E-04	1.61E-04	4.03E-05
	110	4.94E-02	4.46E-03	6.92E-04	2.57E-04	1.58E-04	2.01E-04

Tabuľka 6.1: Európska call opcia na akciu

**Vstup:**  $S, K, p, u, d, n, m, r$

```

For i = 1 To m
  For j = 1 To n
    If Rnd ≤ p Then
      S(j) = S(j - 1)u
    Else :S(j) = S(j - 1)d
    End If
  Next j
  If S(n) > K Then
    f(i) =  $\frac{S(n) - K}{i} + \frac{(i - 1) * f(i - 1)}{i}$ 
  Else : f =  $\frac{(i - 1) * f(i - 1)}{i}$ 
  End If
Next i
f = f(m) * e-rT .

```

**Výstup:**  $f$ .

$m$  určuje počet simulácií, resp. koľkokrát si náhodne vyberáme cestu v strome. Rnd je funkcia aplikácie Visual Basic, ktorá generuje náhodne číslo z intervalu  $[0, 1]$ . Rovnaký algoritmus sme použili i pre výpočet hodnoty put opcie. Rozdiel bol v druhej podmienke, kedy uvažujeme

$n$		10	100	1000	5000	6000	7000
$\sigma$	$K$						
0.1	95	1.68E-02	1.12E-03	4.67E-05	1.69E-05	2.60E-05	9.47E-06
	100	5.05E-02	5.12E-03	5.12E-04	1.02E-04	8.54E-05	7.32E-05
	105	1.94E-02	2.12E-03	1.21E-04	2.33E-05	2.03E-05	1.53E-05
	110	3.57E-02	7.96E-04	3.30E-04	4.71E-05	1.31E-05	1.23E-05
0.2	95	2.26E-02	7.33E-03	3.94E-04	9.59E-05	3.89E-05	9.06E-05
	100	9.88E-02	1.00E-02	1.00E-03	2.00E-04	1.67E-04	1.43E-04
	105	3.30E-02	7.82E-03	5.74E-04	7.55E-06	18E-06	8.49E-05
	110	4.65E-02	1.19E-03	9.89E-04	8.57E-05	7.05E-06	2.77E-05

Tabuľka 6.2: Európska put opcia na akciu

$S(n) < K$  a cena opcie v  $i$ -tom kroku je

$$f(i) = \frac{K - S(n)}{i} + \frac{(i-1)}{i} * f(i-1).$$

**Algoritmus pre výpočet ceny call opcie metódou binomického stromu** sme už popísali v kapitole 3. Analogicky možno odvodiť metódu pre put opciu.

V tabuľke 6.1 a tabuľku 6.2 sú výsledky, kde sme porovnávali metódu binomického stromu s Black-Scholesovým vzorcom. Pre *Európske call* opcie boli 9 - mesačné a put opcie boli 3 - mesačné. Sú to absolútne hodnoty rozdielov hodnoty z binomického stromu a Black-Scholesovho vzorca. Ako vidíme, s rastúcim  $n$  - počet uzlov v strome, klesá odchýlka od Black-Scholesovej rovnice. Zvyšovaním počtu krokov  $n$  rastie i množstvo ciest v strome. Ak  $n = 100$ , počet možných ciest je  $2^{100}$ , čím sa zvyšuje i časová náročnosť výpočtu ceny opcie.

Rovnako, ako sme porovnávali ceny vypočítané pomocou binomických stormov, porovnáme ceny vypočítané monte Casrlo simuláciou. Tabuľka 6.3 obsahuje absolútnu hodnotu rozdielu ceny danej Monte Carlo simuláciou a ceny danej

Black-Scholesovým vzorcom.  $n$  predstavuje počet bodov v ktorých sa mení cena akcie. Počet simulácií  $m = 5000$ . Pre každú opciu sme cenu vypočítali 10-krát. V tabuľke je uvedená maximálna (stĺpce MC max) a minimálna (stĺpec MC min) cena z týchto výpočtov. Odchýlky su väčšie ako pri použití binomických stromov. Konvergencia pri zvyšovaní počtu simulácií nie je tiež rastúca. V nasledujúcej časti uvádzame i grafické

$n$		10		100		1000	
$\sigma$	$K$	MC max	MC min	MC max	MC min	MC max	MC min
0.1	95	4.50E-02	6.84E-03	2.10E-02	2.10E-02	1.55E-02	7.53E-03
	100	1.62E-02	8.97E-02	1.25E-02	7.27E-02	4.65E-02	7.17E-02
	105	1.30E-01	7.40E-02	3.97E-02	1.01E-01	8.30E-02	4.94E-02
	110	5.79E-02	1.11E-01	1.44E-01	1.54E-01	8.75E-02	1.14E-01
0.2	95	7.56E-02	4.66E-02	8.13E-02	6.64E-02	8.79E-02	8.63E-02
	100	5.01E-02	2.75E-01	1.07E-01	1.26E-01	1.13E-01	6.50E-02
	105	2.37E-01	1.65E-01	1.30E-01	2.68E-01	1.29E-01	1.82E-01
	110	1.25E-01	9.11E-02	1.49E-01	1.53E-01	2.04E-01	1.76E-01
$n$		5000		6000		7000	
$\sigma$	(K)	MC max	MC min	MC max	MC min	MC max	MC min
0.1	95	8.98E-03	5.97E-03	7.70E-03	5.93E-03	1.15E-02	8.85E-03
	100	2.95E-02	3.50E-02	1.88E-02	2.92E-02	2.04E-02	1.39E-02
	105	4.03E-02	6.13E-02	1.89E-02	2.91E-02	1.65E-02	2.91E-02
	110	8.18E-02	4.07E-02	4.48E-02	2.88E-02	2.36E-02	2.36E-02
0.2	95	1.04E+00	1.07E+00	1.04E+00	1.08E+00	2.09E-02	2.57E-02
	100	1.63E+00	1.70E+00	1.64E+00	1.70E+00	2.53E-03	4.69E-02
	105	1.90E+00	2.00E+00	1.95E+00	2.00E+00	3.86E-02	3.56E-02
	110	1.88E+00	2.01E+00	1.87E+00	1.97E+00	6.63E-02	3.18E-02

Tabuľka 6.3: Európska put opcia s využitím Monte Carlo simulácií

porovnanie pre zvyšujúci sa počet simulácií a fixný počet  $n$ .

## 6.2 Opcie na výmenné kurzy používajúce ako vstup úrokové miery

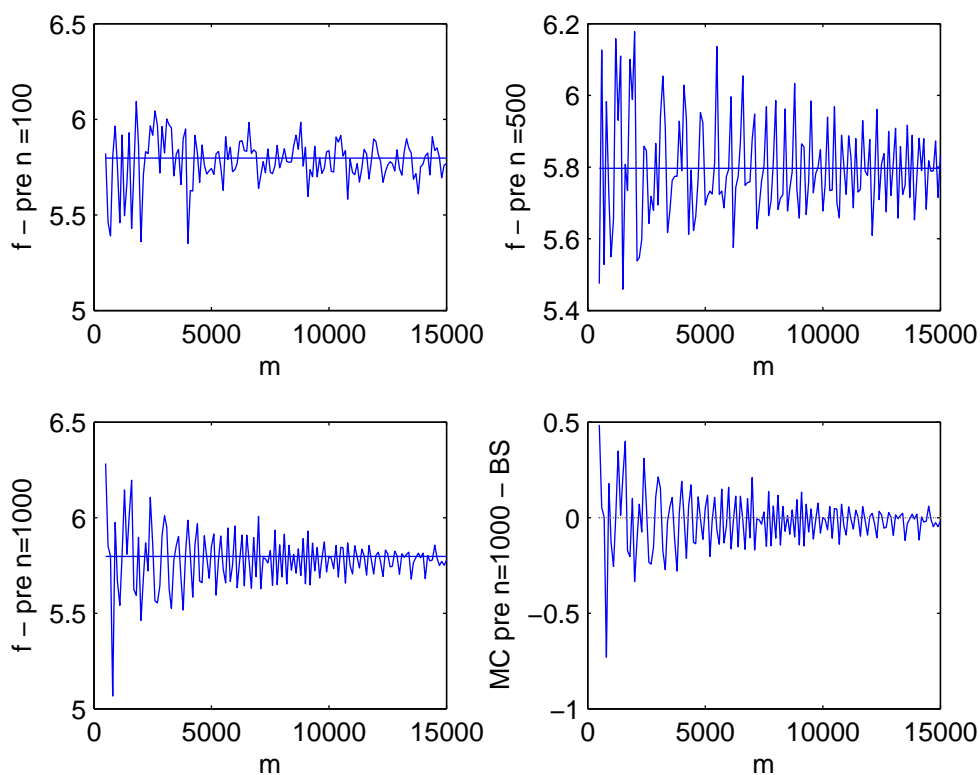
### 6.2.1 Európska call opcia

Tu sme pri testovaní použili nasledujúce hodnoty parametrov:

$$\begin{aligned}
 S &= 100, \\
 K &= 100, \\
 r &= 0.05, \\
 q &= 0.06, \\
 \sigma &= 0.3
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

a životnosť opcie bola 3 mesiace.





Obrázok 6.1: Európska call opcia na výmenný kurz

Grafy na obrázku 6.1 obsahujú porovnanie výsledkov pre Monte Carlo simulácie a Black-Scholesovým vzorcom. S rastúcim počtom simulácií sa odchýlka od Black-Scholesovho vzorca znižuje. Zvyšuje sa však časová náročnosť výpočtu.

### 6.3 Európske bariérové opcie na výmenné kurzy

Vlastnosti tohto typu opcií sme popísali v časti 1.4. Budeme porovnávať ceny získané aplikáciou našich metód s cenami získanými softvérom SUPERDERIVATIVES.

B	1.5	1.6	1.7	1.5	1.6	1.7
T(deň)	1	1	1	2	2	2
MC Min	1.39%	2.88%	3.75%	1.06%	2.46%	3.84%
MC Max	1.47%	3.03%	3.97%	1.13%	2.54%	4.03%
SD	1.41%	2.87%	3.86%	1.07%	2.53%	3.93%

Tabuľka 6.4: Up and Out call opcia s Európskym typom bariéry

### Algoritmus pre výpočet ceny Up and Out call opcie s Európskou bariérou pomocou Monte Carlo simulácie:

**Vstup:**  $S, K, B, p, u, d, m, r, r_f$

```

f = 0
For i = 1 To m
  S(0) = S
  For j = 1 To n
    If Rnd ≤ p Then
      S(j) = S(j - 1)u
    Else : S(j) = S(j - 1)d
    End If
  Next j
  If S(n) < b And S(n) > K Then
    f(i) =  $\frac{S(n) - K}{i} + \frac{(i - 1) * f(i - 1)}{i}$ 
  Else : f =  $\frac{(i - 1) * f(i - 1)}{i}$ 
  End If
Next i
f = f(m) * e-(r-rf)T

```

**Výstup:**  $f$ .

B	1.5	1.4	1.6	1.5	1.4	1.6
T(deň)	1	1	1	2	2	2
Strom	3.23%	4.54%	1.69%	5.50%	6.50%	4.08%
SD	3.20%	4.44%	1.71%	5.36%	6.33%	3.90%

Tabuľka 6.5: Down and In call opcia s Európskym typom bariéry

**Algoritmus pre výpočet ceny Down and In call opcie s európskou bariérou pomocou binomického stromu:**

**Vstup:**  $S, K, B, p, u, d, m, n, r, r_f$

```

For  $i = 0$  To  $n$ 
  If  $S(i, n) > B$  And  $S(i, n) - > 0$  Then
     $f(i, n) = S(i, n) - K$ 
  Else :  $f(i, n) = 0$ 
  End If
Next  $i$ 
For  $i = 1$  To  $n$ 
  For  $j = 0$  To  $n - i$ 
     $f(j, n - i) = e^{-(r-r_f)\delta t} p f(j + 1, n - i + 1)$ 
     $+ e^{-(r-r_f)\delta t} (1 - p) f(j, n - i + 1)$ 
  Next  $j$ 
Next  $i$ 

```

**Výstup:**  $f$ .

Pre tieto dva algoritmy uvádzame i porovnanie numerických výsledkov. V tabuľke 6.4 porovnáваме ceny vyrátané Monte Carlo simuláciou a softvérom SUPERDERIVATIVES. V tabuľke sú uvedené ceny v podobe  $\left(\frac{f}{S} * 100\%\right)$ . Je to spôsob, ktorým udáva cenu softvér SUPERDERIVATIVES. Rozdiely medzi cenami zísaknými softvérom a našou metódou sú minimálne. Rovnaké výsledky môžeme vidieť i v tabuľke 6.5.

## 6.4 Americké bariérové opcie

Ako už sme spomenuli v časti 1.5, pri určovaní ceny opcie je dôležité, či bola

siahnutá bariéra. Preto je pre nás v čase  $t + \delta t$  dôležité poznať cenu podkladového aktíva v čase  $t$ . Pre výpočet ceny sme preto použili Monte Carlo simulácie a

Black-Scholesove vzorce. Hlavná podstata algoritmov pre Monte Carlo simulácie použité na oceňovanie tohto typu opcií je rovnaká. Algoritmy sa líšia len v podmienkach, ktoré sú v podmienkových funkciách  $I_f$  a vo výplatnej funkcii. Tá závisí od toho, či sa jedná o put alebo call opciu. Pre názornosť si uvedieme jeden príklad pre opciu typu *In* a *Out*. Black-Scholesove vzorce úvadzame ako súčasť prílohy.

**Algoritmus pre výpočet ceny Down-and-In call opcie pomocou Monte Carlo simulácie:**

**Vstup:**  $S, K, B, p, u, d, n, m, r$

```
 $f = 0$ 
For  $i = 1$  To  $m$ 
     $bChcek = \text{False}$ 
     $S(0) = 0$ 
    For  $j = 1$  To  $n$ 
        If  $S(j - 1) \leq B$  Then
             $bChcek = \text{True}$ 
            If  $\text{Rnd} \leq p$  Then
                 $S(j) = S(j - 1)d$ 
            Else :  $S(j) = S(j - 1)u$ 
            End If
        Next  $j$ 
    If  $bChcek = \text{True}$  And  $S(n) > K$  Then
         $f(i) = \frac{S(n) - K}{i} + \frac{(i - 1) * f(i - 1)}{i}$ 
    Else :  $f(i) = \frac{(i - 1) * f(i - 1)}{i}$ 
    End If
Next  $i$ 
 $f = f(m) * e^{-(r-r_f)T}$ 
```

**Výstup:**  $f$ .

Premenná  $bCheck$  nesie informáciu, či bola dosiahnutá bariéra. Ak je jej hodnota  $\text{False}$ , znamená že opcia je stále neaktívna a teda bezcenná pre majiteľa. V prípade hodnoty  $\text{True}$  je opcia aktívna.

**Algoritmus pre výpočet ceny Up-and-Out put opcie pomocou**

**Monte Carlo simulácie:**

**Vstup:**  $S, K, B, p, u, d, n, m, r$

$$f = 0$$

For  $i$  To  $m$

$bChceck = \text{True}$

$$S(0) = S$$

For  $j = 1$  To  $n$

If  $S(j - 1) \geq B$  Then  $bCheck = \text{False}$

If  $\text{Rnd} \leq p$  Then

$$S(j) = S(j - 1)u$$

Else :  $S(j) = S(j - 1)d$

End If

Next  $j$

If  $bCheck = \text{True}$  And  $S(n) < K$  Then

$$f(i) = \frac{K - S(n)}{i} + \frac{(i - 1) * f(i - 1)}{i} \quad (6.3)$$

$$\text{Else : } f(i) = \frac{(i - 1) * f(i - 1)}{i}$$

End If

Next  $i$

$$f = f(m) * e^{-(r-r_f)T}$$

**Výstup:**  $f$ .

Pri testovaní bariérových opcií budeme výsledky uvádzať ako pomer ceny vypočítanej vzorcom alebo metódou ku spotovej cene výmenného kurzu ako v časti 6.3.

V tabuľke 6.6 sú vybrané niektoré výsledky pre testovanie *Down-and-In call opcie* s bariérou amerického typu. Skratka B-S je pre Black-Scholesov vzorec,

$\sigma$	12.25	12.25	12.25	5	5	5
$K$	1.36	1.37	1.38	1.36	1.37	1.38
B-S vzorec	3.94%	3.65%	3.37%	1.25%	1.01%	0.80%
MC min	3.93%	3.65%	3.36%	1.25%	0.94%	0.78%
MC max	4.19%	3.94%	3.72%	1.32%	1.08%	0.86%
SD	4.11%	3.80%	3.52%	1.30%	1.05%	0.84%

Tabuľka 6.6: Down-and-In call opcia s americkou bariérou  $B = 1.35$

$\sigma$	12.25%	12.25%	12.25%	5%	5%	5%
$B = 1.35$						
$K$	1.36	1.37	1.38	1.36	1.37	1.38
BS	1.95%	1.86%	1.77%	1.80%	1.58%	1.37%
MC Min	1.99%	1.94%	1.86%	1.78%	1.60%	1.39%
MC Max	2.25%	2.17%	2.09%	1.96%	1.72%	1.51%
$B = 1.37$						
$K$	1.35	1.36	1.37	1.35	1.36	1.37
BS	0.74%	0.71%	0.68%	0.82%	0.75%	0.67%
MC Min	0.74%	0.67%	0.64%	0.85%	0.76%	0.73%
MC Max	0.91%	0.87%	0.84%	0.97%	0.91%	0.80%

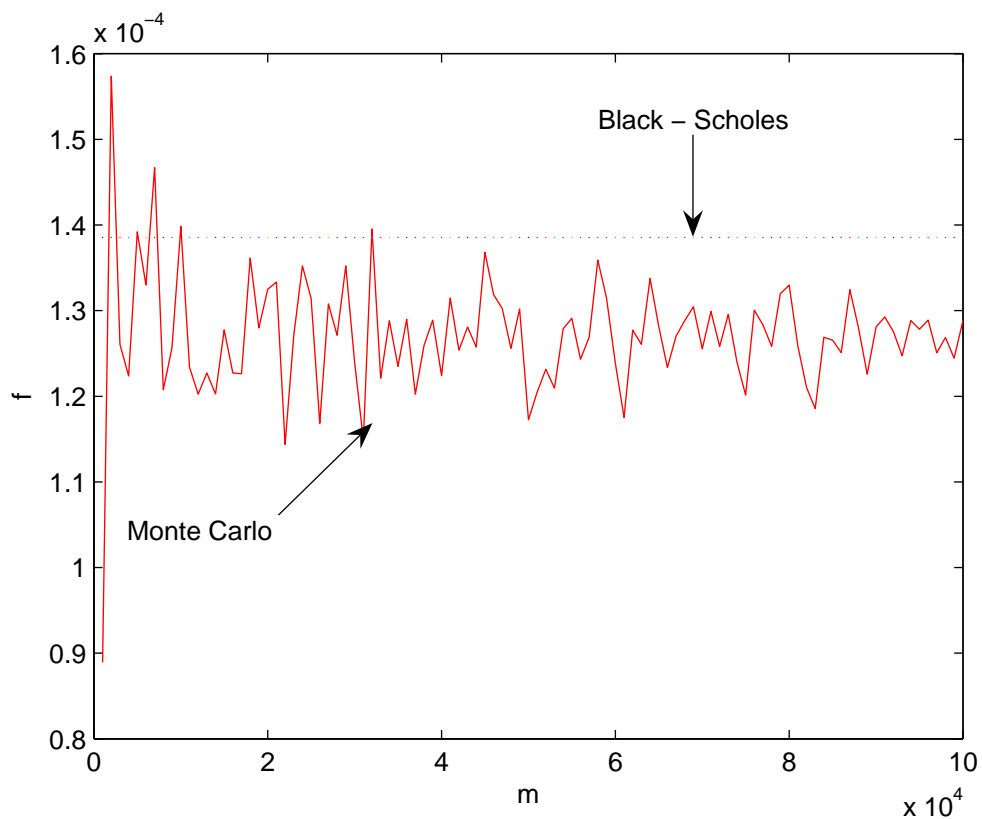
Tabuľka 6.7: Down-and-Out call opcia s Americkým typom bariéry

MC pre Monte Carlo simulácie a SD pre softvér SUPERDERIVATIVES. V prípade Monte Carlo metódy sa  $m = 5000$  a pre každú skupinu parametrov bola počítaná hodnota 10 krát. Z toho bola vybratá minimálna (v tabuľke riadok MC min) a maximálna (v tabuľke MC max). Je vidno, že ceny konvergujú k Black-Scholesovmu vzorcu.

Graf na obrázku 6.2 zobrazuje vývoj ceny *Up-and-Out* call opcie vypočítanej pomocou Monte Carlo simulácie v porovnaní s Black-Scholesovým vzorcom<sup>2</sup>. Ako vstupné hodnoty pre výpočet boli použité  $r - r_f = -0.09\%$ ,  $S = 1.36$ ,  $B = 1.385$ ,  $K = 1.38$ ,  $\sigma = 5\%$ ,  $n = 1000$  a dĺžka životnosti opcie bola 1 deň. Je vidno, že s rastúcim počtom simulácií sa odchýlky od Black-Scholesovho vzorca znižujú. Časová náročnosť na výpočet však vzrastala. Pre praktické použitie by zrejme nebolo vhodné nastavovať počet simulácií na vysokú hodnotu. Obchodník svoju informáciu o cene očakáva v čo najkratšom čase.

V tabuľke 6.4 uvádzame porovnanie Monte Carlo simulácií s Black-Scholesovými vzorcami. Na obrázku 6.3 a 6.4 je zobrazený vývoj ceny

<sup>2</sup>y-ová os predstavuje cenu opcie, nie percentuálny podiel ceny ku spotovej cene



Obrázok 6.2: Up-and-Out call opcia s bariérou amerického typu

*Up-and-Out bariérovej* put opcie metódou Monte Carlo simulácie. Boli použité hodnoty  $S = 1.35$ ,  $B = 1.39$ ,  $K = 1.36$ ,  $\sigma = 12.25\%$ ,  $T = 1$  deň a  $r - r_f = -0.09\%$ . Je vidno, že ceny pri zvyšujúcom počte simulácií konvergujú k priemernej cene. Rozdiel medzi cenou získanou Monte Carlo simuláciou a Black-Scholesovým vzorcom je na úrovni tisícín.

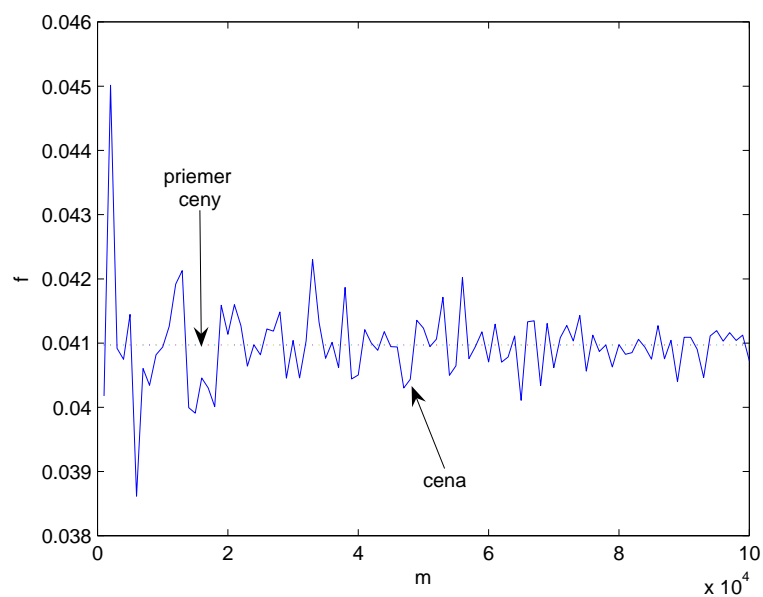
Posledná tabuľka 6.8 v tejto časti je venovaná *Down-and-In* a *Up-and-Out* put opcii s Americkým typom bariéry. Pri výpočte sme použili parametre  $\sigma = 12.25\%$ ,  $r - r_f = -0.09\%$  a  $T = 1$  deň.

## 6.5 Double No-touch opcia

My sme pre ocenenie tejto opcie použili binomický strom. Cenu budeme porovnávať s cenou získanou softvérom SUPERDERIVATIVES. V tabuľkách bude pre názornosť uvedený percentuálny pomer  $\left(\frac{f_{dnt}}{S} * 100\%\right)^3$ .

<sup>3</sup> $f_{dnt}$  je skratka pre cenu double no-touch opcie



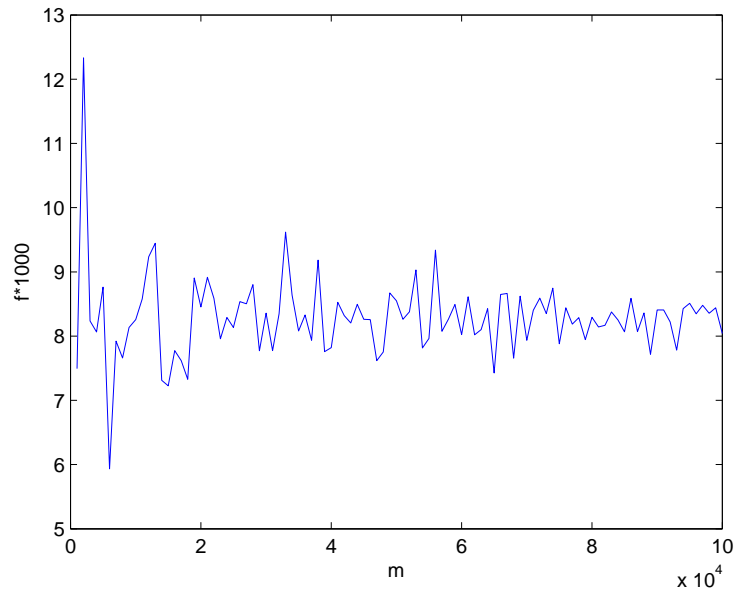


Obrázok 6.3: Up-and-Out put opcia s americkou bariérou

$K$	1.37	1.38	1.39
$f_{abdip}$	$B = 1.36$	$S = 1.37$	
MC Min	4.81%	5.13%	5.56%
MC Max	5.07%	5.49%	5.88%
SD	4.86%	5.24%	5.65%
$f_{abuop}$	$B = 1.37$	$S = 1.35$	
MC Min	1.48%	1.54%	1.60%
MC Max	1.65%	1.72%	1.85%
SD	1.47%	1.54%	1.62%

Tabuľka 6.8: Výsledky pre Down-and-In a Up-and-Out put opcie s Americkým typom bariéry

**Algoritmus pre výpočet ceny Double No-touch opcie metódou binomického stromu:**



Obrázok 6.4: Rozdiel ceny Monte Carlo simulácie a Black-Scholesovho vzorca pre Up-and-Out opciu s americkou bariérou

**Vstup:**  $S, X, F, p, u, d, n, r, B_1, B_2$

For  $i = 0$  To  $n$

    If  $S(i, n) - B_2 > 0$

$f(i, n) = 0$

    ElseIf  $S(i, n) - B_1 < 0$  Then

$f(i, n) = X$

    End If

Next  $i$

For  $i = 1$  To  $n$

    For  $j = 0$  To  $n - i$

        If  $S(j, n - i) - B_2 > 0$  Then

$f(j, n - i) = 0$

        ElseIf  $S(j, n - i) - B_1 < 0$  Then

$f(j, n - i) = 0$

        Else :  $f(j, n - i) = e^{-r\delta t}[pf(j + 1, n - i + 1)]$   
 $+ e^{-r\delta t}[(1 - p)f(j, n - i + 1)]$

    End If

    Next  $j$

Next  $i$

$B_1$	1.3	1.2	1.1	1.3	1.2	1.1	1.3	1.2	1.1
$B_2$	1.5	1.5	1.5	1.6	1.6	1.6	1.7	1.7	1.7
$B_2 - B_1$	0.2	0.3	0.4	0.3	0.4	0.5	0.4	0.5	0.6
Strom	3.42%	30.44%	52.46%	15.27%	52.5%	75.48%	23.19%	62.9%	85.94%
SD	3.12%	28.88%	48.9%	15.35%	52.24%	73.29%	24.39%	64.34%	85.46%
Strom- SD	0.3%	1.56%	3.56%	0.08%	0.26%	2.19%	1.2%	1.44%	0.48%

Tabuľka 6.9: Double No-touch opcia

### Výstup: $f$ .

Forvardový kurz sme použili ako vstup, aby sme boli ekvivalentný so sftvérom SUPERDERIVATES.

Výsledky v tabuľke 6.5 sú pre  $S = 1.36$ ,  $\sigma = 12.25\%$ ,  $F = 1.36$ ,  $n = 1000$  a  $r = 0\%$ . Môžeme vidieť, že so zväčšovaním rozpetia bariér nám narastá i cena opcie. To sme i očakávali, keďže rastie pravdepodobnosť, že opcia bude uplatnená. Pozrime si posledný riadok tabuľky. Rozdiel medzi softvérom a našim ocenením je pomerne nízky. Môžeme povedať, že sa nám podarilo túto opciu oceniť. Dôležitá je metodika, s ktorou pristupujú tvorcovia softvéru SUPERDERIVATIVES. Tú my však nepoznáme.

## 6.6 Range accrual swap

Bližší opis tohto typu opcie sme uviedli v časti 1.7. Pri testovaní sme postupovali rovnako ako doteraz. Pre ocenenie sme použili Monte Carlo simulácie. Túto cenu budeme porovnávať so softvérom SUPERDERIVATIVES.

**Algoritmus pre výpočet ceny Range accrual swapu metódou Monte Carlo simulácie:**

$B_1$	1.31	1.32	1.33	1.31	1.32	1.33	1.31	1.32	1.33
$B_2$	1.35	1.35	1.35	1.36	1.36	1.36	1.37	1.37	1.37
MC min	13.38	10.18	6.77	16.42	13.39	9.93	19.20	16.27	12.94
MC max	13.72	10.47	7.01	16.92	13.53	10.19	19.78	16.68	13.18
SD	13.75	10.51	7.03	16.96	13.70	10.24	19.95	16.69	13.21

Tabuľka 6.10: porovnanie cien pre Range accrual swap

**Vstup:**  $S, X, F, p, u, d, n, r, m, B_1, B_2$

```

f = 0
For i = 1 To m
  bChcek = False
  S(0) = S
  For j = 1 To n
    If S(j - 1) ≤ B2 And S(j - 1) ≥ B1 Then
      fMC(i) =  $\frac{X}{n} + fMC(i)$ 
    If Rnd ≤ p Then
      S(j) = S(j - 1)u
    Else : S(j) = S(j - 1)d
  End If
Next j
f = f + fMC(i)
Next i
f =  $\left(\frac{f}{n}\right) e^{-rT}$ 

```

(6.4)

**Výstup:**  $f$ .

Premenná  $fMC(i)$  je pomocná premenná. Je to hodnota opcie v jednotlivých kontrolných intervaloch. Hodnota  $n$  v našom prípade predstavuje nielen počet uzlov, v ktorých sa môže zmeniť cena, ale aj počet kontrolných uzlov.

V tabuľke 6.4 sú ceny opcií vyrátané pre parametre  $S = 13.3346$ ,  $r = 0.98\%$ ,  $F = 1.3412$ ,  $\sigma = 11.85\%$ ,  $T = 2$  dni,  $n = 500$ ,  $m = 5000$ . Naše výsledky približne korešpondujú s cenami softvéru SUPERDERIVATIVES, preto považujeme naše ocenie za vyhovujúce.

## Záver

V posledných desaťročiach obchodovanie na finančných trhoch zaznamenáva nebyvalý rozmach. Narastá i dopyt investorov a obchodníkov pre zaistenie sa proti fluktuáciám na finančných trhoch. Týmto narastá dopyt po opciách a potreba ich ocenenia. Samotní obchodníci však často-krát nemajú priestor a ani znalosti samostatne oceňovať opcie.

V našej práci sme vytvorili a otestovali malú aplikáciu v prostredí MS Excel, ktorá by mala slúžiť obchodníkom vo Všeobecnej úverovej banke ako pomocný nástroj, pri určovaní cien niektorých typov opcií. Teoretická časť by mala poskytnúť i základné myšlienky a úvahy, na ktorých je aplikácia vybudovaná. Aplikácia obsahuje ocenenie pre 26 typov opcií. Je vytvorená určitá metodika a možnosť pre dopĺňanie ďalších typov opcií.

V prvej kapitole sme popísali jednotlivé typy opcií, ktoré sme oceňovali. V kapitolách dva, tri, štyri a päť sme popísali metódy, ktorými sú opcie z kapitoly jeden ocenené. V poslednej šiestej kapitole sme sa snažili preukázať funkčnosť a korektnosť nášho ocenenia. Myslíme si, že výsledky sú uspokojivé. Naše ocenenie sa približuje oceneniu softvéru SUPERDERIVATIVES, ktorý používa Všeobecná úverová banka. Vzniknuté odchýlky sú na úrovni stotín a menej. Naším cieľom nebolo dosiahnuť zhodnú cenu, pretože samotná metodika, ktorá je použitá v softvéri je užívateľovi neznáma.

Ako rozšírenie práce by mohlo byť doprogramovanie ďalších typov opcií do aplikácie. Okrem opcií na výmenné kurzy by mohla aplikácia obsahovať opcie na úrokové miery.

# Príloha

## Black-Scholesove vzorce pre Americké bariérové opcie

Down-and-In call opcia pre  $B \leq K$

$$f_{abdic} = S e^{-r_f T} \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda} N(y) - K e^{-rT} \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T})$$

Down-and-In call opcia pre  $B \geq K$

$$f_{abdic} = f_{abc} - f_{abdoc}$$

Down-and-Out call opcia pre  $B \leq K$

$$f_{abdoc} = f_{abc} - f_{abdic}$$

Down-and-Out call pre  $B \geq K$

$$\begin{aligned} f_{abdoc} &= S N(x_1) e^{-r_f T} - K e^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S e^{-r_f T} \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda} N(y_1) \\ &+ K e^{-rT} \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma\sqrt{T}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Up-and-In call opcia pre  $B > K$

$$\begin{aligned} f_{abuic} &= S N(x_1) e^{-r_f T} - K e^{-rT} N(x_1 \sigma\sqrt{T}) - S e^{-r_f T} \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda} * \\ &(N(-y) - N(-y_1)) + K e^{-rT} * \\ &\left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda-2} (N(-y + \sigma\sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})) \end{aligned}$$

**Up-and-Out call opcia**

$$f_{abuoc} = f_{abc} - f_{abuic}$$

**Up-and-In put opcia pre  $B \geq K$**

$$f_{abuip} = -Se^{-r_f T} \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda} N(-y) + Ke^{(-rT)} \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda-2} N(-y + \sigma\sqrt{T})$$

**Up-and-Out put pre  $B \geq K$**

$$f_{abuop} = f_{abp} - f_{abuip}$$

**Up-and-Out put opcia pre  $B < K$**

$$f_{abuop} = -SN(-x_1)e^{-r_f T} + Ke^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + Se^{-r_f T} \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda} * \\ (N(y) - N(y_1)) - Ke^{-rT} \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda-2} N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})$$

**Out-and-In put opcia pre  $B < K$**

$$f_{abuip} = f_{abp} - f_{abuop}$$

**Down-and-In put opcia pre  $B < K$**

$$f_{abdip} = -SN(-x_1)e^{-r_f T} + Ke^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) \\ + Se^{-r_f T} \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda} (N(y) - N(y_1)) \\ - Ke^{-rT} \left(\frac{B}{S}\right)^{2\lambda-2} (N(y - \sigma\sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{T}))$$

**Down-and-Out opcia pre  $B < K$**

$$f_{abdop} = f_{abp} - f_{abdip}$$

$$f_{abc} = Se^{-r_f T} N(d_1) - Ke^{rT} N(d_2)$$

$$f_{abp} = Ke^{-rT} N(-d_2) - Se^{-r_f T} N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - r_f + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) - (r - r_f + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$= d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$\lambda = \frac{r - r_f + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma^2}$$

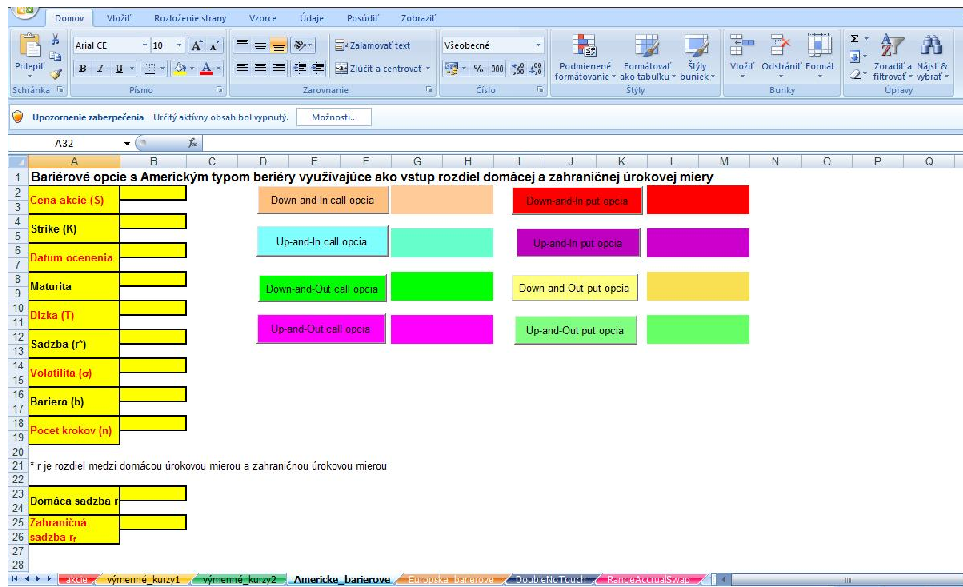
$$y = \frac{\ln\left(\frac{B^2}{SK}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

$$x_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{B}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

$$y_1 = \frac{\ln\left(\frac{B}{S}\right)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$



# Prostredie aplikácie



# Literatúra

- [6] Clervlow, L., Shickland, Ch. *Implementing derivatives models*, West Sussex, John Wiley and sons Ltd., 1999.
- [4] Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinsstein, M. *Option pricing: A simplified approach*, Journal of Financial Economics, September 1979.
- [2] Hull, J. *Introduction to futures and options markets, second edition*, New Jersey, Prentice-Hall, 1995.
- [9] Hull, J. *Options, futures and other derivatives, third edition*, New Jersey, Prentice-Hall, 1997.
- [12] Hull, J. *Options, futures and other derivatives, fourth edition*, New Jersey, Prentice-Hall, 2000.
- [3] Kundríková, Z. *Bariérové opcie*. [online]. Citované [27.10.2009]. Dostupné na <http://www3.ekf.tuke.sk/konfera2008/zbornik/files/prispevky/kundrikova.p>
- [10] McDonald, R. *Derivatives markets, second edition*, Boston, Pearson Education, 2006.
- [1] Melicherčík, I., Olšárová, L., Úradníček, V. *Kapitoly z finančnej matematiky*, Bratislava, EPOS, 2005.
- [11] *Options history*. [online], Citované [11.4.2010]. Dostupné na <http://www.stocks-options-trading.com/history.asp>
- [7] Ševčovič, D., Stehlíková, B., Mikula, K. *Analytické a numerické modely oceňovania finančných derivátov*, Bratislava, Nakladateľstvo STU, 2009.

- [8] Ševčovič, D. *Parciálne diferenciálne rovnice a ich aplikácie*, Bratislava, IRIS, 2008.
- [5] Wilmott, P. *Paul Wilmott on quantitative finance, Volume one*, Somerset, Boockraft, 2000.