

Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky, Univerzita Komenského v Bratislave
Ekonomická a finančná matematika

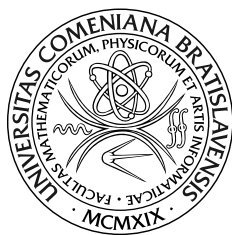
Oceňovanie ázijských typov košíkových opcií

Diplomová práca

Diplomant: Vladislav Kaššovic

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2010



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

OCEŇOVANIE ÁZIJSKÝCH TYPOV KOŠÍKOVÝCH OPCÍÍ

Diplomová práca

Vladislav KAŠŠOVIC

9.1.9 Aplikovaná matematika
Ekonomická a finančná matematika

Vedúci práce: RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

BRATISLAVA 2010

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som prácu vypracoval samostatne s využitím svojich poznatkov, konzultácií a s použitím uvedenej literatúry.

Podakovanie

Chcem sa poďakovať vedúcemu mojej diplomovej práce za trpezlivosť, cenné rady a vedomosti, ktoré mi poskytol.

KAŠŠOVIC, Vladislav: Oceňovanie ázijských typov košíkových opcií.
[Diplomová práca] - Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta
matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a
štatistiky. -Vedúci diplomovej práce: RNDr. Daniel Ševčovič, CSc,
-Bratislava: FMFI UK, 2010 /70 s./

Abstrakt

V diplomovej práci skúmame ázijské košíkové opcie, pre ktoré explicitné vyjadrenie ceny nepoznáme. Cenu však dokážeme ohraničiť hornou a dolnou komonotónnou hranicou a tiež ju pomerne presne určiť Monte Carlo simuláciou. Hranice závisia od rôznych premenných, preto skúmame závislosti od nich. Skúmame ich cez derivácie podľa expiračnej ceny, volatility, úrokovej miery a cez pozorovanie ich priebehu na grafoch v závislosti od daných premenných. Diplomová práca dáva nahliadnúť čo je to ázijská košíková opcia a ako ju možno oceniť, respektíve cenu ohraničiť.

Kľúčové slová:

Ázijské košíkové opcie, Monte Carlo simulácia, derivácia, komonotónna hranica

Abstract

In this master thesis we look through Asian basket options. Within a Black-Scholes theory there is no close formula available for their price, but we know upper and lower comonotonic bound for the price and we can determine the price relatively closely by Monte Carlo simulation. The bounds depends on variety variables, so we explore their dependance. We look through differentiations with respect to strike price, volatility, interest rate and we observe graphs of the bounds depending up the variables. The master thesis zoom in problem of Asian basket options and shows how to evaluate the options or bound their price.

Keywords:

Asian basket option, Monte Carlo simulation, differentiation, comonotonic bound

Obsah

Úvod	7
1 Základné pojmy	8
2 Vlastnosti ázijských košíkových opcií	11
2.1 Ázijské opcie	11
2.2 Košíkové opcie	12
2.3 Ázijské košíkové opcie	13
3 Monte Carlo simulácia	14
4 Hranice založené na komonotónnosti a podmienenosti	16
4.1 Komonotónna horná hranica	16
4.2 Komonotónna dolná hranica	18
4.2.1 Výpočet korelačných koeficientov $r_{l,j}$	20
4.3 Hľadanie distribučnej funkcie komonotónnej sumy metódou delenia intervalu	21
4.4 Vzťah medzi hranicami a Black-Scholesovou formulou s dividendami	22
5 Citlivosti hraníc na premenné	26
5.1 Citlivosť na r	26
5.1.1 Citlivosť hornej komonotónnej hranice na r	26
5.1.2 Citlivosť dolnej komonotónnej hranice na r	32
5.2 Citlivosť na K	37
5.2.1 Citlivosť hornej komonotónnej hranice na K	37
5.2.2 Citlivosť dolnej komonotónnej hranice na K	41
5.3 Citlivosť na váhy	45
5.4 Citlivosť na σ_i	46
5.4.1 Citlivosť hornej komonotónnej hranice na σ_i	46
5.4.2 Citlivosť dolnej komonotónnej hranice na σ_i	49
6 Numerické výsledky	53
6.1 Vstupné dáta	53
6.2 Výsledky bez dividend	54
6.3 Výsledky so započítaním dividend	54

Záver	56
Literatúra	57
Príloha	59

Úvod

Vo svete financií je potrebné správne a čo najpresnejšie oceniť finančné deriváty. Cenu ázijskej košíkovej opcie však nedokážeme explicitne vyjadriť pomocou Black-Scholesovej teórie, ktorá sa štandardne používa na oceňovanie. Preto môžeme využiť Monte Carlo simuláciu a tiež určiť, v akých hraniciach sa pohybuje cena opcie. V tejto práci sa zameriame na hranice založené na komonotónnosti a podmienenosti.

V prvej kapitole si predstavíme pojmy, z ktorých sa vychádza pri odvodzovaní komonotónnych hraníc. V druhej kapitole popisujeme ázijské košíkové opcie, ich vlastnosti a špecifiká, reprezentované hlavne zohľadnením vývoja ceny podkladového aktíva počas času, až do expirácie. S problémom oceňovania týchto opcií si ľahko poradíme pomocou metódy Monte Carlo, ktorá je popísaná v tretej kapitole. Pomerne presne tak dokážeme určiť cenu opcie, no táto metóda je náročná na výpočtový čas. Omnoho rýchlejšie vypočítame hornú a dolnú hranicu založenú na komonotónnosti a podmienenosti, hoci určujú len interval, v akom sa pohybuje cena opcie. Vzťahy pre tieto hranice uvádzame v štvrtej kapitole spolu s jednou z metód ako vypočítať koreň funkcie. Uvedieme aj analytické vyjadrenie korelačných koeficientov, ktoré vstupujú do dolnej hranice. Nasledujúca kapitola pojednáva o citlivostiach hornej a dolnej hranice na vybrané premenné. Sú v nich obsiahnuté derivácie a grafy závislostí od daných premenných. Dávajú predstavu o tom, ako sa menia hranice s meniacimi sa premennými. V poslednej kapitole sú spočítané hodnoty hornej a dolnej hranice a Monte Carlo simulácie pre uvedené vstupné dáta. Môžeme tak vidieť, v akom intervale sa pohybuje cena opcie s rôznymi časmi expirácie a expiračnými cenami. Vidieť tiež, že vynechanie takého parametra ako je miera dividend, dokáže značne zmeniť výsledky.

1 Základné pojmy

Častým pojmom, s ktorým sa stretávame vo svete financií je Brownov pohyb alebo jeho forma Wienerov proces. Aj pomocou Wienerovho procesu je popísaný vývoj podkladového aktíva. Definíciu môžeme nájsť v [9].

Definícia 1.1 *Brownov pohyb $X(t), t \geq 0$ je t - parametrický systém náhodných veličín, pričom:*

- *Všetky prírastky $X(t+\Delta) - X(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a disperziou (alebo aj varianciou) $\sigma^2\Delta$,*
- *pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ sú prírastky $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa bodu i ,*
- $X(0) = 0$.

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ nazývame Wienerov proces.

Definícia 1.2 *Funkcia nazývaná n -rozmernou copulou je funkcia $C : I^n \rightarrow I$ s nasledovnými vlastnosťami:*

- *C je n -rastúca (rastúca vo všetkých n zložkách)*
- *C má jednorozmerné marginálne funkcie $C_k (k = 1, 2, \dots, n)$, pre ktoré platí $C_k(u) = u$ pre $\forall u \in I$*
- *pre každé $u \in I^n$ platí $C(u) = 0$ ak aspoň jedna zo zložiek vektora u je nulová a $C(u) = u_k$ ak všetky zložky okrem u_k sú rovné 1.*
- *pre každé $a, b \in I^n, a \leq b$ a n -rozmernú kocku $B = [a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$, ktorej vrcholy ležia v definičnom obore funkcie C , je objem tejto kocky*

$$V_C(B) = V_C([a, b]) = \sum_i \text{sign}(i) C(i) \geq 0$$

Keby sme jednou vetou chceli zhrnúť laicky, čo je to copula, dalo by sa povedať, že akákoľvek n -rozmerná distribučná funkcia je rozložiteľná na n marginálnych distribučných funkcií a copulu, ktorá popisuje závislosti medzi n náhodnými premennými. Aby sme sa ale vyjadrili korektne, použijeme nasledujúcu (Sklarovu) vetu ako je uvedené v [11].

Veta 1.1 *Nech H je n -rozmerná distribučná funkcia s marginálnymi distribučnými funkciami F_1, F_2, \dots, F_n . Potom existuje copula C taká, že pre $\forall x \in R^n$ platí*

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$$

Navyše, ak F_1, F_2, \dots, F_n sú spojité, potom C je jediná. V inom prípade, C je jednoznačne daná v priestore ohraničenom oborom hodnôt marginálnych distribučných funkcií ($\text{Ran}(F_1) \times \text{Ran}(F_2) \times \dots \times \text{Ran}(F_n)$).

Naopak, ak C je copula a F_1, F_2, \dots, F_n sú distribučné funkcie, potom funkcia H je n -rozmerná distribučná funkcia s marginálami F_1, F_2, \dots, F_n .

Dôsledok 1.1 *Nech $H, C, F_1, F_2, \dots, F_n$ sú jednorozmerné distribučné funkcie a nech $F_1^{-1}, F_2^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ sú kvázi-inverzné ku F_1, F_2, \dots, F_n . Potom pre $\forall u \in I^n$ platí*

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

Gaussova (Normálna) bivariačná copula dostala svoje pomenovanie vďaka tomu, že ak by sme ju aplikovali na náhodné vektory s marginálnym rozdelením $N(0, 1)$, dostali by sme multivariačné normálne rozdelenie. Inak povedané, z dôsledku Sklárovej vety sa dostávame ku vzťahu

$$C_N(U, R) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

kde R je korelačná matica $n \times n$, Φ je funkcia hustoty multivariačného normálneho rozdelenia a Φ^{-1} je funkcia k nej inverzná. Bola použitá pre výpočet hraníc ceny ázijskej košíkovej opcie, ktoré sú uvedené v štvrtej kapitole.

Studentova t-copula je copulou, kde je združenou distribučnou funkciou multivariačné Studentovo rozdelenie a marginály pochádzajú taktiež zo Studentovho rozdelenia:

$$C_t(U, R, v) = t_{R,v}(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2), \dots, t_v^{-1}(u_n),)$$

kde R je korelačná matica veľkosti $n \times n$ a v je počet stupňov voľnosti.

Komonotónny vektor náhodných premenných (X_1^c, \dots, X_k^c) je taký, pre ktorý platí, že každé dve možné realizácie (x_1, \dots, x_k) a (y_1, \dots, y_k) vektora (X_1^c, \dots, X_k^c) sú zoradené po komponentoch. To znamená $x_i \leq y_i$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$.

Konvexné usporiadanie náhodných premenných X a Y je také, že $E[v(X)] \leq E[v(Y)]$ pre všetky konvexné funkcie v .

Opcia je právo kúpiť alebo predať podkladové aktívum. Základným typom je európska opcia. Jednoduché opcie sú označované ako vanilkové (vanilla) opcie. Opcie, ktoré majú pôvod v exotických krajinách označujeme ako exotické opcie. Európska opcia je právo kúpiť alebo predať podkladové aktívum v stanovený expiračný čas T za stanovenú expiračnú cenu K . Cenu podkladového aktíva označujeme S . Americká opcia má oproti európskej tú možnosť, že ju môžeme uplatniť aj v priebehu času, až do času expirácie.

2 Vlastnosti ázijských košíkových opcií

Ázijské košíkové opcie sú opcie, ktoré majú vlastnosti ázijských aj košíkových opcií. Sú viazané na viacero podkladových aktív. V ich cene je zohľadnený vývoj cien podkladových aktív do času expirácie. Bližšie sa s nimi môžeme oboznámiť v [9].

2.1 Ázijské opcie

Ázijské opcie sú opcie, ktorých cena závisí nielen od aktuálnej ceny aktíva, ale aj od vývoja ceny aktíva do času expirácie. Cena sa v priebehu určitej časovej periódy priemeruje. To spôsobuje, že ázijské opcie majú nižšiu volatilitu a je možné pomocou nich čiastočne znížiť riziko plynúce z možnej cenovej manipulácie zo strany vypisovateľa v čase expirácie. Obvykle je zaistovanie prostredníctvom ázijských opcií lacnejšie ako konštrukcia portfólia obyčajných call alebo put opcií s rôznymi splatnosťami. Používajú sa pri obchodovaní s menami a komoditami, ktoré majú nízke obchodné objemy. Prvýkrát boli použité v roku 1987, keď ich Tokijská pobočka bankovej organizácie Bankers Trust použila na ocenenie ropných kontraktov. Odtiaľ pochádza pomenovanie ázijské. Priemerovanie cien podkladového aktíva môže byť aritmetické, geometrické alebo s pridelením váh, ktoré sa v súčte rovnajú 1. Spriemerovaná cena A_t podkladového aktíva sa potom rovná:

1. Pre spojitý prípad aritmetického priemerovania

$$A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau$$

2. Pre spojitý prípad geometrického priemerovania

$$\ln A_t = \frac{1}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau$$

3. Pre diskretný prípad aritmetického priemerovania

$$A_{t_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}$$

4. Pre diskretný prípad geometrického priemerovania

$$\ln A_{t_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln S_{t_i}$$

kde $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, pričom $t_{i+1} - t_i = 1/n$.

5. Pre diskrétny prípad váženého priemeru

$$A_{t_n} = \sum_{i=1}^n b_{t_i} S_{t_i}$$

kde b_{t_i} sú váhy pridelené jednotlivým časovým okamihom.

Výplatný diagram call opcie je $V(A, T) = \max(A - K, 0)$, kde K je expiračná cena a $A = A_T$ je spriemerovaná cena podkladového aktíva v čase expirácie T . Výplatný diagram put opcie je $V(A, T) = \max(K - A, 0)$. Priemerovaná hodnota môže byť nielen v pozícií ceny podkladového aktíva, ale aj v pozícií expiračnej ceny opcie.

Pri odvádzaní ceny ázijskej opcie použitím Black-Scholesovej teórie a po následnej transformácii $V(S, A, t) = AW(x, t)$, kde $x = S/A$, $x \in (0, \infty)$ dostávame, že transformovaná funkcia $W = W(x, t)$ je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (r - D)x \frac{\partial W}{\partial x} + f(x, t) \left(W - x \frac{\partial W}{\partial x} \right) - rW = 0.$$

V prípade geometrického priemerovania je známe riešenie, ktoré sa dá vyjadriť explicitným vzorcom, no pri aritmetickom priemerovaní je zatiaľ explicitné vyjadrenie neznáme.

2.2 Košíkové opcie

Opcie, ktorých cena závisí na hodnote viacerých podkladových aktív nazývame košíkové (basket). Príkladom košíkovej opcie je derivát viazaný na vývoj dvoch podkladových aktív. Potom jeho pay-off diagram je call opcia na súčet cien jednotlivých aktív

$$V(S_1, S_2, T) = \max(S_1 + S_2 - K, 0).$$

Ide o veľmi rozšírený typ finančných derivátov. Do košíka môže vstupovať aj 500 podkladových aktív, ako to je pri opciách na index S&P500, s ktorým obchodujú drobní investori. Pomocou viacrozmerného variantu Itóovej lemy je možné odvodiť parciálnu diferenciálnu rovnicu na oceňovanie košíkových opcií. To následne vedie k počítaniu vysokorozmerných integrálov. Efektívny algoritmus aproximácie vysokorozmerných opcií na indexy je v súčasnosti stále predmetom intenzívneho výskumu.

2.3 Ázijské košíkové opcie

Uvažujme košík s n podkladovými aktívami, ktorých ceny $S_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ sú opísané pod rizikovo neutrálnou mierou Q a pomocou rizikovo neutrálnej úrokovej miery r stochastickými rovnicami:

$$dS_i(t) = rS_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dW_i(t), \quad (1)$$

kde $W_i(t)$, $t > 0$ je Wienerov proces vzťahujúci sa k cene podkladového aktíva i . Navyše predpokladajme, že ceny podkladových aktív sú navzájom korelované. Korelácie prírastkov sú konštantné:

$$\text{corr}(dW_i, dW_j) = \rho_{ij}dt. \quad (2)$$

Cena ázijskej košíkovej call opcie (asian basket call option-ABC) s diskrétnym priemerovaním, európskeho charakteru, danou expiračnou cenou, časom expirácie T a m časovými okamihmi vstupujúcimi do ceny opcie, má v čase $t = 0$ hodnotu

$$ABC(n, m, K, T) = e^{-rT} E^Q \left[\left(\sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j S_l(T-j) - K \right)_+ \right], \quad (3)$$

pričom a_l a b_j sú kladné koeficienty, obidva sa rovnajú v súčte 1 a $(x)_+ = \max[x, 0]$.

Ázijské košíkové opcie sú vhodné na zaistovanie miery rizika, pretože ich výplata závisí na priemere cien viacerých podkladových aktív v rôznych časoch. Navyše priemerovanie má zvyčajne za následok zníženie variancie, tým pádom je opcia lacnejšia. Ázijská košíková opcia zachytáva dokonca aj vzťahy medzi jednotlivými aktívami a to v podobe korelácie. Ázijské košíkové opcie sú obzvlášť dôležité pri obchodovaní s energiami, kde je väčšina kontraktov na dodávky oceňovaná na báze priemernej ceny počas určitej časovej periódy. Podobne ako pri ázijských opciách ani pri ázijských košíkových opciách nie je známe explicitné vyjadrenie ceny založené na Black-Scholesovej teórii. Nápomocné však môžu byť Monte Carlo simulácie, rovnako ako aj horné a dolné hranice ceny, pre ktoré existujú analytické riešenia.

3 Monte Carlo simulácia

Metóda Monte Carlo je spôsob, akým sa dajú simulovať systémy. Stochastické metódy pri ňom používajú náhodné a pseudonáhodné čísla. Veľmi často sa používajú na výpočet viacrozmerných integrálov, ktoré sa inak počítajú veľmi obtiažne. Uplatnenie majú aj pri riešeníach diferenciálnych rovníc a pri výpočtoch, kde neexistuje analytické riešenie. Výsledkom simulácie je stredná hodnota, respektíve aritmetický priemer spočítaný z množstva vygenerovaných realizácií náhodných premenných. Monte Carlo simulácia má pôvod v zákone veľkých čísel. Metóda je pomenovaná podľa Monte Carla v Monaku, ktoré je veľkým centrom hazardných hier, ktoré sú založené na náhode. Toto označenie bolo použité prvýkrát v roku 1940 fyzikmi v Amerike, ktorí pracovali na zostrojení atómovej bomby. Chyba výsledku pri Monte Carlo simulácií generovaním n realizácií je úmerná $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Aby sme dostali výsledok lepší o jeden rád, musíme zväčšiť počet realizácií minimálne o dva rády. Pre výsledok presný na 6 desatinných miest je potrebné generovať 10^{12} realizácií.

Postup pre výpočet ceny ázijskej košíkovej opcie v Matlabe:

Vývoj cien podkladových aktív je popísaný stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dS_i(t) = rS_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dW_i(t),$$

ktorej riešenie je

$$S_i(t) = S(0) \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_i(t) \right).$$

V prípade, že sú pri podkladovom aktíve i vyplácané dividendy, ktoré sú určené dividendovou mierou D_i , potom sa stochastická diferenciálna rovnica zmení na

$$dS_i(t) = (r - D_i)S_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dW_i(t),$$

ktorej riešenie je

$$S_i(t) = S(0) \exp \left(\left(r - D_i - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_i(t) \right).$$

Vygenerujeme preto najprv prírastky Wienerovho procesu prislúchajúce jednotlivým podkladovým aktívam. Označíme ich dU_i . Tieto sú nezávislé, čo zodpovedá ich vzájomnej nulovej korelácií. Preto je potrebné ich vhodne upraviť, aby zodpovedali zadanej korelačnej štruktúre. Pri danej matici, ktorá

predstavuje korelačnú štruktúru musíme urobiť Choleskeho dekompozíciu. Dostaneme tak dolnú trojuholníkovú maticu L , pre ktorú platí: $\rho = LL^T$. Požadovanú koreláciu získame pre násobením matice L a vektorov dU_i . Pre prírastky Wienerových procesov dW_i so správnou korelačnou štruktúrou platí

$$dW_i = \sum_{k=1}^n l_{ik} dU_k,$$

kde n je počet aktív, l_{ik} sú prvky matice L a $n \times n$ sú rozmery matice L . Z prírastkou Wieneroveho procesu následne dostaneme samotný Wienerov proces. Potom už je jednoduché spočítať pomocou riešenia stochastickej diferenciálnej rovnice cenu podkladového aktíva v požadovanom čase. Ľahko sa tiež spočíta výraz

$$e^{-rT} \left[\left(\sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j S_l(T-j) - K \right) \right]_+.$$

Takto získame jednu realizáciu Monte Carlo simulácie. Keďže ide o náhodné premenné, treba urobiť veľa realizácií. Aby sme získali čo najpresnejší odhad, potrebujeme urobiť čo najviac realizácií. V niektorých matematických článkoch generujú 50 000 realizácií, v iných 1 000 000. Aritmetický priemer z vygenerovaných realizácií je potom hľadaný odhad skutočnej hodnoty. V našom prípade je to odhad ceny ázijskej košíkovej opcie. Dobrá vlastnosť metódy je, že nemusíme vygenerovať 1 000 000 realizácií naraz a z nich počítať aritmetický priemer, ale stačí vygenerovať 1000 realizácií, z nich spočítať aritmetický priemer a toto zopakovať 1000 krát. Dostaneme tak 1000 aritmetických priemerov, z ktorých aritmetický priemer je v našom prípade požadovaný odhad ceny. Vyhneme sa tak generovaniu obrovských vektorov, s ktorými môžu mať slabšie počítače problém. Kód pre Matlab je uvedený v prílohe ako program č.1.

4 Hranice založené na komonotónnosti a podmienenosti

Predpokladajme, že dvojitá suma

$$S = \sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j S_l(T - j)$$

je suma náhodných premenných s lognormálnou distribučnou funkciou a môže byť prepísaná v tvare

$$S = \sum_{i=1}^{mn} X_i = \sum_{i=1}^{mn} \alpha_i e^{Y_i}, \quad (4)$$

kde

$$\alpha_i = a_{\lceil i/m \rceil} b_{(i-1) \bmod(m)} S_{\lceil i/m \rceil}(0) e^{(r-(1/2)\sigma_{\lceil i/m \rceil}^2)(T-(i-1) \bmod(m))} \quad (5)$$

a

$$Y_i = \sigma_{\lceil i/m \rceil} W_{\lceil i/m \rceil}(T - (i - 1) \bmod(m)), \quad (6)$$

$$Y_i \sim N(0, \sigma_{Y_i}^2 = \sigma_{\lceil i/m \rceil}^2 (T - (i - 1) \bmod(m)))$$

pre všetky $i = 1, \dots, mn$, pričom $\lceil x \rceil$ je najmenšie celé číslo väčšie alebo rovné ako x a

$$y \bmod(m) = y - \lfloor y/m \rfloor m,$$

kde $\lfloor y \rfloor$ predstavuje najväčšie celé číslo menšie alebo rovné y .

Komonotónny náprotivok S^c pre (4) vedie k takzvanej komonotónnej hornej hranici *CUB*.

4.1 Komonotónna horná hranica

Veta 4.1 *Predpokladajme, že suma S je daná vzťahmi (4) až (6). Potom komonotónna horná hranica pre cenu ázijskej košíkovej opcie $ABC(n, m, K, T)$ danú vzťahom (3) je vyjadrená nasledovne:*

$$\begin{aligned}
CUB &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi \left[\sigma_l \sqrt{T-j} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(K)) \right] \\
&- e^{-rT} K (1 - F_{S^c}(K)), \tag{7}
\end{aligned}$$

kde hodnotu $F_{S^c}(K)$ kumulatívnej distribučnej funkcie pre komonotónnu sumu S^c môžeme nájsť riešením

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma_l^2 \right) (T-j) + \sigma_l \sqrt{T-j} \Phi^{-1}(F_{S^c}(K)) \right] = K, \tag{8}$$

pričom $\Phi(\cdot)$ je distribučná funkcia normálneho normovaného rozdelenia.

Interpretácia komonotónnej hornej hranice: Horná hranica zachytáva nasledujúce nerovnosti:

$$ABC(n, m, K, T) \leq \sum_{l=1}^n a_l e^{-rj} AC_l(m, K_l, T) \leq \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j e^{-rj} C_l(K_{lj}, T-j), \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
ABC(n, m, K, T) &\leq \sum_{j=0}^{m-1} b_j e^{-rj} BC(n, K_j, T-j) \leq \\
&\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j e^{-rj} C_l(K_{lj}, T-j), \tag{10}
\end{aligned}$$

s tým že

$$\sum_{l=1}^n a_l K_l = \sum_{j=0}^{m-1} b_j K_j = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j K_{lj} = K. \tag{11}$$

To znamená, že ázijská košíková opcia môže byť zreplikovaná statickým portfóliom s vanilla opciami C_l vypísanými na podkladové aktíva S_l z košíka pre rôzne časy expirácie a expiračné ceny. Taktiež priemer ázijských opcií AC_l alebo kombinácia košíkových opcií BC s rôznymi časmi expirácie tvoria spomínanú replikačnú stratégiu. Keďže váhy a_l a b_j sa v súčte rovnajú jednej, je možné vziať za expiračné ceny vo vzťahu (9) $K_l = K_j = K_{lj} = K$.

Avšak tento spôsob nedáva optimálnu replikačnú stratégiu. V [13, 1] bolo preukázané, že v prípade ázijských opcií môže byť komonotónna horná hranica interpretovaná ako cena optimálnej replikačnej statickej stratégie pozostávajúcej z vanilla opcií. Hobson a ďalší [7] získali podobný výsledok pre košíkové opcie a Chen a ďalší [2] to dokonca rozvinul pre všeobecnejšiu triedu exotických opcií.

4.2 Komonotónna dolná hranica

Dolná hranica v zmysle konvexného usporiadania je pre $S = \sum_{i=1}^{mn} X_i$ rovná $S^l = E[S \mid \Lambda]$, kde Λ je náhodná premenná z normálneho rozdelenia. Ak $E[X_i \mid \Lambda]$ sú všetko neklesajúce funkcie Λ alebo nerastúce funkcie Λ , potom S_l je suma komonotónnych premenných a odvodenie od Dheane a ďalších [5, 6] vedie k nasledujúcemu tvrdeniu, kde LBA predstavuje dolnú hranicu využívajúcu podmieňovaciu premennú Λ a nahrádza výraz $e^{-rT} E^Q[(S^l - K)_+]$.

Veta 4.2 *Predpokladajme, že suma S je daná vztahmi (4) až (6) a Λ je podmieňovacia premenná z normálneho rozdelenia taká, že $(W_l(T-j), \Lambda)$ sú z dvojrozmerného normálneho rozdelenia pre všetky l a j a korelačné koeficienty*

$$r_{l,j} = \frac{\text{Cov}(W_l(T-j), \Lambda)}{\sigma_\Lambda \sqrt{T-j}} \quad (12)$$

majú rovnaké znamienko pre všetky l a j , ak sú nenulové. Potom komonotónna dolná hranica pre cenu opcie $ABC(n, m, K, T)$ je daná vzťahom:

$$\begin{aligned} LBA &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi \left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(K)) \right) \right] \\ &\quad - e^{-rT} K \Phi[-\text{sign}(r_{l,j}) \Phi^{-1}(F_{S^l}(K))], \end{aligned} \quad (13)$$

kde je hodnota $F_{S^l}(K)$ distribučnej funkcie komonotónnej sumy S^l vypočítaná ako riešenie rovnosti:

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} r_{l,j}^2 \sigma_l^2 \right) (T-j) + r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} \Phi^{-1}(F_{S^l}(K)) \right] = K. \quad (14)$$

Na posúdenie kvality stochastickej dolnej hranice $E[S|\Lambda]$ by sme sa mali pozrieť na jej varianciu. Aby sme ju maximalizovali, čo znamená čo najviac sa priblížiť $Var[S]$, musíme minimalizovať priemernú hodnotu výrazu $Var[S|\Lambda = \lambda]$. Inými slovami to znamená, že keď chceme získať čo najlepšiu dolnú hranicu, musí byť rozdiel medzi Λ a S čo najmenší. Jedna z možností ako vybrať podmieňovacu premennú, založená na [8, 5], spočíva v lineárnej aproximácii S . Potom prichádza do úvahy počítať s $\Lambda = FA1$ alebo $FA2$ kde pre $i = 1, 2$ platí:

$$FA_i = \sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^{m-1} a_k b_p c_i(k, p) \sigma_k S_k(0) W_k(T - p),$$

pričom

$$c_1(k, p) = e^{(r - (1/2)\sigma_k^2)(T-p)}, c_2(k, p) = 1.$$

Vanduffel a ďalší [14] navrhujú pozrieť sa na podmieňovacu premennú tak, aby bola lineárna aproximácia variance S^t maximalizovaná. Pre ázijskú košíkovú opciu je to vtedy, keď sa Λ rovná:

$$FA3 = \sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^{m-1} a_k b_p S_k(0) e^{r(T-p)} \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma_k^2 \right) (T - p) + \sigma_k W_k(T - p) \right].$$

Nielsen a Sandman [10] navrhujú pozrieť sa na geometrický priemer G , ktorý je pre prípad ázijskej košíkovej opcie definovaný ako:

$$G = \prod_{l=1}^n \prod_{j=0}^{m-1} S_l(T - j)^{a_l b_j} = \prod_{l=1}^n \left(\prod_{j=0}^{m-1} \left(S_l(0) e^{(r - (1/2)\sigma_l^2)(T-j) + \sigma_l W_l(T-j)} \right)^{b_j} \right)^{a_l}$$

a vziať do úvahy jeho štandardizovaný logaritmus ako podmieňovacu premennú:

$$GA = \frac{\ln G - E^Q[\ln G]}{\sqrt{Var[\ln G]}} = \frac{\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j \sigma_l W_l(T - j)}{\sqrt{Var[\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j \sigma_l W_l(T - j)]}}.$$

Pre všetky voľby premennej Λ je veľmi jednoduché spočítať korelačné koeficienty $r_{l,j}$, ktoré vstupujú do dolnej hranice. Obsahujú korelácie $\rho_{i,j}$, ktoré ovplyvňujú znamienko $r_{l,j}$. Komonotónna dolná hranica môže byť použitá len v prípade, keď korelačné koeficienty $r_{l,j}$ sú nenulové a majú rovnaké znamienko pre všetky l aj j . V prípade, že by mali korelácie zmiešané znamienka, dolná hranica $E[S | \Lambda]$ už nie je komonotónna suma a potom vzťah (13) neplatí.

4.2.1 Výpočet korelačných koeficientov $r_{l,j}$

Pri výpočte korelačných koeficientov $r_{l,j}$ môžeme využiť Matlab, kde ich vypočítame za pomoci generovania náhodných premenných alebo ich vypočítame analyticky. Generovať náhodné premenné môžeme rovnako, ako pri Monte Carlo simulácií. Vygenerujeme teda Wienerove procesy so správnou korelačnou štruktúrou. Potom spočítame hodnoty pre rôzne podmieňovacie premenné Λ a dopočítame hodnoty $r_{l,j}$. Pre $\Lambda = FA1, FA2, FA3$ dostávame rovnako ako v článku¹ korelačné koeficienty $r_{l,j}$ so zmiešanými znamienkami, preto ich ďalej nemôžeme použiť. Ostáva použiť $\Lambda = GA$. Ak chceme získať $r_{l,j}$ generovaním náhodných premenných, musíme ich vygenerovať dostatočný počet, aby bola zabezpečená presnosť podobne, ako to je pri Monte Carlo simulácií. Tu však musíme vygenerovať všetky realizácie naraz, preto sa nevyhneme práci s príliš veľkými vektormi. Môžeme však využiť aj analytické vyjadrenie korelačných koeficientov.

$$GA = \frac{\ln G - E^Q[\ln G]}{\sqrt{\text{Var}[\ln G]}} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_k b_i \sigma_k W_k(T-i)}{\sqrt{\text{Var} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_k b_i \sigma_k W_k(T-i)}}.$$

Označme

$$X = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_k b_i \sigma_k W_k(T-i).$$

Stredná hodnota tohto výrazu je nulová, $E(X) = 0$. Pre varianciu potom platí

$$\text{Var}(X) = E(X^2) = E \left[\sum_{k'=1}^n \sum_{i'=0}^{m-1} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_{k'} b_{i'} \sigma_{k'} a_k b_i \sigma_k W_{k'}(T-i') W_k(T-i) \right].$$

Využijeme vzťah

$$E(W_i(t_1) W_k(t_2)) = \rho_{i,k} \min(t_1, t_2).$$

Potom platí

$$\text{Var}(X) = \sum_{k'=1}^n \sum_{i'=0}^{m-1} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_{k'} b_{i'} \sigma_{k'} a_k b_i \sigma_k \rho_{k',k} \min((T-i'), (T-i)).$$

Dosadením do vzťahu pre GA dostávame

$$GA = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_k b_i \sigma_k W_k(T-i)}{\sqrt{\sum_{k'=1}^n \sum_{i'=0}^{m-1} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_{k'} b_{i'} \sigma_{k'} a_k b_i \sigma_k \rho_{k',k} \min((T-i'), (T-i))}}.$$

Označme c ,

$$c = \sqrt{\sum_{k'=1}^n \sum_{i'=0}^{m-1} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_{k'} b_{i'} \sigma_{k'} a_k b_i \sigma_k \rho_{k',k} \min((T-i'), (T-i))}.$$

Korelačné koeficienty $r_{l,j}$ vypočítame ako

$$\begin{aligned} r_{l,j} &= \frac{Cov(W_l(T-j), GA)}{\sigma_{GA} \sqrt{T-j}} \\ &= \frac{Cov(W_l(T-j), GA)}{1 \sqrt{T-j}} \\ &= \frac{E(W_l(T-j)GA) - E(W_l(T-j))E(GA)}{1 \sqrt{T-j}} \\ &= \frac{E(W_l(T-j)GA) - 0}{1 \sqrt{T-j}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{T-j}} E \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_k b_i \sigma_k W_k(T-i) W_l(T-j) / c \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T-j}} \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_k b_i \sigma_k E(W_k(T-i) W_l(T-j)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T-j}} \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_k b_i \sigma_k \rho_{l,k} \min((T-j), (T-i)). \end{aligned} \quad (15)$$

Tak dostávame analytické vyjadrenie pre korelačné koeficienty $r_{l,j}$:

$$r_{l,j} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_k b_i \sigma_k \rho_{l,k} \min((T-j), (T-i))}{\sqrt{T-j} \sqrt{\sum_{k'=1}^n \sum_{i'=0}^{m-1} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_{k'} b_{i'} \sigma_{k'} a_k b_i \sigma_k \rho_{k',k} \min((T-i'), (T-i))}}.$$

Keďže máme dané všetky potrebné hodnoty, je už jednoduché spočítať koeficienty $r_{l,j}$.

4.3 Hľadanie distribučnej funkcie komonotónnej sumy metódou delenia intervalu

Hľadáme hodnotu $F_{S^c}(K)$ zo vzťahu (8). Od K závisí cez tento implicitný vzťah. K nechajme pevné takisto ako aj ostatné hodnoty. Označme $y = \Phi^{-1}(F_{S^c}(K))$. Vytvoríme funkciu:

$$f(F_{S^c}(K)) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma_l^2 \right) (T-j) + \sigma_l \sqrt{T-j} y \right] - K.$$

Derivácia tejto funkcie je potom:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(F_{Sc}(K))}{\partial F_{Sc}(K)} &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \times \\ &\times \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma_l^2 \right) (T - j) + \sigma_l \sqrt{T - j} \Phi^{-1}(F_{Sc}(K)) \right] \\ &\times \sigma_l \sqrt{T - j} y'. \end{aligned} \quad (16)$$

Využitím poznatku, že derivácia inverznej funkcie k distribučnej funkcií normálneho normovaného rozdelenia je kladná, čiže $y' > 0$ zisťujeme:

$$\frac{\partial f(F_{Sc}(K))}{\partial F_{Sc}(K)} > 0.$$

Funkcia je teda monotónna, rastúca. Keďže $F_{Sc}(K)$ je argumentom inverznej distribučnej funkcie normálneho normovaného rozdelenia, $F_{Sc}(K) \in (0, 1)$. Pre limitné hodnoty platí:

$$\lim_{F_{Sc}(K) \rightarrow 0} f(F_{Sc}(K)) = -K,$$

$$\lim_{F_{Sc}(K) \rightarrow 1} f(F_{Sc}(K)) = \infty.$$

Hodnoty $f(F_{Sc}(K))$ rastú monotónne zo záporných do kladných. Vieme teda, že pre práve jedno $F_{Sc}(K)$ platí $f(F_{Sc}(K)) = 0$. Najprv priradíme hodnotu začiatku intervalu $A_1 = 0$ a konca intervalu $A_2 = 1$. Stred intervalu označíme $A_3 = (A_2 + A_1)/2$. Ak je hodnota $f(A_3) > 0$, označíme A_3 ako nový koniec pôvodného intervalu. Naopak ak je hodnota $f(A_3) < 0$, označíme A_3 ako nový začiatok pôvodného intervalu. Znovu nájdeme stred nového intervalu a pozrieme sa na hodnotu funkcie v danom bode. Dostávame tak menší interval a hodnoty $f(F_{Sc}(K))$ bližšie nule. Tento postup opakujeme až sa dostaneme na nulu alebo k vopred stanovenej blízkosti nuly.

4.4 Vzťah medzi hranicami a Black-Scholesovou formulou s dividendami

Keď sa pozrieme na vzorce pre výpočet hornej a dolnej hranice a Black-Scholesovu formulu pre oceňovanie európskej call opcie, zistíme, že majú veľa

spoločného. Vezmime vzťah na výpočet hornej hranice pre jedno aktívum v čase expirácie. To znamená $n = 1, m = 1$. Dostávame

$$CUB = S(0)\Phi\left[\sigma\sqrt{T} - \Phi^{-1}(F_{Sc}(K))\right] - e^{-rT}K(1 - F_{Sc}(K)).$$

Hodnotu $F_{Sc}(K)$ potom dopočítame z rovnosti

$$S(0)e^{(r-(1/2)\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}\Phi^{-1}(F_{Sc}(K))} = K.$$

Úpravou tejto rovnosti dostávame:

$$\frac{S(0)}{K} = e^{-(r-(1/2)\sigma^2)T-\sigma\sqrt{T}\Phi^{-1}(F_{Sc}(K))}.$$

Zlogaritmovaním rovnosti získame výraz

$$\ln \frac{S(0)}{K} = -(r - (1/2)\sigma^2)T - \sigma\sqrt{T}\Phi^{-1}(F_{Sc}(K))$$

a ďalšími úpravami

$$\Phi^{-1}(F_{Sc}(K)) = \frac{-\ln \frac{S(0)}{K} - (r - (1/2)\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Potom dostávame

$$\begin{aligned} CUB &= S(0)\Phi\left[\sigma\sqrt{T} - \frac{-\ln \frac{S(0)}{K} - (r - (1/2)\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &- e^{-rT}K\left(1 - \Phi\left(\frac{-\ln \frac{S(0)}{K} - (r - (1/2)\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right) \\ &= S(0)\Phi\left[\frac{\ln \frac{S(0)}{K} + (r + (1/2)\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &- e^{-rT}K\left(1 - \Phi\left(\frac{-\ln \frac{S(0)}{K} - (r - (1/2)\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Využitím rovnosti $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ získame tvar

$$\begin{aligned} CUB &= S(0)\Phi\left[\frac{\ln \frac{S(0)}{K} + (r + (1/2)\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] \\ &- e^{-rT}K\left(\Phi\left(\frac{\ln \frac{S(0)}{K} + (r - (1/2)\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Tak sme získali Black-Scholesovu formulu. To isté sa dá preukázať pre dolnú hranicu. Túto podobnosť môžeme využiť a pozrieť sa na Black-Scholesovu formulu s dividendami. Tá nám môže napovedať, ako upraviť hornú a dolnú hranicu pre model s dividendami. Pre cenu opcie V tak dostávame

$$V = S(0)e^{-DT}\Phi\left[\frac{\ln\frac{S(0)}{K} + (r - D + (1/2)\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right] - e^{-rT}K\left(\Phi\left(\frac{\ln\frac{S(0)}{K} + (r - D - (1/2)\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right), \quad (19)$$

pričom D je dividendová miera. Aby bol tento vzťah ekvivalentný so vzťahmi pre výpočet CUB , musíme upraviť výpočet CUB na

$$CUB = S(0)e^{-DT}\Phi\left[\sigma\sqrt{T} - \Phi^{-1}(F_{Sc}(K))\right] - e^{-rT}K(1 - F_{Sc}(K)).$$

Hodnotu $F_{Sc}(K)$ potom dopočítame z rovnosti

$$S(0)e^{(r-D-(1/2)\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}\Phi^{-1}(F_{Sc}(K))} = K,$$

kde D je miera dividend. Rovnako upravíme vzťahy pre LBA . Pre n aktív priemerovaných cez m časových okamihov, teda pre ázijské košíkové opcie potom rovnakou úpravou dostávame vzťahy

$$CUB = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} e^{-D_l(T-j)} \Phi\left[\sigma_l \sqrt{T-j} - \Phi^{-1}(F_{Sc}(K))\right] - e^{-rT}K(1 - F_{Sc}(K)), \quad (20)$$

kde hodnotu $F_{Sc}(K)$ nájdeme riešením

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \exp\left[\left(r - D_l - \frac{\sigma_l^2}{2}\right)(T-j) + \sigma_l \sqrt{T-j} \Phi^{-1}(F_{Sc}(K))\right] = K. \quad (21)$$

Pre dolnú hranicu tak dostávame

$$LBA = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} e^{-D_l(T-j)} \times \Phi\left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - \Phi^{-1}(F_{Sl}(K))\right)\right] - e^{-rT}K\Phi\left[-\text{sign}(r_{l,j})\Phi^{-1}(F_{Sl}(K))\right], \quad (22)$$

kde je hodnota $F_{S^l}(K)$ distribučnej funkcie komonotónnej sumy S^l vypočítaná ako riešenie rovnosti:

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \exp\left[\left(r - D_l - \frac{r_{l,j}^2 \sigma_l^2}{2}\right)(T - j) + r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T - j} \Phi^{-1}(F_{S^l}(K))\right] = K. (23)$$

5 Citlivosti hraníc na premenné

5.1 Citlivosť na r

5.1.1 Citlivosť hornej komonotónnej hranice na r

Výraz $\Phi^{-1}(F_{Sc}(K))$ je závislý od úrokovej miery r cez implicitný vzťah (8), z ktorého sa dopočítava. Závisí aj od iných premenných, ostatné premenné však uvažujeme fixné. Označíme teda $y(r) = \Phi^{-1}(F_{Sc}(K))$ a $\frac{dy(r)}{dr} = y'$. Derivácia hornej komonotónnej hranice podľa r , čo je citlivosť hornej komonotónnej hranice na úrokovú mieru, vypočítame nasledovne :

$$\begin{aligned} \frac{dCUB}{dr} &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) (-j) e^{-rj} \Phi \left[\sigma_l \sqrt{T-j} - y(r) \right] \\ &+ \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi' \left[\sigma_l \sqrt{T-j} - y(r) \right] (-y'(r)) \\ &- (-T) e^{-rT} K (1 - \Phi(y(r))) + e^{-rT} K \Phi'(y(r)) y'(r). \end{aligned} \quad (24)$$

Pre zjednodušenie zápisu označme $A_{l,j}(r) = \sigma_l \sqrt{T-j} - y(r)$, hoci uvedený výraz nezávisí len od premennej r . Následne tu ale aj pri deriváciách v ďalších podkapitolách využijeme poznatok, že derivácia distribučnej funkcie normálneho normovaného rozdelenia je:

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Potom

$$\begin{aligned} \frac{dCUB}{dr} &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \\ &\times \left[-j \Phi(A_{l,j}(r)) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma_l^2(T-j) - 2\sigma_l \sqrt{T-j} y(r) + y^2(r)}{2}} y'(r) \right] \\ &+ K e^{-rT} \left[T(1 - \Phi(y(r))) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(r)}{2}} y'(r) \right] \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} (-j) \Phi(A_{l,j}(r)) + K e^{-rT} [T(1 - \Phi(y(r)))] \\ &- \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} e^{-\frac{\sigma_l^2(T-j)}{2} + \sigma_l \sqrt{T-j} y(r)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(r)}{2}} y'(r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Ke^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(r)}{2}} y'(r) \\
& = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} (-j) \Phi(A_{l,j}(r)) + Ke^{-rT} [T(1 - \Phi(y(r)))] \\
& - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(r)}{2}} y'(r) e^{-rT} \\
& \times \left[\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-j) + \sigma_l \sqrt{T-j} y(r)} - K \right]. \tag{25}
\end{aligned}$$

Použitím vzťahu (8) nám ostane jednoduchší výraz, pretože veľký výraz v hranatej zátvorke je rovný nule. Tak dostávame:

$$\frac{dCUB}{dr} = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} (-j) \Phi(A_{l,j}(r)) + Ke^{-rT} T(1 - \Phi(y(r))). \tag{26}$$

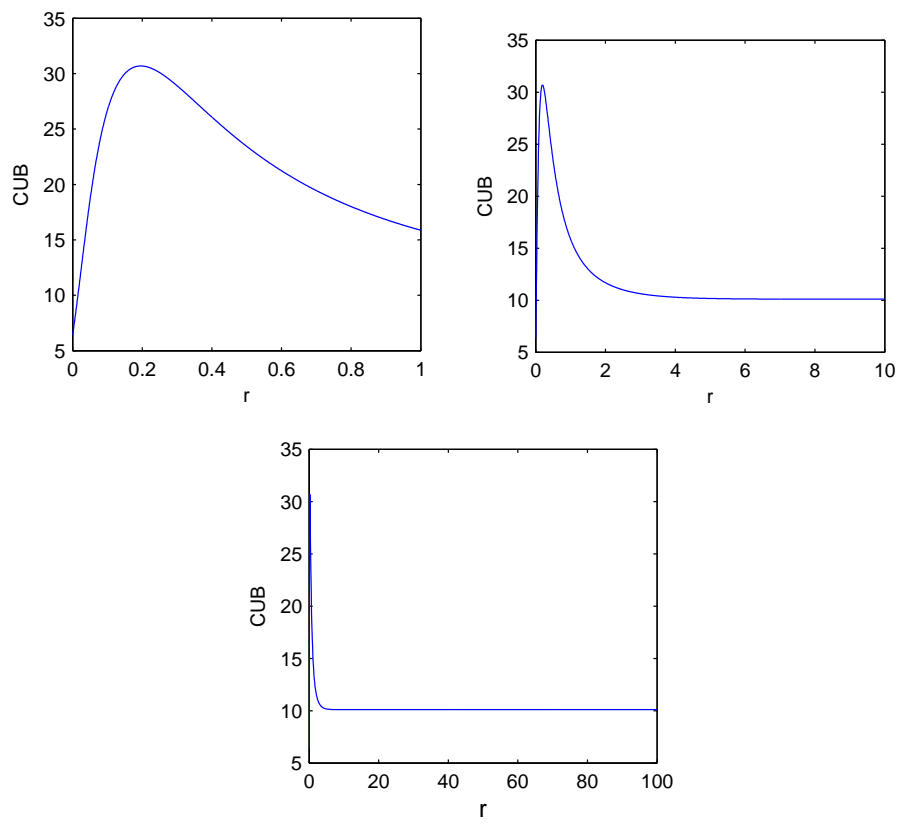
Derivácia hornej komonotónnej hranice je výraz, v ktorom sa vyskytuje premenná r v mnohých členoch a nie je preto jednoduché určiť závislosť CUB od r . Nápomocný pritom môže byť obrázok č.1, z ktorého vidieť, ako sa CUB mení s úrokovou mierou. Na grafoch sme rozdelili interval pre úrokovú mieru r na 1000 dielikov. Ostatné hodnoty premenných sme fixovali, $K = 50$, $T = 12$ a ďalšie hodnoty pochádzajú z vstupných dát z článku[3]. Na overenie správnosti výpočtu derivácie sme urobili aj numerické derivácie, kde sme odhadli deriváciu v bode r_i ako:

$$d(r_i) = \frac{CUB(r_i) - CUB(r_{i-1})}{r_i - r_{i-1}}.$$

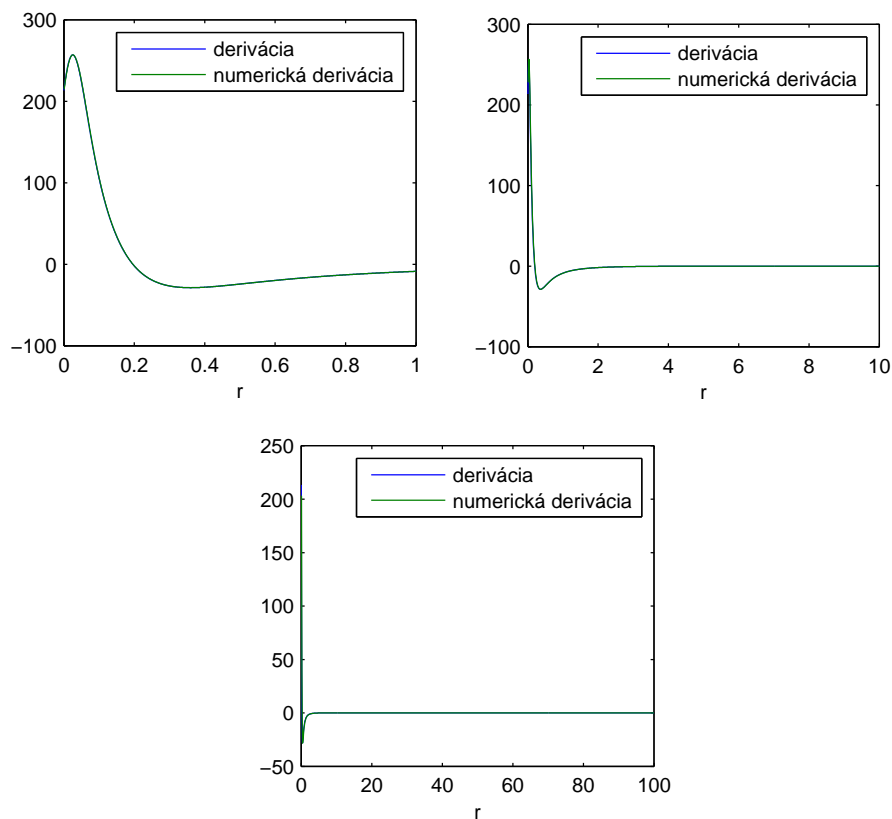
Na obrázku č.2 vidieť grafy, kde sú tieto derivácie takmer totožné, čo svedčí o správnosti výpočtov. Rozdiel v deriváciách je, no kôli škále hodnôt na ose y tento rozdiel nevidieť. Odchýlky v deriváciách zachytáva obrázok č.3, kde je zobrazené o koľko percent sa líši numerická derivácia od skutočnej. 100 percent zodpovedá hodnote 1. Vypočítame ju ako

$$f(r_i) = \frac{p(r_i) - d(r_i)}{p(r_i)}, \tag{27}$$

kde $p(r_i)$ je presná hodnota derivácie. Hodnota odchýlky sa pohybuje rádovo v tisícinách, až na malý interval, kde sa hodnoty derivácií blížia k nule. Tu sa



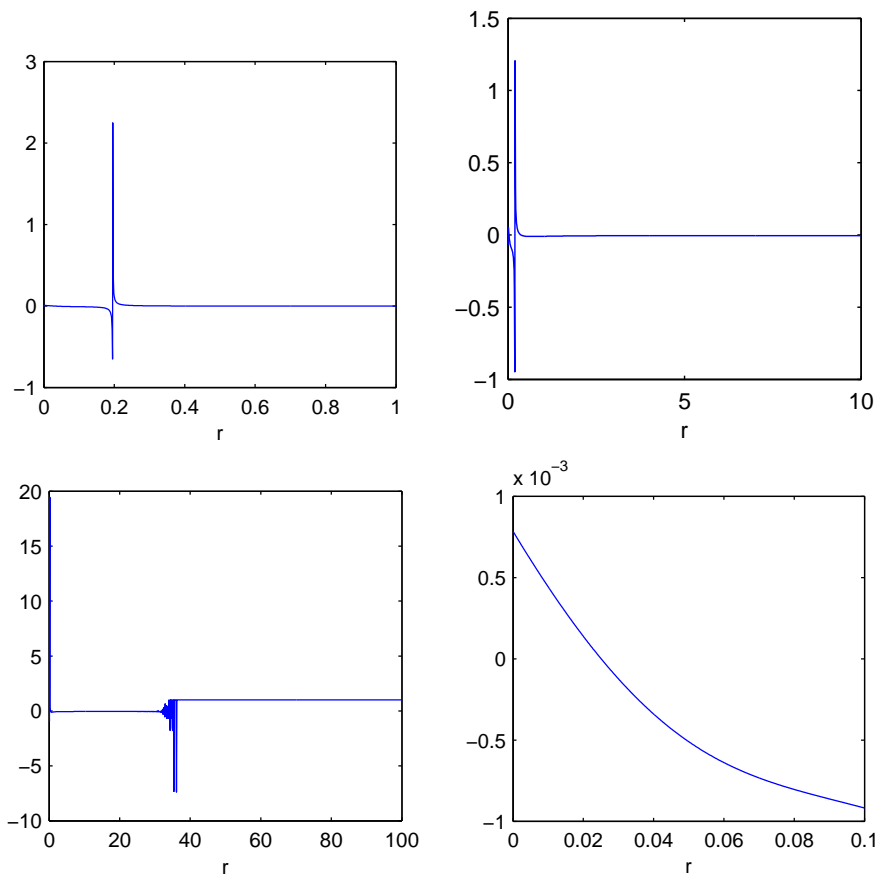
Obr. 1: Závislosť hornej komonotónnej hranice od úrokovej miery r .



Obr. 2: Derivácia a numerická derivácia hornej komonotónnej hranice podľa úrokovej miery r .

potom aj malý rozdiel, ktorý sa javil ako zanedbateľný, premietne do veľkej odchýlky. Veľkú odchýlku pozorujeme aj pri úrokovej miere väčšej ako 30, no tu je už rozdiel derivácií veľmi malý, pretože tie sa blížia k nule. Tieto malé odchýlky a rozdiely poukazujú na správnosť výpočtu presnej derivácie.

Vidieť, že derivácia je kladná do určitého bodu, hodnota CUB rastie s úrokovou mierou, no odtiaľ klesá a derivácia je záporná. V praxi sa často stretávame s úrokovou mierou mešou ako 10 percent, čo je $r = 0.1$. Vidieť, že tu je derivácia kladná, no nevyhneme sa ani úrokovej miere v okolí 20 percent. Tu je derivácia najprv kladná, no potom záporná, čo nám indikuje lokálny extrém. Pri vyšších hodnotách sa už CUB nemení. Všimnime si, že grafy začínajú od nejakej kladnej hodnoty napriek tomu, že úroková miera



Obr. 3: Odchylka derivací.

je nulová. Pre $r = 0$ sa výpočet CUB zjednodušuje na tvar:

$$CUB = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \Phi \left[\sigma_l \sqrt{T-j} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(K)) \right] - K(1 - F_{S^c}(K)),$$

kde hodnotu $F_{S^c}(K)$ kumulatívnej distribučnej funkcie pre komonotónnu sumu S^c môžeme nájsť riešením

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \exp \left[\left(-\frac{1}{2} \sigma_l^2 \right) (T-j) + \sigma_l \sqrt{T-j} \Phi^{-1}(F_{S^c}(K)) \right] = K.$$

Ako je vidieť na grafoch, hodnoty sa vzhľadom na r od určitého bodu nemenia, preto je zaujímavá limitná hodnota v nekonečne. Keďže $F_{S^c}(K)$ nadobúda hodnoty od 0 do 1, $e^{-rj} = 1$ pre $j = 0$ a v prípade $j \neq 0$ pričom $r \rightarrow \infty$ dostávame $e^{-rj} \rightarrow 0$. Potom dostávame:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} CUB(r) = \sum_{l=1}^n a_l b_0 S_l(0) \Phi \left[\sigma_l \sqrt{T} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(K)) \right]$$

a hodnotu $F_{S^c}(K)$ dopočítame zo známeho vzťahu (8)

5.1.2 Citlivosť dolnej komonotónnej hranice na r

Výraz $\Phi^{-1}(F_{S^l}(K))$ závisí od r cez implicitný vzťah (14). Hoci závisí aj od iných premenných, tieto berieme fixné. Označíme potom $y(r) = \Phi^{-1}(F_{S^l}(K))$ a $\frac{dy(r)}{dr} = y'$. Derivácia dolnej komonotónnej hranice podľa r , ktorá určuje citlivosť dolnej komonotónnej hranice na úrokovú mieru je :

$$\begin{aligned}
\frac{dLBA}{dr} &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) (-j) e^{-rj} \\
&\times \Phi \left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(K)) \right) \right] \\
&+ \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi' \left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(K)) \right) \right] \\
&\times y'(r) (-\text{sign}(r_{l,j})) \\
&+ T K e^{-rT} \Phi \left[-\text{sign}(r_{l,j}) \Phi^{-1}(F_{S^l}(K)) \right] \\
&- e^{-rT} K \Phi' \left[-\text{sign}(r_{l,j}) y(r) \right] y'(r) (-\text{sign}(r_{l,j})). \tag{28}
\end{aligned}$$

Keď označíme $B_{l,j}(r) = \text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(K)) \right)$, potom

$$\begin{aligned}
\frac{dLBA}{dr} &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} [-j \Phi(B_{l,j}(r)) + \Phi'(B_{l,j}(r)) y'(r) (-\text{sign}(r_{l,j}))] \\
&+ K e^{-rT} [T \Phi(-\text{sign}(r_{l,j}) y(r)) + \text{sign}(r_{l,j}) \Phi'(-\text{sign}(r_{l,j}) y(r)) y'(r)] \\
&= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \\
&\times \left[-j \Phi(B_{l,j}(r)) + \frac{e^{-\frac{1}{2}(r_{l,j}^2 \sigma_l^2 (T-j) - 2r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} y(r) + y^2(r))}}{\sqrt{2\pi}} y'(r) (-\text{sign}(r_{l,j})) \right] \\
&+ K e^{-rT} \left(T \Phi(-\text{sign}(r_{l,j}) y(r)) + \text{sign}(r_{l,j}) \frac{e^{-\frac{y^2(r)}{2}}}{\sqrt{2\pi}} y'(r) \right) \\
&= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} [-j \Phi(B_{l,j}(r))] + K e^{-rT} T \Phi(-\text{sign}(r_{l,j}) y(r)) \\
&+ \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} y'(r) \text{sign}(r_{l,j}) (-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{e^{\frac{y^2(r)}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(r_{l,j}^2 \sigma_l^2 (T-j) - 2r_{l,j} \sigma_l (T-j)y(r))} + K e^{-rT} y'(r) \text{sign}(r_{l,j}) \frac{e^{-\frac{y^2(r)}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\
& = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} [-j \Phi(B_{l,j}(r))] \\
& + K e^{-rT} T \Phi(-\text{sign}(r_{l,j})y(r)) + e^{-rT} y'(r) \text{sign}(r_{l,j}) \frac{e^{-\frac{y^2(r)}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\
& \times \left[- \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{(T-j)r - \frac{1}{2}r_{l,j}^2 \sigma_l^2 (T-j) - r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} y(r)} + K \right]. \quad (29)
\end{aligned}$$

Keďže sa výraz uvedený v hranatej zátvorke:

$$- \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{(T-j)r - \frac{1}{2}r_{l,j}^2 \sigma_l^2 (T-j) - r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} y(r)} + K$$

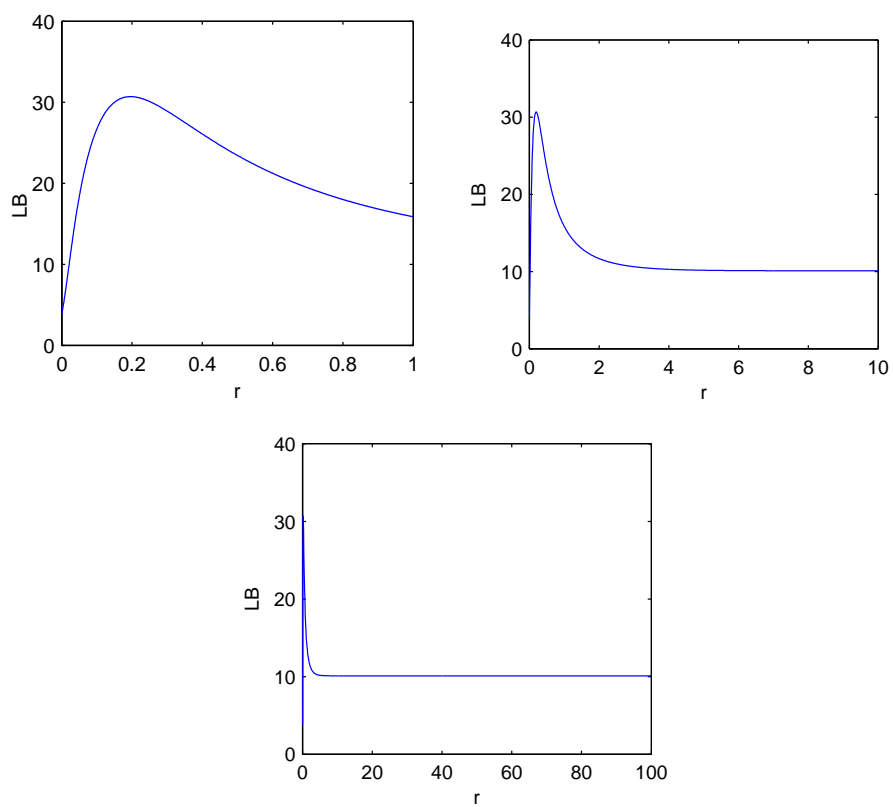
podľa vzťahu (14) rovná nule, ostane nám kompaktnejší výraz:

$$\frac{dLBA}{dr} = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} [-j \Phi(B_{l,j}(r))] + K e^{-rT} T \Phi(-\text{sign}(r_{l,j})y(r)). \quad (30)$$

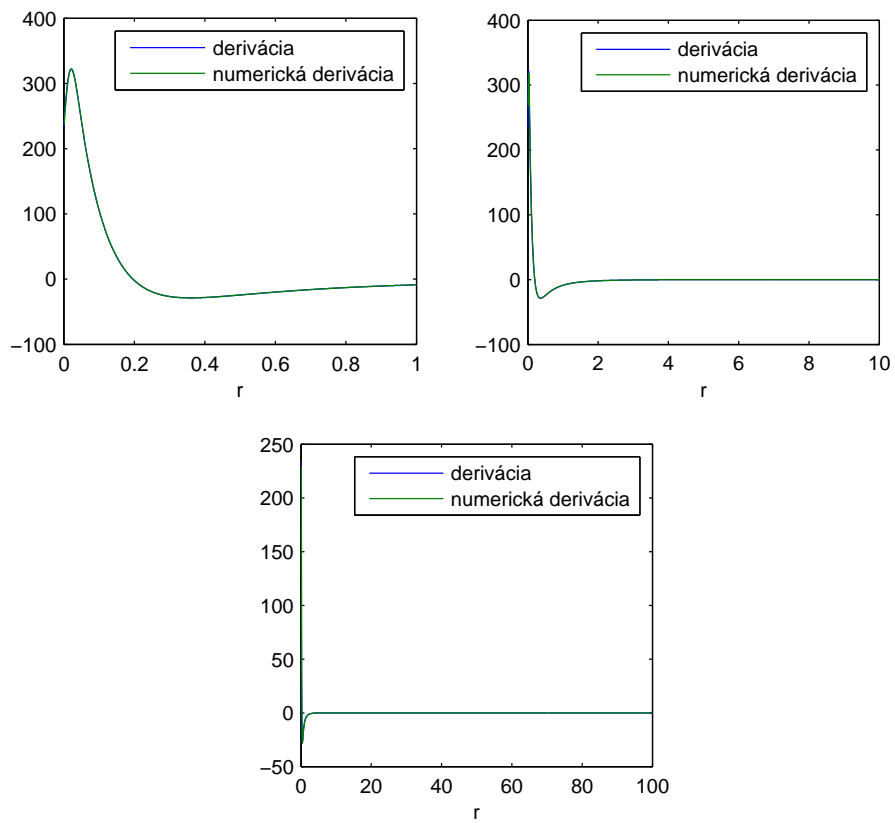
Derivácia dolnej komonotónnej hranice je výraz, v ktorom sa nachádza premenná r v mnohých členoch, rovnako ako tomu bolo pri hornej hranici. Preto opäť nie je jednoduché určiť závislosť od r . Z obrázku č.4 je vidieť, že závislosť od úrokovej miery je takmer rovnaká ako pri hornej komonotónnej hranici. Na overenie správnosti výpočtu sme opäť spočítali numerické derivácie, ktoré sú znázornené na grafe č.5. Použili sme rovnaké fixné hodnoty ako pri *CUB* a rovnako sme menili aj rozpätie úrokovej miery. Graf č.6 ukazuje vývoj odchýlky derivácií, ktorú sme spočítali vzťahom (25). Odchýlka sa správa podobne ako pri hornej hranici *CUB*. Pohybuje sa rádovo v tisícinách, až na hodnoty, kde sú derivácie blízko nule a tam kde je ich rozdiel veľmi malý. Jednej sa rovná tam, kde je numerická derivácia už nulová, no presná derivácia má ešte nejakú malú hodnotu.

Pre $r = 0$ má *LBA* tvar:

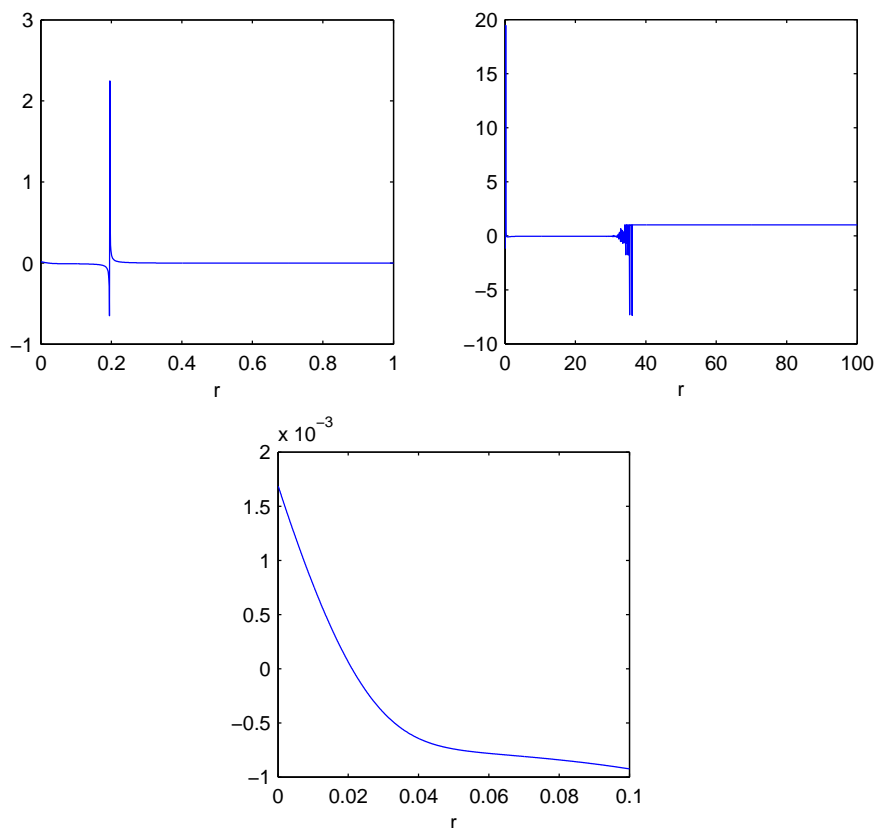
$$\begin{aligned}
LBA & = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \Phi \left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(K)) \right) \right] \\
& - K \Phi[-\text{sign}(r_{l,j}) \Phi^{-1}(F_{S^l}(K))], \quad (31)
\end{aligned}$$



Obr. 4: Závislosť dolnej komonotónnej hranice od úrokovej miery r .



Obr. 5: Derivácia a numerická derivácia dolnej komonotónnej hranice podľa úrokovej miery r .



Obr. 6: Odchýlka derivácií.

kde hodnotu $F_{S^l}(K)$ nájdeme riešením

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \exp \left[\left(-\frac{1}{2} r_{l,j}^2 \sigma_l^2 \right) (T - j) + r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T - j} \Phi^{-1}(F_{S^l}(K)) \right] = K.$$

Hodnota limity v nekonečne je:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} LBA(r) = \sum_{l=1}^n a_l b_0 S_l(0) \Phi \left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T - j} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(K)) \right) \right]$$

a hodnotu $F_{S^l}(K)$ dopočítame zo známeho vzťahu (14).

5.2 Citlivosť na K

5.2.1 Citlivosť hornej komonotónnej hranice na K

Označme $y(K) = \Phi^{-1}(F_{Sc}(K))$ a $\frac{dy(K)}{dK} = y'$. Citlivosť hornej komonotónnej hranice na strike price K je určená deriváciou:

$$\begin{aligned}
\frac{dCUB}{dK} &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi' \left[\sigma_l \sqrt{T-j} - y(K) \right] (-y'(K)) \\
&\quad - e^{-rT} (1 - \Phi(y(K))) + e^{-rT} K \Phi'(y(K)) y'(K) \\
&= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma_l^2 (T-j) - 2\sigma_l \sqrt{T-j} y(K) + y^2(K)}{2}} (-y'(K)) \\
&\quad - e^{-rT} (1 - \Phi(y(K))) + e^{-rT} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(K)}{2}} y'(K) \\
&= -e^{-rT} (1 - \Phi(y(K))) + e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(K)}{2}} y'(K) \\
&\quad \times \left[-\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} e^{rT + \frac{-\sigma_l^2}{2}(T-j) + \sigma_l \sqrt{T-j} y(K)} + K \right] \\
&= -e^{-rT} (1 - \Phi(y(K))) + e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(K)}{2}} y'(K) \\
&\quad \times \left[-\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{(r - \frac{\sigma_l^2}{2})(T-j) + \sigma_l \sqrt{T-j} y(K)} + K \right]. \tag{32}
\end{aligned}$$

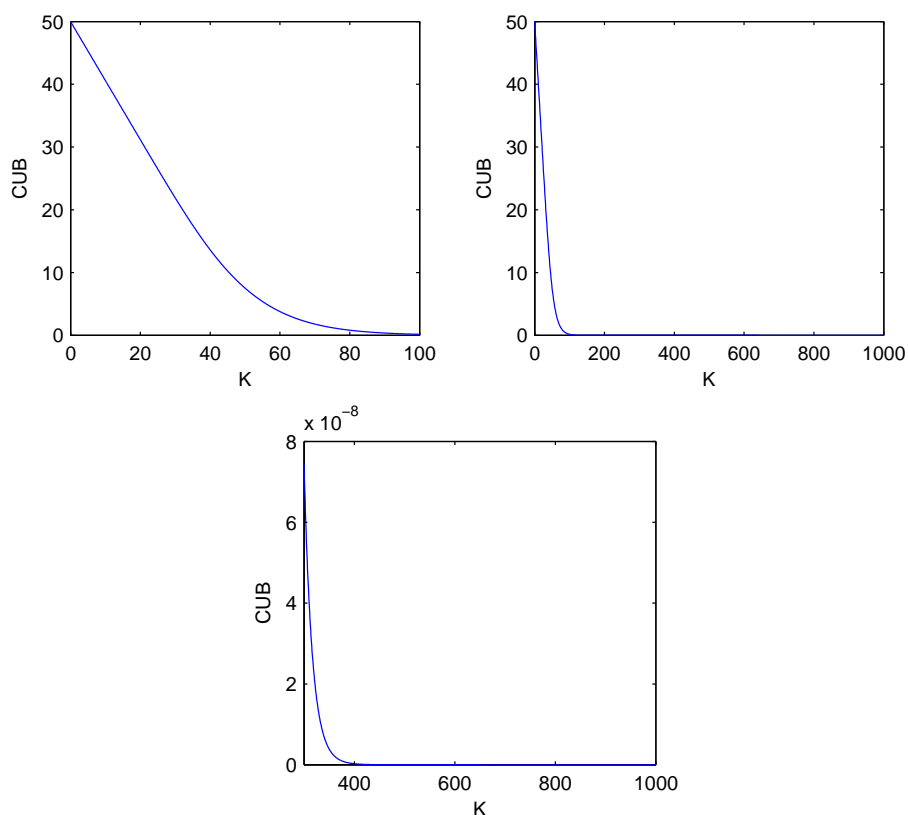
Použitím vzťahu (8) sa výraz zjednoduší na tvar:

$$\frac{dCUB}{dK} = -e^{-rT} (1 - \Phi(y(K))). \tag{33}$$

Keďže obor hodnôt distribučnej funkcie je interval $(0, 1)$, potom platí $(1 - \Phi(y(K))) > 0$ a $e^{-rT} > 0$, to znamená

$$\frac{dCUB}{dK} < 0.$$

Obrázok č.7, potvrdzuje zápornú deriváciu CUB podľa K . Obrázok č.8 opäť potvrdzuje správnosť výpočtov. Na prvom grafe vidieť, že začína kladnou hodnotou pre $K = 0$ a s narastajúcou expiračnou cenou hodnoty klesajú až k nule. Spočiatku sa sklon nemení, no následne sa zväčšuje. Na druhom

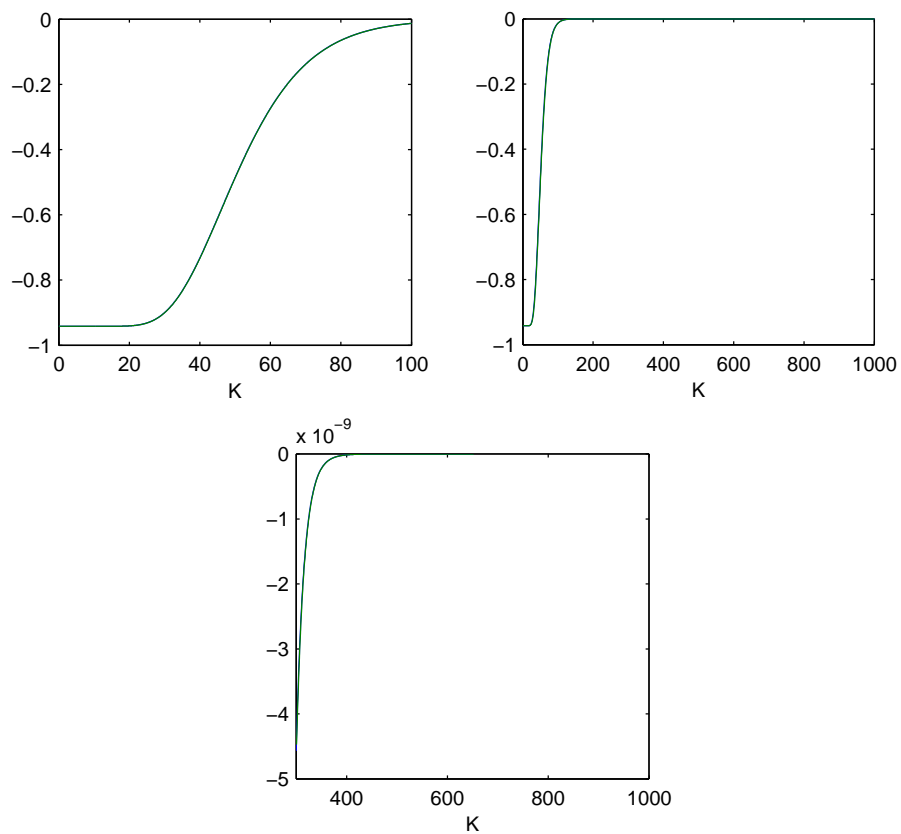


Obr. 7: Závislosť hornej komonotónnej hranice od expiračnej ceny K .

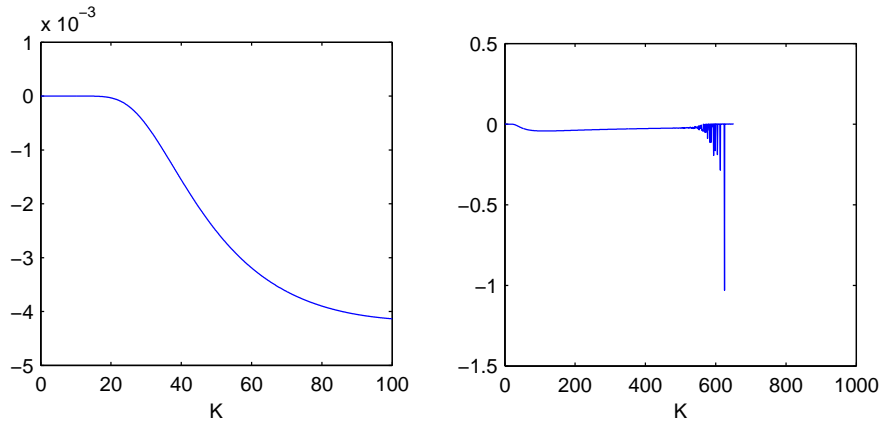
grafe sa zdá, že od hodnoty $K = 200$ sa CUB nemení a je na hodnote $CUB = 0$, ale tretí graf ukazuje, že hodnoty sú len veľmi nízke, rádovo sa pohybujúce okolo hodnôt 10^{-8} , no nie sú rovné nule. Od $K = 1000$ sú už ale hodnoty CUB ustálené na $CUB = 0$. Obrázok č.9 ukazuje, že hoci sa zdá, že presná a numerická derivácia je totožná, je medzi nimi určitá malá odchýlka. Jej hodnoty sa pohybujú v tisícinách, no od expiračnej ceny dostatočne vysokej odchýlka rastie. To už je ale pri hodnotách derivácií menších ako 10^{-9} . Tu je rozdiel derivácií zanedbateľný.

Pre $K = 0$ má CUB hodnotu:

$$CUB(K = 0) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi \left[\sigma_l \sqrt{T-j} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(0)) \right] - 0.$$



Obr. 8: Derivácia a numerická derivácia hornej komonotónnej hranice podľa expiračnej ceny K .



Obr. 9: Odchýlka derivácií.

Pre vzťah (8) potom platí:

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} \sigma_l^2 \right) (T - j) + \sigma_l \sqrt{T - j} \Phi^{-1}(F_{S^c}(0)) \right] = 0.$$

To platí, keď

$$\left(r - \frac{1}{2} \sigma_l^2 \right) (T - j) + \sigma_l \sqrt{T - j} \Phi^{-1}(F_{S^c}(0)) \longrightarrow -\infty$$

a to dostaneme vtedy, keď

$$\Phi^{-1}(F_{S^c}(0)) \longrightarrow -\infty.$$

Potom ale dostávame, že

$$CUB(K = 0) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj}.$$

Pre $K \longrightarrow \infty$ má CUB hodnotu:

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} CUB(K) &= \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi \left[\sigma_l \sqrt{T - j} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(K)) \right] \\ &- e^{-rT} K (1 - F_{S^c}(K)) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{34}$$

5.2.2 Citlivosť dolnej komonotónnej hranice na K

Označme $y(K) = \Phi^{-1}(F_{St}(K))$ a $\frac{dy(K)}{dK} = y'$. Citlivosť dolnej komonotónnej hranice na strike price K je určená deriváciou:

$$\begin{aligned}
\frac{dLBA}{dK} &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi' \left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - y(K) \right) \right] \\
&\times (-1) y'(K) \text{sign}(r_{l,j}) - e^{-rT} \Phi[-\text{sign}(r_{l,j}) y(K)] \\
&- e^{-rT} K \Phi'[-\text{sign}(r_{l,j}) y(K)] y'(K) (-\text{sign}(r_{l,j})) \\
&= -e^{-rT} \Phi[-\text{sign}(r_{l,j}) y(K)] \\
&- \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_{l,j}^2 \sigma_l^2 (T-j) - 2r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} y(K) + y^2(K)}{2}} \\
&\times y'(K) \text{sign}(r_{l,j}) - e^{-rT} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(K)}{2}} y'(K) (-\text{sign}(r_{l,j})) \\
&= -e^{-rT} \Phi[-\text{sign}(r_{l,j}) y(K)] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(K)}{2}} y'(K) \text{sign}(r_{l,j}) e^{-rT} \\
&\times \left[K - \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} e^{rT} e^{-\frac{r_{l,j}^2 \sigma_l^2 (T-j)}{2} + r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} y(K)} \right] \\
&= -e^{-rT} \Phi[-\text{sign}(r_{l,j}) y(K)] + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(K)}{2}} y'(K) \text{sign}(r_{l,j}) e^{-rT} \\
&\times \left[K - \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{(r - \frac{r_{l,j}^2 \sigma_l^2}{2})(T-j) + r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} y(K)} \right]. \quad (35)
\end{aligned}$$

Teraz môžeme využiť rovnosť (14) a dostaneme kompaktnejší tvar:

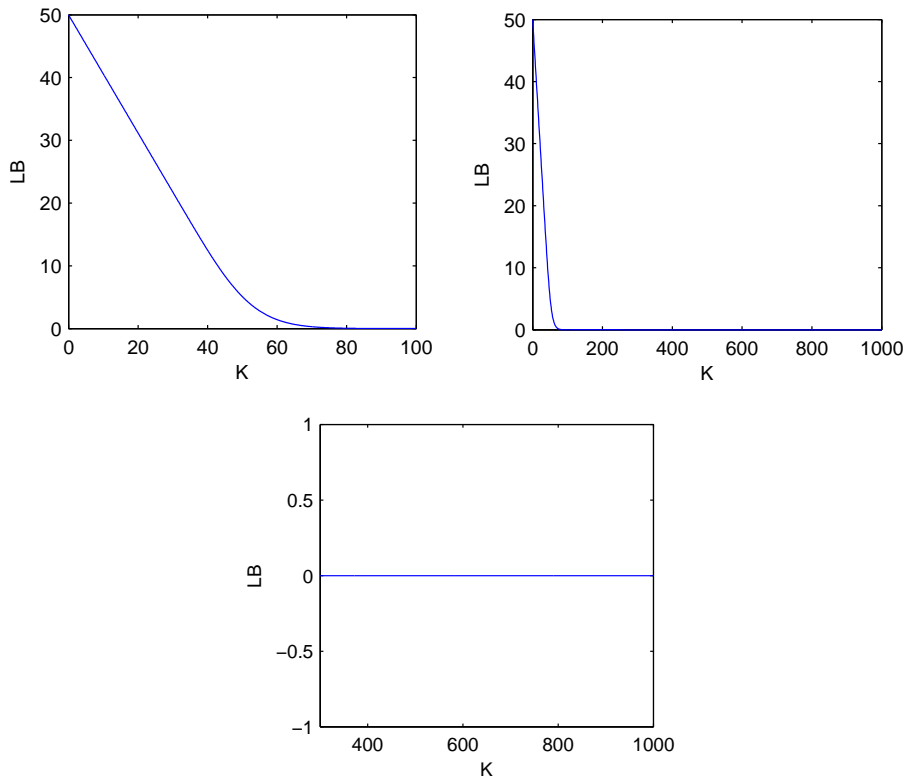
$$\frac{dLBA}{dK} = -e^{-rT} \Phi[-\text{sign}(r_{l,j}) y(K)]. \quad (36)$$

Vidíme, že derivácia je záporná:

$$\frac{dLBA}{dK} < 0.$$

Znamená to, že s rastúcou expiračnou cenou K , klesá dolná komonotónna hranica ceny ázijskej košíkovej opcie. To zodpovedá skutočnosti, že ceny opcií klesajú s rastúcou expiračnou cenou. Obrázok č.10 nám dáva lepšiu predstavu o tom, ako sa správa dolná komonotónna hranica v závislosti od expiračnej

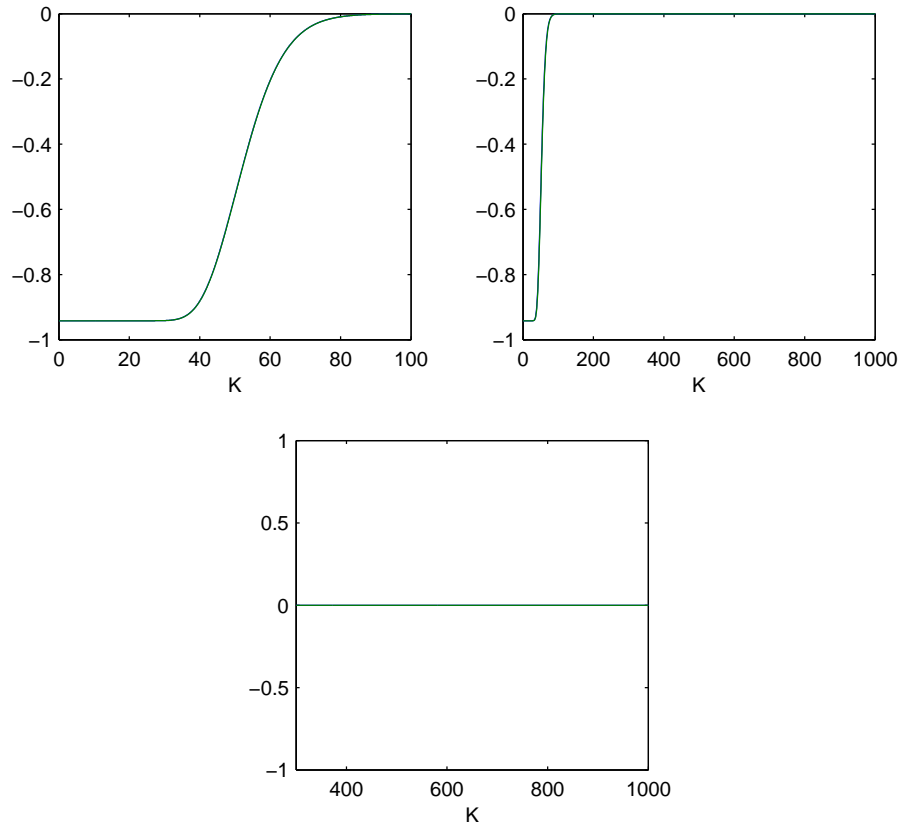
ceny K . Závislosť je záporná, takisto ako to je pre CUB . Znamená to, že s rastúcou expiračnou cenou klesá dolná komonotónna hranica LBA . Rozdiel oproti hornej hranici je v tom, že dolná hranica nadobúda nulovú hodnotu omnoho skôr. Zatiaľ čo pre $K = 300$ $CUB \neq 0$, $LBA = 0$. Na overenie správnosti výpočtu nám posluží obrázok č.11. Z obrázka vidieť derivácie splyvajúce do jedného grafu. Na obrázku č.12 ale vidíme odchýlku spočítanú opäť podľa vzťahu (25). Správa sa rovnako ako pri hornej hranici CUB .



Obr. 10: Závislosť dolnej komonotónnej hranice od expiračnej ceny K .

Pre $K = 0$ má LBA hodnotu:

$$LBA(K = 0) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-r_j} \Phi[\text{sign}(r_{l,j})(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(0)))].$$



Obr. 11: Derivácia a numerická derivácia dolnej komonotónnej hranice podľa expiračnej ceny K .

Pre vzťah (14) potom platí:

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \exp \left[\left(r - \frac{1}{2} r_{l,j}^2 \sigma_l^2 \right) (T - j) + r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T - j} \Phi^{-1}(F_{S^l}(0)) \right] = 0.$$

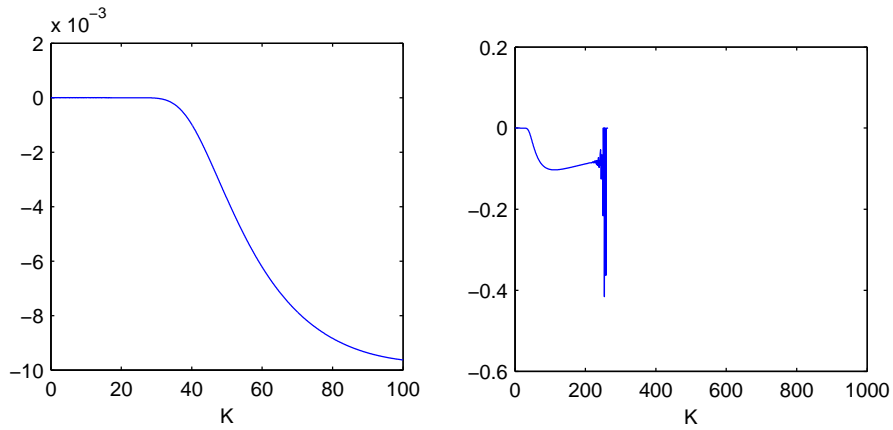
To platí, keď

$$\left[\left(r - \frac{1}{2} r_{l,j}^2 \sigma_l^2 \right) (T - j) + r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T - j} \Phi^{-1}(F_{S^l}(0)) \right] \longrightarrow -\infty.$$

To je vtedy, keď $\Phi^{-1}(F_{S^l}(0)) \longrightarrow -\infty$ pre $\text{sign}(r_{l,j}) = 1$ a $\Phi^{-1}(F_{S^l}(0)) \longrightarrow \infty$ pre $\text{sign}(r_{l,j}) = -1$.

Z toho dostávame, že $LBA(K = 0) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj}$.
 Pre $K \rightarrow \infty$ má LBA hodnotu:

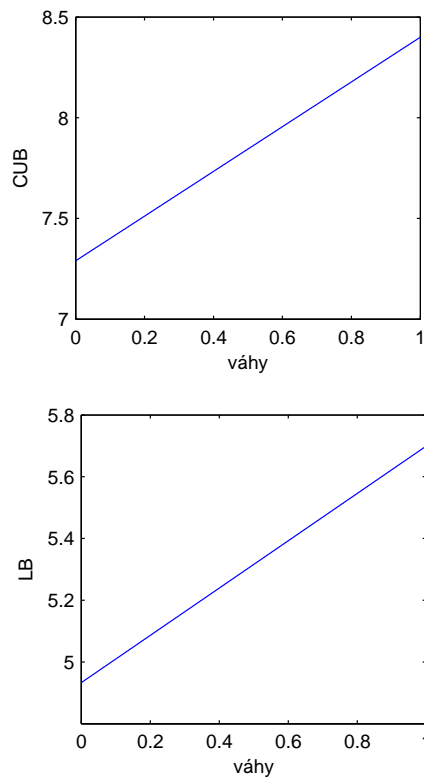
$$\begin{aligned}
 \lim_{K \rightarrow \infty} LBA(K) &= \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \\
 &\times \Phi \left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(K)) \right) \right] \\
 &- e^{-rT} K \Phi[-\text{sign}(r_{l,j}) \Phi^{-1}(F_{S^l}(K))] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{37}$$



Obr. 12: Odchýlka derivácií.

5.3 Citlivosť na váhy

Citlivosť dolnej a hornej hranice na váhy je znázornená na obrázku č.9. Hodnota $b_{(0)}$ ide od nula do 1 a ostatné váhy sa dopyčítajú tak, aby boli navzájom rovné a všetky váhy v súčte dávali 1. Čím väčšiu váhu prikladáme času expirácie, tým je hodnota hraníc vyššia. Vidieť, že váhy dokážu ovplyvniť výsledné hodnoty, preto netreba podceňovať ich výber.



Obr. 13: Citlivosť na váhy času.

5.4 Citlivosť na σ_i

5.4.1 Citlivosť hornej komonotónnej hranice na σ_i

Výraz $\Phi^{-1}(F_{Sc}(K))$ je závislý od σ_i cez implicitný vzťah (8). Ostatné premenné od ktorých závisí vezmeme fixné. Označíme $y(\sigma_i) = \Phi^{-1}(F_{Sc}(K))$ a $\frac{dy(\sigma_i)}{d\sigma_i} = y'$. Citlivosť hornej komonotónnej hranice na volatilitu σ_i je určená deriváciou:

$$\begin{aligned}
\frac{dCUB}{d\sigma_i} &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi' \left[\sigma_l \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right] (-y'(\sigma_i)) \\
&+ \sum_{j=0}^{m-1} a_j b_j S_j(0) e^{-rj} \Phi' \left[\sigma_j \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right] \sqrt{T-j} \\
&+ e^{-rT} K \Phi'(y(\sigma_i)) y'(\sigma_i) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} a_j b_j S_j(0) e^{-rj} \Phi' \left[\sigma_j \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right] \sqrt{T-j} \\
&+ \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma_l^2(T-j) - 2\sigma_l \sqrt{T-j} y(\sigma_i) + y^2(\sigma_i)}{2}} (-y'(\sigma_i)) \\
&+ e^{-rT} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(\sigma_i)}{2}} y'(\sigma_i) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} a_j b_j S_j(0) e^{-rj} \Phi' \left[\sigma_j \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right] \sqrt{T-j} \\
&- e^{-rT} y'(\sigma_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(\sigma_i)}{2}} \\
&\times \left(\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} e^{rT} e^{-\frac{\sigma_l^2}{2}(T-j) + \sigma_l \sqrt{T-j} y(\sigma_i)} - K \right) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} a_j b_j S_j(0) e^{-rj} \Phi' \left[\sigma_j \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right] \sqrt{T-j} \\
&- e^{-rT} y'(\sigma_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(\sigma_i)}{2}} \\
&\times \left(\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{(r - \frac{\sigma_l^2}{2})(T-j) + \sigma_l \sqrt{T-j} y(\sigma_i)} - K \right). \tag{38}
\end{aligned}$$

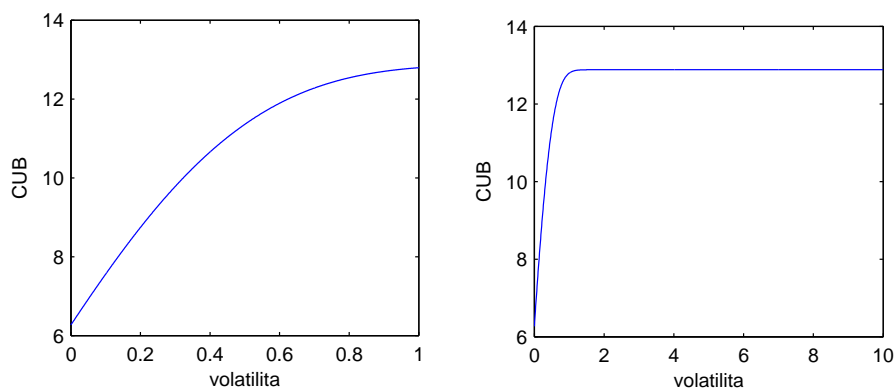
Využitím vzťahu (8) sa derivácia redukuje na tvar:

$$\frac{dCUB}{d\sigma_i} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j b_j S_i(0) e^{-rj} \Phi' \left[\sigma_i \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right] \sqrt{T-j}.$$

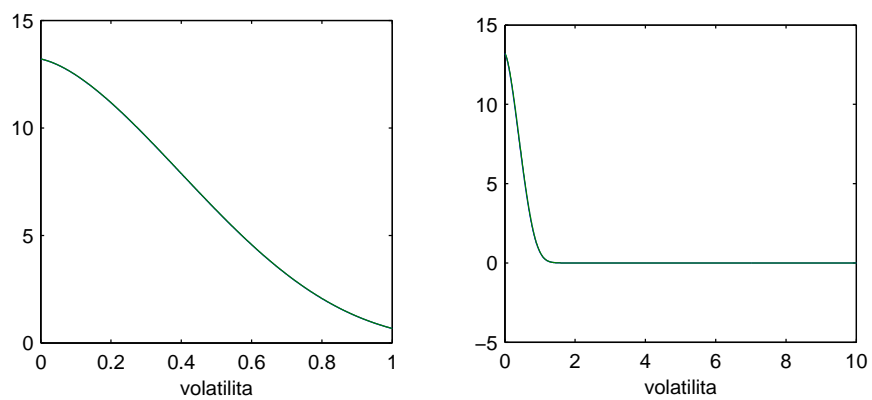
Keďže všetky činitele v sume sú kladné, platí:

$$\frac{dCUB}{d\sigma_i} > 0.$$

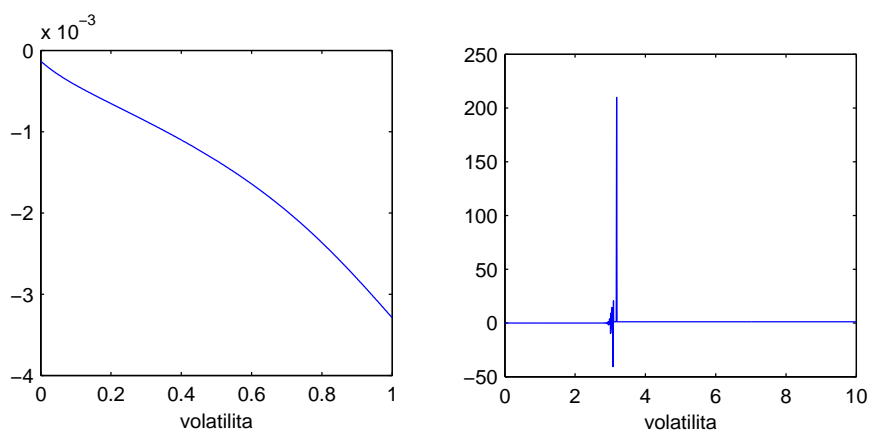
Na nasledujúcom obrázku č.14 môžeme vidieť priebeh CUB v závislosti od meniacej sa volatility. Menili sme len volatilitu prvého aktíva. Pre $\sigma_1 = 0$ má CUB kladnú hodnotu, ktorá s rastúcou volatilitou rastie spočiatku lineárne, no potom sa sklon znižuje, rast je pomalší, až sa hodnoty CUB ustália na jednej hodnote. To je už ale pre hodnoty väčšie ako 100 percent. My ale pracujeme s hodnotami v rozmedzí 30-40 percent za rok, čo pri mesačnej báze predstavuje menej ako 13 percent mesačne. Zodpovedá to hodnote 0.13 a tu pozorujeme ešte rast. To len potvrdzuje, že $\frac{dCUB}{d\sigma_i} > 0$. Graf č.15 potvrdzuje správnosť výpočtu derivácie a preukazuje, že je kladná. Na grafe č. 16 vidíme odchýlku derivácií, ktorá je pomerne malá. Narastie pri hodnotách derivácií, kde je však ich rozdiel malý. To poukazuje na malé rozdiely v deriváciách a na správnosť výpočtu presnej hodnoty derivácie.



Obr. 14: Závislosť hornej komonotónnej hranice od volatility σ_1 .



Obr. 15: Derivácia a numerická derivácia hornej komonotónnej hranice podľa volatility σ_1 .



Obr. 16: Odchýlka derivácií.

5.4.2 Citlivosť dolnej komonotónnej hranice na σ_i

Predpokladajme, že korelačné koeficienty $r_{l,j}$ sú kladné. Potom $\text{sign}(r_{l,j})$ nadobúda hodnotu +1. Vieme, že koeficienty $r_{l,j}$ závisia od σ_i . Potom $\frac{d\text{sign}(r_{l,j})}{d\sigma_i} = 0$. Výraz $\Phi^{-1}(F_{S^l}(K))$ je závislý od σ_i cez implicitný vzťah (14). Daný výraz závisí aj od ďalších premenných, ale tie berieme fixné. Označíme $y(\sigma_i) = \Phi^{-1}(F_{S^l}(K))$, potom $\frac{dy(\sigma_i)}{d\sigma_i} = y'$ a $\frac{dr_{l,j}(\sigma_i)}{d\sigma_i} = r'_{l,j}$. Derivácia dolnej komonotónnej hranice podľa volatility je:

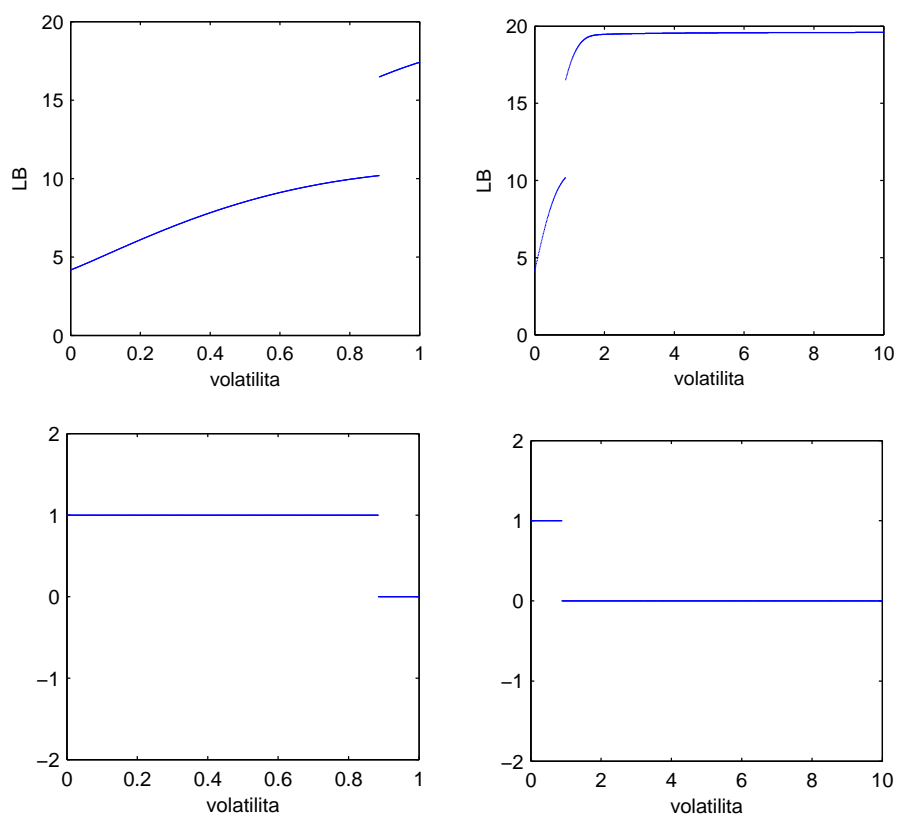
$$\begin{aligned}
\frac{dLBA}{d\sigma_i} &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi' \left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right) \right] \\
&\times \left[0 \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right) + \text{sign}(r_{l,j}) \left(r'_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - y'(\sigma_i) \right) \right] \\
&+ \sum_{j=0}^{m-1} a_i b_j S_i(0) e^{-rj} \Phi' \left[\text{sign}(r_{i,j}) \left(r_{i,j} \sigma_i \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right) \right] \\
&\times \text{sign}(r_{i,j}) r_{i,j} \sqrt{T-j} \\
&- e^{-rT} K \Phi' [-\text{sign}(r_{l,j}) y(\sigma_i)] [0y(\sigma_i) - \text{sign}(r_{l,j}) y'(\sigma_i)] \\
&= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi' \left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right) \right] \\
&\times \text{sign}(r_{l,j}) r'_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \\
&\times \Phi' \left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right) \right] \text{sign}(r_{l,j}) y'(\sigma_i) \\
&+ \sum_{j=0}^{m-1} a_i b_j S_i(0) e^{-rj} \Phi' \left[\text{sign}(r_{i,j}) \left(r_{i,j} \sigma_i \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right) \right] \\
&\times \text{sign}(r_{i,j}) r_{i,j} \sqrt{T-j} + e^{-rT} K \Phi' [-\text{sign}(r_{l,j}) y(\sigma_i)] \text{sign}(r_{l,j}) y'(\sigma_i) \\
&= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi' \left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right) \right] \\
&\times \text{sign}(r_{l,j}) r'_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} \\
&- \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r_{l,j}^2 \sigma_l^2 (T-j) - 2r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} y(\sigma_i) + y^2(\sigma_i)}{2}} \\
&\times \text{sign}(r_{l,j}) y'(\sigma_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^{m-1} a_i b_j S_i(0) e^{-rj} \Phi' \left[\text{sign}(r_{i,j}) \left(r_{i,j} \sigma_i \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right) \right] \\
& \times \text{sign}(r_{i,j}) r_{i,j} \sqrt{T-j} + e^{-rT} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(\sigma_i)}{2}} \text{sign}(r_{i,j}) y'(\sigma_i) \\
& = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi' \left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right) \right] \\
& \times \text{sign}(r_{l,j}) r'_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} \\
& + \sum_{j=0}^{m-1} a_i b_j S_i(0) e^{-rj} \Phi' \left[\text{sign}(r_{i,j}) \left(r_{i,j} \sigma_i \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right) \right] \\
& \times \text{sign}(r_{i,j}) r_{i,j} \sqrt{T-j} + e^{-rT} \text{sign}(r_{l,j}) y'(\sigma_i) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2(\sigma_i)}{2}} \\
& \times \left[- \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} e^{rT} e^{-\frac{r_{l,j}^2 \sigma_l^2}{2} + r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} y(\sigma_i)} + K \right]. \quad (39)
\end{aligned}$$

Využitím vzťahu (14) sa derivácia zjednodušuje na :

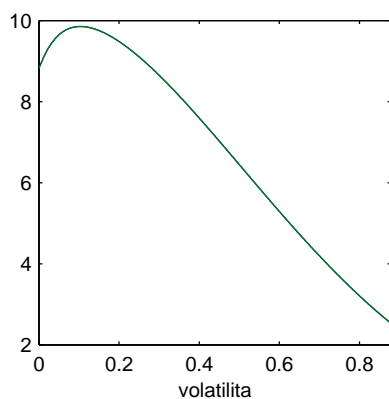
$$\begin{aligned}
\frac{dLBA}{d\sigma_i} & = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} \Phi' \left[\text{sign}(r_{l,j}) \left(r_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right) \right] \\
& \times \text{sign}(r_{l,j}) r'_{l,j} \sigma_l \sqrt{T-j} + \sum_{j=0}^{m-1} a_i b_j S_i(0) e^{-rj} \\
& \times \Phi' \left[\text{sign}(r_{i,j}) \left(r_{i,j} \sigma_i \sqrt{T-j} - y(\sigma_i) \right) \right] \text{sign}(r_{i,j}) r_{i,j} \sqrt{T-j} \quad (40)
\end{aligned}$$

Obrázok č.17 ponúka lepšiu predstavu o tom, ako závisí dolná hranica od volatility. Menili sme volatilitu prvého aktíva a ostatné premenné sme nechali fixné. Dostávame podobný graf ako pre hornú hranicu. Môžeme pozorovať rast, čo znamená, že derivácia je kladná. Od určitého bodu je rast prudší, LBA rastie lineárne a dokonca hodnota dolnej hranice je vyššia ako hornej hranice pri tých istých premenných. Vzorce na výpočet LBA môžeme aplikovať len za predpokladu, že všetky korelačné koeficienty $r_{l,j}$ majú rovnaké znamienka. Na dolných grafoch obrázku č.17 sú znázornené hodnoty korelačných koeficientov. Ak sú $\forall r_{l,j} > 0$ pre danú volatilitu, je im pridelená 1, ak $\forall r_{l,j} < 0$ je im pridelená -1 a ak majú zmiešané znamienka, je im pridelená 0. Z grafu tak vidieť, že prudký nárast hodnôt LBA začína tam, kde majú $r_{l,j}$ zmiešané znamienka. Tu už ale nemôžeme použiť vzťahy na

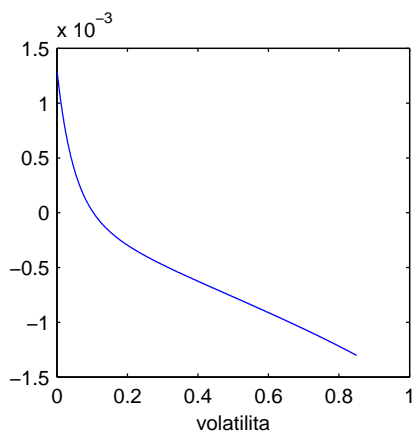


Obr. 17: Závislosť dolnej komonotónnej hranice od volatility σ_1 .

výpočet dolnej komonotónnej hranice. Z grafu tak nemôžeme vidieť hodnoty pre vysoké volatility. Na obrázku sú od určitého bodu tiež už len zmiešané znamienka $r_{l,j}$ a nedá sa určiť správanie LBA , pretože vzorce nemôžeme použiť. Pre interval, kde majú zmysel vzťahy na výpočet dolnej hranice je znázornený vývoj odchýlky presnej a numerickej derivácie a to na grafe č.19. Hodnoty sú rádovo v tisícinách, čo nie je veľká chyba.



Obr. 18: Derivácia a numerickej derivácie podľa volatility σ_1 .



Obr. 19: Odchýlka derivácií.

6 Numerické výsledky

6.1 Vstupné dáta

Pokúsime sa zrekonštruovať výsledky z článku [3]. Spočítame hodnoty CUB a LBA so vstupnými hodnotami z tabuľky 1 a 2:

Aktívum	Počiatočná cena	Váhy	Volatilita	Miera dividend
BASF	42.55	25	33.34	2.59
Bayer	48.21	20	31.13	2.63
Degussa-Huls	34.30	30	33.27	3.32
FMC	100.00	10	35.12	0.69
Schering	66.19	15	36.36	1.24

Tabuľka 1: Charakteristika aktív. Váhy, volatilita a miera dividend sú uvedené v %.

	BASF	Bayer	Degussa-Huls	FMC	Schering
BASF	1.00	0.84	-0.07	0.45	0.43
Bayer	0.84	1.00	0.08	0.62	0.57
Degussa-Huls	-0.07	0.08	1.00	-0.54	-0.59
FMC	0.45	0.62	-0.54	1.00	0.86
Schering	0.43	0.57	-0.59	0.86	1.00

Tabuľka 2: Korelačná štruktúra

Ročná úroková miera je rovná 0.06%. Pracujeme na mesačnej báze, preto mesačná úroková miera je rovná 0.06/12. Ročné volatilita máme dané, no tiež ich musíme upraviť na mesačné. Pre mesačnú bázu použijeme $\frac{\sigma_i}{\sqrt{12}}$. Počet okamihov vstupujúcich do priemerovania je 5, preto $m = 5$. Hodnoty CUB a LBA spočítame pre rôzne časy T , kde T je počet mesiacov a rôzne strike price K . Keďže v článku nie sú uvedené váhy prislúchajúce časovým okamihom, vezmeme rovnaké váhy pre každý čas s tým, že v súčte sú rovné 1. Na vypočítanie hodnoty $F_{Sc}(K)$ a $F_{St}(K)$ z rovností (8) a (14) použijeme jednoduchú metódu delenia intervalu na polovicu. V prílohe sú uvedené programy na ich výpočet. Pre hornú hranicu sú to programy č.3 a č.4, pre dolnú hranicu sú to programy č.6 a č.7.

6.2 Výsledky bez dividend

V tabuľke 3 sú vypočítané hodnoty CUB , LBA podľa vzťahov (7), (8), (13), (14) a Monte Carlo pre rôzne časy expirácie a rôzne hodnoty expiračnej ceny. V Matlabe sme použili programy č.2 a č.5 pre hornú a dolnú hranicu. Pre LBA bola ako podmieňovacia premenná použitá $\Lambda = GA$. Pri Monte Carlo simulácií bolo vygenerovaných 1000000 realizácií.

T(roky)	K	LBA	CUB	Monte Carlo
0.5	40	10.8414	11.1221	10.8465
	50	2.6705	4.3465	2.786
	60	0.1742	1.1856	0.2338
1	40	11.6679	12.8736	11.7157
	50	4.5289	6.9693	4.7336
	60	1.1935	3.4347	1.4083
5	40	16.901	20.2517	17.303
	50	11.9023	16.435	12.5916
	60	8.2379	13.4094	9.1299
	70	5.6654	11.0082	6.652

Tabuľka 3: Výsledky pre ázijské košíkové opcie z článku¹.

V tabuľke 4 sú hodnoty spočítané podľa uvedených algoritmov, ktoré sme naprogramovali v Matlabe. Program je uvedený v prílohe. V Monte Carlo simulácií sme tiež generovali 1000000 realizácií, aby bola zaručená dostatočná presnosť. Korelačné koeficienty $r_{l,j}$ vstupujúce do LBA sme vypočítali analyticky. Vo vzťahoch na výpočet CUB a LBA nie je uvedené kam vstupujú dividendové miery, preto sme s nimi nepočítali. To pravdepodobne spôsobilo rozdiely vo vypočítaných hodnotách. Taktiež neboli vo vstupoch uvedené váhy b_j . Vybrali sme ich podľa svojho uváženia, čo tiež mohlo spôsobiť nezhody vo výsledkoch.

6.3 Výsledky so započítaním dividend

Hodnoty pre upravené vzťahy CUB a LBA s dividendami a pre Monte Carlo simuláciu s využitím stochastickej diferenciálnej rovnice s použitím dividend, vidíme v nasledujúcej tabuľke. Pre hornú a dolnú hranicu sme použili vzťahy (20), (21), (22), (23).

T(roky)	K	<i>LBA</i>	CUB	Monte Carlo
0.5	40	11.189	11.5441	11.1965
	50	2.8868	4.5545	3.0011
	60	0.2023	1.2695	0.2668
1	40	12.4926	13.6127	12.5347
	50	5.0860	7.5114	5.273
	60	1.4179	3.7751	1.6446
5	40	21.2039	24.2715	21.4888
	50	15.6055	20.0544	16.1936
	60	11.2621	16.6326	12.0685
	70	8.0498	13.86	9.0154

Tabuľka 4: Výsledky pre ázijské košíkové opcie spočítané v Matlabe.

T(roky)	K	<i>LBA</i>	CUB	Monte Carlo
0.5	40	10.8414	11.2221	10.8421
	50	2.6706	4.3465	2.7882
	60	0.1742	1.1856	0.234
1	40	11.6680	12.8737	11.7212
	50	4.5290	6.9693	4.7399
	60	1.1936	3.4348	1.4198
5	40	16.9011	20.2518	17.321
	50	11.9024	16.4350	12.6026
	60	8.2380	13.4094	9.1805
	70	5.6654	11.0082	6.6412

Tabuľka 5: Výsledky po započítaní dividendovej miery.

Tie sú už takmer totožné s hodnotami v článku, no líšia sa v niektorých prípadoch o jednu desaťtisícinu. Odchýlka môže byť spôsobená spôsobom zaokrúhľovania alebo aj numerickým riešením rovnice, konkrétne metódou delenia intervalu na polovicu.

Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo skúmanie ázijských košíkových opcií. Hranice založené na komonotónnosti a podmienenosti sú jednou z možností, ako získať predstavu o cene opcie. Vzťahy na ich výpočet majú kompaktný zápis, no pri výpočte sme potrebovali odvodiť analytické vyjadrenie pre korelačné koeficienty, ktoré vstupujú do dolnej hranice. Taktiež sme potrebovali použiť metódu na nájdenie koreňa funkcie. V prílohe uvádzame zdrojový kód pre program Matlab, ktorý sme použili pre hranice a kód pre Monte Carlo simuláciu. Tak sa stáva táto práca návodom na výpočet hraníc a Monte Carlo odhadu. Podarilo sa nám dostať takmer rovnaké výsledky pre dané parametre, ako v odbornom článku. Rozdiel bol zanedbateľný. Okrem uvedených hraníc existujú ešte ďalšie odvodenia hraníc, ktoré dávajú menší interval, v ktorom sa môže pohybovať cena opcie, tie ale neboli predmetom skúmania. Skúmali sme citlivosť hraníc na premenné ako úroková miera, volatilita, expiračná cena a tiež na váhy pridelené časovým okamihom. Odvodili sme derivácie podľa jednotlivých premenných, vykreslili sme grafy závislostí hraníc podľa nich a získali tak predstavu o vplyvoch premenných na hranice. Videli sme, že aj malé zmeny premennej dokážu prudko zmeniť hodnotu oboch hraníc. Pri ich výpočte je preto veľmi dôležité mať čo najlepšie odhadnuté volatilitu a úrokovú mieru. Zaujímavé môže byť aj skúmanie závislostí od iných parametrov, akými sú napríklad miera dividend, korelačná štruktúra alebo použitie inej kopule.

Literatúra

- [1] Albrecher, H., Dhaene, J., Goovaerts, M.J., Schoutens, W., *Static hedging of Asian options under Lévy models: the comonotonicity approach*, J. Derivatives, **12 (3)** (2005), 63-72.
- [2] Chen, X., Deelstra, G., Dhaene, J., Vanmaele, M., *Static super-replicating strategies for a class of exotic options*, Working Paper, Katholieke Universiteit Leuven, (2006), Dostupné na: <http://ideas.repec.org>
- [3] Deelstra, G., Diallo, I., Vanmaele M., *Bounds for Asian basket options*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **218** (2008), 215-228.
- [4] Deelstra, G., Petkovic, A., Vanmaele, M., *Pricing and Hedging Asian Basket Spread Options*, Working Paper, (2008), Dostupné na: www.ecore.be
- [5] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R., Vyncke, D., *The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory*, Insurance Math. Econom. **31 (1)** 2002, 3-33.
- [6] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R., Vyncke, D., *The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications*, Insurance Math. Econom. **31 (2)** 2002, 133-161.
- [7] Hobson, D., Laurence, P., Wang, T., *Static-arbitrage upper bounds for the prices of basket options*, Quantitative Finance **5 (4)** (2005), 329-342.
- [8] Kaas, R., Dhaene, J., Goovaerts, M.J., *Upper and lower bounds for sums of random variables*, Insurance Math. Econom. **27** (2000), 151-168.
- [9] Mikula, K., Stehlíková, B., Ševčovič, D., *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Vydavateľstvo STU, Bratislava, (2009), 200 str.
- [10] Nielsen, J.A., Sandmann, K., *Pricing bounds on Asian options*, J. Financial Quantitative Anal. **38 (2)** (2003), 449-473.
- [11] Potisková, L., *Odhad Value-at-Risk pomocou copula funkcií*, Diplomová práca, (2009), Dostupné na: www.iam.fmph.uniba.sk

- [12] Roch, O., Valdez, E.A., *Lower convex order bound approximations for sums of log-skew normal random variables*, Working Paper, (2008), Dostupné na: <http://papers.ssrn.com>
- [13] Simon, S., Goovaerts, M.J., Dhaene, J., *An easy computable upper bound for the price of an arithmetic Asian option*, Insurance Math. Econom. **26** (2000), 175-183.
- [14] Vanduffel, S., Hoedemakers, T., Dhaene, J., *Comparing approximations for risk measures of sums of non-independent lognormal random variables*, North American Actuarial J. **9** (4) (2005), 71-82.

Príloha

V prílohe uvádzame zdrojové kódy na výpočet numerických výsledkov v programe Matlab.

Program č.1 na výpočet Monte Carlo simulácie:

```
a=[1/4,1/5,3/10,1/10,15/100];
b=[1/5,1/5,1/5,1/5,1/5];
sigma=[0.3334,0.3113,0.3327,0.3512,0.3636];
sigma=sigma/sqrt(12);
SS=[42.55,48.21,34.30,100.00,66.19];
r=0.06/12;
T=12;
n=5;
m=5;
K=[40,50,60];
ro=[1.00,0.84,-0.07,0.45,0.43;
    0.84,1.00,0.08,0.62,0.57;
    -0.07,0.08,1.00,-0.54,-0.59;
    0.45,0.62,-0.54,1.00,0.86;
    0.43,0.57,-0.59,0.86,1.00];
q=[0.0259,0.0263,0.0332,0.0069,0.0124];
q=q/12;

Lt=chol(ro);
L = Lt';

dt=1;
t=(1:1:T);
d=length(t);

p=100; %počet realizácií
pomocna=10000; %10000krát vygenerujeme po p=100 realizácií
for z=1:3 %pre z-te strike price
for ii=1:pomocna
%generovanie prírastkou wienerovho procesu
for j=1:n
    for i=1:d
```

```

        for k=1:p
            dw=randn;
            u(j,k,i)=dw;
        end;
    end
end;

%prírastky so správnou korelačnou štruktúrou
for i=1:n
    for l=1:p
        for j=1:d
            ww(i,l,j)=0;
            for k=1:n
                ww(i,l,j)=ww(i,l,j)+L(i,k)*u(k,l,j);
            end
        end
    end
end

%z prírastkou urobíme wienerov proces
for i=1:n
    for l=1:p
        W(i,l,1)=0;
        for j=1:d
            W(i,l,j+1)= W(i,l,j)+ww(i,l,j);
        end
    end
end

%-----
%cena aktíva-riešenie výrazu (1)
for i=1:n
    for l=1:p
        for j=0:m-1
            S(i,l,j+1)=SS(i)*exp((r-q(i)-1/2*sigma(i)*...
                sigma(i))*(T-j)+sigma(i)*W(i,l,T-j+1));
        end
    end
end
end

```

```

%vážená cena aktíva
abc=zeros(1,p);
for l=1:p
    for i=1:n
        for j=0:m-1
abc(l)=abc(l)+a(i)*b(j+1)*S(i,l,j+1);
        end
    end
end

for l=1:p
abc(l)=max(abc(l)-K(z),0)*exp(-r*T);
end

stredna(ii)=0;
for l=1:p
stredna(ii)=abc(l)+stredna(ii);
end
stredna(ii)=stredna(ii)/p;
end

mc(z)=0;
for i=1:pomocna
    mc(z)=mc(z)+stredna(i);
end
mc(z)=mc(z)/pomocna; %vektor hodnôt MC simulácie
end %pre rôzne strike price

```

Program č.2 slúži na výpočet hornej komonotónnej hranice CUB:

```

global r          %mesačná úroková miera
global sigma     %volatility
global m         %počet priemerovaných okamihov
global S         %počiatočné ceny aktív
global a         %váhy v portfóliu
global b         %váhy v čase
global T         %dĺžka obdobia-počet mesiacov
global q         %miera dividend

```

```

q=[0.0259,0.0263,0.0332,0.0069,0.0124];
q=q/12;
r=0.06/12;
m=5;
n=5;                %počet aktív
sigma=[0.3334,0.3113,0.3327,0.3512,0.3636]; %ročné volatility
sigma=sigma/sqrt(12); %mesačné volatility
S=[42.55,48.21,34.30,100.00,66.19]; %počiatočné ceny aktív
a=[1/4,1/5,3/10,1/10,15/100];
b=[1/5,1/5,1/5,1/5,1/5];

T=12;
K=50;                %expiračná cena

fsck=fsknula(K); %približný koreň rovnice (8)

%výpočet hornej hranice CUB
cub=0;                %počiatočnú hodnotu CUB dáme 0
for l=1:n
    for j=0:m-1
        cub=cub+a(l)*b(j+1)*S(l)*exp(-r*j)*exp(-q(l)*(T-j))*...
            normcdf(sigma(l)*sqrt(T-j)-norminv(fsck));
    end
end
cub=cub-exp(-r*T)*K*(1-fsck);

```

Program č.3, metóda delenia intervalu na polovicu, na ktorú sa odvoláva predchádzajúci program, výpočet hodnoty $F_{Sc}(K)$ v programe označenej ako fsck je uvedený nižšie. V každej iterácii počíta rozdiel ľavej a pravej strany rovnosti(8) pre prislúchajúci bod z menšieho a menšieho intervalu.

```

function x = fsknula(K) % metóda delenia intervalu
a=0;
b=1;
x=10;
iter=0; % počet iterácií
while(abs(x)>0.000000000000000000000000001 && iter<100)
    iter=iter+1;

```



```

    c=(a+b)/2;
    x=fsk(c,K);
    if x>0
        b=c;
    end
    if x<0
        a=c;
    end
end
x=(a+b)/2;    %bod, v ktorom má funkcia takmer nulovú hodnotu
end

```

Program č.4

Rozdiel ľavej a pravej strany rovnosti(8) počíta hore uvedený program odvolaním sa na funkciu fsk(c,K):

```

function y = fsk(c,K) %rozdiel ľavej a pravej strany vzťahu(8)
global r
n=5;                %počet aktív
global sigma
global S
global a
global b
global T
global m
global q
y=0; %pomocná premenná

%ľavá strana rovnosti(8)
for l=1:n
    for j=0:m-1
        y=y+a(l)*b(j+1)*S(l)*exp((r-q(l)-(1/2)*...
            sigma(l)*sigma(l))*(T-j)+sigma(l)*sqrt(T-j)*norminv(c));
    end
end

y=y-K; %ľavá strana mínus pravá strana rovnosti (8)
end

```

Program č.5 pre výpočet dolnej komonotónnej hranice:

```
global r          %mesačná úroková miera
global sigma     %volatility
global m         %počet priemerovaných okamihov
global S         %počiatočné ceny aktív
global a         %váhy v portfóliu
global b         %váhy v čase
global T;        %dĺžka obdobia-počet mesiacov
global rr;       %korelačné koeficienty r(1,j)..vzťah (12)
global q         %miera dividend
q=[0.0259,0.0263,0.0332,0.0069,0.0124];
q=q/12;
r=0.06/12;
m=5;
n=5;             %počet aktív
sigma=[0.3334,0.3113,0.3327,0.3512,0.3636]; %ročné volatility
sigma=sigma/sqrt(12); %mesačné volatility
S=[42.55,48.21,34.30,100.00,66.19];
a=[1/4,1/5,3/10,1/10,15/100];
b=[1/5,1/5,1/5,1/5,1/5];
ro=[1.00,0.84,-0.07,0.45,0.43; %korelačná štruktúra
    0.84,1.00,0.08,0.62,0.57;
    -0.07,0.08,1.00,-0.54,-0.59;
    0.45,0.62,-0.54,1.00,0.86;
    0.43,0.57,-0.59,0.86,1.00];
pr=1000;        %počet realizácií

T=12;
K=50;          %strike price-expiračná cena

%wienerov proces
dt=1;         %časový krok
t=(1:1:T);   %vektor času
d=length(t); %dĺžka obdobia v mesiacoch
for j=1:n     %j-te aktívum
    for i=1:d %v čase i
        for k=1:pr %k-ta realizácia
```

```

                du(j,k,i)=randn; %prírastky wienerovho procesu
            end
        end
    end
end
Lt=chol(ro); %choleskeho rozklad matice korelácií
L = Lt';      %dolná trojuholníková matica z choleskeho rozkladu

%prírastky so správnou korelačnou štruktúrou
for i=1:n      %i-te aktívum
    for l=1:pr  %l-ta realizácia
        for j=1:d %v čase j
            dw(i,l,j)=0; %počiatočná hodnota prírastkov
            for k=1:n
                dw(i,l,j)=dw(i,l,j)+L(i,k)*du(k,l,j);
            end
        end
    end
end
end

%Overenie korelačnej štruktúry:
korelacia=zeros(n,n); %inicializácia matice
for i=1:5
    for j=1:5
        cormatica=corrcoef(dw(i, :, :), dw(j, :, :));
        korelacia(i,j)=cormatica(1,2);
    end
end

%wienerov proces vytvorený z prírastkov
for i=1:n      %i-te aktívum
    for l=1:pr  %l-ta realizácia
        W(i,l,1)=0; %wienerov proces na začiatku periódy
        for j=1:d %v čase j
            W(i,l,j+1)= W(i,l,j)+dw(i,l,j);
        end
    end
end
end

```

```

%Výpočet FA1
FA1=zeros(1,pr); %inicializácia hodnôt FA1
c1=zeros(n,m); %inicializácia hodnôt c1
for k=1:n %pre k-te aktívum
    for p=0:m-1 %v čase p mesiacov od času expirácie
        c1(k,p+1)=exp((r-(1/2)*sigma(k)*...
            sigma(k))*(T-p)); %hodnoty c1
        for l=1:pr %pre l-te aktívum
            FA1(l)=FA1(l)+a(k)*b(p+1)*c1(k,p+1)*...
                sigma(k)*S(k)*W(k,l,T-p);
        end
    end
end
end

%Výpočet FA2
FA2=zeros(1,pr);
c2=1;
for k=1:n
    for p=0:m-1
        for l=1:pr
            FA2(l)=FA2(l)+a(k)*b(p+1)*c2*...
                sigma(k)*S(k)*W(k,l,T-p);
        end
    end
end

% Výpočet FA3
FA3=zeros(1,pr);
for k=1:n
    for p=0:m-1
        for l=1:pr
            FA3(l)=FA3(l)+a(k)*b(p+1)*S(k)*exp(r*(T-p))*((r-(1/2)*...
                sigma(k)*sigma(k))*(T-p)+sigma(k)*W(k,l,T-p));
        end
    end
end
end

```

```

% Výpočet GA
GA=zeros(1,pr); %inicializácia GA
for l=1:5 %pre 1-te aktívum
    for j=0:4 %v čase j mesiacov od času expirácie
        for k=1:pr %k-ta realizácia
            GA(k)=GA(k)+a(l)*b(j+1)*sigma(l)*W(1,k,T+1-j);
        end
    end
end
GA=GA/std(GA); %výsledne hodnoty GA
                %po vydelení štandardnou odchýlkou

% výpočet r(1,j)
A=GA; %za podmieňovaciu premennú zvolíme GA(alebo FA1,2,3)
for l=1:5 %pre 1-te aktívum
    for j=0:4 %v čase j mesiacov od času expirácie
        kovariancia=zeros(2,2);
        kovariancia=cov(W(1,:,T+1-j),A);
        rr(1,j+1)=kovariancia(1,2)/(std(A)*sqrt(T-j));
    end
end

%-----
%výpočet rr(1,j) analyticky, keď nechceme
%analytické vyjadrenie,zakomentujeme ho

c=0;
c1=0;
for i=1:n
    for j=1:n
        c1=c1+a(i)*a(j)*sigma(i)*sigma(j)*ro(i,j);
    end
end

c11=0;
for i=0:m-1
    for j=0:m-1

```

```

        c11=c11+b(i+1)*b(j+1)*min((T-i),(T-j));
    end
end
c=c1*c11;
c=sqrt(c);

for l=1:5
    for j=0:4
        c2=0;
        for l1=1:5
            for j1=0:4
                c2=c2+a(l1)*b(j1+1)*sigma(l1)*...
                    ro(l1,l)*min((T-j1),(T-j));
            end
        end
        c2=c2/sqrt(T-j);
        rr(l,j+1)=c2/c;
    end
end
%-----

FSLK=FSLKnulla(K); %približný koreň rovnice (14) získaný
                    %metódou delenia intervalu

%výpočet dolnej hranice označenej ako LB
LB=0;
for l=1:n
    for j=0:m-1
        LB=LB+a(l)*b(j+1)*S(l)*exp(-r*j)*exp(-q(l)*(T-j))*...
            normcdf(sign(rr(l,j+1))*(rr(l,j+1))*...
                sigma(l)*sqrt(T-j)-norminv(FSLK,0,1)),0,1);
    end
end
LB=LB-(exp(-r*T)*K*...
    normcdf(-sign(rr(l,j+1))*norminv(FSLK,0,1),0,1));

```

Program č.6 slúži na výpočet riešenia $F_{St}(K)$, opäť použijeme metódu delenia intervalu na polovicu:

```

function x = FSLKnula(K) % metóda delenia intervalu
a=0;
b=1;
x=10;
iter=0; % počet iterácií
while(abs(x)>0.00000000001 && iter<100)
    iter=iter+1;
    c=(a+b)/2;
    x=FFSLK(c,K);
    if x>0
        b=c;
    end
    if x<0
        a=c;
    end
end
x=(a+b)/2; %bod, v ktorom má funkcia takmer nulovú hodnotu
end

```

Program č.7 Rozdiel ľavej a pravej strany rovnosti(14) počíta hore uvedený program odvo- laním sa na funkciu FFSLK(c,K):

```

function y = FFSLK(FSLK,K)
global r
n=5;
global sigma
global S
global a
global b
global T
global m
global rr
global q
y=0; %pomocná premenná

%Ľavá strana rovnosti (14)
for l=1:n
    for j=0:m-1

```

```

        y=y+a(1)*b(j+1)*S(1)*exp((r-q(1)-(1/2)*...
            rr(1,j+1)*rr(1,j+1)*sigma(1)*sigma(1))*...
            (T-j)+rr(1,j+1)*sigma(1)*sqrt(T-j)*norminv(FSLK,0,1));
    end
end
y=y-K;          %ľavá strana mínus pravá strana rovnosti (14)
end

```