

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

HETEROGENITA AGENTOV
A DYNAMIKA VÝMENNÝCH KURZOV

2010

Bc. Zuzana Lukašíková

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

HETEROGENITA AGENTOV
A DYNAMIKA VÝMENNÝCH KURZOV

Diplomová práca

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Školiteľ: Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc.

Bratislava 2010

Bc. Zuzana Lukašíková

Čestné prehlásenie:

Týmto prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne pod vedením diplomového vedúceho, s použitím teoretických vedomostí a uvedenej literatúry.

V Bratislave, 23. apríla 2010

Zuzana Lukašíková

Podakovanie:

Úprimné poďakovanie patrí vedúcemu mojej diplomovej práce Prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc. za neoceniteľné rady a hlavne za čas a ochotu pri konzultáciách.

Abstrakt

LUKAŠÍKOVÁ, Zuzana: Heterogenita agentov a dynamika výmenných kurzov [diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Školiteľ: Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc. Bratislava: FMFI UK, 2010, str. 41.

Diplomovej práca sa zaoberá modelmi fluktuácií výmenných kurzov. Zamerali sme sa na modely s obmedzene racionálnymi heterogénnymi agentami. Diskutované sú tri modely s diskrétnym časom. Navyše analyzujeme spojitú verziu jedného z modelov. V prípade nestability je dokázaná existencia limitného cyklu, demonštrovaná aj počítačovou simuláciou.

Kľúčové slová: chartisti, fundamentalisti, limitná množina, obmedzená racionalita

Abstract

LUKAŠÍKOVÁ, Zuzana: Heterogeneity of agents and dynamics of exchange rates [diploma thesis]. Comenius University Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of applied Mathematics and Statistics, Diploma advisor: Prof. RNDr. Pavol Brunovský, DrSc. Bratislava: FMFI UK, 2010, p. 41.

The thesis deals with models of fluctuations of exchange rates. We focus on models assuming boundedly rational heterogeneous agents. Three discrete time models are discussed. In addition, a continuous time version of one of the models is analysed. Existence of the limit cycle in the case of instability is proved and demonstrated by computer simulation.

Keywords: chartists, fundamentalists, limit set, bounded rationality

Obsah

Úvod	7
1 Modely heterogénnych agentov (HAM)	8
2 Fundamentalisti a chartisti	10
2.1 Zeemanov model	10
3 Modely s diskretným časom	12
3.1 Model výmenných kurzov Frankela a Froota (FF)	12
3.2 Model Boďová, Brunovský, Erdélyi, Walther (BEW)	15
3.2.1 Porovnanie modelov FF a BEW	17
3.3 Model Chiarella, Dieci, Gardini (CDG)	19
3.3.1 Porovnanie modelov CDG a BEW	24
3.4 Zhrnutie k diskretným modelom	25
4 Modely so spojitým časom	27
4.1 Model CDG	27
Záver	36
Literatúra	37
Prílohy	39

Úvod

Táto práca nadväzuje na niekoľko článkov a diplomových prác z minulých rokov.

Erdélyi [10] v diplomovej práci analyzuje model krátkodobých fluktuácií výmenných kurzov. Tento model vychádza z predstavy, že fluktuácie sú spôsobené trhovými mechanizmami kolísania ponuky a dopytu po menách. Predpoklad rovnomerne rozptýlených akcií agentov v čase vedie na diferenciálnu rovnicu s oneskorením. Pre ňu je v spomínanej práci dokázané, že pri určitej prahovej hodnote parametrov stráca rovnovážny výmenný kurz stabilitu. Pri prekročení tejto prahovej hodnoty vznikajú v simuláciách periodické fluktuácie. Výsledky sú publikované v článku *Brunovský, Erdélyi, Walther*[6], kde je navyše dokázaná existencia periodickej trajektórie v prípade prekročenia prahovej hodnoty.

Bodová [2] vo svojej diplomovej práci vyšetruje analogický model, ale za predpokladu, že sú akcie agentov synchronizované v čase, teda agenti konajú súčasne. Toto vedie na dvojrozmerný nelineárny diferenčný systém. Výsledky a stabilita sú analogické výsledkom z predchádzajúceho modelu so spojitým časom. Simulácie tu navyše naznačujú, že pri prekročení prahovej hodnoty vznikajú periodické a skoro periodické oscilácie na invariantnej kružnici. Nepodarilo sa ale dokázať existenciu periodickej trajektórie.

Ďalšou prácou je nepublikovaný článok *Brunovský, Erdélyi, Walther* [5], ktorý je „ekonomickou“ verziou predchádzajúcich prác. Matematické aspekty diskrétného modelu sa ďalej skúmajú v diplomovej práci *Szolgayová* [18] a vzťah modelu so spojitým a diskrétnym časom v diplomovej práci *Bokes* [3].

Časom sa ukázalo, že sa podobné modely vyskytli dávnejšie a že ich možno zahrnúť do triedy modelov s heterogénnymi agentami (heterogeneous agents models). Tak ako v spomínaných prácach aj v ďalších nájdeme rozdelenie agentov do dvoch tried - chartistov a fundamentalistov. Cieľom tejto práce je pozrieť sa na niektoré z týchto modelov bližšie, porovnať ich, prípadne analyzovať.

V prvej časti práce je zadaný pojem obmedzenej racionality (bounded rationality), prvá zmienka o modeloch heterogénnych agentov a ich rozdelenie do dvoch skupín. V ďalšej časti je porovnanie modelov s diskrétnym časom a v poslednej kapitole je dôkaz existencie periodickej trajektórie na jednom zo spojitých modelov.

1 Modely heterogénnych agentov (HAM)

Modelovanie v ekonomike a financiách prešlo rokmi mnohými zmenami. Ekonomovia aj matematici sa pokúšali rôznymi spôsobmi odhadnúť budúce správanie cien aktív, ako napríklad akcií, či výmenných kurzov.

V tejto práci sa budeme venovať modelom heterogénnych agentov, ktorých popularita v posledných rokoch stále stúpa [15]. Súčasná literatúra už ponúka niekoľko takýchto modelov podporených aj výsledkami numerických simulácií. Heterogénny agent nie je striktne racionálny. Mení svoje správanie v závislosti od situácie, ktorá v danom momente nastala. Model obmedzene racionálneho (behaviorálneho) agenta je reálnejší a viac opisuje obyčajného človeka. Ľudia nemajú možnosť byť racionálni, keďže sú ich vedomosti a schopnosti obmedzené a nemajú prostriedky na získanie správnych informácií (Herbert Simon), v neistote a pod tlakom nekonajú rozumne (Kahneman and Tversky). A hlavne je veľmi zložitý určiť premenné, ktoré by nám dali správne informácie o trhu a obchodníci by ich tiež uznali za relevantné (Keynes). Dá sa povedať, že agenti sú racionálni s určitými obmedzeniami. Termín obmedzenej racionality nie je v ekonómii presne definovaný. Napriek tomu je dôležité spomenúť, že bol použitý v mnohých prípadoch a to hlavne vtedy, keď sa zaoberáme neúplnými alebo dokonca zlými modelmi [17].

Obmedzená racionalita podľa [16]: Agenti vytvárajúci rozhodnutia sú úmyselne racionálni, prispôbiví a orientovaní na cieľ. Ľudské vedomosti a emocionálnosť ale často vedú k omylom, často pri dôležitých rozhodnutiach. Obmedzenia sú dvoch typov: procedurálne, čiže obmedzenia v tom, ako robíme rozhodnutia a podstatné, ktoré majú vplyv priamo na voľbu.

K popularite HAM a obmedzenej racionality prispeli hlavne nasledujúce pozorovania:

1. Keby boli všetci agenti racionálni a vedeli by to o sebe, na trhu by neexistoval žiadny obchod. Ak by totiž niektorý z nich dostal privátnu informáciu, nemôže z nej ťažiť. Ak by neurobil nič, vedeli by, že je táto informácia dobrá a nepredávali by ani oni a naopak.
2. Ceny aktív s väčšou volatilitou sú vyššie.
3. Silné predpoklady racionality sú len ťažko splniteľné. Je nereálne, aby agent poznal presvedčenia ostatných, mal neobmedzené výpočtové možnosti a dokonalú informáciu o prostredí. Je prirodzenejšie, keď obmedzene racionálny agent založí svoje predpoklady na pozorovateľnej premennej a prispôbí predpovede dostupným meraniam.

4. Pri HAM s obmedzenou racionalitou treba dobre určiť predpoklady, podľa ktorých si agent vyberie tú najlepšiu z množstva stratégií na trhu.
5. Dokonale racionálny agent zapadá so svojimi očakávaniami do „jednoduchého sveta“, ktorý možno odhadovať lineárnymi modelmi. Ale takýto agent nemôže mať dokonalý prehľad v „zložitom svete“ s nepravidelným pohybom cien a nelineárnymi modelmi.
6. Jedinci sa vo vypätých situáciách nesprávajú racionálne.
7. V praxi sa využíva veľa obchodných stratégií a predpovedí. V krátkodobom horizonte agenti uplatňujú rozhodovacie pravidlá chartistov, v dlhodobom horizonte pravidlá fundamentalistov. Treba ale dávať pozor na bod zvratu, kedy by mal agent zmeniť svoje správanie.
8. Postupný rozvoj výpočtových možností prispieva aj k ďalšiemu rozvoju numerických simulačných analýz HAM s obmedzenou racionalitou.

Vďaka týmto úvahám sú HAM stále viac využívané a skúmané. V tejto práci sa budeme venovať hlavne bodu č. 7, čiže modelom s heterogénnymi agentami rozdelenými na fundamentalistov a chartistov.

2 Fundamentalisti a chartisti

V mnohých HAM rozdeľujeme agentov na chartistov a fundamentalistov, ako bolo spomenuté v predchádzajúcej kapitole. Chartisti zakladajú svoje očakávaní o budúcej cene aktíva na už pozorovaných historických dátach. Snažia sa odhadnúť nejaký trend na základe vývoja cien v krátkej minulosti. Fundamentalisti sa rozhodujú na základe fundamentálnych ekonomických faktorov, ako sú príjem, miera nezamestnanosti, či makroekonomický rast. Svoje očakávaní zakladajú na dlhodobom ekvilibriu, ku ktorému má cena vždy tendenciu sa vrátiť. Investujú, ak je cena dlhodobo pod týmto ekvilibriom, lebo predpokladajú rast ceny aktíva a predávajú v opačnom prípade.

2.1 Zeemanov model

Asi prvou zmienkou je *Zeemanov model* [15]. Tento HAM slúži pre akciový trh so špekulatívnymi aktívami, ako sú akcie alebo meny. Model je aplikáciou teórie katastrof a jeho cieľom je poskytnúť opis dočasného medvedieho (bear) a býčieho (bull) akciového trhu. Investori býčieho trhu sú optimisti, očakávajú nárast ceny a investori medvedieho trhu sú pesimisti. Model samozrejme zahŕňa fundametalistov a chartistov. Fundamentalisti sa riadia ekvilibriom, nakupujú keď je cena pod ním a predávajú v opačnom prípade. Chartisti sa držia trendu, to znamená, že kupujú ak cena rastie a naopak.

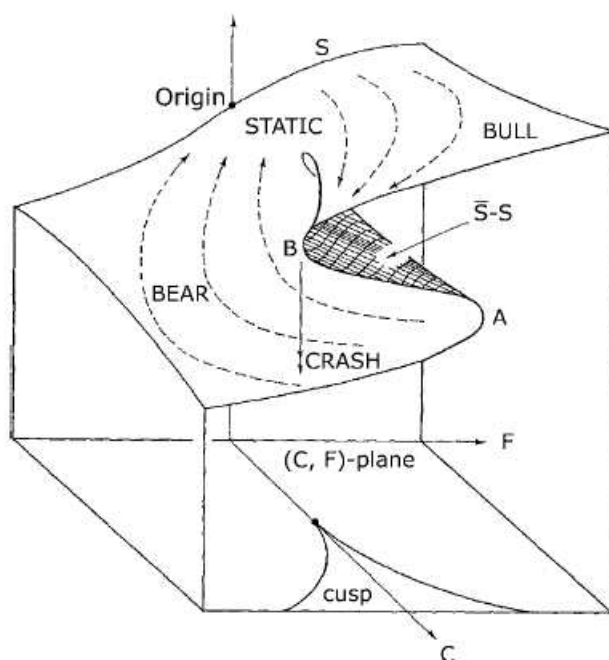
Označíme si mieru zmeny indexu akciového trhu alebo výmenného kurzu J , kde $J = 0$ znamená statický trh, $J > 0$ znamená býčí trh a $J < 0$ medvedí. C je podiel peňazí chartistov na trhu a F je prebytok dopytu fundamentalistov po cenných papieroch. J je stavová premenná, rýchlo reaguje na C a F , ktoré sú riadiace premenné a menia sa len pomaly. Zo siedmych hypotéz sformoval Zeeman model, ktorého graf je na obrázku č. 1.

Z teórie katastrof [1] vieme, že takáto plocha je určená rovnicou $y = x^3_1 + x_1x_2$ v priestore so súradnicami (x_1, x_2, y) . V našom prípade teda $x_1 \rightarrow J$, $x_2 \rightarrow (C - C_0)$ a $y \rightarrow F$. Z tohoto dostávame, že povrch S vyhovuje vzťahu

$$J^3 - J(C - C_0) - F = 0.$$

Táto plocha predstavuje množinu ekviliórií systému. Priemet S nám v (C, F) -rovine ohraničuje oblasť. Ak je (C, F) mimo nej, je jednovrstvové a má stabilný rovnovážny stav. Ak je vo vnútri, S je trojvrstvové, pričom stredná vrstva je nestabilná a krajné dve sú stabilné.

Obr. 1: Zeemanov model - vplyv chartistov a fundamentalistov na býčí a medvedí trh [15]



Prepínanie medzi býčím a medvedím trhom je odvodené zo správania chartistov a fundamentalistov. Keď máme systém na býčom trhu, na hornej vrstve S , podiel chartistov rastie, lebo nasledujú trend a nakupujú. V určitom bode nastane moment, keď začnú fundamentalisti predávať, lebo pomaly očakávajú pokles cien a dopyt F klesá. Systém sa dostane do bodu B a po prudkom poklese cien na trhu sa posúva až na dolnú vrstvu S . To už sme ale na medvedom trhu, fundamentalisti začnú nakupovať, pretože sa cena nachádza pod ekviliomom a predpokladajú opätovný rast. Podiel chartistov sa naopak znižuje, lebo trendom je pokles. Takto sa dostane systém opäť na býčí trh a celý cyklus začína odznova (na obrázku je cyklus označený šípkami).

3 Modely s diskrétnym časom

3.1 Model výmenných kurzov Frankela a Froota (FF)

J. A. Frankel a *K. A. Froot* majú teóriu, že fluktuácie výmenných kurzov sú spôsobené aj správaním a očakávaniami investorov na trhu [15]. V osemdesiatych rokoch totiž skúmali pohyb dolára a zistili, že niektoré výkyvy sa nedajú vysvetliť klasickými premennými. Dvadsaťpercentný skok nad ekvilibrium v priebehu deviatich masiacov a úplný obrat v ďalšom mesiaci nevie racionálna teória vysvetliť.

Na obrázku č. 2 si môžeme tento vývoj všimnúť. V rokoch 1984 a 1985 stúpila hodnota dolára na svoje maximum a v priebehu rokov 1985 a 1986 nastal rapidný pokles. Na obrázku vidíme výmenný kurz dolára porovnávaný s menovým indexom krajín G-10. Tento index predstavuje vážený priemer zahraničných výmenných kurzov dolára oproti menám krajín G-10 (Belgicko, Kanada, Francúzsko, Nemecko, Taliansko, Japonsko, Holandsko, Švédsko, Švajčiarsko a Anglicko). Nárast hodnoty dolára sa nedá vysvetliť, ak úrok klesá a všetky pozorovateľné faktory sa pohybujú opačným smerom, ako by sa dalo v tomto prípade predpokladať.

Frankel a Froot teda predpokladajú, že sú pohyby kurzov ovplyvňované aj očakávaniami na trhu. Pre ich výskum používajú tri zdroje dát: očakávania bankárov, finančných špecialistov a obchodníkov s menami. Časový horizont týchto očakávaní je od jedného týždňa po 12 mesiacov. Krátkodobé očakávania sa totiž od dlhodobých dosť líšia. Odhadujú tri rôzne štandardné modely a to pre extrapoláčne, regresívne a adaptívne očakávania.

V modeli extrapoláčnych očakávaní je očakávaný kurz (expected spot rate) daný vzťahom

$$s_{t+1}^e = (1 - g)s_t + gs_{t-1},$$

kde s_t je logaritmus súčasného okamžitého kurzu (current spot rate), $(1 - g)$ je jeho váha a g je váha oneskoreného kurzu (lagged spot rate). Vzťah sa dá tiež vyjadriť nasledovne:

$$\Delta s_{t+1}^e = -g\Delta s_t,$$

kde Δs_{t+1}^e je očakávaná zmena logaritmu výmenného kurzu a Δs_t je posledná uskutočnená zmena.

V krátkodobom časovom horizonte, to znamená mesiac a menej, vykazuje g hodnoty z intervalu $< -0,13; -0,05 >$. Signifikantné záporné hodnoty sú charakteristické pre takzvané destabilizačné očakávania. Agenti si na základe aktuálneho odhadu vytvoria nové očakávania o budúcej hodnote kurzu.

Obr. 2: Vývoj dolára oproti menám krajín G10, zdroj dát: Board of Governors of the Federal Reserve System



V tomto prípade budú predpokladať rovnaký trend rastu alebo poklesu ako v predchádzajúcom odhade. V dlhodobom horizonte (6-12 mesiacov) sú výsledky opačné. Hodnoty g sú kladné, z intervalu $\langle 0,07; 0,38 \rangle$, charakteristické pre stabilizačné očakávania. V tomto prípade sa predpokladá, že nastane obrat trendu očakávaní.

Model regresívnych očakávaní používa váhy skutočného zlogaritmovaného kurzu a logaritmu dlhodobého ekvilibria \bar{s}_t :

$$s_{t+1}^e = (1 - v)s_t + v\bar{s}_t,$$

alebo v očakávaných prírastkoch:

$$\Delta s_{t+1}^e = v(\bar{s}_t - s_t).$$

V tomto modeli predpokladajú autori rovnaké časové horizonty ako v predchádzajúcom. Negatívne hodnoty v z intervalu $\langle -0,08; 0,03 \rangle$ v krátkodobom horizonte sú charakteristické pre destabilizačné očakávania. Investori očakávajú vzďaľovanie výmenného kurzu od dlhodobého ekvilibria. V opačnom prípade dostávame signifikantné kladné hodnoty z intervalu $\langle 0,06; 0,17 \rangle$, ktoré predpovedajú slabilizačné očakávania, teda výmenný kurz sa bude približovať k ekvilibriu.

Obdobné výsledky dáva aj model adaptívnych očakávaní.

Frankel a Froot došli k záveru, že agenti používajú na svoje predpovede vážený priemer medzi správaním sa chartistov a fundamentalistov, pričom tieto váhy závisia od vzdialenosti času, ktorý chcú odhadnúť. Dlhodobý horizont so stabilizačnými očakávaniami totiž spájame s fundamentalistami a krátkodobý s destabilizačnými očakávaniami priradujeme chartistom.

Všetko spomínané motivovalo týchto dvoch ekonómov k odvodeniu modelu výmenných kurzov s heterogénnymi agentami. Tento model pozostáva z troch tried agentov. Prví sú fundamentalisti, ktorých očakávania by fungovali, keby boli na trhu iba oni, čiže by sa všetci riadili rovnakými pravidlami vzhľadom k danému ekvilibriu. Ďalší sú chartisti, ktorí majú informácie iba o minulých výmenných kurzoch a svoje očakávania formujú jednoduchými odhadmi z časových radov. No a poslední agenti sú portfólio manažéri. Táto trieda agentov spája predpovede fundamentalistov a chartistov a používa ich vážený priemer, pričom tieto váhy s časom aktualizuje. Agenti menia váhy na základe toho, či sú v danom čase presnejšie odhady fundamentalistov alebo chartistov.

Každá trieda koná racionálne, v súlade so svojím presvedčením, ale pritom s určitými obmedzeniami. Model sa líši od modelov s homogénnymi agentami hlavne tým, že ho agenti poznajú celý a rozhodujú sa čiastkovo, teda iba na základe informácií dostupných v ich triede. Ich odhady preto nie sú také presné.

Základom je všeobecný model výmenných kurzov

$$s_t = c\Delta s_{t+1}^m + z_t, \quad c \geq 0, \quad (3.1)$$

kde s_t je logaritmus okamžitého výmenného kurzu, Δs_{t+1}^m je zmena očakávaná portfólio manažérmi a z_t sú fundamenty trhu. Ako bolo spomenuté, portfólio manažéri používajú vážený priemer z očakávaní fundamentalistov a chartistov. Toto vieme zapísať ako súčet jednotlivých zmien vynásobených príslušnými váhami:

$$\Delta s_{t+1}^m = \omega_t \Delta s_{t+1}^f + (1 - \omega_t) \Delta s_{t+1}^c, \quad 0 \leq \omega_t \leq 1. \quad (3.2)$$

Fundamentalisti odhadujú zmenu kurzu nasledovne:

$$\Delta s_{t+1}^f = v(\bar{s} - s_t), \quad (3.3)$$

kde \bar{s} je fundamentálny výmenný kurz a v je rýchlosť prispôsobenia sa situácii na trhu.

Odhad zmeny kurzu chartistov si Frankel a Froot zjednodušili. Ich predpokladom bolo, že chartisti očakávajú, že sa výmenný kurz správa ako „náhodná prechádzka“ (random walk) a teda

$$\Delta s_{t+1}^c = 0. \quad (3.4)$$

Očakávania portfólio manažérov dané vzťahom (3.2) potom vyzerajú nasledovne:

$$\Delta s_{t+1}^m = \omega_t v(\bar{s} - s_t). \quad (3.5)$$

Zmena váhy ω_t , ktorá pri rozhodovaní portfólio manažérov patrí očakávaniam fundamentalistov, je daná ako

$$\Delta \omega_t = \delta(\hat{\omega}_{t-1} - \omega_{t-1}), \quad 0 \leq \delta \leq 1, \quad (3.6)$$

kde $\hat{\omega}_{t-1}$ dostaneme zo vzťahu

$$\Delta s_t = \hat{\omega}_{t-1} v(\bar{s} - s_{t-1}). \quad (3.7)$$

$\hat{\omega}_{t-1}$ predstavuje aposteriórne vypočítanú váhu, ktorá by presne predpovedala súčasnú zmenu okamžitého kurzu.

Zo vzťahov (3.6) a (3.7) vieme odvodiť váhu, ktorú prikladajú portfólio manažéri odhadu fundamentalistov

$$\Delta \omega_t = \delta \left(\frac{\Delta s_t}{v(\bar{s} - s_{t-1})} - \omega_{t-1} \right), \quad (3.8)$$

kde koeficient δ meria rýchlosť prispôsobenia sa aktuálnemu stavu na trhu. Portfólio manažéri teda predpokladajú, že váha daná očakávaniami fundamentalistov je tá, ktorá by mohla dať najlepší odhad.

3.2 Model Bodová, Brunovský, Erdélyi, Walther (BEW)

Ďalej by som sa chcela venovať modelu, ktorý bol spracovaný v diplomovej práci *Bodová* [2] a v nepublikovanom článku *Brunovský, Erdélyi a Walther* [5] a v publikovanom [6]. Je to model výmenných kurzov, ktorý taktiež využíva delenie agentov na chartistov a fundamentalistov. Ako v predchádzajúcom modeli, chartisti sa riadia minulým trendom, čiže kupujú ak cena rastie, lebo očakávajú ďalší rast a naopak a fundamentalisti sa riadia veľkosťou odchýlky od ekvilibria, kupujú keď je cena nízko pod ekvilibríom a predávajú v opačnom prípade. V tomto modeli predpokladáme, že agenti môžu meniť svoje správanie na základe stavu na trhu a správajú sa podľa dvoch očakávacích mechanizmov.

Tento model teraz v skratke odvodím. Nech je $S = S_t$ výmenný kurz ako funkcia času a S^* je ekvilíbrio tohoto výmenného kurzu odvodené z makroekonomických základov. Toto ekvilíbrio je konštantné v čase. Potom

môžeme predpokladať, že sa agenti rozhodujú na základe relatívnej odchýlky od ekvilibria, danej vzťahom

$$x = \frac{S - S^*}{S^*}.$$

Chartisti využívajú k predpovediam pohyby kurzu v tesnej minulosti, čo je reprezentované hodnotou $(x_t - x_{t-1})$. Predpokladajú, že rast kurzu bude pokračovať rastom a pokles ďalším klesaním, pričom rast kurzu spôsobí nárast dopytu po zahraničnej mene a následný rast jej ceny. Predpokladáme, že efekt tohoto mechanizmu je lineárny a vyjadrený hodnotou

$$A(x_t - x_{t-1}), \quad A > 0.$$

Model môžeme prípadne rozšíriť, keď nahradíme konštantu A funkciou $\bar{A}(x_t)$. Vďaka tejto zmene budú agenti v modeli prispôbovať svoje očakávania hodnote x_t . Táto funkcia je daná predpisom

$$\bar{A}(x_t) = A(M - |x_t|)^+, \quad (3.9)$$

kde $A > 0$, $M > 0$ a $(x)^+ = \max\{x, 0\}$. To znamená, že čím je väčšia hodnota $|x_t|$, tým menej agentov robí rozhodnutia na základe rastu (prípadne poklesu) ceny výmenného kurzu.

Naopak fundamentalisti odhadujú budúcu cenu kurzu pomocou momentálnej pozície výmenného kurzu k jeho ekvilibriu, čo reprezentuje x_t . Čím väčšia je odchýlka momentálneho kurzu od ekvilibria, tým je väčšia pravdepodobnosť, že sa vráti späť k rovnovážnej hodnote. V tomto prípade agenti pri náraste kurzu predávajú úmerne odchýlke od rovnovážnej hodnoty, čo vyvoláva zvýšenie ponuky a pokles ceny. Predpokladáme, že tento mechanizmus je opísaný ako $-Bx_t$, $B > 0$. Ešte ale treba počítať s tým, že agenti nie sú trvalo klasifikovaní do skupín, ale menia svoje rozhodovanie na základe veľkosti odchýlky od ekvilibria. Čím väčšia bude, tým viac agentov sa bude správať ako fundamentalisti, pretože si bude viac agentov uvedomovať odchýlku od rovnovážneho kurzu. Na základe tejto závislosti dostávame $B = B(x) = B|x|$ a teda celý mechanizmus vieme napísať ako

$$-Bx_t|x_t|, \quad B > 0.$$

Keďže už máme odvodené vzťahy pre jednotlivé mechanizmy a predpokladáme, že sa agenti rozhodujú v rovnakom čase, vieme ako bude vyzeráť konečný model:

$$x_{t+1} = x_t + A(x_t - x_{t-1}) - Bx_t|x_t|, \quad (3.10)$$

kde $A > 0$ a $B > 0$ predstavujú citlivosť obchodníka na dva očakávané mechanizmy. Prvý člen v tomto modeli pripadá chartistom a druhý fundamentalistom. Keď do modelu doplníme činiteľ (3.9) bude vyzeráť nasledovne

$$x_{t+1} = x_t + A(x_t - x_{t-1})(M - |x_t|)^+ - Bx_t|x_t|,$$

kde A , B a M sú kladné konštanty.

Rozšírený model pozostáva z informácie o odchýlke x_t a z váženého priemeru dvoch už spomínaných očakávacích mechanizmov s váhami $M - |x_t|$ a $|x_t|$. Ak máme teda na trhu M agentov, $|x_t|$ predstavuje počet agentov, ktorí sa správajú „obozretne“ a $(M - |x_t|)$ je počet agentov, ktorí chcú profitovať zo zmeny kurzu. V prípade $|x_t| > M$ by všetci čakali na zmenu trendu (fundamentalisti) a chartistický člen by úplne zmizol.

V modeli sú však potrebné iba dva parametre, takže po substitúcii $x_t := Mx_t$, $a = MA$ a $b = MB$ dostávame:

$$x_{t+1} = x_t + a(x_t - x_{t-1})(1 - |x_t|)^+ - bx_t|x_t|. \quad (3.11)$$

Ak by sme ešte upravili fundamentalistický člen na

$$x_{t+1} = x_t + a(x_t - x_{t-1})(1 - |x_t|)^+ - bx_t \min\{|x_t|, 1\}, \quad (3.12)$$

mohli by sme činitele $(1 - |x_t|)^+$ a $\min\{|x_t|, 1\}$ považovať za váhy.

Model (3.11) má jediný pevný bod v počiatku súradnicovej osi, čo je v práci [2] odvodené a dokázané. Tento bod predstavuje ekvilibrium odvodené z ekonomických základov. Stabilný je pre $a < 1$ a nestabilný pre $a > 1$. Numerickými simuláciami dostávame oscilácie výmenných kurzov, ktoré v prípade stability konvergujú k ekvilibriu, teda k nule. Modifikácia (3.12) dáva rovnaké výsledky, pretože dynamika systému je zaujímavá a vyšetruje sa iba v oblasti $|x_t| \leq 1$.

3.2.1 Porovnanie modelov FF a BEW

Je zaujímavé všimnúť si tieto dva modely, ktoré sme rozoberali. Vidíme tu veľa podobností a to hlavne v predpokladoch. Základný vzťah (3.2) z modelu Frankela a Froota vyzerá nasledovne

$$\Delta s_{t+1}^m = \omega_t \Delta s_{t+1}^f + (1 - \omega_t) \Delta s_{t+1}^c,$$

pričom druhý model vieme tiež vyjadriť týmto spôsobom, pomocou očakávaní portfólio manažérov. Sú tu samozrejme nejaké rozdiely, ktoré musíme trochu

upraviť. V prvom rade si treba spomenúť, že zatiaľ čo v modeli FF pracujeme s prirodzenými logaritmiami výmenných kurzov, v modeli BEW pracujeme s odchýlkami. Toto vieme zmeniť niekoľkými úpravami:

$$x = \frac{S - S^*}{S^*},$$

ďalej nahradíme x veľmi presným odhadom a upravíme:

$$x = \ln(1 + x) = \ln(S/S^*) = s - s^*,$$

kde s je logaritmus výmenného kurzu S a s^* je jeho zlogaritmované ekvilibrium.

Z predpokladov o správaní sa jednotlivých agentov v modeli BEW vyplýva, že očakávania chartistov vieme napísať takto (použijeme označenie z modelu FF):

$$\Delta s_{t+1}^c = \Delta s_t,$$

kde $\Delta s_t = s_t - s_{t-1}$. Títo agenti sa rozhodujú na základe posledného vývoja kurzu. Naopak očakávania fundamentalistov si vieme vyjadriť v tvare

$$\Delta s_{t+1}^f = -\alpha(s_t - s^*).$$

Ich predstava o zmene ceny spočíva v tom, že sa bude odchýlka od rovnovážneho stavu zmenšovať. Pôjde teda opačným smerom ako doteraz, čo predstavuje záporné znamienko a bude vynásobená nejakou konštantou α . Nemôžeme si nevšimnúť, že Frankel a Froot majú o správaní sa fundamentalistov úplne rovnaké predpoklady. Vidíme to zo vzťahu (3.3).

Na základe týchto odvedení si napíšeme, ako by vyzerali očakávania portfólio manažérov za predpokladu (3.2) v modeli BEW:

$$\Delta s_{t+1}^m = (1 - \omega_t)(s_t - s_{t-1}) - \omega_t \alpha (s_t - s^*). \quad (3.13)$$

Keďže $x_t = s_t - s^*$, môžeme prepísať rovnicu (3.13) do tvaru

$$x_{t+1}^m - x_t^m = (1 - \omega_t)(x_t - x_{t-1}) - \omega_t \alpha x_t. \quad (3.14)$$

Ďalej vieme, že skutočný výmenný kurz je ovplyvňovaný očakávaniami portfólio manažérov a ich správaním sa podľa toho na trhu. Odchýlka skutočného kurzu sa bude vyvíjať podľa posledných predpovedí manažérov, čo napíšeme takto:

$$x_{t+1} - x_t = A(x_{t+1}^m - x_t^m), \quad (3.15)$$

kde A je konštanta. Z rovníc (3.14) a (3.15) dostávame

$$x_{t+1} - x_t = A(1 - \omega_t)(x_t - x_{t-1}) - A\omega_t\alpha x_t. \quad (3.16)$$

Následne sa pozrieme na modifikovanú rovnicu modelu BEW (3.12):

$$x_{t+1} = x_t + a(x_t - x_{t-1})(1 - |x_t|)^+ - bx_t \min\{|x_t|, 1\}.$$

Teraz vieme jednoducho vyrátať, aké váhy prislúchajú tomuto modelu. Váhu chartistických očakávaní vyrátame z rovnosti $A(1 - \omega_t) = a(1 - |x_t|)$, z čoho dostávame

$$(1 - \omega_t) = \frac{a(1 - |x_t|)^+}{A}$$

a váha fundamentalistických očakávaní z rovnosti $A\omega_t\alpha = b \min\{|x_t|, 1\}$ je

$$\omega_t = \frac{b \min\{|x_t|, 1\}}{A\alpha}.$$

Ako vidíme zo vzťahov uvedených vyššie, aj keď sú činitele v modifikovanom BEW modeli z intervalu $< 0, 1 >$ a mohli by spĺňať predpoklady na váhy, v prítomnosti konštánt to nemusí nastať. Môžeme ale povedať, že v prípade vhodne zvolených konštánt, napríklad $\bar{a} = \frac{a}{A}$ a $\bar{b} = \frac{b}{A\alpha}$, budú naše váhy spĺňať rovnaké predpoklady ako v modeli ekonómov Frankela a Froota. Naše váhy sú závislé od odchýlky od rovnovážneho výmenného kurzu $|x_t|$. Čím je odchýlka väčšia, tým je aj váha ω_t väčšia. Súvisí to s predpokladom modelu, že agenti nie sú trvalo klasifikovaní a môžu svoje správanie meniť v závislosti od stavu na trhu. Čím je teda odchýlka od ekvilibria väčšia, tým je na trhu viac agentov správajúcich sa podľa fundamentalistických pravidiel.

3.3 Model Chiarella, Dieci, Gardini (CDG)

Ďalší model, ktorý chcem vo svojej práci spomenúť, publikovali vo svojom článku *Chiarella, Dieci a Gardini* [7]. Vo svojom modeli tiež rozdeľujú agentov na fundamentalistov, ktorí zakladajú svoje obchodovanie na odhade fundamentálnej hodnoty aktíva a chartistov, ktorí sa rozhodujú na základe analýz minulého cenového trendu. Výnimkou tohoto modelu je hlavne to, že je odvodený pre ceny všetkých typov aktív. Tu sa však neskôr pri porovnávaní budeme opäť venovať iba jednému typu a to výmenným kurzom.

Označíme si P_t logaritmus ceny aktíva v čase t . Na označenie fundamentalistov a chartistov budeme používať index $i \in \{f, c\}$. V každej časovej perióde

agent investuje časť svojho bohatstva do rizikového aktíva a časť do bezpečného. Celkové bohatstvo agenta i označíme $\Omega_{i,t}$ a $Z_{i,t}$ je časť, ktorú sa tento agent rozhodne investovať do rizikového aktíva. Majetok agenta v čase $(t+1)$ je potom daný

$$\Omega_{i,t+1} = \Omega_{i,t} + \Omega_{i,t}(1 - Z_{i,t})g_t + \Omega_{i,t}Z_{i,t}(P_{t+1} - P_t),$$

kde g_t je príjem z bezrizikového aktíva (napríklad dlhopisu) a $(P_{t+1} - P_t)$ je príjem z rizikového aktíva. Agenti odhadujú strednú hodnotu a varianciu svojho majetku nasledovne:

$$E_{i,t}(\Omega_{i,t+1}) = \Omega_{i,t} + \Omega_{i,t}(1 - Z_{i,t})g_t + \Omega_{i,t}Z_{i,t}E_{i,t}(P_{t+1} - P_t), \quad (3.17)$$

$$V_{i,t}(\Omega_{i,t+1}) = Z_{i,t}^2 \Omega_{i,t}^2 V_{i,t}(P_{t+1} - P_t). \quad (3.18)$$

Predpokladáme, že každá skupina agentov má exponenciálnu funkciu užitočnosti $U(\Omega) = -e^{-\alpha\Omega}$ a všetci agenti maximalizujú svoj zisk, teda

$$E_{i,t}[-e^{-\alpha_i\Omega_{i,t+1}}],$$

kde α_i je koeficient averzie k riziku daného agenta. Podľa [7] má $\Omega_{i,t+1}$ normálne rozdelenie a problém môžeme ekvivalentne zapísať v tvare

$$\max_{Z_{i,t}} \left\{ E_{i,t}(\Omega_{i,t+1}) - \frac{1}{2}\alpha_i V_{i,t}(\Omega_{i,t+1}) \right\}.$$

Riešenie tohoto optimalizačného problému je

$$\zeta_{i,t} \equiv Z_{i,t}\Omega_{i,t} = \frac{E_{i,t}(P_{t+1} - P_t) - g_t}{\alpha_i V_{i,t}(P_{t+1} - P_t)},$$

kde $\zeta_{i,t}$ je dopyt agenta i po rizikovom aktíve. Spomínané dve skupiny agentov sa ale trochu líšia v spôsobe, akým počítajú strednú hodnotu a varianciu zmeny ceny.

Fundamentalisti predpokladajú, že majú rozumný odhad rovnovážnej ceny rizikového aktíva. Ďalej tiež predpokladajú, že sa cena aktív riadi „mean reversion“ procesom, teda že vysoké a nízke ceny sú len dočasné a dá sa z nich vyrátať priemer, ku ktorému sa budú následne vracieť. Tieto očakávané odchýlky sú úmerné rozdielu skutočnej zlogaritmovanej ceny aktíva a jej zlogaritmovanej rovnovážnej hodnoty, teda

$$E_{f,t}(P_{t+1} - P_t) - g_t = \eta(W_t - P_t),$$

kde η je rýchlosť návratu k priemeru a W_t je logaritmus rovnovážnej hodnoty. Tiež predpokladajú, že variancia zmeny ceny je konštantná

$$V_{f,t}(P_{t+1} - P_t) = v_f.$$

Dopyt fundamentalistov po rizikovom aktíve je potom

$$D_{f,t} = a(W_t - P_t), \quad (3.19)$$

pričom $a = \eta \backslash \alpha_f v_f > 0$ je váha fundamentalistického dopytu. Ak je logaritmus ceny aktíva P_t pod (nad) očakávanou fundamentálnou hodnotou W_t , tak fundamentalisti toto aktívum nakupujú (predávajú), pretože si myslia, že je podhodnotené (nadhodnotené) a v budúcnosti bude jeho cena stúpať (klesať).

Chartisti naopak nechcú vynakladať žiadne prostriedky, ktoré sú potrebné na získanie odhadu fundamentálnej hodnoty, preto zakladajú svoje odhady strednej hodnoty a variancie zmeny ceny na voľne dostupných minulých dátach. Keď označíme ψ_{t+1} očakávania chartistov v čase t o zmene logaritmu ceny v priebehu nasledujúcej periódy, potom

$$\psi_{t+1} = E_t(P_{t+1} - P_t) = E_t(P_{t+1}) - P_t.$$

Ďalej autori upravujú tento vzťah pomocou extrapolácie posledných cien a dostávame schému

$$\psi_{t+1} = \psi_t + c(P_t - P_{t-1} - \psi_t), \quad (3.20)$$

kde $0 < c \leq 1$ je rýchlosť, s akou vedia odhadnúť trend podľa najnovších zmien. Dopyt chartistov je potom daný vzťahom

$$\zeta_{c,t} = \frac{\psi_{t+1} - g_t}{\alpha_c v_c}.$$

Na rozdiel od fundamentalistov, chartisti menia odhad v_c , čo je ich variancia, podľa veľkosti $|\psi_{t+1} - g_t|$. Čím je táto hodnota väčšia, tým väčšiu volatilitu očakávajú, narastá ich odhad v_c a znižuje sa sklon ich dopytovej funkcie. Všeobecne potom môže byť dopyt chartistov charakterizovaný nasledovne:

$$D_t^c = h(\psi_{t+1} - g_t), \quad (3.21)$$

kde funkcia $h(\cdot)$ má vlastnosti:

- (i) $h'(x) > 0$ ($\forall x$),
- (ii) $h(0) = 0$,
- (iii) $\exists x^*$ také, že $h''(x) < 0$ (> 0) pre všetky $x > x^*$ ($< x^*$),

(iv) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h'(x) = 0$.

Autori si vo svojej práci zvolili funkciu $h(x) = \gamma \arctan x$. Treba ale poznamenať, že na funkciu, alebo jej prípadnej zmene nezáleží. Záleží iba na vlastnostiach tejto funkcie, ktoré boli vymenované vyššie.

Celkový očakávaný dopyt D_t po aktíve v čase t , keď berieme konštantné $g_t = g$ a $W_t = W$, je súčtom dopytu chartistov a fundamentalistov a je daný vzťahom

$$D_t = D_{c,t} + D_{f,t} = a(W - P_t) + h(\psi_{t+1} - g), \quad (3.22)$$

kde $D_{f,t} = a(W - P_t)$ a $D_{c,t} = h(\psi_{t+1} - g)$.

Úprava cien na trhu prebieha pomocou tvorcu trhu (market maker), ktorého funkciou je vyrovnanie dopytu s ponukou. Previs dopytu má byť na konci každého obchodovacieho dňa nulový. Ak je rozdiel dopytu a ponuky v čase t kladný (záporný), tvorca trhu predáva (kupuje) dané aktívum, čím čistí trh a zvyšuje (znižuje) cenu tohoto aktíva do ďalšieho časového obdobia ($t + 1$). Každý deň na trhu teda vyzerá nasledovne:

(i) na začiatku dňa oznámi tvorca trhu cenu aktíva P_t (zlogaritmovanú) pre daný deň

(ii) obchodníci na trhu následne formujú dopyt po tomto aktíve na základe vzťahu (3.22)

(iii) tvorca trhu pozorne sleduje tento dopyt, podľa ktorého si vyberie dlhú alebo krátku pozíciu M_t , aby platilo $D_t + M_t = 0$

(iv) tvorca trhu v ďalšom období oznámi nový logaritmus ceny P_{t+1} , ktorý je vypočítaný podľa predchádzajúceho dňa, ako stará cena plus nejaká časť dopytu z predchádzajúceho dňa, teda $P_{t+1} = P_t + \beta_p D_t$, ($\beta_p > 0$).

Následne sa celý tento proces opakuje.

Na začiatku dňa ($t + 1$) vznikne nasledujúci systém, daný tvorcom trhu a chartistami:

$$\begin{cases} P_{t+1} = P_t + \beta_p [a(W - P_t) + h(\psi_{t+1} - g)], \\ \psi_{t+2} = (1 - c)\psi_{t+1} + c\beta_p [a(W - P_t) + h(\psi_{t+1} - g)]. \end{cases} \quad (3.23)$$

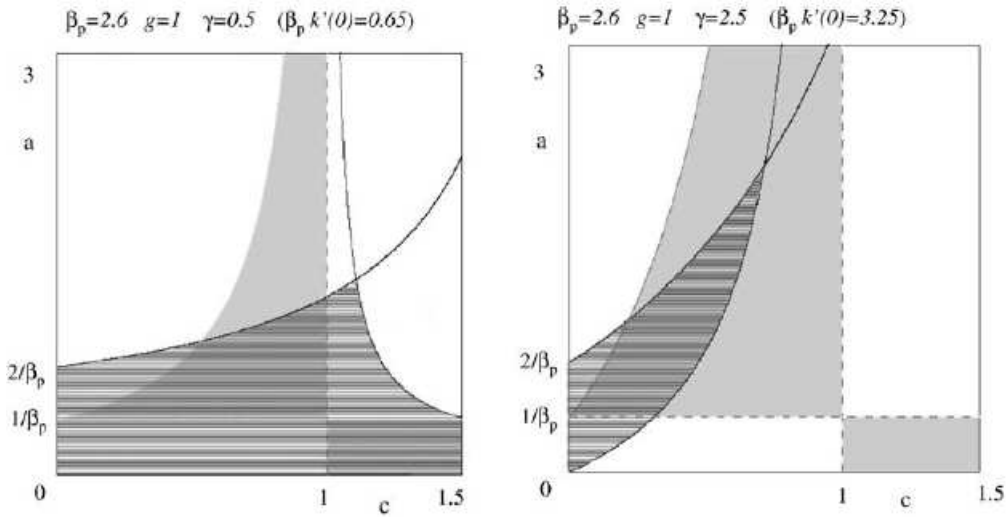
Cieľom autorov je načrtnúť globálnu analýzu systému (3.23), kde by vedeli odhadnúť oscilácie premenných aj v nestabilom stave.

Časový vývoj ceny a očakávaní chartistov máme teda daný dvojrozmerným nelineárnym diferenčným systémom $Q : (\psi, P) \rightarrow (\psi', P')$

$$Q : \begin{cases} \psi' = (1 - c)\psi + c\beta_p [a(W - P) + h(\psi - g)] \\ P' = P + \beta_p [a(W - P) + h(\psi - g)], \end{cases} \quad (3.24)$$

kde symbol ' označuje posun v čase.

Obr. 3: Stabilita modelu CDG [7] pre $\beta_p k'(0) \leq 1$ (vľavo) a $\beta_p k'(0) > 1$ (vpravo)



Tento systém má jediný pevný bod $(\bar{\psi}, \bar{P}) = (0, W + 1/ah(-g))$. V ekvilibriu je teda dopyt fundamentalistov $-h(-g)$ (> 0) a chartistov $h(-g)$ (< 0). Toto znamená, že fundamentalisti sú čistí kupci, pokiaľ je cena pod odhadom dlhodobého priemeru a chartisti sú čisto predávajúci. Nie je to ale úplné ekvilibrium tohoto systému. Model je totiž iba čiastkový, neberie do úvahy celú dynamiku trhu, napríklad dynamiku alternatívneho aktíva, čo by viedlo na trojrozmerný systém. Zavedieme logaritmus odchýlky ceny $p = P - \bar{P}$ a dostaneme systém $T : (\psi, p) \rightarrow (\psi', p')$ daný vzťahom

$$T : \begin{cases} \psi' = (1 - c)\psi + c\beta_p[ap - k(\psi)] \\ p' = p - \beta_p[ap - k(\psi)], \end{cases} \quad (3.25)$$

kde $k(\psi) = h(\psi - g) - h(-g)$ a tento systém má jediný pevný bod $O = (0, 0)$.

V modeli CDG sa dajú odvodiť nasledovné podmienky pre stabilitu pevného bodu:

$$\begin{cases} a\beta_p(2 - c) < 2(2 - c) + 2c\beta_p k'(0), \\ a\beta_p(1 - c) > c[\beta_p k'(0) - 1]. \end{cases}$$

Na obrázku č. 3 vidíme región stability pevného bodu pre $0 < c \leq 1$ a $a > 0$. Tmavosivá plocha ukazuje región stability a bledosivá región neinvertibility, ktorý je pre nás nepodstatný.

3.3.1 Porovnanie modelov CDG a BEW

Teraz sa pozrieme na modely CDG a BEW. Budeme si všímať tvorbu očakávaní a dopytov týchto dvoch modelov. Samozrejme musíme vziať do úvahy to, že model CDG je spracovaný všeobecne pre všetky aktíva, zatiaľ čo my sme zvedaví iba na ich časť, výmenné kurzy. Akciám či dlhopisom sa v tejto práci venovať nebudeme. Z tohoto dôvodu sa nebudeme ďalej zaoberať bezrizikovým aktívom. Predpokladáme teda, že $g_t = 0$ a z toho dostávame aj $k(\psi) = h(\psi)$.

Dopyt fundamentalistov je daný v modeli CDG vzťahom (3.19). Vidíme, že je závislý od rozdielu ceny a jej rovnovážnej hodnoty. Toto sa veľmi podobá aj úvahe z modelu BEW, kde je dopyt fundamentalistov daný priamo odchýlkou ceny od ekvilbria $p_t = P_t - W$ (prevzali sme značenie z modelu CDG).

$$\text{CDG : } D_{f,t} = a(W_t - P_t) = -ap_t$$

$$\text{BEW : } D_{f,t} = -bp_t|p_t|$$

U chartistov je to trochu zložitejšie. Ich dopyt v modeli CDG máme daný vzťahom (3.21), pričom očakávania ψ_{t+1} sú dané rovnicou (3.20) a g_t v našom prípade kladieme rovné nule. Očakávania chartistov v modeli BEW pritom vieme vyjadriť ako $\psi_{t+1} = p_t - p_{t-1}$. Pri lepšom pohľade na rovnice očakávaní a po ich malej úprave vidíme, že sú pre $c = 1$ úplne identické.

$$\text{BEW : } \psi_{t+1} = p_t - p_{t-1}$$

$$\text{CDG : } \psi_{t+1} = \psi_t + c(P_t - P_{t-1}) - c\psi_t = p_t - p_{t-1}.$$

Taktiež by sa mohli rovnať aj dopyty chartistov, pokiaľ by sme zvolili funkciu $h(\psi_{t+1}) = a\psi_{t+1}$. Túto funkciu prípadne môžeme rozšíriť o činiteľ $(1 - |\psi_{t+1}|)^+$, ktorý modifikoval model BEW. Pre náš prípad je tento modifikovaný model BEW vhodnejší, kvôli tomu, že aj v modeli CDG je dopyt chartistov nelineárny.

Pre obidva modely dokonca platí aj predpis

$$p_{t+1} = p_t + A(D_{c,t} + D_{f,t}).$$

Pre porovnanie teda dostávame nasledovné rovnice:

BEW pri predpokladoch $g_t = 0$ a $c = 1$:

$$D_{f,t} = -b|p_t|p_t$$

$$D_{c,t} = a\psi_{t+1}(1 - |\psi_{t+1}|)^+$$

$$\psi_{t+1} = p_t - p_{t-1}$$

CDG:

$$D_{f,t} = -bp_t$$

$$D_{c,t} = h(\psi_{t+1})$$

$$\psi_{t+1} = \psi_t + aD_{t-1}$$

Môžeme teda povedať, že model BEW má menej sofistikovaných agentov. Chartistami očakávaná cena je priamo úmerná poklesu alebo nárastu ceny v predchádzajúcom časovom období, zatiaľ čo agenti v modeli CDG porovnávajú skutočný a očakávaný nárast alebo pokles ceny v minulej perióde. Fundamentalisti v modeli CDG poznajú presnú rovnovážnu hodnotu kurzu. V modeli BEW majú iba určitú predstavu o tejto hodnote.

3.4 Zhrnutie k diskretným modelom

Všetky modely oscilácií výmenných kurzov vychádzajú zo súboru chartistického a fundamentalistického správania sa agentov. Tí môžu, ale nemusia byť v modeli trvalo klasifikovaní a tým dostávame dva typy agentov.

Prvý typ agenta je stály, nemení svoje správanie, ale mení sa intenzita jeho aktivity (model FF). Druhý typ agenta je nestály, môže meniť svoje správanie na základe situácie, ktorá je na trhu a tým sa neustále mení počet chartistov a fundamentalistov (modely BEW a CDG). Matematicky sa obidva prípady modelujú pomocou nezáporných váh, až na to, že pri prvom type agentov je súčet váh 1 a v druhom prípade to platiť nemusí. Toto obmedzenie sa však dá prípadne odstrániť použitím parametra celkovej aktivity.

Matematicky špecifikovať model znamená definovať dynamiku tvorby váh a intenzity správania agentov. Taktiež treba definovať vplyv váh na ponuku, prípadne dopyt po mene a samozrejme aj na samotnú cenu výmenného kurzu.

Nárast ceny od jej rovnovážnej hodnoty je vo všetkých modeloch lineárne závislá od previsu dopytu nad ponukou a pokles je naopak lineárne závislý od previsu ponuky nad dopytom. Pre každý typ agenta, jeho očakávania, váhy a správanie sa odvodzuje rovnica dopytu, resp. ponuky. Základná schéma tvorby týchto modelov teda vyzerá takto:

$$\text{očakávania} \rightarrow \text{váhy} \rightarrow \text{dopyt/ponuka} \rightarrow \text{cena.}$$

Interpretácia tejto schémy je nasledovná: na základe očakávaní agentov si odvodíme váhy, pomocou ktorých vieme vytvoriť rovnice dopytu alebo ponuky.

Podľa týchto rovníc sa agenti správajú a tým ovplyvňujú cenu výmenného kurzu na trhu.

Najpodstatnejšie rozdiely medzi modelmi sú v tvorbe očakávaní agentov, predovšetkým chartistov.

4 Modely so spojitým časom

Základným predpokladom modelov so spojitým časom je to, že sú rozhodnutia agentov rozptýlené v čase. Veľkou výhodou týchto modelov je, že sa z matematického hľadiska lepšie analyzujú a spracúvajú.

Model BEW sa drží predpokladu, že sa agenti rozhodujú kedykoľvek v čase a ich rozhodnutia sú v čase rovnomerne rozdelené. Vyšetrovanie spojitej verzie tohoto modelu [6], [10] predchádzalo vyšetrovaniu diskkrétnej verzie [2] a jej nevýhodou je, že v spojitom čase vedie k diferenciálnej rovnici s oneskorením. Na rozdiel od neho dostávame z modelu CDG systém obyčajných diferenciálnych rovníc. Pre porovnanie nás v nasledujúcej podkapitole bude zaujímať kvalitatívna analýza tohoto modelu.

4.1 Model CDG

Systém diferenčných rovníc (3.25) si vieme prepísať na systém obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -c\psi - c\beta_p[ap - \gamma \arctan \psi] \\ \dot{p} &= -\beta_p[ap - \gamma \arctan \psi],\end{aligned}\tag{4.1}$$

keď $(\psi' - \psi) \rightarrow \dot{\psi}$ a $(p' - p) \rightarrow \dot{p}$ a parametre vyzerajú pre pripomenutie nasledovne: $0 < c \leq 1$, $\beta_p > 0$, $a > 0$ a $\gamma \in R$.

Pre zjednodušenie si označíme $A = \beta_p a$ a $B = \beta_p \gamma$. V našom prípade ešte položíme $c = 1$. V predchádzajúcej kapitole pri diskrétnom čase sme totiž zistili, že pri takejto hodnote parametra c je model veľmi podobný modelu BEW. Zaujímá nás preto, ako sa v tomto prípade správa systém v spojitom čase. Model po týchto úpravách teda vyzerá takto:

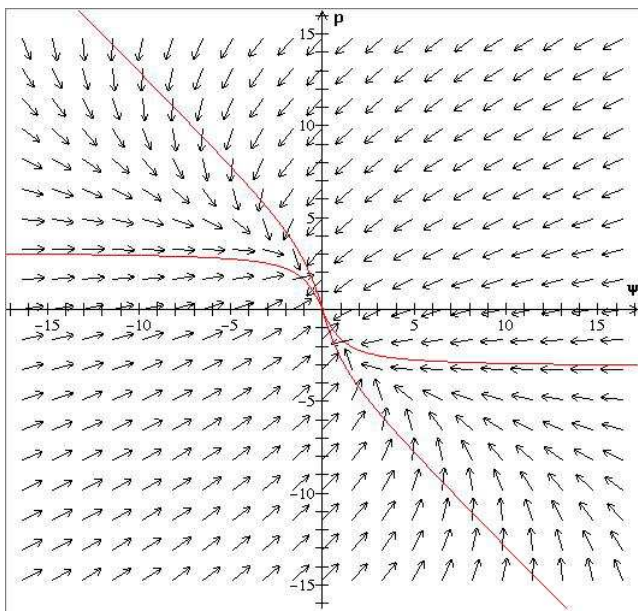
$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -\psi - Ap + B \arctan \psi \\ \dot{p} &= -Ap + B \arctan \psi.\end{aligned}$$

Systém má jediný pevný bod: $\psi = 0$, $p = 0$. Pomocou determinantu matice parciálnych derivácií v pevnom bode $[0, 0]$ dostávame vlastné čísla

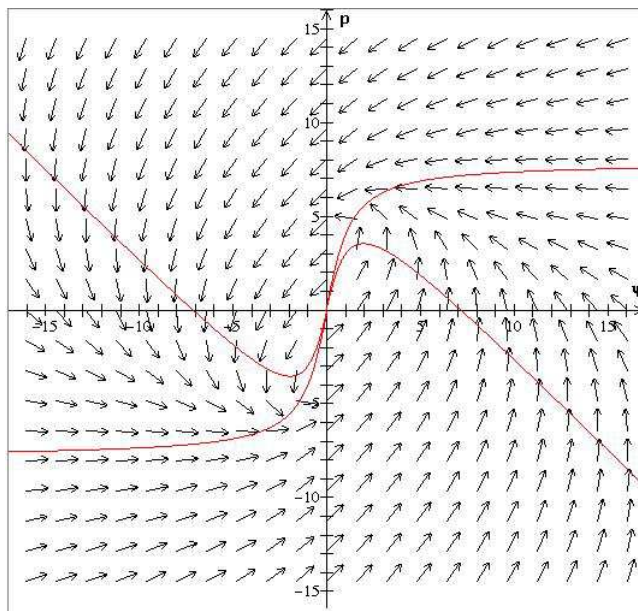
$$\lambda_{1,2} = \frac{B - 1 - A \pm \sqrt{(1 - B + A)^2 - 4A}}{2}.\tag{4.2}$$

V závislosti od veľkosti parametrov môžu byť vlastné vektory reálne aj imaginárne s rôznymi znamienkami ich reálnych častí. Rozoberieme jednotlivé možnosti rovnice (4.2):

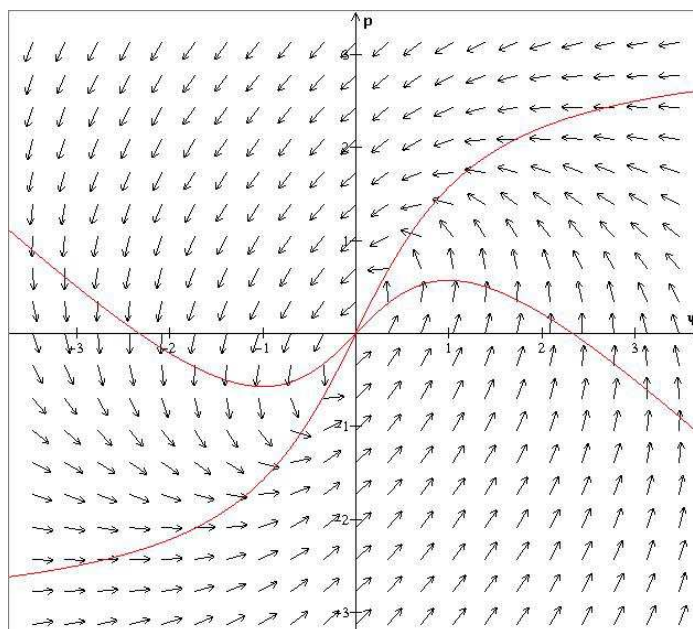
Obr. 4: Stabilný uzol



Obr. 5: Nestabilný uzol



Obr. 6: Centrum



1. Stabilný uzol

Tento prípad nastane za podmienok

$$(1 - B + A)^2 > 4A \quad \wedge \quad (B - A) < 1.$$

Na obrázku č. 4 vidíme príklad stabilného uzla s koeficientami $\beta_p = \frac{1}{2}$, $\gamma = -4$ a $a = 2$, zvolenými podľa daných podmienok.

2. Nestabilný uzol

Nestabilný uzol nastane v prípade

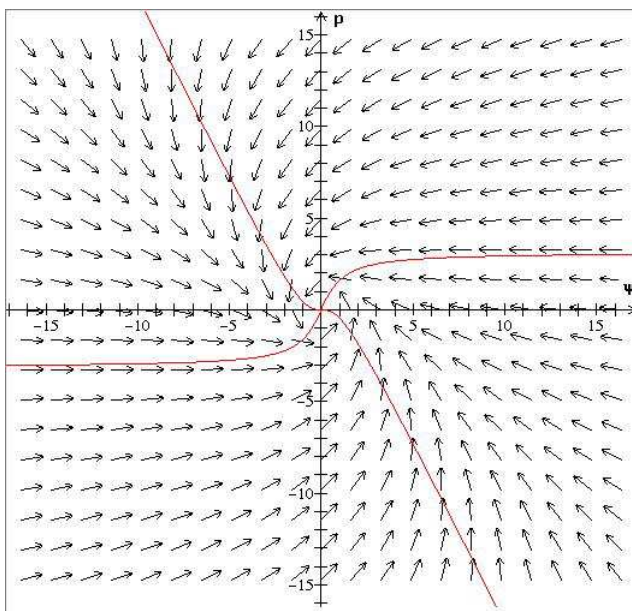
$$(1 - B + A)^2 > 4A \quad \wedge \quad (B - A) > 1.$$

Zvoliť môžeme koeficienty napríklad $\beta_p = 1$, $\gamma = 5$ a $a = 1$, obrázok č. 5.

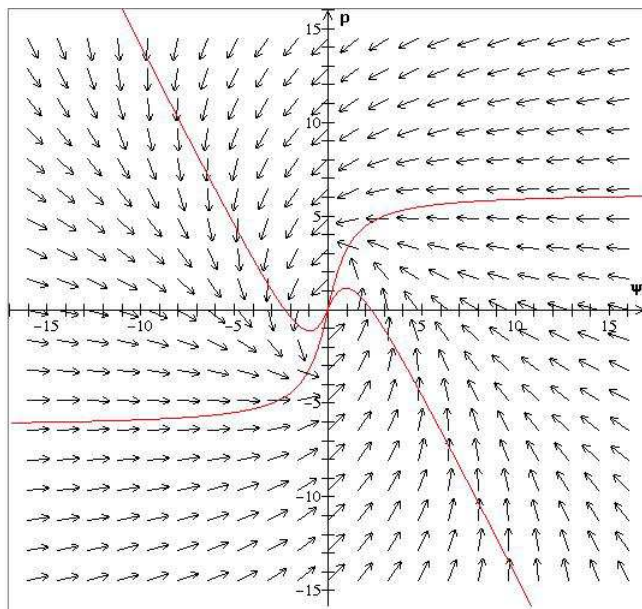
3. Sedlo

Možnosť sedla v pevnom bode pre náš systém nenastane nikdy. Tento prípad by nastal vtedy, keby mali vlastné čísla opačné znamienka. Tam

Obr. 7: Stabilní fokus



Obr. 8: Nestabilný fokus



by ale z čitateľa rovnice (4.1) muselo platiť

$$|B - 1 - A| < \sqrt{(1 - B + A)^2 - 4A}.$$

Keď si pre zjednodušenie označíme $(B - 1 - A) = C$, vidíme, že je tento prípad nemožný:

$$|C| < \sqrt{C^2 - 4A}.$$

4. Centrum

Túto možnosť dostávame, keď

$$(1 - B + A)^2 < 4A \quad \wedge \quad (B - A) = 1,$$

čo je na obrázku č. 6, $\beta_p = 1$, $\gamma = 2$ a $a = 1$. V tomto prípade ale nevieme úplne rozhodnúť, či prípad centra nastane. Centrum dostávame pri lineárnych systémoch a ten náš je nelineárny.

5. Stabilný fokus

Stabilný fokus nám vyjde za podmienok

$$(1 - B + A)^2 < 4A \quad \wedge \quad (B - A) < 1.$$

Príkladom je obrázok č. 7, ktorý je kreslený s koeficientami $\beta_p = \frac{1}{2}$, $\gamma = 2$ a $a = 1$.

6. Nestabilný fokus

Za podmienok

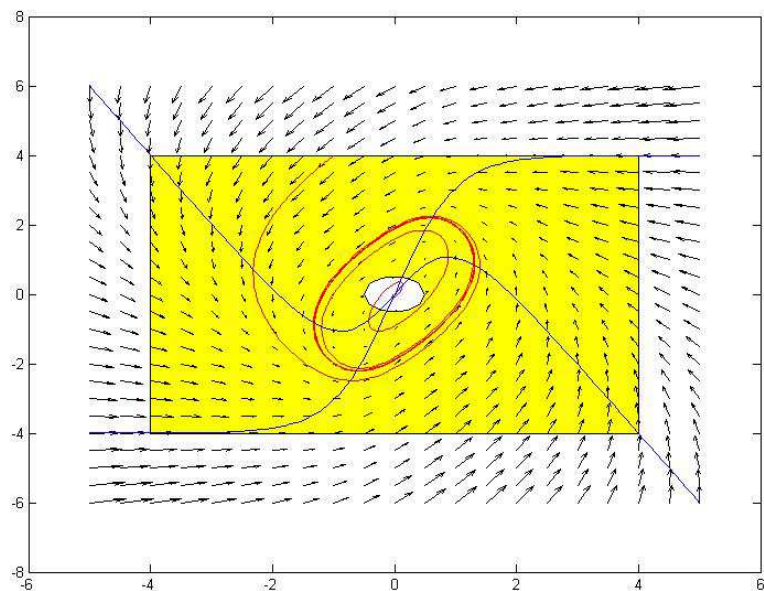
$$(1 - B + A)^2 < 4A \quad \wedge \quad (B - A) > 1$$

vidíme na obrázku č. 8 príklad nestabilného fokusu, pri koeficientoch $\beta_p = \frac{1}{4}$, $\gamma = 8$ a $a = 2$.

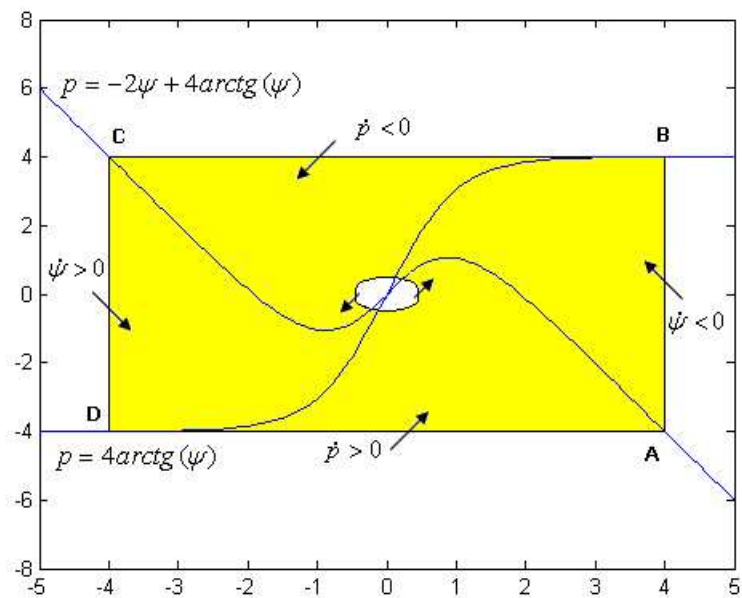
Na posledný prípad sa ale pozrieme bližšie. Použitím Poincaré-Bendixsonovej vety v prípade nestabilného fokusu dokážeme existenciu limitného cyklu, ku ktorému smerujú všetky trajektórie tohoto systému. Pre použitie tejto vety potrebujeme zdefinovať pojem limitnej množiny.

Limitná množina [14]:

Označme $\gamma(\psi^0, p^0)$ trajektóriu bodu (ψ^0, p^0) . Bod y nazývame ω -limitným bodom trajektórie $\gamma(\psi^0, p^0)$, ak existuje postupnosť t_j , kde $j \rightarrow +\infty$ taká, že

Obr. 9: Množina Q označená žltou farbou

Obr. 10: Dôkaz limitného cyklu



$\begin{pmatrix} \psi(t_j, \psi^0) \\ p(t_j, p^0) \end{pmatrix} \rightarrow y$. Množina všetkých ω -limitných bodov trajektórie $\gamma(\psi^0, p^0)$ sa nazýva ω -limitná množina tejto trajektórie a označuje sa $\omega(\psi^0, p^0)$.

Poincaré-Bendixsonova veta [14]:

Nech Q je (pozitívne) invariantná množina systému (4.1) taká, že platí $(\psi_{t_0}, p_{t_0}) \in Q \Rightarrow (\psi_t, p_t) \in Q, \forall t \geq t_0$ a Q má konečný počet stacionárnych bodov. Ak je kladná časť trajektórie $\gamma(\psi^0, p^0)$, ktorá vojde do Q ohraničená, potom je jedno z nasledujúcich tvrdení pravdivé:

- ω -limitná množina je jeden bod a tento bod je zároveň stacionárnym bodom.
- $\omega(\psi^0, p^0)$ trajektórie $\gamma(\psi^0, p^0)$ je neprázdna množina a v Q sa nenachádzajú žiadne stacionárne body.
- $\omega(\psi^0, p^0)$ pozostáva zo stacionárnych bodov.

Pre použitie tejto vety potrebujeme nájsť invariantnú množinu Q . K tomu použijeme Lemu [13]:

Ak je lineárny systém asymptoticky stabilný, potom existuje pozitívne definitná kvadratická forma, ktorej derivácia je negatívne definitná.

Keďže je pevný bod nestabilný fokus, transformáciou $t \mapsto -t$ sa tento bod zmení na stabilný fokus. Vlastnosť z Lemy zostáva lokálne zachovaná aj pre nelineárny systém. Pre systém (4.1) teda existuje pozitívne definitná kvadratická forma V , ktorej derivácia pozdĺž trajektórií je pozitívne definitná, teda platí

$$\frac{d}{dt}(\psi_t, p_t)^T V(\psi_t, p_t) \geq c(|\psi_t|^2 + |p_t|^2).$$

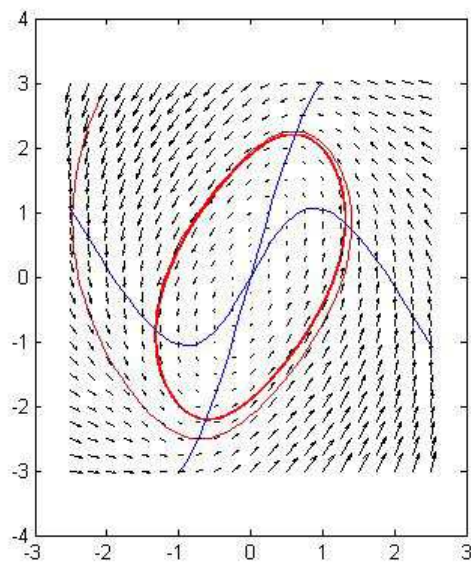
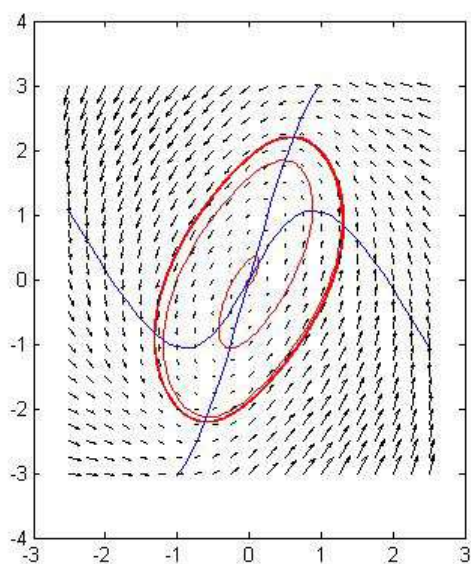
Geometricky to znamená, že existuje také c , že elipsa

$$E = (\psi_t, p_t)^T V(\psi_t, p_t) = c$$

je pretínaná všetkými trajektóriami smerom zvnútra von.

Množinu Q definujeme ako oblasť zvonka ohraničenú priamkami $\psi = \pm 4$ a $p = \pm 4$, z ktorej je vyrezané vnútro elipsy E (obrázok č. 9).

Dokázali sme, že trajektórie nemôžu opustiť množinu Q cez elipsu E . Musíme ešte overiť, či trajektórie neopustia množinu Q cez jej vonkajšiu hranicu. Pomôžeme si pri tom obrázkom č. 10. Vidíme na ňom obidve izokliny a body,

Obr. 11: Limitný cyklus: vonkajšia trajektória, kde $(\psi^0, p^0) = [-2, 3]$ Obr. 12: Limitný cyklus: vnútorná trajektória, kde $(\psi^0, p^0) = [-0.01, 0.01]$ 

v ktorých pretínajú množinu Q . Vonkajšia hranica tejto množiny pozostáva z úsečiek AB, BC, CD a DA. Musíme teda preveriť 4 prípady, pričom najskôr overíme vnútorné body týchto úsečiek:

- *AB*:
Platí $p > -2\psi + 4 \arctan(\psi)$ a z toho vidíme, že $\dot{\psi} < 0$ a teda na tej strane obdĺžnika trajektórie do množiny Q vstupujú.
- *BC*:
Platí $p > 4 \arctan(\psi)$, z toho $\dot{p} < 0$ a teda trajektórie aj na tejto strane vstupujú do Q .
- *CD*:
Platí $p < -2\psi + 4 \arctan(\psi)$, $\dot{\psi} > 0$ a trajektórie opäť vstupujú do nami definovanej množiny.
- *DA*:
Zisťujeme to isté, teda $p < 4 \arctan(\psi)$, $\dot{p} > 0$, trajektórie vstupujú.

Zostáva nám dokázať, že trajektória nemôže opustiť množinu Q v niektorom z vrcholov. Tento dôkaz vykonáme pre bod A, pre ostatné body je analogický.

V bode A platí $\dot{\psi} = 0$ a $\dot{p} > 0$. Nech $(\psi_{t_0}, p_{t_0}) = A$. Pre $t > t_0$ platí $p > -4$. Ak by platilo $\psi_t > 4$, muselo by existovať $\psi_s > 0$ pre nejaké $0 < s < t$, čo je nemožné, pretože (ψ_s, p_s) je nad izoklinou, nad ktorou je $\dot{\psi} < 0$.

Týmto sme dokázali, že trajektórie nikdy neopustia množinu Q . A pretože táto množina neobsahuje pevný bod, podľa Poincaré-Bendixonovej vety platí druhé tvrdenie, že ω -limitnou množinou je periodická trajektória. Numerická simulácia (obrázky č. 11 a 12) naznačuje, že periodická trajektória je jediná a je ω -limitnou množinou všetkých trajektórií s výnimkou pevného bodu. Na obrázku č. 9 vidíme tieto trajektórie priamo v množine Q .

Ak porovnáme spojitú verziu modelu CDG s modelom BEW spracovaným v [6], dostaneme podobné závery. Nárast váhy chartistov (v modeli CDG reprezentované parametrom B) vedie k nestabilite rovnováhy. Ak je systém nestabilný, dochádza k periodickým osciláciám.

Záver

Cieľom tejto práce bolo porovnať a bližšie spoznať modely fluktuácií výmenných kurzov vychádzajúce z modelov heterogénnych agentov. Rozobrali sme tu tri modely tohoto typu a hľadali sme súvislosti medzi nimi. Zistili sme, že každý z modelov vychádza z určitých predpokladov a očakávaní, ktoré ho charakterizujú. Agenti totiž môžu byť trvalo klasifikovaní do tried, alebo s časom menia svoje správanie, ich očakávania môžu mať lineárny aj nelineárny tvar, niektorí agenti sú sofistikovanejší a prispôsobivejší ako druhí. Každý model je niečím výnimočný, čo sme samozrejme zhrnuli aj v predchádzajúcich kapitolách.

V modeli FF sú dané očakávania portfólio manažérov ako vážený priemer očakávaní chartistov a fundamentalistov. Váhy jednotlivých tried dávajú v súčte 1. Agenti v tomto modeli sú trvalo klasifikovaní a nemenia svoje správanie. Model BEW je výnimočný práve tým, že v ňom agenti môžu meniť svoje správanie a očakávania v závislosti od situácie na trhu, čiže od momentálnej odchýlky výmenného kurzu od rovnovážnej hodnoty. Najsofistikovanejších agentov má model CDG, kde si agenti tvoria svoje očakávania nielen na základe odchýlky od ekvilibria, ale berú do úvahy aj svoje minulé očakávania.

Model CDG v spojitom čase vedie na dvojrozmerný systém obyčajných diferenciálnych rovníc. V poslednej kapitole je jeho kvalitatívna analýza a dôkaz existencie periodickej trajektórie v prípade nestabilného fokusu pomocou Poincaré-Bendixsonovej vety. Tento dôkaz je podporený aj numerickou simuláciou.

Literatúra

- [1] Arnol'd, V. I., Teória katastrof, 1983, Vydavateľstvo Moskovskej univerzity, Moskva. Slovenský preklad, 1986, Alfa, Bratislava
- [2] Boďová, K., 2004, Oscillations of the foreign exchange rate and the devil's staircase, Diplomová práca, FMFI UK
- [3] Bokes, T., 2007, Short time oscillations of exchange rates, Diplomová práca, FMFI UK
- [4] Brunovský, P., Diferenčné a diferenciálne rovnice, Študijný materiál, FMFI UK, Bratislava, dostupné na <http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/skripta/>
- [5] Brunovský, P., Erdélyi, A., Walther, H. O., Short-term fluctuations of exchange rates
- [6] Brunovský, P., Erdélyi, A., Walther, H. O., 2004, On a model of a currency exchange rate-local stability and periodic solutions, *Journal of Dynamics and Differential Equations* 16, pp. 393-432
- [7] Chiarella, C., Dieci, R., Gardini, L., 2002, Speculative behaviour and complex asset price dynamics: a global analysis, *Journal of Economic Behaviour and Organization* 49, pp. 173-197
- [8] De Grauwe, P., Grimaldi, M., 2002, The exchange rate and its fundamentals. A chaotic perspective, CESifo Working Paper 639
- [9] De Grauwe, P., Grimaldi, M., 2005, Heterogeneity of agents, transaction costs and the exchange rates, *Journal of Economic Dynamics and Control* 29, pp. 691-719
- [10] Erdélyi, A., 2003, A delay differential equation model of oscillations of exchange rates, Diplomová práca, FMFI UK
- [11] Frankel, J. A., Froot, K. A., 1991, Chartists, Fundamentalists and Trading in the Foreign Exchange Market, *The American Economic Review, AEA Papers and Proceedings* 80, pp. 181-185
- [12] Frankel, J. A., Froot, K. A., 1990a, Chartists, fundamentalists and the demand for dollars, In: *Private behaviour and government policy in interdependent economies*, Courakis, A. S., Taylor, M. P. Editors, Oxford University Press, New York, pp. 73-126

- [13] Hale, J. K., 1969, Ordinary Differential Equations, Wiley, New York
- [14] Hale, J. K., Kocak, H., 1991, Dynamics and Bifurcations, Springer-Verlag, New York
- [15] Hommes, C. H., 2006, Heterogeneous agent models in economics and finance, In: Handbook of computational economics 2, Tesfatsion, L., Judd, K. L. Editors, Elsevier, pp. 1009-1186.
- [16] Jones, B. D., 1999, Bounded rationality, Annual Review of Political Science 2, pp. 297-321
- [17] Rubinstein, A., 1998, Modeling Bounded Rationality, The MIT press, Massachusetts
- [18] Szolgayová, J., 2006, Diskrétny model fluktuácií výmenného kurzu, Diplomová práca, FMFI UK

Prílohy

A. zdrojový kód obrázku č. 9 v programe Matlab

```
clear
clc
n=500;
h=0.1;
p(1)=4;
psi(1)=-1;
for i=2:n+1
    psi(i)=psi(i-1)+h*(-psi(i-1)-0.5*p(i-1)+2*tanh(psi(i-1)));
    p(i)=p(i-1)+h*(-0.5*p(i-1)+2*tanh(psi(i-1)));
end

p2(1)=0.01;
psi2(1)=-0.01;
for i=2:n+1
    psi2(i)=psi2(i-1)+h*(-psi2(i-1)-0.5*p2(i-1)+2*tanh(psi2(i-1)));
    p2(i)=p2(i-1)+h*(-0.5*p2(i-1)+2*tanh(psi2(i-1)));
end

l=-4:0.001:4;
plot(l, 4, 'k');
hold on;
plot(l, -4, 'k');
plot(-4, l, 'k');
plot(4, l, 'k');

[x1, x2] = meshgrid(-5:0.5:5, -6:0.5:6);
x1dot =-x1-0.5*x2+2*tanh(x1);
x2dot=-0.5*x2+2*tanh(x1);
quiver(x1, x2, x1dot, x2dot, 'k')

plot(psi,p, 'r')
plot(psi2,p2, 'r')

x=-5:0.1:5;
plot(x, -2*x+4*tanh(x), 'b')
k=-5:0.1:5;
plot(k, 4*tanh(k), 'b')
```


B. zdrojový kód obrázku č. 11 v programe Matlab

```
clear
clc
n=1000;
h=0.1;
p(1)=3;
psi(1)=-2;
for i=2:n+1
    psi(i)=psi(i-1)+h*(-psi(i-1)-0.5*p(i-1)+2*tanh(psi(i-1)));
    p(i)=p(i-1)+h*(-0.5*p(i-1)+2*tanh(psi(i-1)));
end

[x1, x2] = meshgrid(-2.5:0.25:2.5, -3:0.25:3);
x1dot =-x1-0.5*x2+2*tanh(x1);
x2dot=-0.5*x2+2*tanh(x1);

plot(psi,p, 'r')
hold on;
x=-2.5:0.1:2.5;
plot(x, -2*x+4*tanh(x), 'b')
k=-1:0.1:1;
plot(k, 4*tanh(k), 'b')
quiver(x1, x2, x1dot, x2dot, 'k')
```

C. zdrojový kód obrázku č. 12 v programe Matlab

```
clear
clc
n=1000;
h=0.1;

p(1)=0.01;
psi(1)=-0.01;
for i=2:n+1
    psi(i)=psi(i-1)+h*(-psi(i-1)-0.5*p(i-1)+2*tanh(psi(i-1)));
    p(i)=p(i-1)+h*(-0.5*p(i-1)+2*tanh(psi(i-1)));
end

[x1, x2] = meshgrid(-2.5:0.25:2.5, -3:0.25:3);
x1dot =-x1-0.5*x2+2*tanh(x1);
x2dot=-0.5*x2+2*tanh(x1);

plot(psi,p, 'r')
hold on;
x=-2.5:0.1:2.5;
plot(x, -2*x+4*tanh(x), 'b')
k=-1:0.1:1;
plot(k, 4*tanh(k), 'b')
quiver(x1, x2, x1dot, x2dot, 'k')
```