

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

Zaistené stratégie

Bc. Tomáš Miklošovič

Diplomová práca

Bratislava

2010



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

Zaistené stratégie

Diplomová práca

Bc. Tomáš Miklošovič

Aplikovaná matematika
Ekonomická a finančná matematika

Vedúci práce: Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2010

Čestné prehlásenie:

Čestne prehlasujem, že túto diplomovú prácu som vypracoval sám s využitím svojich poznatkov a uvedenej literatúry.

Bratislave, 15. januára 2010

Tomáš Miklošovič

Podakovanie:

Týmto by som chcel poďakovať všetkým učiteľom, ktorí mi poskytli matematický a ekonomický základ, vďaka ktorému som pochopil danú problematiku.

Zvlášť by som chcel poďakovať vedúcemu diplomovej práce Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD., ktorý mi poskytoval cenné rady a viedol ma pri písaní tejto diplomovej práce.

Taktiež by som chcel poďakovať svojej rodine a priateľke, ktorí ma neustále podporovali.

Abstrakt

Miklošovič, Tomáš. Zaistené stratégie [diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave.

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Vedúci práce: Mgr. Igor Melicherčík, PhD. Stupeň odbornej kvalifikácie: Magister.

Bratislava: FMFI, 2010, 65 s.

Celý finančný sektor sa od 70 - tych rokov minulého storočia dynamicky rozvíjal. Aj preto si táto situáciu vynútila vznik manažmentu pre riadenie rizika. V súčasnej dobe globalizovaných procesov sa manažment pre riadenie rizika priamo etabloval do vedenia bánk a ďalších, i nebankových inštitúcií.

Táto práca sa zaoberá optimalizáciou dynamického portfólia a alokáciou finančných aktív investora, ktorý sa pri manažmente portfólia riadi s jedným najčastejšie sa vyskytujúcim nástrojom na meranie trhového rizika – Value at Risk (VAR). Predstavíme si niektoré zaistené stratégie a ich základné porovnanie. Ďalej si rozoberieme stratégiu na alokácii majetku do rizikových aktív, ktorá sa zakladá na variančno-kovariančnej metóde. Túto metódu publikovali Suleyman Basak a Alex Shapiro. Popíšeme si ju, vyjadríme základné vzťahy a načrtneme postup práce pri jej aplikácii. Ďalej ju budeme testovať na fiktívnych i reálnych dátach. Nakoniec popíšeme naše závery, ku ktorým sme dospeli pri použití danej stratégie.

Kľúčové slová: manažment pre riadenie rizika, VAR, optimalizácia, portfólio, volatilita.

Obsah

Úvod.....	3
1. Metódy riešenia Value at Risk.....	5
1.1. História a súčasnosť VAR.....	5
1.2. Metódy výpočtu Value at Risk.....	5
1.2.1. Metóda historickej simulácie.....	6
1.2.2. Variančno-kovariančná metóda.....	6
1.2.3. Monte Carlo metóda.....	8
2. Zaistené stratégie.....	10
2.1. CPPI.....	10
2.1.1. Matematický aparát.....	10
2.1.2. Modifikácie CPPI metódy.....	11
2.1.3. Význam multiplikátora.....	11
2.1.4. Gap risk.....	12
2.2. OBPI.....	12
2.2.1. Matematický aparát.....	12
2.3. Porovnanie CPPI a OBPI.....	13
3. Optimálne rozdelenie aktív.....	15
3.1. Predstavenie modelu.....	15
3.2. Ekonomický model.....	15
3.3. Modelovanie Value at risk – manažment pre riziko.....	16
3.4. Optimalizácia Value at risk – manažment pre riziko.....	17
3.5. Vlastnosti VAR-MR.....	21
3.5.1. Výpočet ξ	22
3.5.2. Výpočet $\xi_{\text{Benchmark}}$	23
3.5.3. Výpočet ξ_{PI}	24
3.5.4. Výpočet ξ_{VAR}	24
3.6. Očakávaná strata.....	25
3.7. Optimálna hodnota portfólia.....	26
3.7.1. Citlivosť na parameter α	30
3.7.2. Citlivosť na parameter W	31
3.7.3. Citlivosť na čas t	32
3.7.4. Citlivosť na parameter γ	33
3.7.5. Citlivosť na parameter κ	34
4. Použitie VAR-MR.....	36
4.1. Postup pri výbere aktív.....	36

4.2. Výpočet	36
4.3. Vývoj rizikového a bezrizikového aktíva.....	39
4.4. Aplikácia na reálne dáta	42
4.5. Simulácie	43
4.6. Sledovanie vývoja	50
Záver	59
Literatúra.....	60
Príloha.....	62
Výpočet ξ_{PI}	62
Výpočet ξ_{VAR}	64

Úvod

Subjekty finančného sektora sa momentálne nachádzajú v neľahkej pozícii. Podnikateľské prostredie je premenlivé a samotné spoločnosti v tejto dobe sú vystavené nejistej budúcnosti, keď potenciálna výška zisku, respektíve straty sú neurčité. Ako nastaviť možné mantinely, aby sa predišlo stratám z prostriedkov klientov alebo vlastného kapitálu? Ako vybrať to správne rozhodnutie, aby sme prišli k požadovanému cieľu? Na tieto otázky sa snaží odpovedať manažment pre riadenie rizika. Používa veľa nástrojov ako merať a riadiť riziko, ako sa pripraviť a obmedziť možné straty, poprípade ako zvýšiť možné zisky.

Tu sa zamerajme na jednu aktuálnu otázku. Koľko môže maximálne klient stratiť s určitou pravdepodobnosťou za vopred daný čas, keď investuje do vybranej množiny rôznych aktív? Na túto otázku nám poskytne odpoveď Value at Risk (VAR). Predstavuje štandardný nástroj na meranie a riadenie trhového rizika, jeden z najbežnejších a najrozšírenejších, ktorý sa používa v bankovom sektore pre manažment.

Od publikovania prevratnej práce Markowitza „Portfolio Selection“ sa riziko finančných aktív meria štandardnou odchýlkou ich výnosov. Základom manažmentu je Markowitzova teória portfólia, na ktorej pilieroch sa vybuodovala aj metóda VAR. Táto miera rizika predstavuje v podstate opisnú štatistickú charakteristiku. VAR je jediné číslo; odhadované rozdelenie možných ziskov, respektíve strát, ktoré s určitou pravdepodobnosťou môže portfólio dosiahnuť za určité časové obdobie. Ak je 95%-ný mesačný VAR portfólia rovný 1 milión EUR, znamená to, že portfólio s 95%-nou pravdepodobnosťou nepresiahne stratu 1 milión EUR počas najbližšieho mesiaca. Dané výpočty môžeme podľa typu subjektu kalibrovať na rôzne hladiny pravdepodobnosti a časovej diferencie.

Na druhej strane sa nachádza zaistená stratégia. Ak investor nechce prísť o svoje peniaze, môže použiť zaistenú stratégiu. Jediné, čo musí urobiť, je zvoliť si určitú hodnotu, ktorá mu zostane na konci stratégie. Najčastejšie je to určité percento z počiatočného kapitálu. Potom si stačí iba vybrať, s akou stratégiou bude zhodnocovať svoje peniaze.

Cieľ tejto diplomovej práce je otestovať stratégiu Value at risk – manažment pre riziko na reálnych dátach. Zhodnotiť úspešnosť stratégie a ukázať jej citlivosť od jednotlivých parametrov, ktoré vstupujú do tejto stratégie.

Diplomová práca je rozdelená do štyroch kapitol. V prvej časti, ktorá je čisto teoretická, si povieme niečo o histórii VAR, čo viedlo k vzniku a čo vedie k čoraz častejšiemu používaniu. Opíšeme základné metódy výpočtu a postupy, ktoré sa používajú pri riešení.

V druhej časti si definujeme zaistenú stratégiu, ako sa rozdeľujú, a ktoré sú najčastejšie používané. Zameriame sa na stratégie CPPI (constant proportion portfolio insurance) a OBPI (option based portfolio insurance). Popíšeme obe stratégie, porovnáme ich a poukážeme na nedostatky.

V tretej časti sa podrobne zameriame na jednu variančno-kovariančnú metódu, ktorú navrhli Suleyman Basak a Alex Shapiro v článku Value at Risk Based Risk management: Optimal policies and Asset Prices. Pozrieme sa na matematické pozadie

a vysvetlíme si postup ako prebieha prerozdelenie majetku. Budeme sa zaoberať citlivosťou stratégie na jednotlivé zmeny parametrov a ich ekonomické interpretácie.

Posledná časť predstavuje ťažisko tejto diplomovej práce. Za pomoci stratégie vysvetlenej v tretej kapitole, budeme simulovať jednotlivé portfólia. V tejto časti sa budú nachádzať empirické výsledky ako z fiktívnych dát, tak aj z reálnych dát. Zosumarizujeme si dané výsledky a poukážeme na niektoré úskalia, s ktorými sme sa stretli.

1. Metódy riešenia Value at Risk

1.1.História a súčasnosť VAR

Ako prvý sa pokúsil vyjadriť mieru na meranie rizika Francis Edgeworth a to už v roku 1888.¹ Až zánik Bretton-Woodského systému fixných menových kurzov v roku 1973 dodal nový impulz na rozvíjanie tejto teórie. Odrazu menový kurz mal potenciú obrovskej volatility a bolo nutné začať merať riziko menových kurzov a veľkého množstva derivátov, ktoré začali vznikať. V tomto roku bola publikovaná tak známa Black-Scholesova rovnica na výpočet ceny opcie. Aj tieto skutočnosti podnietili vývoj merania rizika.

Novodobé metódy Value at Risk sú pomerne mladé. Až na konci 80-tych rokov začali americké finančné inštitúcie merať riziko svojich portfólií. V tejto dobe dochádza k expanzii VAR. Najväčší prielom urobila spoločnosť J. P. Morgana, ktorá v roku 1994 vytvorila trhový štandard merania rizika. Od tej chvíle má vedecká i finančná obec záujem o meranie rizika hlavne pomocou VAR. V súčasnej dobe využívajú VAR nielen veľkí hráči na finančnom trhu, ale aj malé finančné inštitúcie a nefinančné podniky.

Po tomto prielome sa o VAR začali intenzívnejšie zaujímať aj regulačné úrady. V roku 1995 Bazilejský výbor bankového dohľadu navrhol, aby banky pri určovaní svojej kapitálovej primeranosti mohli používať svoje vlastné modely VAR, pričom budú zachovávať niektoré parametre, ktoré určil tento výbor. V tomto roku tak spravil aj Americký federálny rezervný fond. Momentálne aj účtovná závierka Európskej centrálnej banky počíta s VAR na krytie rizika v najbližšom časovom období.²

1.2.Metódy výpočtu Value at Risk

Napriek tomu, že VAR predstavuje jednoduchú predstavu možných udalostí, jeho výpočet je štatisticky náročný. Existuje veľa modelov na jeho výpočet, zatriediť by sme ich však mohli podľa jednotlivých typov odhadov rozdelenia výnosov portfólia. Tradične sa následne delia na tri skupiny:³

- historická simulácia,
- variančno-kovariančná metóda,
- Monte Carlo simulácia.

Pri počítaní ktoréhokoľvek VAR sa však môžeme dopracovať k neuspokojivým výsledkom. Existujú štúdie, napríklad (Beder, 1995) kde rozdiely jednotlivých vypočítaných Value at Risk odhadov boli až 14 násobné.

¹ vid' (Hallerbach, 1999)

² napríklad (ECB, 2009)

³ pozri (Jilek, 2000)

1.2.1. Metóda historickej simulácie

Táto metóda sa považuje za najjednoduchšiu. Je často používaná, pretože jej výpočet je časovo nenáročný a ľahko pochopiteľný. Ako základný predpoklad sa v tejto metóde využíva to, že výnosy si svoje rozdelenie zachovávajú počas celej doby sledovania a predikcie.

Hlavná podstata spočíva v tom, že si určíme výnosy daného aktíva v minulosti na základe historických dát. Z tejto časovej postupnosti si dokážeme vytvoriť empirickú distribučnú funkciu, z ktorej už vieme odhadnúť príslušný $(1-p) \cdot 100\%$ -ný kvantil. Ak počítame jednoduchové VAR, vypočítajú sa najskôr jednoduchové výnosy. V prípade, že odhadujeme 50-dňový odhad VAR, vypočítajú sa 50-dňové výnosy. Týchto N výnosov si zostupne zoradíme podľa veľkosti a z tejto postupnosti už iba určíme príslušný kvantil. Pri zisťovaní 95% VAR je to najbližšia hodnota pri $0,95 \times N$ zo zoradených výnosov. Ak zisťujeme nasledujúci VAR, tak znova počítame N výnosov, pričom sme pridali nové pozorovanie a odstránili najstaršie pozorovanie.

Podstatná je tiež dĺžka tzv. okna, to jest obdobie, z ktorého počítame jednotlivé odhady. Tu nastáva dostatočná voľnosť pre dizajnéra VAR, aby okno bolo primerané k našim cieľovým výsledkom. Nemalo by byť príliš malé, aby sme mali dostatočný počet dát na určenie potrebného kvantilu. Taktiež by nemalo byť príliš veľké, pretože v tomto prípade môže dochádzať ku skresleniu. Ako napríklad, keď výrazné zisky pred 10 rokmi majú takú istú váhu ako výrazné straty zaznamenané pred mesiacom.

Napriek tomu, že je táto metóda najľahšia a štatisticky najjednoduchšia má veľa odporcov, ktorí ju považujú za nespoľahlivú, až nezodpovednú. Ako problém sa javí extrémny výsledok v jeden deň, ktorý môže ovplyvniť všetky odhady, až kým dané pozorovanie nevypadne. Vytýkajú jej problém „dostatočne veľkého a zároveň malého“ okna. Ďalšie problémy spomínajú Manganelli & Engle, 2001.

1.2.2. Variančno-kovariančná metóda

Pri tejto metóde vychádzame z predpokladu, že poznáme rozdelenie výnosov. Už o tomto predpoklade sa vedú rozsiahle diskusie. Ak však tento predpoklad použijeme, tak potom už výpočet Value at Risk pomocou variančno-kovariančnej metódy nie je až taký zložitý.

Najjednoduchší predpoklad je, že výnosy trhových faktorov majú normálne rozdelenie. Následne potom aj potenciálne výnosy portfólia majú normálne rozdelenie. Ak vychádzame z tohto predpokladu, tak nám zostáva už iba určiť jeho parametre. Štandardnými matematickými operáciami sa následne zistí, aká strata bude dosiahnutá alebo prekročená v našej požadovanej pravdepodobnosti.

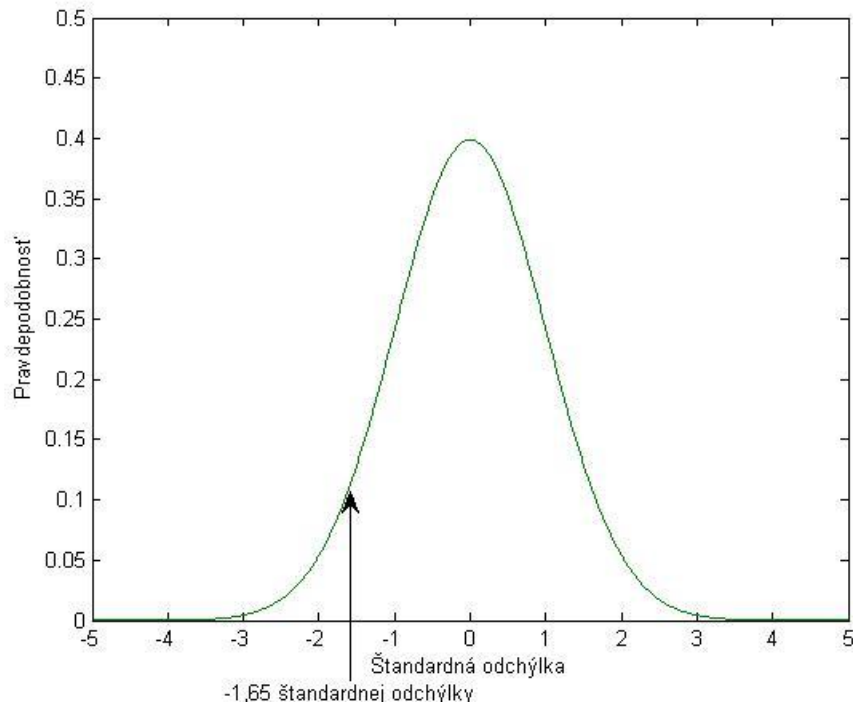
Pri drvinej väčšine výpočtov VAR sa vychádza z toho, že potenciálne výnosy majú normálne rozdelenie s priemerom μ a štandardnou odchýlkou σ . Následne vieme vypočítať, že výsledky menšie ako 1,65-krát štandardnej odchýlky od priemeru sa vyskytuje v 5% prípadoch. V rovnici to vyzerá nasledovne:

$$VAR_{95\%} = W \times (\mu - 1,65 \times \sigma),$$

kde

W - hodnota portfólia.

Taktiež si vieme určiť Value at Risk pri iných pravdepodobnostiach, stačí len použiť príslušné kvantily, ktoré sú tabulované. Aj keď vyjde záporný výsledok, vraví sa vždy o kladnej hodnote Value at Risk.



Obrázok 1: Distributívna funkcia normálneho rozdelenia.

Doteraz sme považovali štandardnú odchýlku za konštantnú. Avšak aby sa získali lepšie vlastnosti VAR, tak sa štandardná odchýlka v čase vyvíja. Teda v rizikových časoch získava väčšie disperzie, naproti tomu v „pokojných“ časoch je táto disperzia menšia, čím získavame menšiu hodnotu Value at Risk. Táto metóda sa označuje tiež ako podmienené rozdelenie výnosov a ako prvý ju publikovala už spomínaná spoločnosť J. P. Morgan. Taktiež sa označuje ako **RiskMetrics™**. Je ľahko pochopiteľná a dosahuje veľmi dobré výsledky.

V tejto metodológii sa ako predpoklad berie podmienené normálne rozdelenie výnosov. To znamená, že rozptyl nasledujúceho dňa je podmienený rozptylom a odchýlkou výnosu predchádzajúceho dňa. Teda matematicky:

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda)(r_{t-1} - \mu)^2,$$

kde

σ_t^2 - rozptyl v čase t,

r_{t-1} - výnos v čase t-1,

μ - dlhodobý priemer,

λ - tzv. Decay faktor.

Pri tomto prístupe sa každé novšie pozorovanie stáva menej závislé od toho staršieho. Zabezpečuje nám to vyhladzovacia konštanta Decay faktor λ , ktorá priradzuje najmenšiu váhu najstarším pozorovaniam a najväčšiu váhu najnovším pozorovaniam. Zvyčajne je v rozmedzí (0.9, 1). Pre jednotlivé t-dňové VAR má Decay faktor svoju vlastnú hodnotu.⁴

Ako základný predpoklad sme doteraz brali do úvahy, že výnos trhového faktoru má normálne rozdelenie. Pri výpočtoch však nemusíme použiť len tento predpoklad. Existuje veľa iných prístupov, kde predpokladáme, že výnos má iné ako normálne rozdelenie. Tu je prehľad najpoužívanejších prístupov:

- normálne rozdelenie
- Studentovo rozdelenie
- log normálne rozdelenie
- Lévyho prístup⁵
- Jump Difusion⁶
- prístup založený na stochastickej volatilitate

Ďalšie prístupy sú spomenuté na internetovej stránke (<http://www.gloriamundi.org/>).

Doteraz sme stále vychádzali z predpokladu, že cenu daného finančného produktu ovplyvňuje len jeden trhový faktor. Vo väčšine prípadov to však neplatí. Preto sa používa prístup, kde sa predpokladá mnohorozmerné rozdelenie. Najviac používané sú

- viacrozmerné normálne rozdelenie
- viacrozmerné studentovo t rozdelenie
- Hull – White transformácia na normálne rozdelenie⁷.

Počítanie s viacrozmerným rozdelením je však omnoho ťažšie, pretože je potrebná veľká počítačová kapacita na zber a vyhodnotenie dát a taktiež robustnejší matematický aparát.

1.2.3. Monte Carlo metóda

Monte Carlo metóda je veľmi podobná k metóde historickej simulácie. Hlavný rozdiel je v tom, že pokiaľ metóda historickej simulácie sa snaží vytvárať hypotetické výnosy na základe historických dát, v metóde Monte Carlo sa náhodne generujú možné výnosy.

Najdôležitejšie v tejto metóde je určiť, aké rozdelenie majú rizikové faktory, ktoré ovplyvňujú výnos. Ak určíme toto rozdelenie, tak špecifikujeme jeho parametre, ktoré ho popisujú. Tieto parametre môžeme špecifikovať buď z historických dát, alebo empiricky,

⁴ pre viac informácií pozri (Mishra, 2010)

⁵ viac informácií nájdete napríklad v (Mantegna & Stanley, 2000)

⁶ viď (Zangari, 1997)

⁷ problematiku rozobrali (Hull & White, 1998)

pričom môžeme vychádzať z nejakého ekonomického predpokladu alebo zo známeho vzťahu. Následne potom prebieha samotná Monte Carlo simulácia, kde sa nasimuluje veľké množstvo možných scenárov. A tu sa následne postupuje ako pri metóde historickej simulácie. Usporiadajú sa výsledky jednotlivých scenárov a zoberie sa $(1 - p) \times 100\%$ -ný kvantil.

Monte Carlo simulácie majú široké použitie. Sú jednoduché a ľahko pochopiteľné, ale ako nevýhoda je fakt, že potrebujú veľký strojový čas a časovo sú veľmi náročné.

Z uvedených metód má každá svoje silné ale aj slabé stránky. V literatúre sa neuvádza, že by niektorá metóda bola ostro dominantná v každej situácii. Manažér rizika si preto musí vybrať danú metódu podľa toho, či preferuje, aby VAR odhad bol flexibilný na zmenu trhového faktora alebo zmenu portfólia, jednoduchý alebo ľahký na pochopenie.

2. Zaistené stratégie

Zaistená stratégia alebo zaistená investícia je zaujímavá investičná príležitosť, ako pri minimálnom riziku participovať na raste akciových trhoch. Predstavuje príležitosť, keď sa hodnota investície nedostane pod nami zvolenú kritickú hodnotu. Táto hodnota je najčastejšie vyjadrená ako percento z počiatkovej investície a tiež sa nazýva dnom zaistenej stratégie.

Existuje veľa zaistených stratégií, ale najznámejšie sú CPPI (Constant Proportion Portfolio Insurance) a OBPI (Option Based Portfolio Insurance). V tejto kapitole si rozoberieme tieto dve stratégie a nakoniec si ich aj porovnáme.

2.1.CPPI

Táto metóda bola predstavená Peroldom.⁸ Neskôr bola kompaktnejšie analyzovaná⁹ a je založená na dynamickej alokácii aktív v priebehu držania portfólia. Investor si na začiatku zvolí svoje „dno“, ktoré predstavuje najnižšiu možnú hodnotu portfólia, ktorú bude ešte akceptovať. Najčastejšie je to určité percento z počiatkovej investície. Následne si vypočíta tzv. vankúš, čo je vlastne rozdiel medzi dnom a súčasnou hodnotou portfólia. Nakoniec investor stanoví hodnotu rozdelenú do rizikového a bezrizikového aktíva. V rizikovom aktíve sa investuje súčin vankúša a multiplikátora, ktorý je deterministicky daný. Celková hodnota, ktorá je investovaná do rizikového aktíva sa označuje ako E_t . Táto veličina sa taktiež označuje ako vystavenie stratégie. Zvyšok peňazí investuje do bezrizikového aktíva. Pri tomto prístupe sa dno a daný multiplikátor berú ako exogénne premenné, ktoré sú funkciou investorovej miery rizika a tolerancie k riziku.

2.1.1. Matematický aparát

Investor sa rozhoduje medzi dvoma základnými aktívami: bezrizikový dlhopis označovaný ako B a akciový index označovaný ako S . Taktiež je známa maturita portfólia T . Vývoj bezrizikového aktíva B a rizikového aktíva S sa vyvíja nasledovne:

$$dB_t = B_t r dt,$$

$$dS_t = S_t [\mu dt + \sigma dW_t],$$

kde

r – bezriziková úroková miera

W_t – štandardný Brownov pohyb¹⁰

⁸ vid' (Perold, 1986)

⁹ viac sa dočítate vo (Black & Rouhani, 1989)

¹⁰ Brownov pohyb je vysvetlený napríklad (Melicherčík, Olšarová, & Úradníček, 2005)

μ, σ – kladné konštanty.

Metóda CPPI pozostáva z manažovania dynamického portfólia. Pri tomto prístupe bude hodnota portfólia vždy nad dnom P_t po celej dobe držania portfólia. Predpokladá sa, že dno P_t sa správa nasledovne:

$$dP_t = P_t r dt.$$

Samozrejme, že počiatočné dno P_0 je menšie ako počiatočná hodnota portfólia V_0 . Rozdiel $C_0 = V_0 - P_0$ sa nazýva vankúš. V každom čase ho môžeme vyjadriť vzťahom:

$$C_t = V_t - P_t.$$

Hodnota C_t je teda maximálna hodnota, ktorú môžeme stratiť na rizikovom trhu a pritom neklesneme pod nami stanovené dno. Teda vystavenie E_t sa riadi nasledujúcou rovnicou:

$$E_t = \begin{cases} mC_t, & \text{ak } V_t > P_t \\ 0, & \text{ak } V_t \leq P_t \end{cases},$$

kde m je už spomínaný multiplikátor. Čím je hodnota multiplikátora väčšia, tým viac investor participuje na rastúcom aktíve. Avšak v prípade „zlého“ vývoja sa vďaka väčšiemu multiplikátoru skoršie dosiahne dno a vystavenie sa prepne na nulu. Zaujímavý prípad nastáva, keď platí $m > 1$. V tomto prípade dostávame konvexnú funkciu platieb.¹¹

2.1.2. Modifikácie CPPI metódy

Základná CPPI metóda je pomerne jednoduchá, ale má niektoré obmedzenia, ktoré sú jej slabosťou, ako napríklad konštantný rast dna. V prípade, že trh sa vyvíja pozitívne, tak dno stráca svoju úlohu a dosahujeme menší zisk. V prípade, že trh sa vyvíja negatívne, tak sa dosiahne dno a vystavenie sa stáva nulové. Od tohto okamihu už táto stratégia nedokáže zareagovať ani na prudký pozitívny obrat. Preto sa zdá výhodnejšie, keď namiesto konštantného rastu dna používame variabilné dno. Taktiež je rozumné predpokladať, že by bolo vhodné ohraničiť vystavenie do rizikového aktíva. Inak by sa mohlo stať, že v prípade prudkého pádu akcií sa aj hodnota portfólia dostane na malú hodnotu.

2.1.3. Význam multiplikátora

Voľba multiplikátora je veľmi dôležitá a je zadaná exogénne od investora. Jeho nízka hodnota zapríčini, že vystavenie je príliš malé a hodnota v čase maturity bude

¹¹ s danou problematikou sa zaoberali (Bertrand & Pigent)

zvýšená iba o výnos z bezrizikového aktíva. Naopak, príliš veľká hodnota spôsobuje veľkú citlivosť na volatilitu rizikového aktíva. Ak nastáva prudký nárast trhu, tak aj hodnota portfólia prudko stúpa. Pri prudkom poklese trhu hodnota portfólia prudko klesá a dochádza až k nulovému vystaveniu.

Multiplikátor musí byť kladný. Ak je rovný jednej, tak vystavenie predstavuje celý vankúš. Pre zaistenú stratégiu musí multiplikátor tiež spĺňať, že je menší ako prevrátená hodnota maximálneho poklesu všetkých aktív.

2.1.4. Gap risk

Metóda CPPI nemá vždy istotu návratu garantovanej hodnoty. Pri veľmi prudkom poklese trhu môže nastať situácia, že sa hodnota portfólia dostane pod nami stanovené dno a už sa viac na minimálnu hodnotu nedostane. Toto narušenie dna sa nazýva gap risk. Ako veľmi toto narušenie môže spôsobiť ujmu hodnote portfólia závisí od hodnoty multiplikátora. Ak je strata periódy (deň, týždeň, mesiac) väčšia ako $\frac{1}{m}$, hodnota portfólia sa dostane pod garantované dno.¹² Preto je veľmi dôležité správny výber multiplikátora.

2.2. OBPI

Metóda OBPI (Option Based Portfolio Insurance) je, ako nám sám názov napovedá, založená na zaistení stratégie pomocou opcie. Ako prvý ju spomenuli Leland a Rubinstein už v roku 1976.¹³ Túto metódu tvorí rizikové aktívum S a trhovú alebo syntetickú put opciu vypísanú na toto aktívum.

Put opcia je právo predat' akciu S za vopred dohodnutú cenu v čase maturity T .

Investor kúpi akciu S a put opciu k nej vypísanú. Ak cena akcie klesne, investor si uplatní put opciu a tá jeho stratu vynahradí. Naopak, ak cena aktíva S vzrastie, tak investorova strata sa bude rovnat' hodnote put opcie, ktorá nám dané portfólio poistila. Táto stratégia nám teda garantuje minimálnu hodnotu portfólia a dokáže participovať na rastúcom trhu.

2.2.1. Matematický aparát

Investor sa rozhoduje medzi dvoma aktívami: bezrizikovým aktívom B a rizikovým aktívom, označíme indexom S . V tejto stratégii je dôležité poznať čas maturity, aby sme mohli vybrať správnu opciu.

Hodnota bezrizikového aktíva sa vyvíja podľa vzťahu:

¹² viac sa dozviete (Ludvik, 2005)

¹³ v diele (Leland & Rubinstein, 1988)

$$dB_t = B_t r dt,$$

kde r je úroková miera.

Dynamika hodnoty rizikového aktíva je klasicky vyjadrená rovnicou:

$$dS_t = S_t[\mu dt + \sigma dW_t],$$

kde

W_t – štandardný Brownov pohyb,

μ, σ – kladné konštanty.

Metóda OBPI predstavuje nákup n podielov rizikového aktíva S a n podielov európskej put opcie na aktívum S s maturitou T a realizačnou cenou K . Pre jednoduchosť si položíme $n = 1$.

Takto máme hodnotu portfólia V^{OBPI} v expiračný deň presne vyjadrenú ako:

$$V_T^{OBPI} = S_T + (K - S_T)^+.$$

Ak použijeme call-put paritu,¹⁴ môžeme tento vzťah vyjadriť aj inak.

$$V_T^{OBPI} = K + (S_T - K)^+.$$

Tento vzťah nám odhaľuje, že poistná hodnota tejto stratégie je realizačná cena K .

Hodnota portfólia v čase t na intervale $[0, T]$ je:

$$V_t^{OBPI} = S_t + P(t, S_t, K) = Ke^{-r(T-t)} + C(t, S_t, K),$$

kde $P(t, S_t, K)$ a $C(t, S_t, K)$ predstavujú Black Scholesove hodnoty európskej put a call opcie.

Z uvedenej formule je zrejmé, že pre všetky hodnoty t menšie ako T je hodnota portfólia nad deterministickou hranicou $Ke^{-r(T-t)}$.

Naše zvolené zabezpečenie v expiračnom dni sa často vyjadruje ako percento p z počiatočnej hodnoty investície V_0 . Vyššie sme si uviedli, že táto hodnota je rovná realizačnej cene K , a teda K je rastúca funkcia percenta p . Vychádza nám teda vzťah¹⁵:

$$pV_0(K) = p(Ke^{-rT} + C(0, S_0, K)) = K.$$

2.3. Porovnanie CPPI a OBPI

Metóda OBPI nám garantuje realizačnú cenu K a umožňuje podieľať sa na raste trhu v expiračný deň T . Jej hodnota je:

¹⁴ call-put parita je vysvetlená napríklad (Melicherčík, Olšarová, & Úradníček, 2005)

¹⁵ daný vzťah je odvodený (Bertrand & Pigent)

$$V_T^{OBPI} = \begin{cases} S_T & \text{ak } S_T > K \\ K & \text{ak } S_T \leq K \end{cases}$$

Hodnotu portfólia v čase t môžeme vypočítať ako

$$V_t^{OBPI} = S_t + P(t, S_t, K) = Ke^{-r(T-t)} + C(t, S_t, K).$$

Pre metódu CPPI je zasa garantovaná hodnota dna úročené bezrizikovou mierou. Označíme si túto hodnotu ako K . Teda ak je hodnota P_T garantovaná, jej predpis je:

$$P_T = P_0 e^{rT} = K.$$

a hodnota dna v čase 0, ak počítame súčasnú hodnotu je

$$P_0 = Ke^{-rT}.$$

Ak teda porovnáme OBPI a CPPI počiatocnú hodnotu portfólia v čase $t = 0$ a už spomenuté rovnosti, tak dostávame¹⁶

$$V_0^{CPPI} = P_0 e^{r0} + C_0 = Ke^{-rT} + C_0.$$

Predtým sme už spomenuli, ako vypočítame hodnotu OBPI stratégie. Ak ju počítame tiež v čase $t = 0$, tak dostávame

$$V_0^{OBPI} = Ke^{-r(T-0)} + C(S_0, K) = Ke^{-rT} + C(S_0, K).$$

Vidíme, že počiatocný vankúš pri metóde CPPI sa rovná hodnote európskej call opcie pre stratégiu OBPI vypočítanú z Black Scholesovho vzorca pre čas $t = 0$.

Ako problém pre OBPI metódu sa môže zdať, že nie vždy musí na trhu existovať taká opcia, ktorá by nám stratégiu zabezpečila na určitej úrovni, poprípade aby expiračný čas opcie sa rovnal dňu maturity stratégie. Preto je niekedy nutné, aby sa daná opcia synteticky vyrobila s pomocou bezrizikového aktíva B .

Existuje ešte veľa stratégií, ktoré nám zabezpečia istú návratnosť nášho imania. Ako ďalší príklad je VBPI (Volatility Based Portfolio Insurance), ktorá bola predstavená na Temporis prezentácii.¹⁷ Ide o systematický investičný proces, kde sa portfólio prerozdelené do rizikových aktív, ktoré sa nachádzajú vo vopred určených úrovniach volatilit.

¹⁶ celkový dôkaz nájdeme (Ludvik, 2005)

¹⁷ prvýkrát bola táto metóda predstavená na (Temporis, Február 2008)

3. Optimálne rozdelenie aktív

3.1. Predstavenie modelu

V tejto časti sa zameriame na novú metódu prerozdelenia aktív tak, aby sa dosiahla požadovaná pravdepodobnosť zisku. Túto metódu publikovali Suleyman Basak a Alex Shapiro a my sa budeme snažiť dokázať jej platnosť na reálnych dátach.

Táto metóda vychádza z teórie merania rizika a aplikácie Value at risk pri rozhodovaní portfóliového manažéra. Podľa predchádzajúceho členenia by sme túto metódu zaradili do variančno-kovariančnej skupiny.

Postup je nasledovný. Najprv si zavedieme matematické a ekonomické pozadie, potom teoretický prechod od definície VAR k viazanej optimalizácii. Túto kapitolu zakončíme tak, že si ukážeme viaceré vlastnosti tohto modelu.

Nasledujúca kapitola bude vychádzať z už publikovaného článku.¹⁸

3.2. Ekonomický model

V tomto modeli uvažujeme konečný horizont, $[0, T]$. Investor môže vložiť svoje peniaze do $N + 1$ aktív – do bezrizikového dlhopisu s nulovým kupónom, ktorý je okamžite likvidný, a do N rizikových aktív, ktoré sú konštantne ponúkané na trhu. Cena dlhopisu B a cena akcií S sa správajú nasledovne:

$$dB(t) = B(t)r(t)dt,$$

$$dS_j(t) = S_j(t)[\mu_j(t)dt + \sigma_j(t)dw(t)], \quad j = 1, \dots, N,$$

kde je

r – úroková miera,

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)^T$ – koeficienty driftu,

$\sigma = \{\sigma_{jk}, j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N\}$ – matica volatilit.

Ak predpokladáme bezarbitrážne prostredie, tak dynamický trh nám implikuje existenciu stavovej funkcie ξ definovanej

$$d\xi(t) = -\xi(t)[r(t)dt + \kappa(t)^T dw(t)],$$

kde

$$\kappa(t) = \sigma(t)^{-1}(\mu(t) - r(t)\mathbf{1})$$

je trhová cena za riziko. Tiež je označovaná ako Sharpova miera k riziku.

¹⁸ publikovaný článok je (Basak & Shapiro, 2001)

Investor i v ekonomike je na začiatku periódy dotovaný s e_{ij} rizikovými akciami j , ktoré ho zabezpečujú s počiatočným imaním $W_i(0) = e_i^T S(0)$. Každý z investorov si vyberie konečný čas T , v ktorom sa bude snažiť maximalizovať konečné imanie $W(T)$. K tomu bude prislúchať rozhodovací proces θ , ktorý vyzerá nasledovne:

$$\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_N(t))^T$$

a predstavuje vektor častí z vlastného majetku investovaného do každej akcie. Ďalej predpokladáme, že každý z investorov sa správa podľa svojej funkcie užitočnosti. Teda maximalizuje svoj úžitok z výsledného majetku $u(W(T))$. O funkcii $u(\cdot)$ predpokladáme, že je dvakrát spojito diferencovateľná, rýdzo rastúca, konkávna a musí spĺňať

$$\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0.$$

3.3. Modelovanie Value at risk – manažment pre riziko

Štandardná definícia Value at Risk znie: „Je to strata, ktorá je prekročená s určitou pravdepodobnosťou α , počas určitého horizontu.“ (Duffie & Pan, 1997; Jorion, 1997) Ak berieme do úvahy, že odhadovaný horizont pre VAR je totožný s investičným horizontom, tak túto definíciu môžeme prepísať do nasledujúceho vzťahu:

$$P(W(0) - W(T) \leq VAR(\alpha)) = 1 - \alpha, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Inak povedané VAR je najhoršia strata, ktorú môžeme dosiahnuť počas daného časového horizontu, ak sa trh správa „normálne“.

Ďalej sa autori zamerali na spojenie stratégie Value at risk s maximalizujúcou funkciou užitočnosti. Môžeme si to predstaviť, ako keby si investor sám manažoval portfólio, a teda riziko, alebo sprostredkovateľ riadil portfólio v investorovom mene za pomoci VAR prístupu. Najvhodnejší spôsob, ako do VAR-MR vložiť ďalšie obmedzenie je ten, že budeme od $VAR(\alpha)$ vyžadovať, aby sa vždy udržiavala nad nami zvolenou hranicou, čo znamená:

$$VAR(\alpha) \leq W(0) - \underline{W},$$

kde naše „dno“ \underline{W} je zadané exogénne. Predchádzajúce rovnice môžeme skombinovať a dostávame nasledujúce obmedzenie pre VAR:

$$P(W(T) \geq \underline{W}) \geq 1 - \alpha.$$

Toto obmedzenie nám zabezpečuje, že investor iba s pravdepodobnosťou α , alebo menšou, stratí viac ako $W(0) - \underline{W}$. Ak platí $P(W^B(T) \geq \underline{W}) > 1 - \alpha$ pre rozdelenie majetku v prípade benchmarku, tak potom obmedzenia pre VAR nie sú dodržané, teda

$$VAR(\alpha) < W(0) - \underline{W},$$

inak z nerovnosti sa stáva rovnosť:

$$VAR(\alpha) = W(0) - \underline{W}.$$

Ak položíme $\alpha = 1$ (teda v prípade benchmarku), tak z predchádzajúcej formulácií zistíme, že VAR obmedzenie nie je nikdy viazané. Viac zaujímavejšie je, ak $\alpha = 0$, kedy sa naše portfólio zmení na zaistenú stratégiu. Tu je hodnota portfólia vždy nad nami stanoveným dnom \underline{W} .¹⁹

3.4. Optimalizácia Value at risk – manažment pre riziko

Tu budeme riešiť dynamický optimalizačný problém, v ktorom bude investor optimalizovať svoje vlastné imanie na konci zvoleného časového horizontu. Ak investor použije prístup VAR, tak sa daný problém transformuje na nasledujúci variančný problém:²⁰

$$\max_{W(T)} E[u(W(T))]$$

za podmienok:

$$E[\xi(T)W(T)] \leq \xi(0)W(0)$$

$$P(W(T) \geq \underline{W}) \geq 1 - \alpha.$$

Môžeme si všimnúť, že pri riešení tejto optimalizačnej úlohy pri použití VAR prístupu nám problémy robí obmedzenie, ktoré zabezpečuje pravdepodobnosť najväčšej možnej straty. Prvé obmedzenie nám vlastne hovorí, že v čase maturity môžeme mať maximálne takú hodnotu portfólia, ktorá bola dosiahnuteľná z počiatočného imania. Teraz si charakterizujeme optimálne riešenie, ak bude existovať:

$$W^{VAR}(T) = \begin{cases} I(y\xi(T)) & \text{ak } \xi(T) < \underline{\xi} \\ \underline{W} & \text{ak } \underline{\xi} \leq \xi(T) < \bar{\xi} \\ I(y\xi(T)) & \text{ak } \bar{\xi} \leq \xi(T) \end{cases}$$

¹⁹ daná transformácia je dokázaná napríklad (Basak S., 1995), (Grossman & Vila, 1989), (Grossman & Zhou, 1996)

²⁰ daná transformácia je uvedená (Cox & Huang, 1989), (Karatzas, Lehoczky, & Shreve, 1998)

kde

$I(\cdot)$ je inverzná funkcia k funkcií užitočnosti $u'(\cdot)$,

$$\underline{\xi} = u'(\underline{W})/y,$$

$\underline{\xi}$ je riešením rovnice

$$P(\xi(T) > \bar{\xi}) = \alpha,$$

$y \geq 0$ rieši rovnicu²¹ $E[\xi(T)W^{VAR}(T; y)] = \xi(O)W(0)$.

Obmedzenie, ktoré sa nám vynára pri použití VAR prístupu je aktívne, iba ak platí $\underline{\xi} < \bar{\xi}$.

Navyše, Lagrangeov multiplikátor y je klesajúci v premennej α , a tak platí: $y \in [y^B, y^{PI}]$, kde y^B , resp. y^{PI} rieši $E[\xi(T)W^B(T; y)] = \xi(O)W(0)$, resp. $E[\xi(T)W^{PI}(T; y)] = \xi(O)W(0)$. Vzťah pre W^B vyzerá

$$W^B = I(y\xi(T)),$$

resp. vzťah pre W^{PI} vyzerá

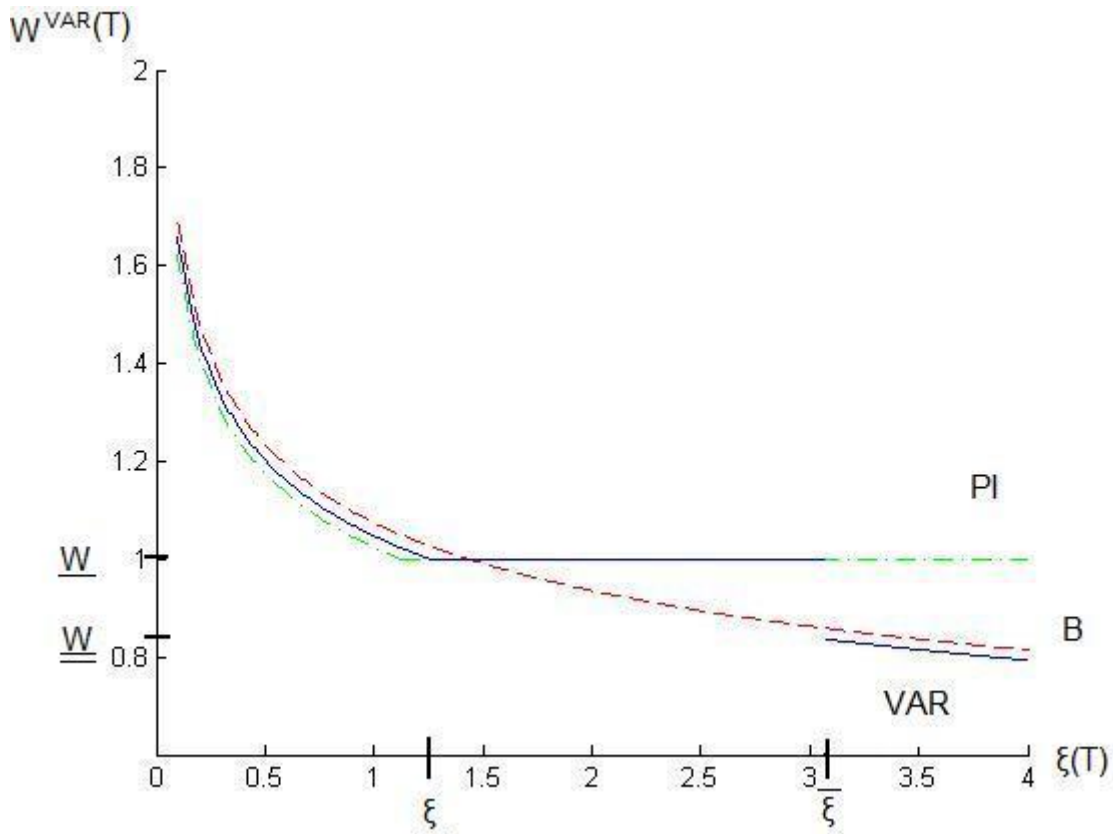
$$W^{PI} = \begin{cases} I(y\xi(T)) & \text{ak } \xi(T) < \underline{\xi} \\ \underline{W} & \text{ak } \underline{\xi} \leq \xi(T) \end{cases}.$$

Obrázok číslo 1 nám ukazuje, akú výslednú hodnotu má portfólio v čase maturity, keď investor použil vyššie spomínaný VAR prístup ($\alpha \in (0,1)$), ak zvolíme benchmark ($\alpha = 1$), a ak použije zaistenú stratégiu ($\alpha = 0$).

Tu si definujeme hodnotu $\underline{\underline{W}}$, ktorá predstavuje najvyššiu nepoistenú pozíciu, ak si investor vybral prístup VAR.

$$\underline{\underline{W}} = \begin{cases} I(y\bar{\xi}) & \text{ak } \underline{\xi} < \bar{\xi}, \\ \underline{W} & \text{inak.} \end{cases}$$

²¹ V ďalších výpočtoch budeme uvažovať, že $\xi(O) = 1$.



Obrázok 2: Optimálna hodnota portfólia W v čase T .

Tento obrázok nám ukazuje možné hodnoty portfólia v čase maturity v závislosti od stavovej funkcie $\xi(T)$. Plnou čiarou je znázornený prístup VAR manažment pre riziko, prerušovanou čiarou je zakreslený benchmark, na ktorý sa nevzťahuje ohraničenie. Bodkočiarkovanou čiarou je znázornená zaistená stratégia. Optimálna hodnota portfólia pri prístupe VAR manažment pre riziko rozdeľuje stavovú funkciu do troch kategórií. Ak je hodnota $\xi(T)$ malá, tak sa hodnota portfólia správa ako benchmark. V prechodných stavoch ($\underline{\xi} \leq \xi(T) < \bar{\xi}$) zaisťuje hodnotu dna tak isto ako zaistená stratégia a v „zlých“ stavoch (vysoké $\xi(T)$) je investor nezaistený a znáša všetky straty.

Ak je hodnota stavovej funkcie $\xi(T)$ malá, tak sa portfólio pri zaistenej stratégii správa ako benchmark, až na to, že hodnota portfólia je menšia, pretože investor si poisťuje svoje pozície voči horšiemu vývoju (vysoké $\xi(T)$). Zato investor s prístupom VAR manažment pre riziko (VAR-MR) rozdeľuje horšie stavy na dve podskupiny. V prechodných stavoch ($\underline{\xi} \leq \xi(T) < \bar{\xi}$) je plne poistený a hodnota portfólia sa udržiava na hodnote dna, ktoré si investor sám zvolí. Tu ho nezaujímajú veľkosť straty, iba jej pravdepodobnosť. Avšak ako náhle sa situácia zhorší (vysoké $\xi(T)$), tak hodnota portfólia sa prepadne až pod hodnotu benchmarku. Investorovi sa neoplatí udržiavať hodnotu portfólia na hodnote dna, pretože zaistenie je príliš drahé. Rozdiel medzi hodnotou VAR-MR a hodnotou benchmark je spôsobený tým, že v prechodnom stave boli vynaložené určité prostriedky na zaistenie.

Avšak hodnota $\bar{\xi}$ závisí výlučne od parametra α a distribučnej funkcie $\xi(T)$. Znamená to, že táto hodnota je nezávislá od investorovho vstupného imania a preferencií.

Keď sumarizujeme obrázok číslo 2., tak zistíme, že výsledná hodnota portfólia je ovplyvnená hlavne parametrami \underline{W} a α . Keď zvýšime dno, tak veľa stavov treba poistiť proti veľkému prepadu, a teda prechodný stav sa nám zväčší ako na úkor dobrých stavov i zlých stavov. Pri parametre α je situácia opačná. Ak zvýšime pravdepodobnosť α , tak investor predpokladá stratu s väčšou pravdepodobnosťou, a tak sa nám prechodný stav, čo je zaistený stav zmenší. Na úkor prechodného stavu dobrý aj zlý stav narastú. Investor, ktorý využíva prístup VAR-MR môže zvyšovať hodnotu portfólia až potiaľ, kým úplne nevyľúči zaistenie vo svojej stratégii.

Ak sa situácia rapídne zhorší, to jest nastáva zlý stav (vysoké $\xi(T)$), tak nastáva stav, kde najmenšiu hodnotu portfólia má investor používajúci VAR-MR. V tejto podskupine platí:

$$W^{VAR}(T) < W^B(T) < W^{PI}(T).$$

Preto sa môže stať, že investor sa dostane do kreditného problému a problému solventnosti, keď táto situácia nastane.

Bolo už dokázané, že zaistená stratégia v čase maturity sa dá vyjadriť ako benchmark, ku ktorému je prirátaná put opcia:²²

$$W^{PI}(T; y^{PI}) = W^B(T; y^{PI}) + \max[\underline{W} - W^B(T; y^{PI}), 0].$$

Analogicky môžeme vyjadriť aj hodnotu portfólia v čase maturity, keď investor použil prístup VAR-MR²³:

$$\begin{aligned} W^{VAR}(T; y(W(0))) &= W^B(T; y^B(W_x)) + [\underline{W} - W^B(T; y^B(W_x))]1_{\{\xi \leq \bar{\xi}(T) < \bar{\xi}\}} \\ &= W^{PI}(T; y^B(W_x)) - [\underline{W} - W^B(T; y^B(W_x))]1_{\{\bar{\xi} \leq \xi(T)\}}, \end{aligned}$$

kde W_x je dané ako

$$y^B(W_x) = y(W(0)),$$

a y je Lagrangeov multiplikátor, ktorý rieši vzťah $E[\xi(T)W^B(T; y)] = W(0)$. Inak povedané, keď prispôbime počiatočné imanie, tak W^{VAR} riešenie je ekvivalentné so zaistenou stratégiou ak k nej prirátame krátku pozíciu binárnej opcie. Taktiež je toto riešenie ekvivalentné benchmarku, ak k nemu pripočítame vhodnú opciu:

²² celý odvodený vzťah nájdete (Basak S. , 1995), (Grossman & Zhou, 1996)

²³ uvedené v (Basak & Shapiro, 2001)

$$W_x = W(0) - E \left[\frac{\xi(T)}{\xi(0)} \max(\underline{W} - W^B(T; y^B(W_x)), 0) \right] \\ + E \left[\frac{\xi(T)}{\xi(0)} (\underline{W} - W^B(T; y^B(W_x))) 1_{\{\bar{\xi} \leq \xi(T)\}} \right].$$

Tu je $W^B(T; y^B(W_x))$ optimálna taktika pre investora, ktorý nemá pravdepodobnostné obmedzenie. Jeho počiatkové imanie $W(0)$ je znížené o cenu put opcie a zvýšené o výnosy z predaja krátkej pozície binárnej opcie.

3.5.Vlastnosti VAR-MR

V tejto časti sa zameriame na výpočet kritických hodnôt a popísaným vlastností Value at risk - manažment pre riziko. Ďalej sa budeme špecializovať na funkciu užitočnosti, ktorá má tvar:

$$u(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \gamma > 0.$$

Taktiež sa označuje ako CRRA (Constant Relative Risk Aversion). Parameter γ je v tomto prípade investorova averzia voči riziku. Čím je tento parameter vyšší, tým sa investor stáva viac opatrnejší. Ďalej predpokladáme log-normálne rozdelenie stavovej funkcie, konštantnú úrokovú mieru a taktiež konštantnú trhovú mieru za riziko.

Teraz si ukážeme, ako sa vypočítajú jednotlivé kritické hodnoty. Ako sme už spomínali, stavová funkcia sa vyvíja nasledovne:

$$d\xi(t) = -\xi(t)[r(t)dt + \kappa(t)^T dw(t)],$$

kde

$r(t)$ - je bezriziková úroková miera,

$\kappa(t)^T$ - je trhová cena za riziko.

Z toho vyplýva, že rovnica pre veličinu ξ je:

$$\xi(t) = \xi(0)e^{(-rt - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 t - \frac{1}{2}\|\kappa\|\sqrt{t}Z)},$$

kde

Z má normálne rozdelenie

$$Z \sim N(0,1).$$

3.5.1. Výpočet $\bar{\xi}$

Pri výpočte $\bar{\xi}$ potrebujeme vedieť iba konečný horizont T a hodnotu parametra α . Potom postupujeme nasledovne:

$$P(\xi(T) > \bar{\xi}) = \alpha,$$

kde

$$\xi(T) = e^{-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \|\kappa\|\sqrt{T}Z}.$$

Z toho vyplýva

$$\begin{aligned} P\left(e^{-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \|\kappa\|\sqrt{T}Z} > \bar{\xi}\right) &= \alpha \\ P\left(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \|\kappa\|\sqrt{T}Z > \log \bar{\xi}\right) &= \alpha \\ P\left(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \log \bar{\xi} > \|\kappa\|\sqrt{T}Z\right) &= \alpha \\ P\left(\frac{-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \log \bar{\xi}}{\|\kappa\|\sqrt{T}} > Z\right) &= \alpha \end{aligned}$$

Teraz si môžeme daný výraz prepísať ako kvantil normálneho rozdelenia s parametrom α .

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= \frac{-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \log \bar{\xi}}{\|\kappa\|\sqrt{T}} \\ \log \bar{\xi} &= -\|\kappa\|\sqrt{T}Q_\alpha - rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T \\ \bar{\xi} &= e^{-\|\kappa\|\sqrt{T}Q_\alpha - rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T}. \end{aligned}$$

Dostali sme hodnotu pre prvý kritický zlom.

Už podľa obrázku je zrejmé, že kritická hodnota²⁴ ξ_{VAR} sa nachádza medzi hodnotami ξ_{PI} a $\xi_{Benchmark}$, kde

ξ_{PI} - kritická hodnota pre investora, ktorý používa zaistenú stratégiu

$\xi_{Benchmark}$ - kritická hodnota pre benchmark investora.

Postup je nasledovný: najskôr vyjadríme ξ_{PI} a $\xi_{Benchmark}$. Následne s ich pomocou dopočítame ξ_{VAR} .

²⁴ Ďalej sa budeme stretávať len s pojmami ξ_{VAR} , ξ_{PI} , ξ_{Ben} . Predstavujú však hodnoty $\underline{\xi}_{VAR}$, $\underline{\xi}_{PI}$, $\underline{\xi}_{Ben}$. Hodnota $\bar{\xi}$ je pre všetky stratégie rovnaká, preto ju nemusíme indexovať.

3.5.2. Výpočet $\xi_{\text{Benchmark}}$

Neznámu $\xi_{\text{Benchmark}}$ budeme ďalej označovať ako ξ_{Ben} .
Vychádzame zo základného vzťahu, ktorý vyzerá:

$$E[\xi(T)W(T)] \leq \xi(0)W(0),$$

kde

$$W(T) = I(y\xi(T))$$

a

$$y = \frac{1}{\xi_{\text{Ben}} \underline{W}^\gamma}.$$

V tomto prípade je I inverzná funkcia k derivácii funkcie užitočnosti a platí:

$$I(x) = (u'(x))^{-1}$$

$$I(x) = x^{-\frac{1}{\gamma}}$$

Teraz postupne dostávame:

$$\begin{aligned} E\left(\xi(T)I(y\xi(T))\right) &= \xi(0)W(0) \\ E\left(\xi(T)I\left(\frac{\xi(T)}{\xi_{\text{Ben}} \underline{W}^\gamma}\right)\right) &= \xi(0)W(0) \\ E\left(\xi(T)\left(\frac{\xi(T)}{\xi_{\text{Ben}} \underline{W}^\gamma}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right) &= \xi(0)W(0) \\ E\left(\xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) &= \frac{W(0)}{\underline{W}} \xi(0) \xi_{\text{Ben}}^{-\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned}$$

Z tohto výrazu si vyjadríme $\xi_{\text{Ben}}^{-\frac{1}{\gamma}}$:

$$\xi_{\text{Ben}}^{-\frac{1}{\gamma}} = \frac{W(0)}{\underline{W}} \frac{\xi(0)}{E\left(\xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}.$$

Teraz si vypočítame, čomu sa rovná $E\left(\xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$.

$$\begin{aligned} E\left(\xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) &= E\left(e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \|\kappa\|\sqrt{T}Z)}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\right) = e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} E\left(e^{(-\|\kappa\|\sqrt{T}Z)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)}\right) \\ &= e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} e^{\left(\frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2} = e^{\left((-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2\right)} \end{aligned}$$

Konečný výraz potom vyzerá nasledovne:

$$\xi_{Ben} = \left(\frac{W(0)}{\underline{W}} \right)^\gamma \xi(0)^\gamma e^{\left(\left(rT + \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T \right) (\gamma - 1) - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T \frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma} \right)}.$$

3.5.3. Výpočet ξ_{PI}

Tu postupujeme analogicky, až na to, že funkcia $W(T)$ je zložitejšia:

$$W(T) = \begin{cases} I(y\xi(T)) & \text{ak } \xi(T) < \xi_{PI} \\ \underline{W} & \text{ak } \xi(T) \geq \xi_{PI} \end{cases}.$$

V tomto prípade je dôležité poznať bod zlomu, kde sa z konštantnej funkcie stáva rastúca funkcia.

$$\xi(T) < \xi_{PI}$$

Po niekoľkých výpočtoch sa dostávam k vzťahu, z ktorého numericky nájdeme hodnotu ξ_{PI} . Daný vzťah je nasledovný²⁵:

$$\begin{aligned} & \underline{W} \xi_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} e^{\left[\left(-rT - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T \right) \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} + \frac{(\gamma - 1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2} \right]} \left(1 - \Phi \left(\frac{M}{\sqrt{T} \|\kappa\|} + \frac{(\gamma - 1) \sqrt{T} \|\kappa\|}{\gamma} \right) \right) + \\ & + \underline{W} e^{(-rT)} \Phi \left(\frac{M}{\sqrt{T} \|\kappa\|} + \sqrt{T} \|\kappa\| \right) = \xi(0) W(0), \end{aligned}$$

kde

$$M = -rT - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T - \log \bar{\xi} > \|\kappa\| \sqrt{T} Z.$$

Z tohto výrazu si už numericky vieme vypočítať ξ_{PI} .

3.5.4. Výpočet ξ_{VAR}

Teraz už poznáme hodnoty ξ_{Ben} a ξ_{PI} . Hodnota ξ_{VAR} sa bude nachádzať v tomto intervale. Vypočítame si teoretickú hodnotu ξ_{VAR} a numericky nájdeme jej skutočnú hodnotu.

Vychádzame stále z toho istého vzorca, tu je však funkcia $W(T)$ najzložitejšia.

²⁵ Kompletný výpočet hodnoty ξ_{PI} sa nachádza v prílohe.

$$W(T) = \begin{cases} I(y\xi(T)) \text{ ak } \xi(T) < \xi_{VAR} \\ \underline{W} \text{ ak } \xi_{VAR} < \xi(T) < \bar{\xi} \\ I(y\xi(T)) \text{ ak } \bar{\xi} < \xi(T) \end{cases}$$

Preskúmame aktívne ohraničenia:

$$\xi(T) < \xi_{VAR}.$$

A druhé ohraničenie je:

$$\xi(T) > \bar{\xi}.$$

Vypočítame dané integrály a dopracujeme sa k výsledku, kde už iba numericky nájdeme hodnotu ξ_{VAR} , pre ktorú platí²⁶

$$\begin{aligned} & \underline{W} e^{(-rT)} \left[\Phi \left(\frac{M^{VAR}}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\| \right) - \Phi \left(\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\| \right) \right] + \\ & + \underline{W} \xi_{VAR} \frac{1}{\gamma} e^{\left[(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{(\gamma-1)}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2} \right]} \left(\Phi \left(\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma} \right) + 1 \right. \\ & \left. - \Phi \left(\frac{M_{VAR}}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma} \right) \right) = \xi(0)W(0), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} M &= -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \log \bar{\xi} > \|\kappa\|\sqrt{T}Z, \\ M^{VAR} &= -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \log \xi_{VAR} < \|\kappa\|\sqrt{T}Z. \end{aligned}$$

3.6. Očakávaná strata

V tejto podkapitole si zadefinujeme očakávanú stratu a jej súčasnú hodnotu. Keďže vývoj hodnoty portfólia má stochastický trend, zadefinujeme si očakávané straty iba v čase maturity. Ak sa portfólio dostane do stavu, kde je veľké $\xi(T)$, potom očakávaná strata portfólia je:

$$L_1(W) = E \left[\left(\underline{W} - W(T) \right) 1_{\{W(T) < \underline{W}\}} \right].$$

Jej súčasná hodnota je:

$$L_2(W) = E \left[\frac{\xi(T)}{\xi(0)} \left(\underline{W} - W(T) \right) 1_{\{W(T) < \underline{W}\}} \right].$$

²⁶ Kompletný výpočet hodnoty ξ_{VAR} sa nachádza v prílohe.

Je zrejmé, že pri prístupe VAR-MR platí:

$$L_1(W^{VAR}) \geq L_1(W^{Ben}),$$

$$L_2(W^{VAR}) \geq L_2(W^{Ben}).$$

Požiadavky na manažovanie rizika nám zabezpečujú, že tento prístup nás chráni pred frekventovanými stratami, avšak ak sa vyskytne mimoriadna situácia a strata je veľká, tak investorova strata je väčšia.

3.7. Optimálna hodnota portfólia

Tvrdenie:

Berieme do úvahy CRRA funkciu užitočnosti a úrokovú mieru r a trhovú mieru rizika κ za konštantné, tak potom optimálna hodnota portfólia v čase t je:²⁷

$$W^{VAR}(t) = \frac{e^{\Gamma(t)}}{(y\xi(t))^{\frac{1}{\gamma}}} - \left[\frac{e^{\Gamma(t)}}{(y\xi(t))^{\frac{1}{\gamma}}} \Phi(-d_1(\underline{\xi})) - \underline{W}e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\underline{\xi})) \right] + \left[\frac{e^{\Gamma(t)}}{(y\xi(t))^{\frac{1}{\gamma}}} \Phi(-d_1(\bar{\xi})) - \underline{W}e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\bar{\xi})) \right],$$

kde $\Phi(\cdot)$ je kumulatívna distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia a

$$\underline{\xi} = \frac{1}{y\underline{W}^\gamma},$$

$$\Gamma(t) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(r + \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T-t) + \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^2 \frac{\|\kappa\|^2}{2} (T-t),$$

$$d_2(x) = \frac{\log \frac{x}{\xi(t)} + \left(r - \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T-t)}{\|\kappa\| \sqrt{T-t}},$$

$$d_1(x) = d_2(x) + \frac{1}{\gamma} \|\kappa\| \sqrt{T-t}.$$

Optimálna časť majetku, ktorá je investovaná do rizikových aktív je:

²⁷ celé tvrdenie je dokázané (Basak & Shapiro, 2001)

$$\Theta^{VAR}(t) = q^{VAR}(t)\Theta^{Ben}(t),$$

kde hodnota benchmarku $\Theta^{Ben}(t)$ a vystavenie imania do rizikových aktív $q^{VAR}(t)$ je:

$$\Theta^{Ben}(t) = \frac{1}{\gamma}[\sigma(t)^T]^{-1}\kappa,$$

$$q^{VAR}(t) = 1 - \frac{\underline{W}e^{-r(T-t)}\left(N\left(-d_2\left(\underline{\xi}\right)\right) - N\left(-d_2\left(\bar{\xi}\right)\right)\right)}{W^{VAR}(t)} +$$

$$+ \frac{\gamma\left(\underline{W} - \underline{\underline{W}}\right)e^{-r(T-t)}\phi\left(d_2\left(\bar{\xi}\right)\right)}{W^{VAR}(t)\|\kappa\|\sqrt{T-t}},$$

kde $\phi(\cdot)$ je hustota pravdepodobnosti štandardného normálneho rozdelenia.

Vystavenie do rizikových aktív ku benchmarku je ohraničené:

$$q^{VAR}(t) \geq 0$$

a taktiež musí platiť:

$$\lim_{\xi(t) \rightarrow 0} q^{VAR}(t) = \lim_{\xi(t) \rightarrow \infty} q^{VAR}(t) = 1.$$

Ak je splnená základná podmienka pre obmedzenie VAR ($\underline{\xi} < \bar{\xi}$), tak potom $q^{VAR}(t) > 1$ len vtedy, ak:

$$\xi(t) > \xi^\times(t),$$

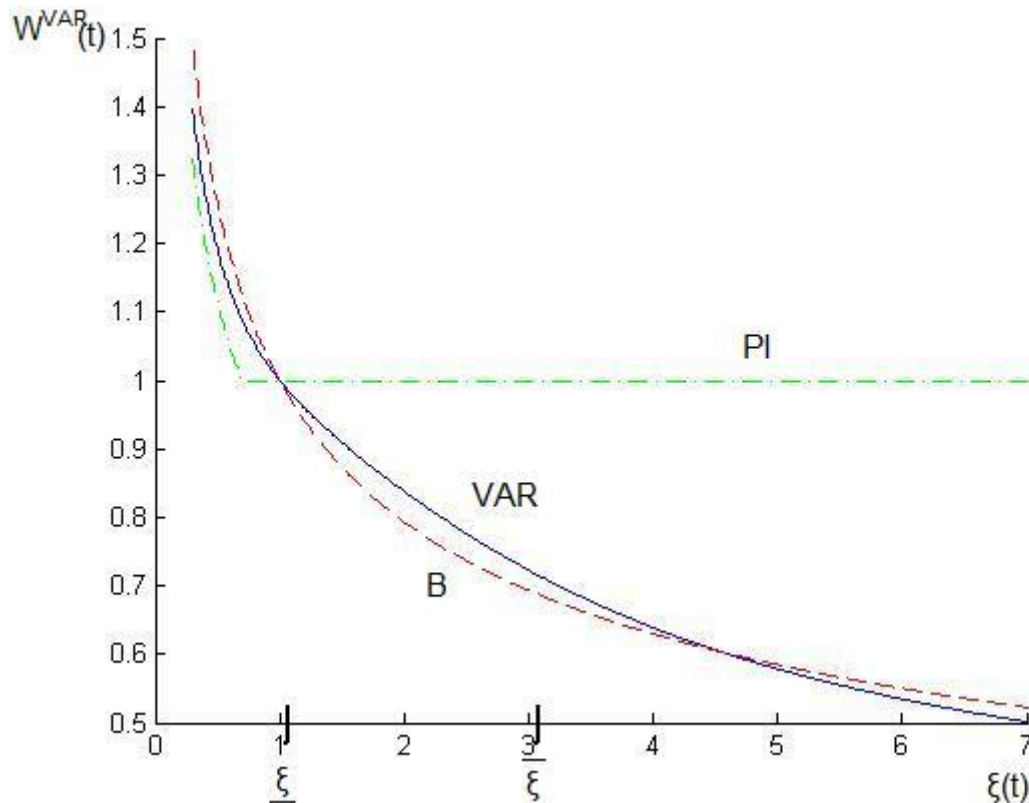
kde $\xi^\times(t)$ je deterministicky už zvolené a nachádza sa v intervale:

$$\sqrt{\bar{\xi}\underline{\xi}}e^{\left(r - \frac{\|\kappa\|^2}{2}\right)(T-t)} \leq \xi^\times(t) \leq \bar{\xi}e^{\left(r - \frac{\|\kappa\|^2}{2}\right)(T-t)}e^{\left(\frac{\|\kappa\|^2}{\gamma}\right)(T-t)}.$$

$W^{VAR}(t)$ predstavuje optimálne hodnotu portfólia, ak je použitý prístup VAR-MR v čase t . Prvá časť výrazu predstavuje hodnotu portfólia, ak pravdepodobnosť $\alpha = 1$, teda benchmark investora. Ďalšia časť tohto výrazu predstavuje hodnotu, ktorou sme sa poistili proti pádu hodnoty portfólia na konci maturity T na hodnotu \underline{W} . Predstavuje Black a Scholesovu cenu put opcie, ktorou sme sa zabezpečili. Posledná časť vzorca predstavuje zisk z držania krátkej pozície binárnej opcie.

Pri predstavovanom prístupe vychádzame z toho, že iba časť z majetku investujeme do rizikových aktív. Ostatný kapitál zostáva v bezrizikovom dlhopise. To aká časť sa investuje do týchto rizikových aktív vyjadruje parameter $q^{VAR}(t)$. Tento vzorec si môžeme rozdeliť na tri časti. Prvá (1) predstavuje hodnotu, ktorá sa vystaví ako pri benchmarku. Druhá a tretia časť predstavuje znížené vystavenie o cenu dlhej pozície put opcie, respektíve zvýšenie o cenu krátkej pozície binárnej opcie.

Na ďalšom obrázku si ukážeme príklad $W^{VAR}(t)$ v závislosti od stavovej funkcie $\xi(t)$. Zobrazili sme benchmark, zaistenú stratégiu a prístup VAR.

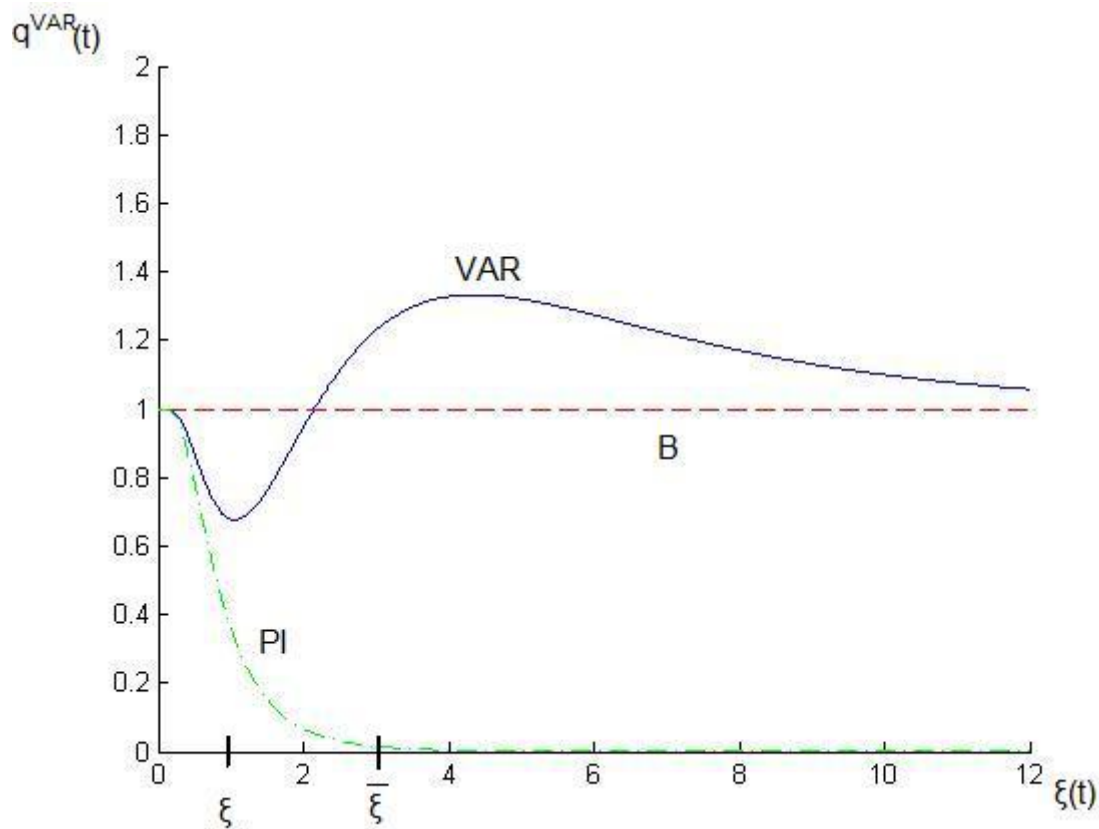


Obrázok 3: Optimálna hodnota portfólia v čase t .

Obrázok predstavuje optimálnu hodnotu portfólia W v čase t v závislosti od stavovej funkcie $\xi(t)$. Plná čiara predstavuje W^{VAR} , čiarkovaná čiara značí benchmark, bodkočiarkovaná krivka je zaistená stratégia. Počítali sme s CRRA funkciu užitočnosti a log-normálnou hustotou stavovej funkcie. Ako fixné parametre sme brali do úvahy: $T = 3, t = 0.5, \alpha = 0.02, \gamma = 3, W(0) = 1, \underline{W} = 1, r = 0.02, \xi(0) = 1, \|\kappa\| = 0.4$. Potom $\underline{\xi} = 1.03, \bar{\xi} = 3.07$.

Obrázok 3 nám odhaľuje, že hodnota portfólia VAR v dobrých časoch sa správa podobne ako hodnota zaistej stratégie. Zatiaľ čo na opačnom konci rozdelenia $\xi(t)$ sa hodnota VAR vyvíja ako benchmark. Na obrázku môžeme jasne pozorovať, že v prechodných stavoch sa krivka stáva konkávnou. Je to spôsobené tým, že v týchto stavoch sa stratégia sama poisťuje. Ako náhle sa dostávame bližšie ku „zlému“ stavu, stratégia sa prestáva poisťovať a krivka sa opäť dostáva pod úroveň benchmarku.

Na obrázku 4 graficky porovnáme vystavenie do rizikových aktív pre VAR, benchmark a zaistenú stratégiu.



Obrázok 4: Vystavenie do rizika q v čase t

Obrázok predstavuje vystavenie pre optimálnu hodnotu portfólia W v čase t v závislosti od stavovej funkcie $\xi(t)$. Plná čiara predstavuje vystavenie pre W^{VAR} , čiarkovaná čiara značí benchmark, bodkočiarkovaná krivka je zaistená stratégia. Vystavenie pre W^{VAR} je dané ako: $q^{VAR}(t) = \theta_j^{VAR}(t)/\theta_j^B(t)$, kde θ_j predstavuje časť imania investovaného do akcie j . Počítali sme s CRRA funkciou užitočnosti a log-normálnou hustotou stavovej funkcie. Ako fixné parametre sme brali do úvahy: $T = 3, t = 0.5, \alpha = 0.02, W(0) = 1, \underline{W} = 1, r = 0.02, \|\kappa\| = 0.4, \gamma = 3, \xi(0) = 1$. Potom $\underline{\xi} = 1.03, \bar{\xi} = 3.07$.

Na tomto obrázku môžeme názorne vidieť, ako sa typicky správa vystavenie q^{VAR} v čase t . Vidíme tu niektoré prekvapujúce znaky. Priestor stavovej funkcie $\xi(t)$ si môžeme rozdeliť do piatich úsekov. Na začiatku a na konci prevláda benchmark. Priestor medzi týmito dvoma extrémami rozdelíme na tri úseky. Na prvom úseku sa VAR správa ako zaistená stratégia. V tejto „lacnej“ časti sa väčšia časť investuje do dlhopisov. Ako $\xi(t)$ rastie, tak sa znova začína viac investovať do rizikového aktíva a VAR sa podobá na benchmark. V tomto okamihu je dokonca vystavenie ešte väčšie ako v prípade benchmarku. Tretí úsek nastáva, keď $\xi(t)$ je už neprimerane vysoké. Investora odradí priveľké riziko pred prípadným budúcim ziskom. Preto opäť konverguje k benchmarku. Toto nepravidelné chovanie môžeme pripísať k zaist'ovaniu portfólia za pomoci binárnych opcií. Investor sa zaist'uje voči prechodným stavom. Avšak ak je $\xi(t)$ už veľmi vysoké, tak

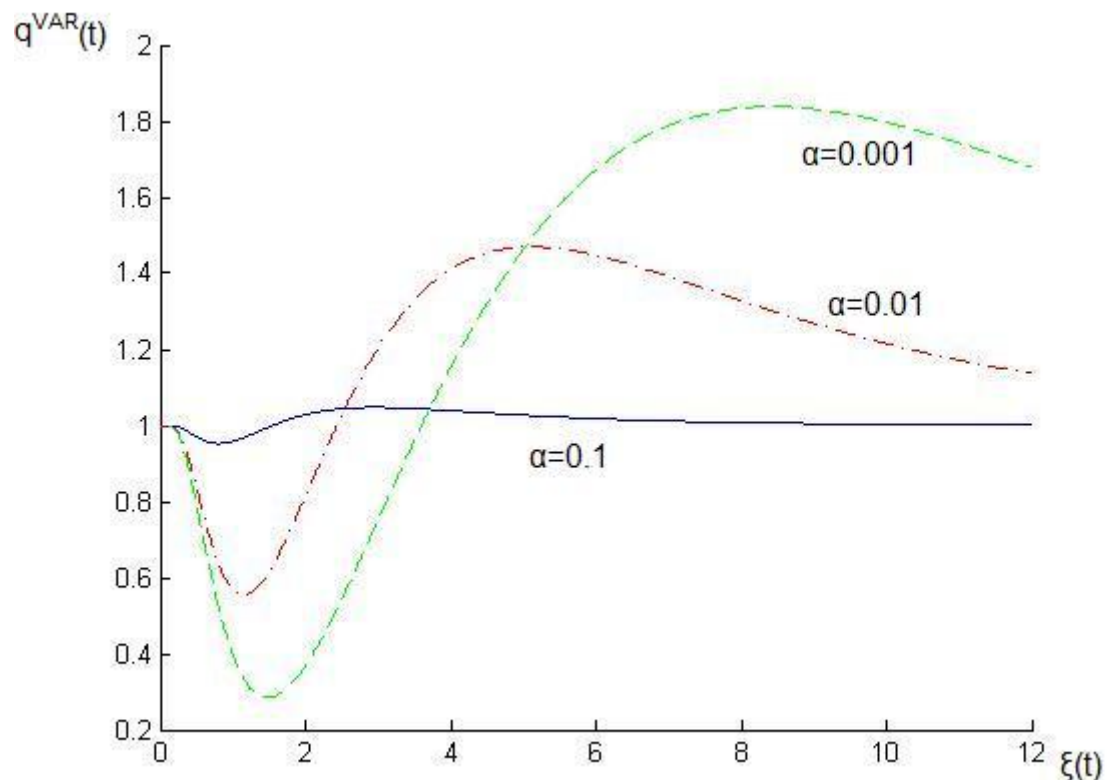
pravdepodobnosť, že skončí v tomto „zlom“ stave je priveľká. Už sa mu neoplatí poisťovať sa na hodnotu dna \underline{W} , pretože by na to minul veľkú časť majetku. Preto konverguje ku benchmarku. Na druhej strane, ak je $\xi(t)$ blízko k hodnote $\bar{\xi}$, tak investor dúfa dosiahnutia hodnoty dna, a preto je ochotný použiť veľkú časť majetku, aby sa poisťil na túto hodnotu.

Ako sme už spomínali vyššie, tak existuje aj podmienka, ktorá musí byť splnená, aby vystavenie $q^{VAR} > 1$. Pri nastavení vyššie uvedených parametrov sme zistili, že q^{VAR} je väčšie ako 1 len vtedy, keď $\xi(t) > \{1.53, 3.02\}$.

V ďalšej časti si uvedieme ako veľmi je VAR vystavenie citlivé pri zmene parametrov. Najskôr sme sa zamerali na citlivosť na parameter α , parameter \underline{W} , čas t , averziu voči riziku γ a trhovú cenu za riziko κ .

3.7.1. Citlivosť na parameter α

Na obrázku číslo 5 si môžeme všimnúť, ako citlivé je vystavenie q^{VAR} , keď meníme parameter α . Dané vystavenie je funkcia závislá od stavovej funkcie.



Obrázok 5: Citlivosť vystavenia q na α .

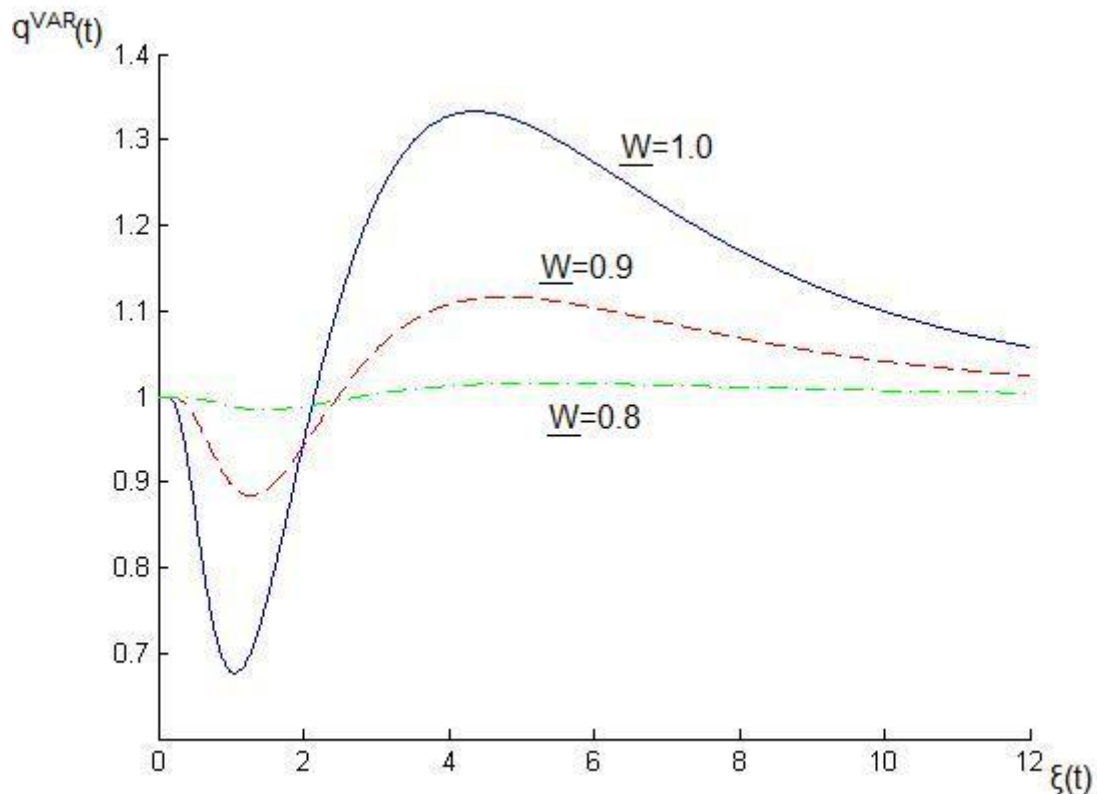
Obrázok predstavuje vystavenie pre optimálnu hodnotu portfólia W v čase t v závislosti od stavovej funkcie $\xi(t)$ pre jednotlivé hodnoty parametra α . Ako hodnoty parametra sme zobrali $\alpha = \{0.1, 0.01, 0.001\}$. Vystavenie pre W^{VAR} je

dané ako: $q^{VAR}(t) = \theta_j^{VAR}(t)/\theta_j^B(t)$, kde θ_j predstavuje časť imania investovaného do akcie j . Počítali sme s CRRA funkciu užitočnosti a log-normálnou hustotou stavovej funkcie. Ako fixné parametre sme brali do úvahy: $T = 3, t = 0.5, \gamma = 3, W(0) = 1, \underline{W} = 1, r = 0.02, \xi(0) = 1, \|\kappa\| = 0.4$. Potom $\underline{\xi} = \{1.21, 0.97, 0.89\}, \bar{\xi} = \{1.80, 3.71, 6.30\}$.

Z obrázka je zrejmé, že čím viac parameter α zväčšujeme, tým viac vystavenie q^{VAR} konverguje ku benchmarku. Taktiež je zrejmé, že znižovaním parametra α sa odchýlka od benchmarku rozprestiera do väčšieho priestoru $\xi(t)$. Je to spôsobené tým, že investor očakáva stratu s väčšou pravdepodobnosťou, a preto sa stratégia správa agresívnejšie, čím konverguje ku benchmarku.

3.7.2. Citlivosť na parameter \underline{W}

Obrázok 6 predstavuje citlivosť vystavenia q^{VAR} pri rôznych hodnotách dna \underline{W} .



Obrázok 6: Citlivosť vystavenia q na \underline{W} .

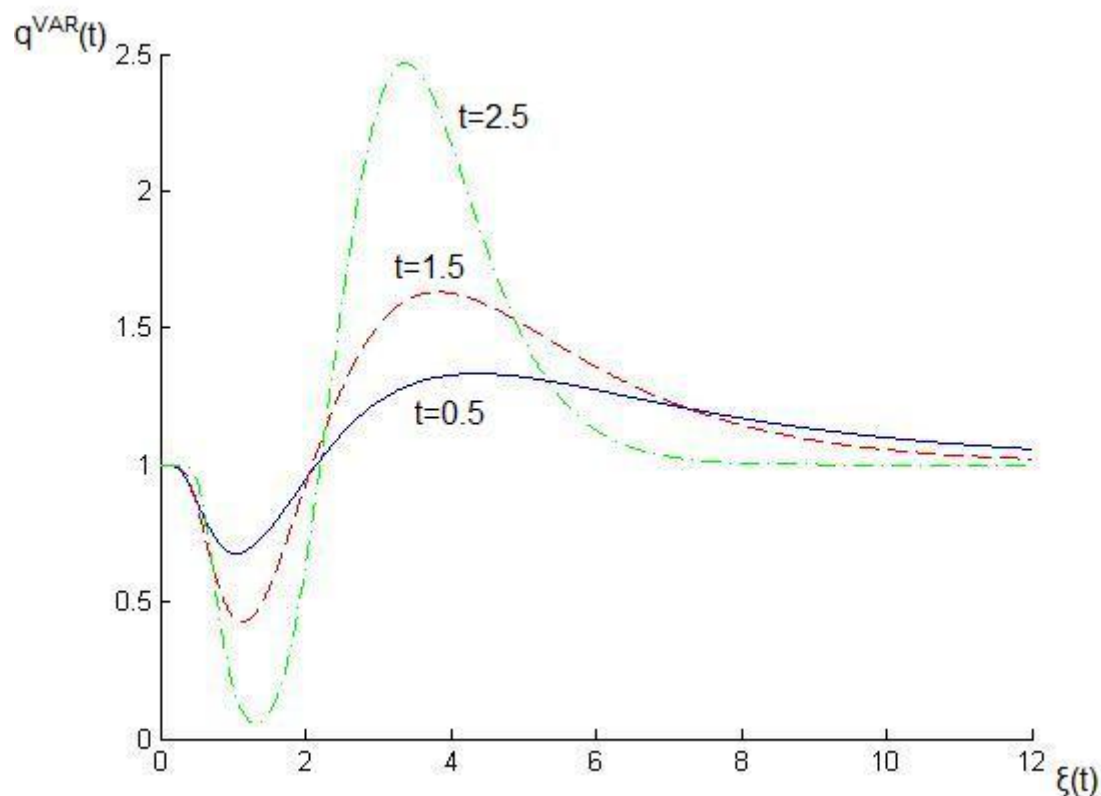
Obrázok predstavuje vystavenie pre optimálnu hodnotu portfólia W v čase t v závislosti od stavovej funkcie $\xi(t)$ pre jednotlivé hodnoty parametra \underline{W} . Ako hodnoty parametra sme zobrali $\underline{W} = \{1.0, 0.9, 0.8\}$. Vystavenie pre W^{VAR} je dané

ako: $q^{VAR}(t) = \theta_j^{VAR}(t)/\theta_j^B(t)$, kde θ_j predstavuje časť imania investovaného do akcie j . Počítali sme s CRRA funkciu užitočnosti a log-normálnou hustotou stavovej funkcie. Ako fixné parametre sme brali do úvahy: $T = 3, t = 0.5, \gamma = 3, W(0) = 1, \alpha = 0.02, r = 0.02, \xi(0) = 1, \|\kappa\| = 0.4$. Potom $\underline{\xi} = \{1.03, 1.65, 2.46\}, \bar{\xi} = 3.07$.

Už intuitívne bolo zrejmé, že čím menšia bude hodnota \underline{W} , tým menšia bude odchýlka od benchmarku. Táto intuícia sa nám graficky potvrdila. Ak by sme položili parameter $\underline{W} = 0$, tak vystavenie by bolo zhodné s benchmarkom. Čím väčšia hodnota parametra, tým väčšia odchýlka, avšak daná deviácia sa uskutočňuje na tom istom priestore $\xi(t)$. Ekonomicky si toto správanie vysvetliť nasledovne. Ak je hodnota dna vysoká, tak vystavenie je v „dobrých“ časoch nízke, pretože stratégia nemôže príliš hazardovať s majetkom. Ako sa však pohybujeme na hranici medzi prechodným a zlým stavom, tak stratégia musí vystaviť veľké množstvo majetku na zabezpečenie vysokého dna. Teda čím nižšie dno, tým stratégia nepotrebuje také veľké množstvo kapitálu na zaistenie dna.

3.7.3. Citlivosť na čas t

Ďalej skúmame citlivosť vystavenia q^{VAR} , keď sa nám zmenšuje čas do maturity portfólia.



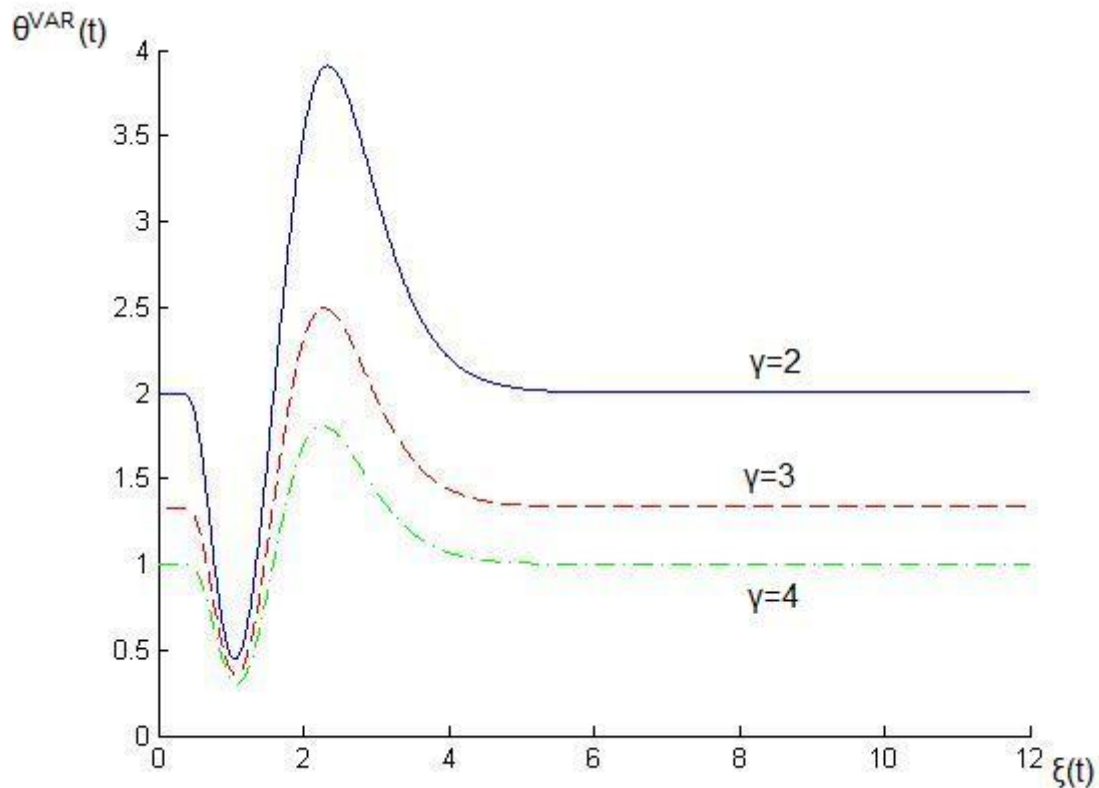
Obrázok 7: Citlivosť q na čas t .

Obrázok predstavuje vystavenie pre optimálnu hodnotu portfólia W v závislosti od stavovej funkcie $\xi(t)$ pre jednotlivé hodnoty parametra t . Ako hodnoty parametra sme zobrali $t = \{0.5, 1.5, 2.5\}$. Vystavenie pre W^{VAR} je dané ako: $q^{VAR}(t) = \theta_j^{VAR}(t)/\theta_j^B(t)$, kde θ_j predstavuje časť imania investovaného do akcie j . Počítali sme s CRRA funkciu užitočnosti a log-normálnou hustotou stavovej funkcie. Ako fixné parametre sme brali do úvahy: $T = 3, \gamma = 3, W(0) = 1, \underline{W} = 1, \alpha = 0.02, r = 0.02, \xi(0) = 1, \|\kappa\| = 0.4$. Potom $\underline{\xi} = \{1.03, 0.87, 0.80\}, \bar{\xi} = 3.07$.

Z tohto obrázka môžeme skonštatovať dva závery. Prvý je, že zväčšovaním parametra t , teda znižovaním času zostávajúceho do maturity, sa stratégia výraznejšie odlišuje od benchmarku. Druhý záver je ten, že sa zároveň znižuje priestor $\xi(t)$, na ktorom nemá vystavenie podobný priebeh ako benchmark. Je to spôsobené hlavne tým, že zatiaľ čo stratégia s väčším časom do maturity ešte môže zareagovať na prípadné zmeny vývoja aktív, stratégia, ktorá je tesne pred maturitou už túto možnosť nemá.

3.7.4. Citlivosť na parameter γ

Na tomto obrázku je znázornená optimálna časť majetku investovaná do rizikových aktív, $\theta^{VAR}(t)$ ako citlivá je pri zmene parametra γ .



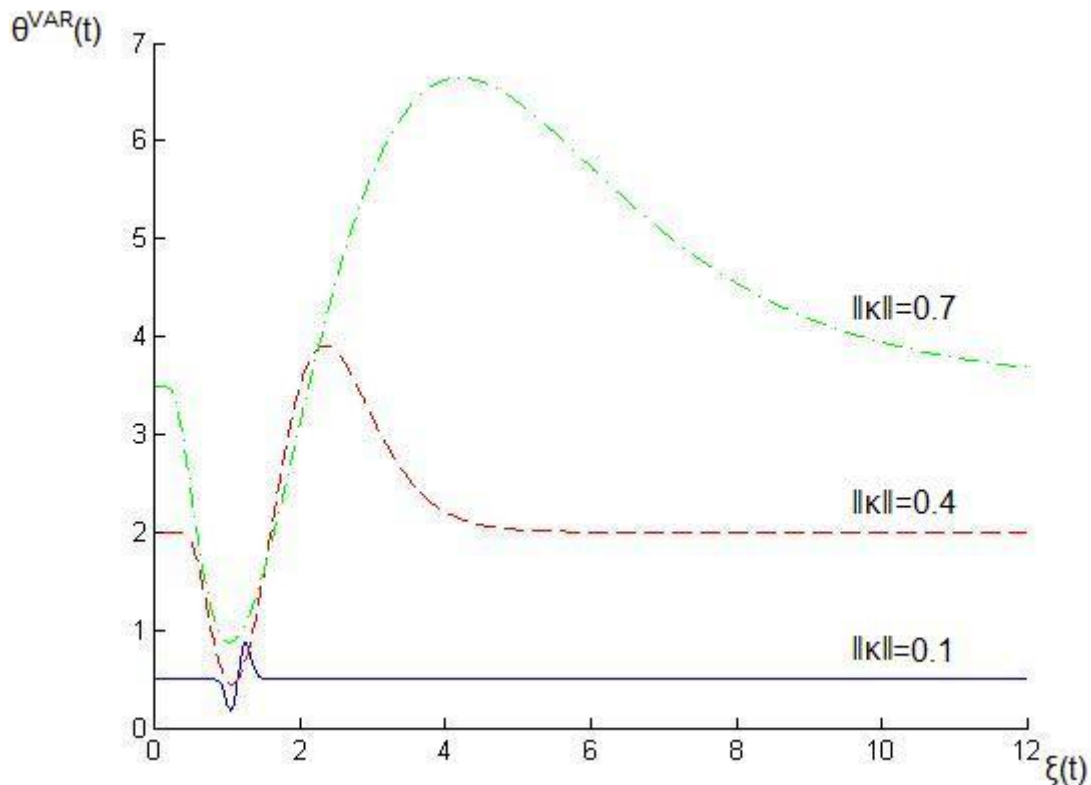
Obrázok 8: Citlivosť θ na parameter γ .

Obrázok znázorňuje optimálnu časť majetku investovanú do rizikového aktíva, $\theta^{VAR}(t)$ v závislosti od stavovej funkcie $\xi(t)$ pre jednotlivé hodnoty averzie voči riziku, parametra γ . Ako hodnoty parametra sme zobrali $\gamma = \{2, 3, 4\}$. Pri vytvorení tohto obrázka sme brali do úvahy len jedno rizikové aktívum, počítali sme s CRRA funkciu užitočnosti a log-normálnou hustotou stavovej funkcie. Ako fixné parametre sme brali do úvahy: $T = 1, t = 0.5, W(0) = 1, \underline{W} = 1, \alpha = 0.02, r = 0.02, \xi(0) = 1, \|\kappa\| = 0.4$. Potom investor, ktorý použil benchmark nadobúda hodnoty $\theta^B = \{2.0, 1.33, 1.0\}$.

Daný výsledok sme mohli aj intuitívne predpokladať. Najväčšie odchýlky od benchmarku sú pri nižších hodnotách γ . Čím je tento parameter menší, tým investor vyhľadáva väčšie riziko. Stáva sa z neho agresívnejší hráč. Naopak, pri vysokej averzii voči riziku je investor konzervatívnejší a viac sa zabezpečuje proti kolísaniu trhu. Najväčšie investície sú vždy na hranici $\bar{\xi}$, kde sa stratégia vždy snaží zachovať hodnotu dna. Pri vysokom $\xi(t)$ potom $\theta^{VAR}(t)$ vždy konverguje k hodnote θ^B .

3.7.5. Citlivosť na parameter $\|\kappa\|$

Na nasledujúcom obrázku sme znázornili, ako optimálna časť majetka $\theta^{VAR}(t)$, investovaná do rizikového aktíva, závisí od parametra $\|\kappa\|$.



Obrázok 9: Citlivosť θ na parameter $\|\kappa\|$.

Obrázok znázorňuje optimálnu časť majetku investovanú do rizikového aktíva, $\theta^{VAR}(t)$ v závislosti od stavovej funkcie $\xi(t)$ pre jednotlivé hodnoty trhovej ceny za riziko, parametra $\|\kappa\|$. Ako hodnoty parametra sme zobrali $\|\kappa\| = \{0.1, 0.4, 0.7\}$. Pri vytvorení tohto obrázka sme brali do úvahy len jedno rizikové aktívum, počítali sme s CRRA funkciou užitočnosti a log-normálnou hustotou stavovej funkcie. Ako fixné parametre sme brali do úvahy: $T = 1, t = 0.5, W(0) = 1, \underline{W} = 1, \alpha = 0.02, r = 0.02, \xi(0) = 1, \gamma = 2$. Potom investor, ktorý použil benchmark nadobúda hodnoty $\theta^B = \{0.5, 2.0, 3.5\}$.

Aj tu najväčšie odchýlky od benchmarku nastávajú pri zvyšovaní trhovej ceny za riziko. Čím je táto cena vyššia, tým viac sa oplatí investovať do rizikového aktíva, a tým väčšie je participovanie na prípadnom výnose. Zaujímavé je, že aj keď je trhovú cenu za riziko väčšia, neznamená to automaticky aj väčšiu alokáciu majetku v rizikovom aktíve. Je to spôsobené tým, že pri zmenách $\|\kappa\|$ sa nám dynamicky mení aj hodnota $\bar{\xi}$. Teda v niektorých prípadoch, keď sa pohybujeme pri tejto hranici, je investovaná časť do rizikového aktíva väčšia za účelom dosiahnutia hranicu $W^{VAR}(T) = W$, ako pri inej hodnote $\|\kappa\|$. Tiež graficky zrejme je aj menšia konvergencia k benchmarku pri vyššom parametri $\|\kappa\|$.

V tejto časti sme si rozobrali ako optimálne rozdeliť aktíva do jednotlivých finančných nástrojov, ak používame metódu Value At Risk – Manažment pre riadenie rizika, ktorý navrhli Basak a Shapiro v článku Value at Risk Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices. V ďalšej kapitole tento postup použijeme na dáta a znázorníme si niektoré výsledky.

4. Použitie VAR-MR

Táto kapitola je venovaná použitiu VAR-MR na alokáciu majetku do finančných nástrojov za účelom dosiahnutia požadovaného minimálneho výnosu s určitou pravdepodobnosťou. Použijeme vyššie spomínanú metódu (Basak & Shapiro, 2001 february), vysvetlíme si jednotlivé kroky postupu a budeme sledovať vývoj majetku.

4.1. Postup pri výbere aktív

Ako prvé si treba vybrať počet jednotlivých rizikových aktív, do ktorých bude možné investovať majetok. Aktíva by mali byť čo možno najviac rozmanité, aby sa zamedzilo veľkej korelácii. Je vhodné vybrať si aktíva s rôznym investičným zameraním, ako napríklad konzervatívne, vyvážené a rastové, pretože sa pri každom predpokladá investovanie do iných rizikových aktív a ich korelácia by mala byť malá. Predpokladáme, že výnosy majú normálne rozdelenie.

Ak už máme vybrané vhodné aktíva, potrebujeme odhadnúť ich variančno-kovariančnú maticu výnosov. Túto maticu môžeme vypočítať z historických dát. V našich výpočtoch sme rebalancovali denne, teda sme počítali denné historické výnosy. Predpokladá sa, že čas maturity portfólia by nemal byť menší ako sledované obdobie do minulosti. Teda ak počítame s dvojiročnou maturitou portfólia, historické výnosy by mali opisovať vývoj minimálne dva roky späť. Variančno-kovariančná matica denných výnosov má na diagonále varianciu výnosov a na iných miestach jednotlivé korelácie výnosov. Pri reálnych výpočtoch sme brali do úvahy ročnú bezrizikovú úrokovú mieru, takže aj variančno-kovariančnú maticu a priemerné denné výnosy sme transformovali na ročné hodnoty.

4.2. Výpočet

Prvá úloha pre investora je zvoliť si podľa vlastných preferencií jednotlivé parametre. Ide o konečný horizont portfólia T , averziu k riziku γ , veľkosť dna \underline{W} , pravdepodobnosť akou sa dno nemusí dosiahnuť α , úrokovú mieru bezrizikového aktíva r a veľkosť vstupného imania $W(0)$. Ako náhle máme zadefinované voliteľné parametre, môžeme postúpiť priamo k výpočtom. Pri všetkých nasledujúcich rovniciach a vzťahoch sme vychádzali z CRRA funkcie užitočnosti. Prvý krok je vyjadrenie parametra κ , ktorý je zadaný:

$$\kappa(t) = \sigma(t)^{-1}(\mu_i(t) - r(t)\bar{1}),$$

kde

$\mu_i(t)$ je priemerný t -dňový výnos rizikového aktíva i

$r(t)$ je úroková miera bezrizikového aktíva

$\sigma(t)^{-1}$ je matica volatilit jednotlivých aktív

Maticu $\sigma(t)^{-1}$ vypočítame tak, že na variančno-kovariančnú maticu výnosov použijeme Choleského dekompozíciu.

Teraz už môžeme vyjadriť $\bar{\xi}$, ktoré vypočítame zo vzorca:

$$\bar{\xi} = e^{-\|\kappa\|\sqrt{T}Q_\alpha - rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T},$$

kde

Q_α je kvantil normálneho normovaného rozdelenia s parametrom α .

Ďalšou hľadanou hodnotou je ξ_{Ben} , ktorú vypočítame nasledovne:

$$\xi_{Ben} = \left(\frac{W(0)}{\underline{W}}\right)^\gamma \xi(0)^\gamma e^{\left((rT + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T)(\gamma-1) - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma}\right)}.$$

Keď sme si vyjadrili tieto dve hodnoty, môžeme nájsť ξ_{PI} , ktoré hľadáme z intervalu $\langle 0, \xi_{Ben} \rangle$. Vypočítame ho numericky zo vzťahu:

$$\begin{aligned} \underline{W}\xi_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} e^{\left[(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T)\frac{(\gamma-1)}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2T\|\kappa\|^2}{2\gamma^2}\right]} \left(1 - \Phi\left(\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)\right) + \\ + \underline{W} e^{(-rT)} \Phi\left(\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\|\right) - \xi(0)W(0) = 0. \end{aligned}$$

Tak isto postupujeme pri aj pri hodnote ξ_{VAR} , ktoré však patrí do intervalu $\langle \xi_{PI}, \xi_{Ben} \rangle$. Pri numerickom hľadaní vychádzame z rovnice:

$$\begin{aligned} \underline{W}\xi_{VAR}^{\frac{1}{\gamma}} e^{\left[(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T)\frac{(\gamma-1)}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2T\|\kappa\|^2}{2\gamma^2}\right]} \left(\Phi\left(\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) + 1 \right. \\ \left. - \Phi\left(\frac{M_{VAR}}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)\right) + \\ + \underline{W} e^{(-rT)} \left[\Phi\left(\frac{M_{VAR}}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\|\right) - \Phi\left(\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\|\right)\right] - \xi(0)W(0) = 0, \end{aligned}$$

kde

$$M = -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T - \log \bar{\xi} > \|\kappa\|\sqrt{T}Z,$$

$$M^{VAR} = -rT - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T - \log \xi_{VAR} < \|\kappa\| \sqrt{T} Z.$$

Keď už máme všetky potrebné hodnoty, vypočítame vystavenie pre optimálnu hodnotu majetku:

$$q^{VAR}(t) = 1 - \frac{\underline{W} e^{-r(T-t)} \left(\Phi \left(-d_2 \left(\underline{\xi} \right) \right) - \Phi \left(-d_2 \left(\bar{\xi} \right) \right) \right)}{W^{VAR}(t)} +$$

$$+ \frac{\gamma \left(\underline{W} - \underline{\underline{W}} \right) e^{-r(T-t)} \Theta \left(d_2 \left(\bar{\xi} \right) \right)}{W^{VAR}(t) \|\kappa\| \sqrt{T-t}},$$

kde $\Phi(\cdot)$ je kumulatívna distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia a $\Theta(\cdot)$ je hustota pravdepodobnosti štandardného normálneho rozdelenia.

$$d_2(x) = \frac{\log \frac{x}{\bar{\xi}(t)} + \left(r - \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T-t)}{\|\kappa\| \sqrt{T-t}},^{28}$$

$$\underline{\underline{W}} = \begin{cases} \underline{W} \left(\frac{\underline{\xi}}{\bar{\xi}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} & \text{ak } \underline{\xi} < \bar{\xi}, \\ \underline{W} & \text{inak.} \end{cases}$$

Avšak optimálna časť majetku vystavená do jednotlivých rizikových aktív je

$$\Theta^{VAR}(t) = q^{VAR}(t) \Theta^{Ben}(t),$$

kde $\Theta^{Ben}(t)$ je benchmark investor, ktorého majetok je vystavený nasledovne:

$$\Theta^{Ben}(t) = \frac{1}{\gamma} [\sigma(t)^T]^{-1} \kappa.$$

Teraz už naše imanie môžeme prerozdeliť do jednotlivých aktív:

$$P_i(t) = q^{VAR}(t) \Theta_i^{Ben}(t) W(t),$$

kde

$P_i(t)$ je veľkosť majetku v čase t investovaná do rizikového aktíva i

$\Theta_i^{Ben}(t)$ je optimálna časť benchmarku investovaná do rizikového aktíva i

$W(t)$ je veľkosť majetku v čase t .

Zvyšok imania v čase t je vložená do bezrizikového aktíva.

²⁸ V našich výpočtoch budeme vždy považovať $\xi(0) = 1$ a v každom časovom kroku namiesto zväčšovania parametra t budeme znižovať čas do maturity. Správime to jednoduchou transformáciou $T = T - t$. Tým následne nemusíme počítať $\xi(t)$.

4.3. Vývoj rizikového a bezrizikového aktíva

Ako sme si už na začiatku spomínali, tak bezrizikové aktívum sa vyvíja nasledovne:

$$dB(t) = B(t)r(t)dt.$$

Z toho dostávame pri diskretnom predpoklade, že veľkosť majetku držaného v bezrizikovom aktíve je:

$$B(t) = B(t-1)(1 + r\Delta t),$$

kde

Δt - je časový krok, za ktorý nastáva prerozdelenie aktív (deň, mesiac, rok).

Pri rizikových aktívach je situácia zložitejšia. Vieme, že rizikové aktíva sa správajú nasledovne:

$$dS_j(t)dt = S_j(t)[\mu_j(t)dt + \sigma_j(t)dw(t)], \quad j = 1, \dots, N,$$

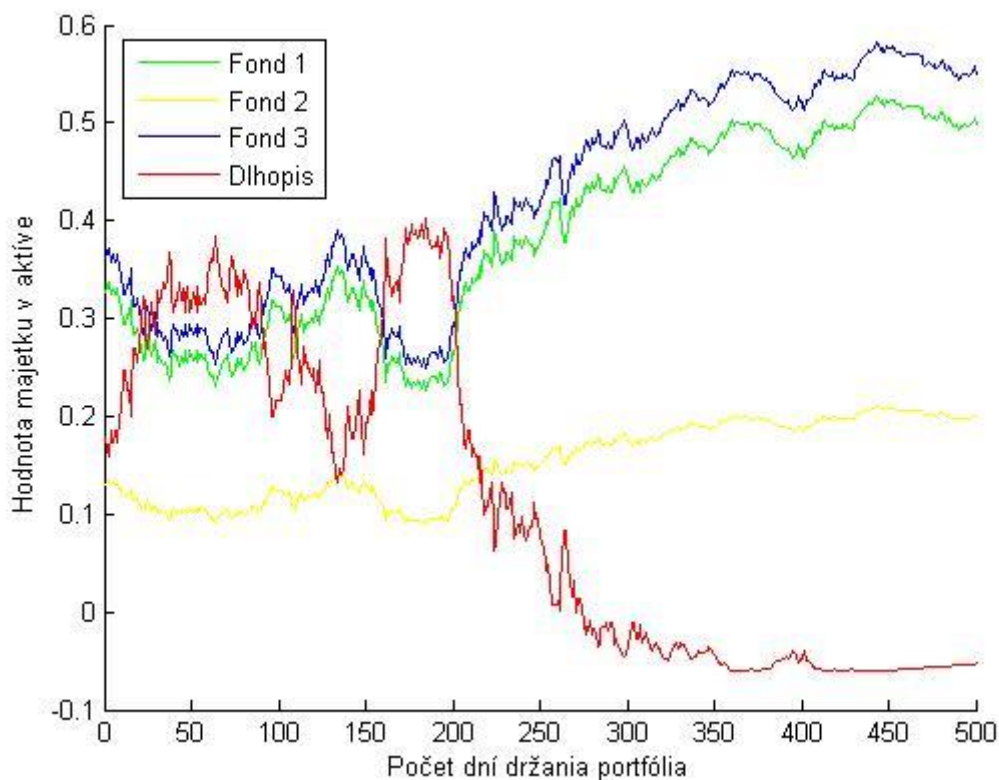
Pri diskretnom predpoklade dostávame, že majetok držaní v aktíve j zmení hodnotu na:

$$S_j(t) = S_j(t-1)e^{(\mu_j\Delta t + \Sigma_j\sqrt{\Delta t})},$$

kde

Σ_j - je súčin náhodného čísla z normálneho normovaného rozdelenia a j -teho vektora matice vytvorenej Choleského dekompozíciou z variančno-kovariančnej matice. To nám zabezpečí, že korelácia vygenerovaných aktív bude taká istá ako korelácia reálnych aktív.

Po časovom kroku Δt dostávame novú hodnotu majetku, s ktorou daný postup opakujeme až do maturity portfólia. Na nasledujúcom obrázku si ukážeme jeden takýto príklad prerozdeľovania aktív.



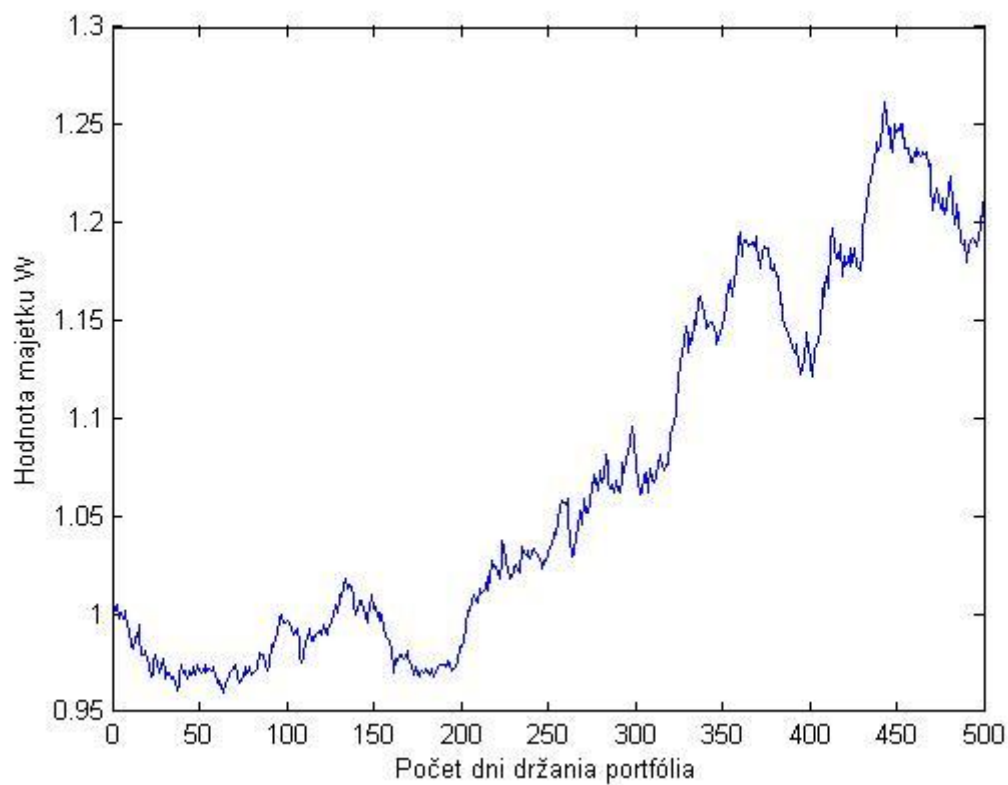
Obrázok 10: Alokácia majetku do štyroch aktív.

Na obrázku číslo 10 máme znázornenú alokáciu majetku do troch rizikových aktív a jedného bezrizikového dlhopisu. Za časový krok Δt sme si zvolili jeden deň, portfólio malo maturitu v $T = 2$ roky. Ako ďalšie parametre sme použili: $W(0) = 1$, $\underline{W} = 1$, $\alpha = 0.02$, $r = 0.02$, $\xi(0) = 1$, $\gamma = 3$, $\|\kappa\| = 0.2737$, $\mu = \{0.0345, 0.0440, 0.0534\}$. Potom investor, ktorý použil benchmark nadobúda hodnoty $\theta^B = \{0.4101, 0.1635, 0.4524\}$.

Z obrázka je vidieť, že fond 1 a fond 3 sú dosť silno korelované. Zato potenciálny výnos fondu 2 nie je adekvátny jeho volatilite. Preto sa do tohto fondu investuje pomerne konštantne málo. Môžeme si všimnúť správanie sa stratégie pri prudšom výkyve ostatných fondov. Ako náhle oba fondy zaznamenajú prepád, v nasledujúcom období stratégia automaticky zvyšuje sumu majetku držaného v bezrizikovom aktíve, zatiaľ čo hodnota vystavenia majetku v týchto dvoch fondoch klesá.

Môžeme tiež spozorovať, že ak sa hodnota celkového majetku dostane na „dost“ vysokú úroveň, tak investor si začne požičiavať za úrok r , a tak zvýši objem investovania v rizikových aktívach. Toto požičiavanie nie je však príliš veľké, pretože investor sa zabezpečuje proti prudkému poklesu aktív a možnému pádu hodnoty majetku pod stanovené dno \underline{W} .

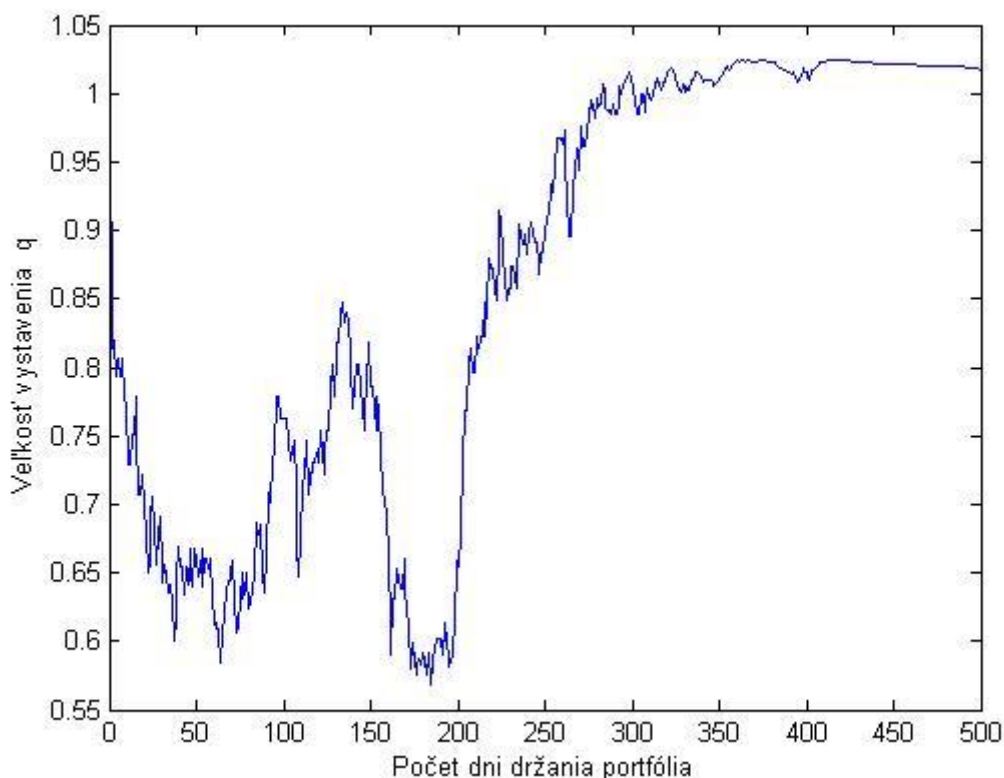
Na ďalšom obrázku si ukážeme celkový vývoj hodnoty majetku.



Obrázok 11: Celkový vývoj hodnoty majetku.

Všetky parametre sú ako na predchádzajúcom obrázku. Výsledná hodnota majetku je $W = 1.1954$, čo je viac ako 19.5% zhodnotenia investície počas 2 rokov pri dennej alokácii.

Taktiež si ukážeme aké vystavenie pre optimálnu hodnotu majetku nadobúdal investor pri tejto realizácii.



Obrázok 12: Vývoj vystavenia pre optimálnu hodnotu majetku.

Ako si môžeme všimnúť, tak investor zo začiatku viac preferoval bezrizikové aktívum, keď sa skoro polovica celého majetku zhodnocovala iba v ňom. Ako však rizikové aktíva začínali rásť, tak investor ihneď participoval na ich prudkom raste a skoro okamžite zmizlo bezrizikové aktívum z portfólia. Od určitej veľkosti majetku sa vystavenie dostalo až nad 1 a tam sa udržiavalo až do maturity portfólia.

4.4. Aplikácia na reálne dáta

V tejto časti sme použili stratégiu VAR-MR na reálne dáta. Tie sme zobrali zo stránky www.finance.yahoo.com. Zamerali sme sa len na určité dáta a potom sme pracovali iba s nimi. V našom prípade sme pozorovali denné výnosy troch rôznych aktív. Zastúpili sme ako konzervatívne aktívum, tak i vyvážené a rastové aktívum. V ďalších výpočtoch pracujeme s dátami:

- Hartford Income Shares Fund, Inc. (HSF)
- SunAmerica Focused Balanced Strategy A (FBAAX)
- Federated Stock & Bond A (FSTBX)

Pri počítaní variančno-kovariančnej matice výnosov sme sa zamerali na obdobie od 1.mája 2005 do 1.mája 2007. Výber tohto okna bol dôležitý, pretože od reálnych dát sme vyžadovali skôr konzervatívny charakter. Dáta z prelomových časov krízy sú nepoužiteľné kvôli zápornému výnosu a dáta po prudkom páde trhov majú vysokú trhovú cenu za riziko $\|\kappa\|$. Po vyjadrení denných výnosov sme sa dopracovali k údajom, že v tomto období mali tieto aktíva ročný výnos $\mu = \{0.0563, 0.0427, 0.0351\}$. A trhovú cenu za riziko sme následne dostali $\|\kappa\| = 0.3082$.

4.5. Simulácie

Ďalej sme postupovali nasledovne. Po zadaní základných parametrov sme danú simuláciu spustili 1000 krát. Ako základné parametre nám poslúžili:

1. Simulácia

$T = 2$ roky,

$r = 0.02$ p.a.,

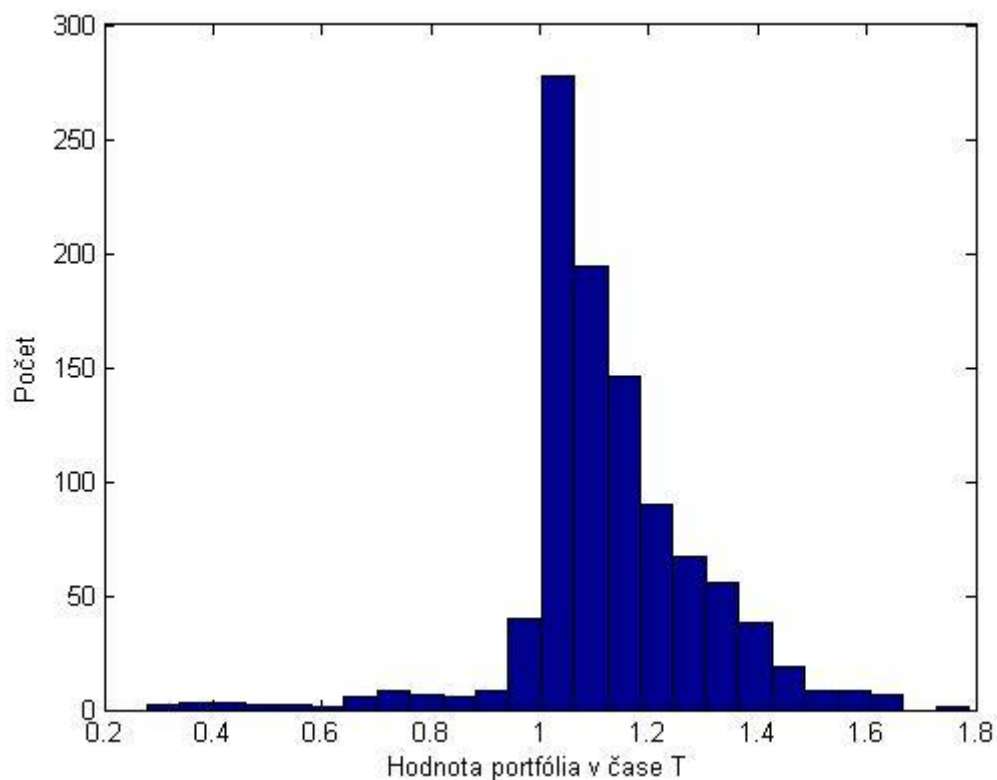
$\alpha = 0.02$,

$\gamma = 3$,

$W(0) = 1$,

$\underline{W} = 1$.

Výsledky vyzerajú nasledovne:



Obrázok 13: Histogram hodnôt portfólia.

Pre dôkladnejšiu analýzu si uvedieme aj tabuľkové hodnoty.

Rozpätie hodnoty portfólia	Početnosť dosiahnutia hodnoty
< 0.3	0.10%
(0.3,0.4)	0.40%
(0.4,0.5)	0.30%
(0.5,0.6)	0.50%
(0.6,0.7)	0.60%
(0.7,0.8)	1.20%
(0.8,0.9)	0.90%
(0.9,1.0)	3.50%
(1.0,1.1)	41.70%
(1.1,1.2)	23.90%
(1.2,1.3)	12.30%
(1.3,1.4)	9.40%
(1.4,1.5)	2.90%
(1.5,1.6)	1.50%
(1.6,1.7)	0.70%
≥ 1.7	0.10%

Tabuľka 1: Hodnoty zodpovedajúce k 1. simulácii.

Dané výsledky nám ukazujú, že až v 7.5% prípadoch nám konečná hodnota portfólia klesla pod nami stanovené dno. Toto vysoké číslo môže byť spôsobené tým, že naše dno je dosť vysoké vzhľadom na relatívne krátke obdobie držania portfólia, preto v ďalšej simulácii sme znížili dno stratégie.

2. Simulácia

V tejto simulácii sme zachovali všetky parametre konštantné až na dno, ktoré sme znížili.

$$T = 2 \text{ roky,}$$

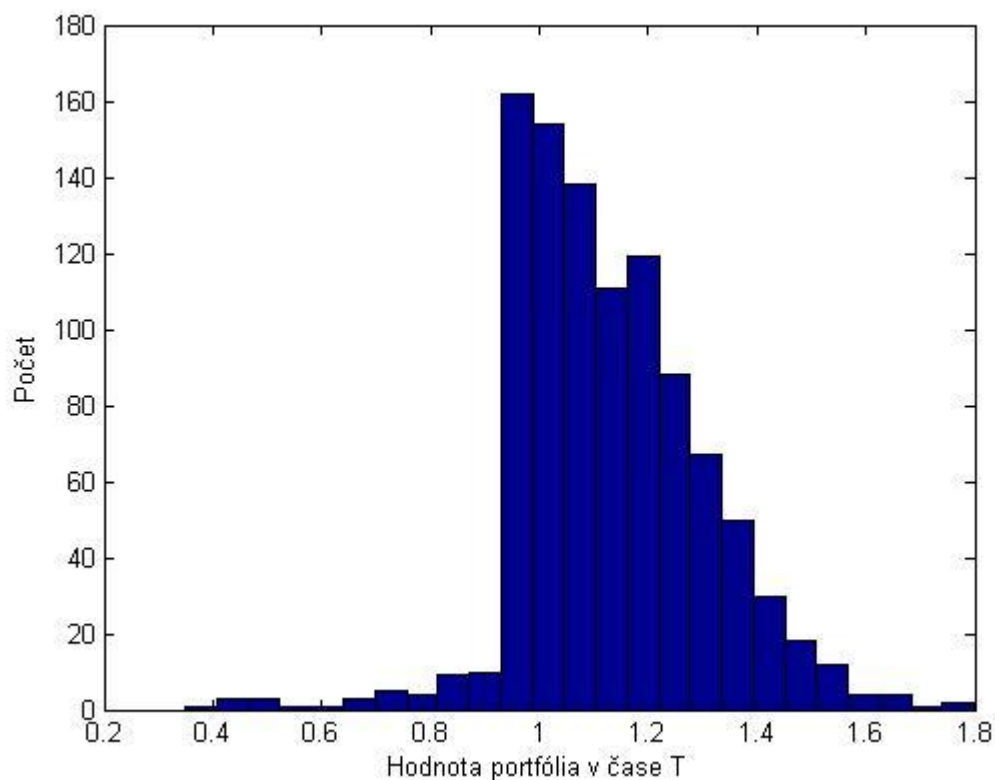
$$r = 0.02 \text{ p.a.,}$$

$$\alpha = 0.02,$$

$$\gamma = 3,$$

$$W(0) = 1,$$

$$\underline{W} = 0.95.$$



Obrázok 14: Histogram hodnôt portfólia.

Tabuľkové hodnoty sú:

Rozpätie hodnoty portfólia	Početnosť dosiahnutia hodnoty
< 0.3	0.00%
(0.3,0.4)	0.10%
(0.4,0.5)	0.50%
(0.5,0.6)	0.20%
(0.6,0.7)	0.50%
(0.7,0.8)	0.70%
(0.8,0.95)	3.40%
(0.95,1.0)	18.50%
(1.0,1.1)	24.50%
(1.1,1.2)	20.60%
(1.2,1.3)	16.00%
(1.3,1.4)	8.50%
(1.4,1.5)	4.20%
(1.5,1.6)	1.30%
(1.6,1.7)	0.70%
≥ 1.7	0.30%

Tabuľka 2: Hodnoty zodpovedajúce k 2. simulácii.

Pri nepatrnom znížení dna dosahujeme o niečo lepšie výsledky. Tu sme klesli pod úroveň dna v 5.4%. Aj keď celkový rast majetku, teda hodnoty väčšej ako bol vstupný kapitál sme dosiahli menej početne, zvýšila sa nám pravdepodobnosť výraznejšieho zisku ako v 1. simulácii. Či sa tento trend zachová, budeme skúmať v 3. simulácii.

3. Simulácia

V tomto prípade sme dno znížili ešte výraznejšie. Ostatné parametre zostávajú nezmenené:

$$T = 2 \text{ roky,}$$

$$r = 0.02 \text{ p.a.,}$$

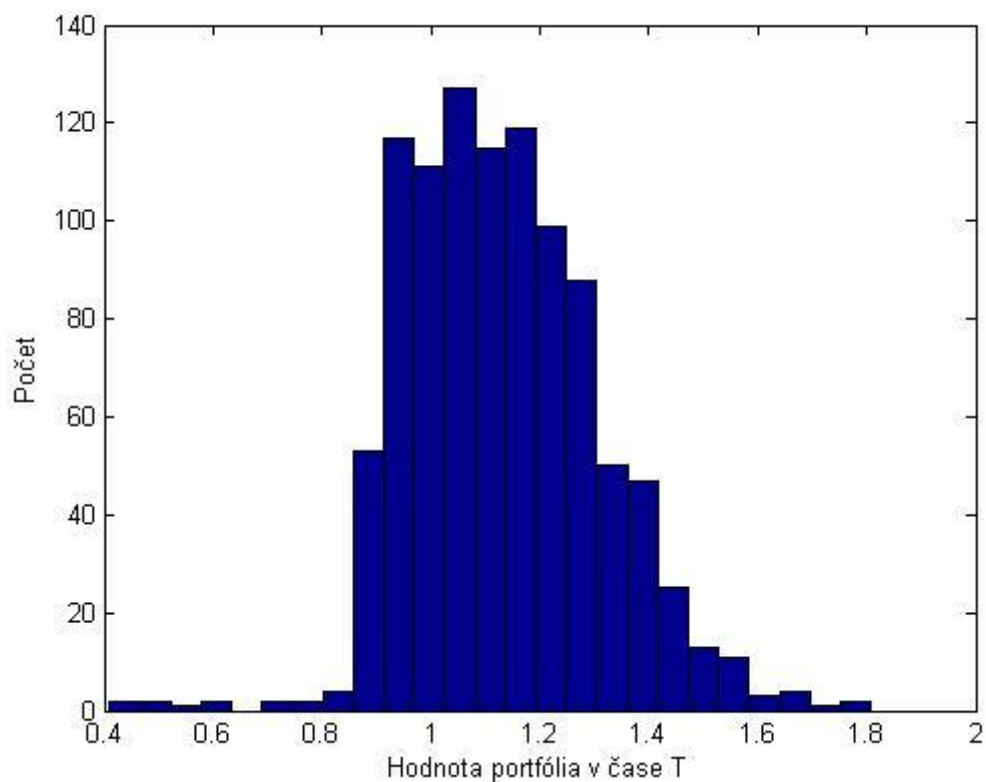
$$\alpha = 0.02,$$

$$\gamma = 3,$$

$$W(0) = 1,$$

$$\underline{W} = 0.90.$$

Výsledky sú znázornené na nasledujúcom histograme a v tabuľkovom prevedení:



Obrázok 15: Histogram hodnôt portfólia.

Tabuľkové hodnoty vyzerajú nasledovne:

Rozpätie hodnoty portfólia	Početnosť dosiahnutia hodnoty
< 0.3	0.00%
(0.3,0.4)	0.00%
(0.4,0.5)	0.40%
(0.5,0.6)	0.30%
(0.6,0.7)	0.00%
(0.7,0.8)	0.40%
(0.8,0.9)	2.00%
(0.9,1.0)	22.10%
(1.0,1.1)	21.20%
(1.1,1.2)	21.00%
(1.2,1.3)	16.10%
(1.3,1.4)	9.20%
(1.4,1.5)	4.60%
(1.5,1.6)	1.70%
(1.6,1.7)	0.70%
≥ 1.7	0.30%

Tabuľka 3: Hodnoty zodpovedajúce k 3. simulácii.

Pri znižovaní hodnoty dna je zrejmé, že čím viac zväčšíme vankúš medzi vstupným kapitálom a hodnotou dna, tým dostávame väčšiu pravdepodobnosť, že konečná hodnota portfólia bude väčšia. Na druhej strane sa zväčšuje priestor, kde hodnota je síce nad úrovňou dna, ale celkový účet stratégie bude záporný. Preto investor sám rozhoduje, či preferuje relatívne vyšší výnos alebo malú stratu. Správanie stratégie by bolo výraznejšie, keby sme zobrali menej konzervatívne dáta.

4. Simulácia

V tomto prípade sa zameriame na investorovu averziu voči riziku. Najprv ju znížime, čo znamená, že investor vyhľadáva rizikovejšie pozície. Ostatné parametre zostávajú v platnosti ako v prvej simulácii:

$$T = 2 \text{ roky,}$$

$$r = 0.02 \text{ p.a.,}$$

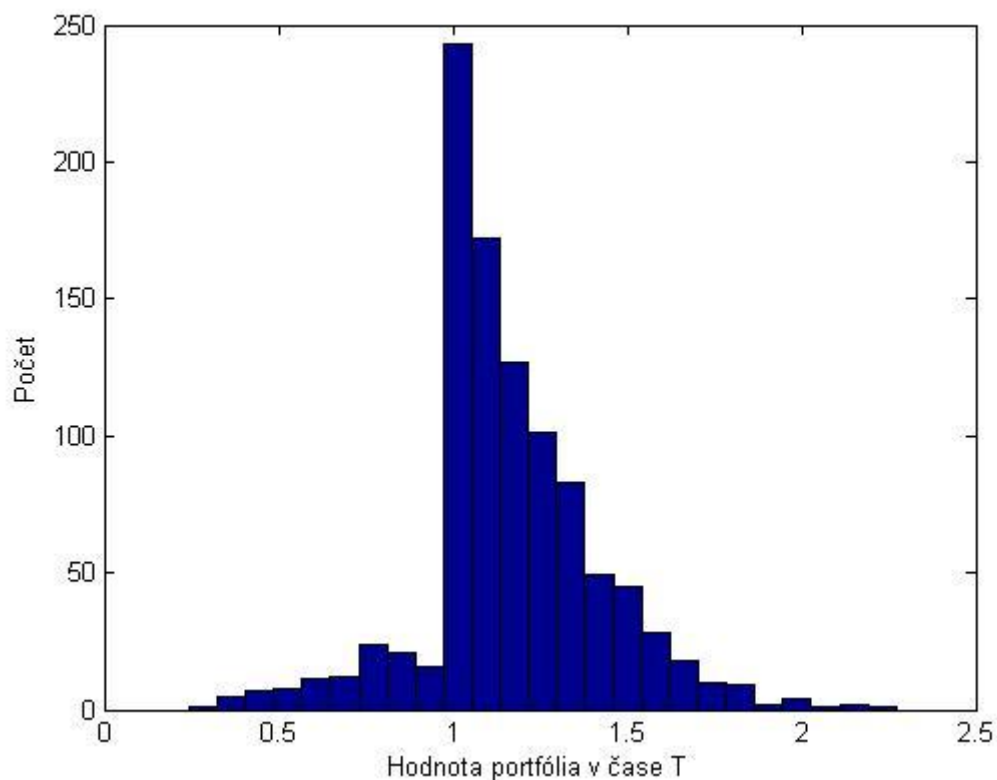
$$\alpha = 0.02,$$

$$\gamma = 2,$$

$$W(0) = 1,$$

$$\underline{W} = 1.$$

Výsledky sú znázornené na obrázku:



Obrázok 16: Histogram hodnôt portfólia.

A hodnoty v jednotlivých intervaloch sú:

Rozpätie hodnoty portfólia	Početnosť dosiahnutia hodnoty
< 0.3	0.10%
(0.3,0.4)	0.50%
(0.4,0.5)	0.70%
(0.5,0.6)	1.00%
(0.6,0.7)	1.30%
(0.7,0.8)	2.90%
(0.8,0.9)	2.40%
(0.9,1.0)	6.50%
(1.0,1.1)	31.10%
(1.1,1.2)	15.90%
(1.2,1.3)	12.50%
(1.3,1.4)	10.50%
(1.4,1.5)	4.90%
(1.5,1.6)	4.20%
(1.6,1.7)	2.60%
(1.7,1.8)	1.30%
(1.8,1.9)	0.60%
(1.9,2.0)	0.40%
≥ 2.0	0.60%

Tabuľka 4: Hodnoty zodpovedajúce k 4. simulácii.

Tu môžeme jednoznačne skonštatovať, že pri nižšej averzii voči riziku investor dosahuje väčší rozsah potenciálnych ziskov, ale aj strát. Funkcia dna sa nám zachováva, aj keď nie je až tak často dosiahnuté. Investor však s väčšou pravdepodobnosťou dosahuje

výraznejšie zisky. Zarážajúce je však veľký počet spozorovaných stratégií, ktorých výsledná hodnota skončila pod úrovňou dna (15.40%).

5. Simulácia

V tejto časti zasa zvýšime investorovu averziu voči riziku, čím sa investor stáva viac konzervatívnejší. Parametre sú zadané nasledovne:

$T = 2$ roky,

$r = 0.02$ p.a.,

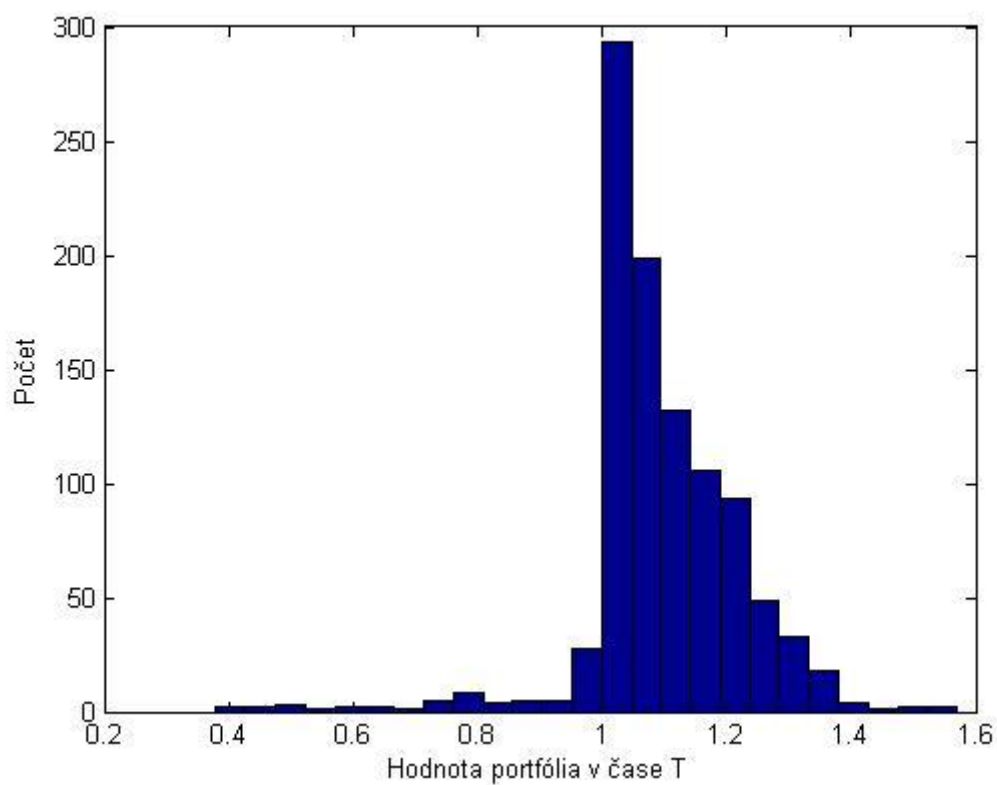
$\alpha = 0.02$,

$\gamma = 4$,

$W(0) = 1$,

$\underline{W} = 1$.

Grafické a numerické výsledky:



Obrázok 17: Histogram hodnôt portfólia.

Rozpätie hodnoty portfólia	Početnosť dosiahnutia hodnoty
< 0.3	0.00%
(0.3,0.4)	0.20%
(0.4,0.5)	0.20%
(0.5,0.6)	0.60%
(0.6,0.7)	0.30%
(0.7,0.8)	1.10%
(0.8,0.9)	1.10%
(0.9,1.0)	3.50%
(1.0,1.1)	50.40%
(1.1,1.2)	24.30%
(1.2,1.3)	13.30%
(1.3,1.4)	4.30%
(1.4,1.5)	0.50%
(1.5,1.6)	0.20%
≥ 1.6	0.00%

Tabuľka 5: Hodnoty zodpovedajúce k 5. simulácii.

Z výsledkov je zrejmé, že keď sa zvýši investorova averzia voči riziku, automaticky sa znižuje aj jeho šanca na dosiahnutie výraznejšieho zisku. Avšak na druhej strane je menej pravdepodobné, že konečná hodnota portfólia bude pod stanoveným dnom. V našej simulácii sa hodnota portfólia dostala pod úroveň dna v 7.0%, čo je pokles oproti prvej simulácii. Taktiež sa zvýšil celkový počet pozorovaní, keď hodnota dosiahla mierny zisk. Oproti tomu sa znížil celkový počet väčších ziskov.

Na prvý pohľad sa zdá, že pri všetkých simuláciách bola hodnota portfólia v čase maturity pričasto menšia ako hodnota dna. Pri dôkladnejšom štúdiu nášho postupu sme zistili, že nami použitá transformácia času v každom kroku $T = T - t$ je nevhodná, pretože pri tomto prístupe považujeme $\xi(t)$ za konštantné. Bolo by preto vhodné, keby sme pri predchádzajúcich simuláciách v každom kroku numericky vyjadrili aj hodnotu $\xi(t)$, pričom stratégia by vykazovala lepšie výsledky.

Pri týchto simuláciách sme sledovali správanie sa stratégie na základe reálnych dát, keď sme menili jednotlivé parametre, ktoré sú exogénne zadané funkciou užitočnosti investora. Zistili sme, že zväčšovaním vankúša a teda zmenšovaním dna môžeme dosiahnuť vyššie zisky, na druhej strane zasa musíme predpokladať malú stratu. Zmenou parametra averzie voči riziku nastavujeme pomyselné mantinely, ktoré nám ohraničia participáciu možných ziskov, ale aj strát. Čím je tento parameter vyšší, tým menšie môžeme predpokladať menšie výnosy, ale aj straty.

4.6. Sledovanie vývoja

V tejto časti budeme postupovať inak. Zostaneme pri tých istých aktívach, len sledované okno posunieme. Urobili sme to preto, lebo pôvodné dáta nemali vhodné ukazovatele na kratšie sledované obdobie. Tentoraz sme vypočítali denné výnosy od 1. apríla 2005 do 1. apríla 2007. Zostrojili sme variančno-kovariančnú maticu ročných

výnosov a priemerné ročné výnosy od obdobia 1. apríla 2005 do 1. apríla 2006. Použitým týchto parametrov sme simulovali prerozdelenie portfólia od 1. apríla 2006 do 1. apríla 2007. V tomto prípade nebol pohyb aktíva náhodný, ale správal sa podľa „historických“ výnosov, ktoré v skutočnosti aj mal. Predpokladali sme, že variančno-kovariančná matica výnosov sa nezmení. Zamerali sme sa na zmeny parametrov a pozorovali chovanie stratégie ako reakciu na tieto zmeny. Pred vyhodnocovaním dát musíme upozorniť, že pred koncom sledovaného obdobia nastane prudký pokles prvého (HSF) a druhého aktíva (FBAAX). Tretie aktívum nemalo výraznú stratu.

6. Simulácia

Stratégia začína prerozdeľovať aktíva 1.4.2006 na základe sledovania ročného okna. Maturita stratégie je 1.4.2007. Ako zvoliteľné parametre sme zobrali do úvahy:

$T = 1$ roky,

$r = 0.02$ p.a.,

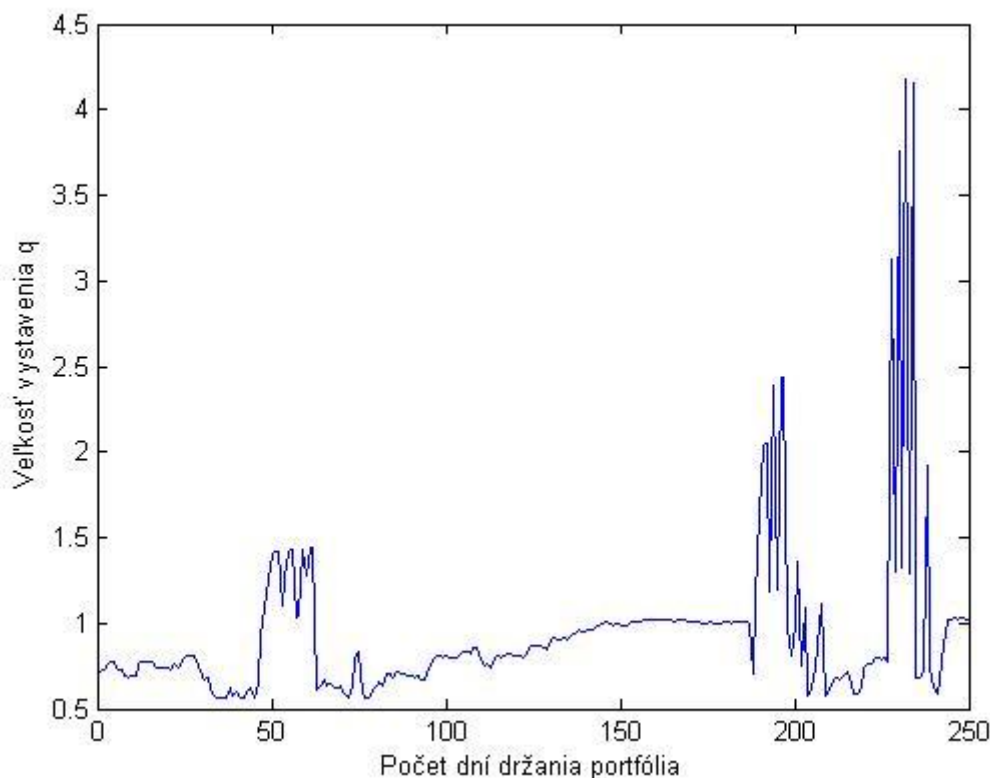
$\alpha = 0.02$,

$\gamma = 3$,

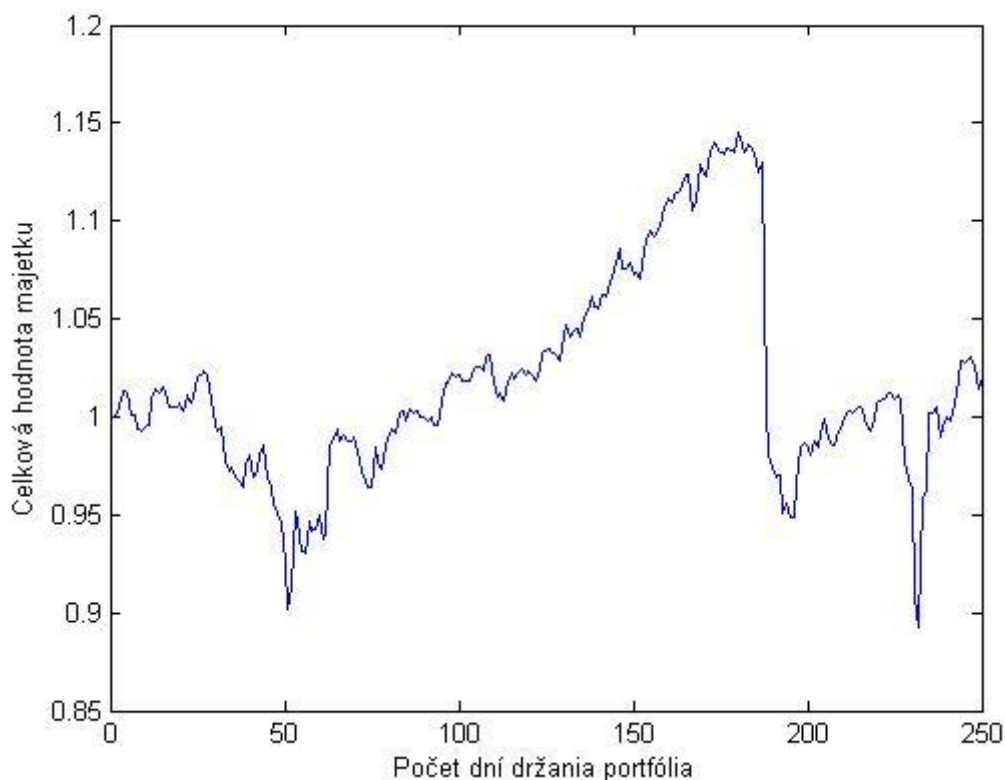
$W(0) = 1$,

$\underline{W} = 1$.

Na nasledujúcich obrázkoch môžeme pozorovať ako sa menila hodnota portfólia a vystavenie do rizikových aktív.



Obrázok 18: Vystavenie do aktív.



Obrázok 19: Hodnota portfólia.

Dané ročné pozorovanie nám vytvorilo tieto parametre: ročný výnos $\mu = \{0.0299, 0.0537, 0.0454\}$. A trhovú cenu za riziko sme následne dostali $\|\kappa\| = 0.3902$. Z obrázkov môžeme pozorovať „deformáciu“ správania sa stratégie, keď majetok tesne pred maturitou prudko klesol pod stanovené dno. Následne sme si museli imanie požičať za bezrizikovú úrokovú mieru, a tým zvýšiť naše vystavenie do rizikových aktív za účelom dosiahnuť minimálnu hranicu dna. V tomto prípade sa nám to podarilo, avšak vystavili sme sa obrovskému riziku ešte väčšieho pádu celkového majetku. Konečné imanie sa dostalo na úroveň 1.0204. Avšak na relatívne krátke obdobie (1 rok) sme hranicu dna zvolili príliš vysoko, takže potrebný vankúš bol malý, preto maximálna hodnota majetku v priebehu celého obdobia držania portfólia bola len 1.149.

7. Simulácia

V tejto simulácii sme znížili dno portfólia, aby sme dokázali viac participovať na raste trhov. Ostatné parametre zostali nezmenené:

$$T = 1 \text{ roky,}$$

$$r = 0.02 \text{ p.a.,}$$

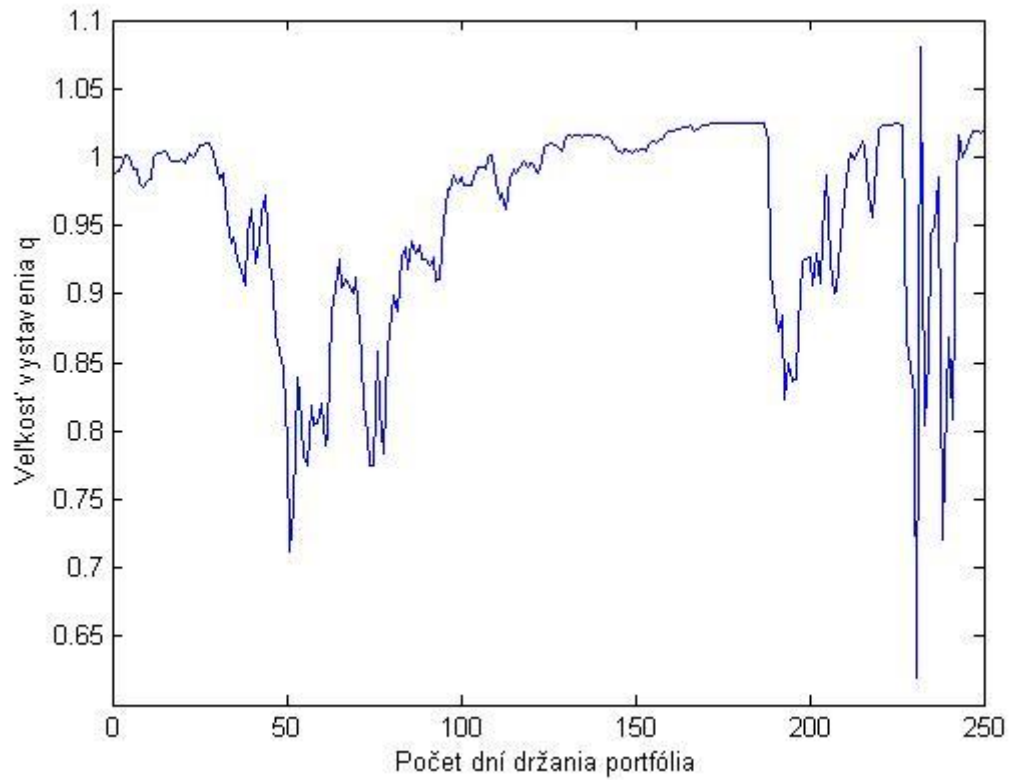
$$\alpha = 0.02,$$

$$\gamma = 3,$$

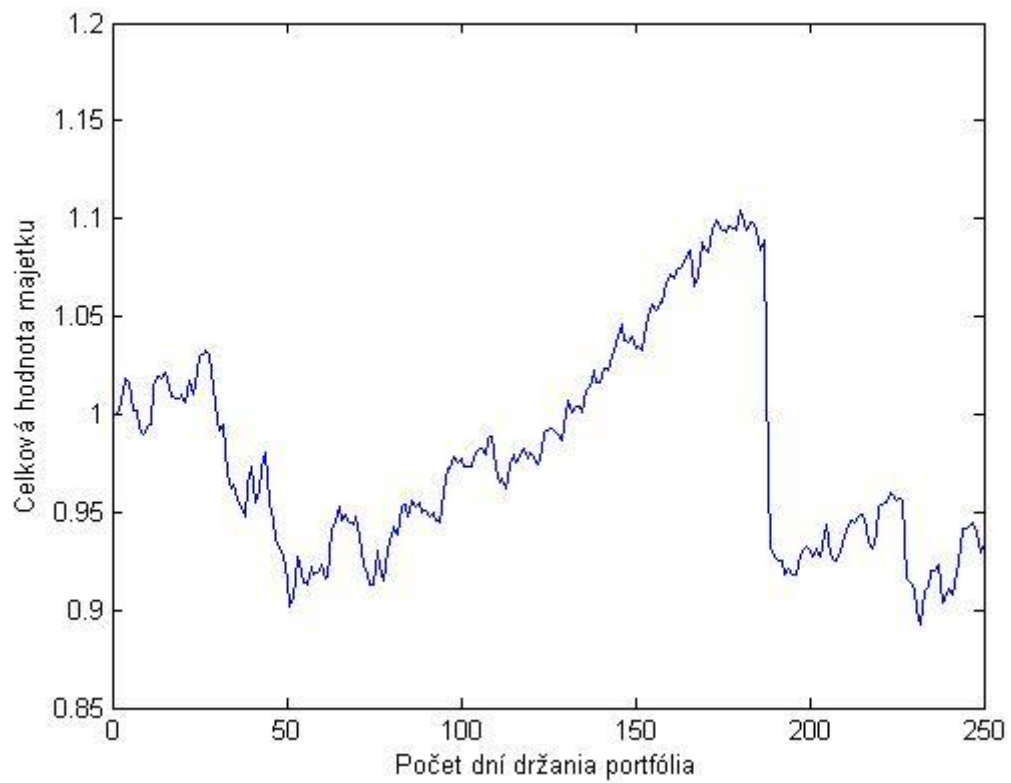
$$W(0) = 1,$$

$$\underline{W} = 0.90.$$

Výsledok vyzerá nasledovne:



Obrázok 20: Vystavenie do aktív.



Obrázok 21: Hodnota portfólia.

Aj keď v tomto prípade sme dosiahli horší konečný stav majetku (0.9349), bez väčších problémov sme presiahli hodnotu dna. V neprospech tejto simulácie hovorí aj maximálna hodnota majetku, ktorá dosiahla len 1.104. Takže zväčšením počiatočného vankúša sme nezabezpečili vyššiu hodnotu portfólia v priebehu celého roka sledovania. Bolo to spôsobené tým, že pri páde rizikových aktív na začiatku obdobia poklesla aj hodnota nášho portfólia a to viac ako v predchádzajúcej simulácii. Vlastnili sme viac rizikových aktív a pri ich poklese klesla aj celková hodnota majetku. Avšak pri lepšom skúmaní zistujeme, že celý priebeh stratégie bol omnoho menej rizikový ako prvý príklad. Vystavenie začínalo na vyššej úrovni a po celý čas sa pohybovalo v „rozumnom“ intervale. V prípade priaznivejšieho vývoja by sme dosiahli lepší výsledok. Naopak, pri ešte horšom vývoji by sme dosiahli menšiu potenciálnu stratu. Z tohto hľadiska by sme aj veľkosť dna mohli považovať za určitý obranný mechanizmus voči riziku.

8. Simulácia

V tomto prípade investorovi zvýšime averziu voči riziku, a tak spravíme stratégiu ešte bezpečnejšiu. Taktiež veľkosť dna nezmeníme a necháme ho znížené. Parametre sú:

$$T = 1 \text{ roky,}$$

$$r = 0.02 \text{ p.a.,}$$

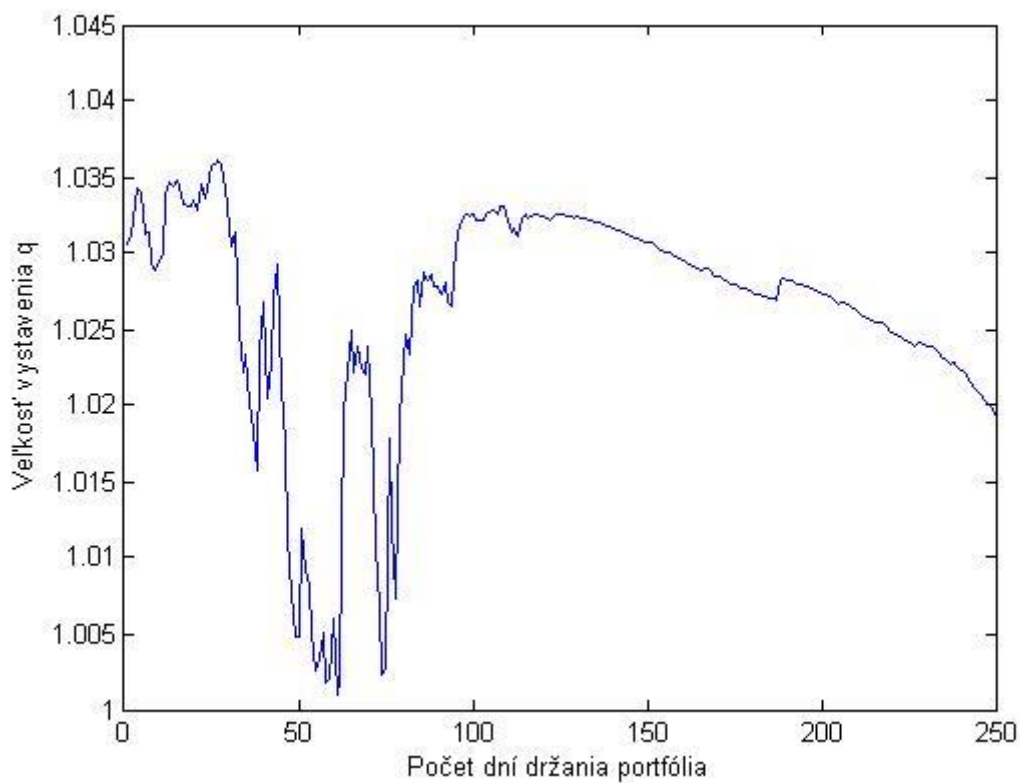
$$\alpha = 0.02,$$

$$\gamma = 7,$$

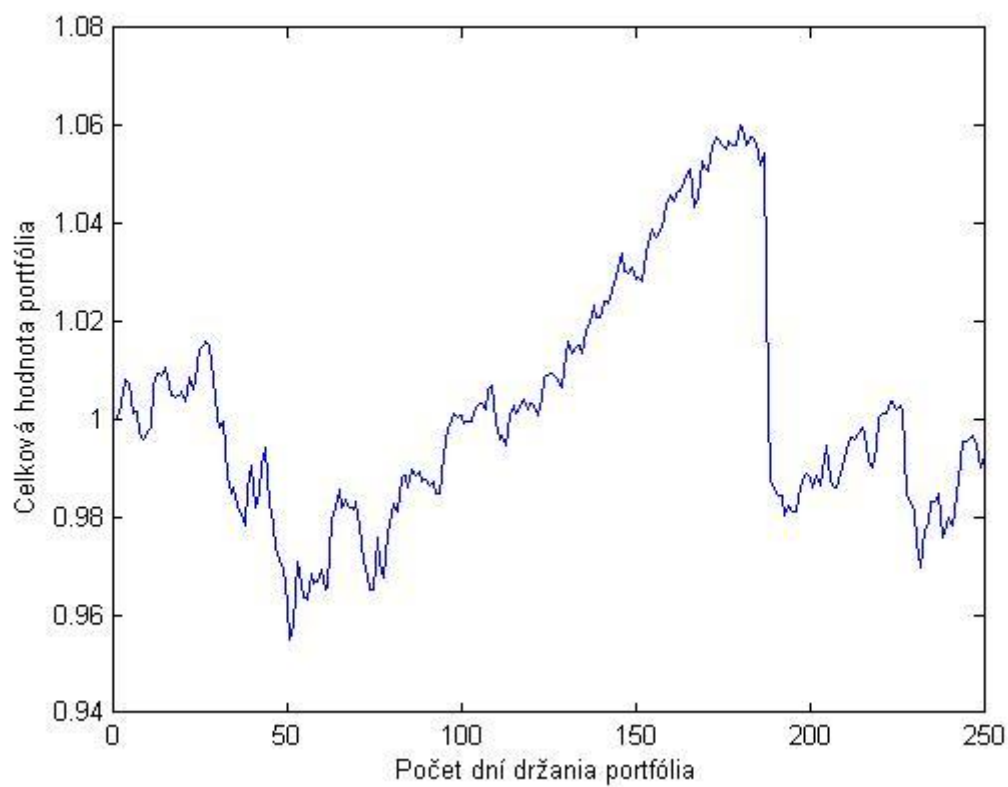
$$W(0) = 1,$$

$$\underline{W} = 0.90.$$

Výsledné správanie sa stratégie potom vyzerá:



Obrázok 22: Vystavenie do aktív.



Obrázok 23: Hodnota portfólia.

Pri lepšom hľadaní rozdielov medzi grafmi, ktoré vyjadrujú celkovú hodnotu majetku zistíme, že sú takmer identické. Najväčší rozdiel je v tom, že v poslednej simulácii sa hodnota majetku pohybovala v omnoho menšom intervale ako v predchádzajúcom prípade. Investovanie do rizikových aktív bolo v tom istom pomere, len v menšom množstve. To nám zabezpečilo, že nakoniec výsledná hodnota bola väčšia (0.9927). Pri horšom vývoji aktív na konci periódy sme to aj predpokladali. Naopak, pri pozitívnejšom vývoji by hodnota majetku bola menšia ako v prípade, keď averzia voči riziku bola $\gamma = 3$. Pri „bezpečnejšom“ prístupe bola aj maximálna hodnota najmenšia (1.0601).

Ak porovnáваме vystavenie do rizikových aktív, tak tu si interval môžeme rozdeliť na dve časti. V prvej časti krivky vystavenia sú identické, avšak pri rizikovejšom prístupe je interval vystavenia omnoho širší. Oproti tomu pri vysokej averzii k riziku je vystavenie stále väčšie ako jedna. Je to spôsobené hlavne tým, že už hodnota benchmark je omnoho menšia. Pri $\gamma = 3$ dostávame $\theta^B = \{0.0852, 0.6082, 1.1598\}$, zatiaľ čo pri $\gamma = 7$ vypočítame $\theta^B = \{0.0365, 0.2607, 0.4970\}$. Takže stratégia investuje omnoho viac do bezrizikového aktíva, a tým sa vyvaruje možným stratám. V druhej časti periódy môžeme pozorovať zaujímavý jav. Zatiaľ čo pri nízkej averzii k riziku sa vystavenie snaží za každú cenu udržať sa nad dnom, pri vysokej averzii k riziku vystavenie konverguje k jednotke. Tento jav je spôsobený hlavne veľkým vankúšom medzi majetkom a hodnotou portfólia a blížiacou sa maturitou portfólia, kde stratégia je oveľa viac konzervatívna a vyvaruje sa veľkému investovaniu do rizikových aktív. Tým aj predpokladá menšie možné pády pri kolísaní trhu.

9. Simulácia

Pri tejto simulácii zvýšime pravdepodobnosť, že nebude presiahnutá hodnota dna, teda parameter α . Ostatné parametre zostanú rovnaké ako v simulácii číslo 7.

$$T = 1 \text{ roky,}$$

$$r = 0.02 \text{ p.a.,}$$

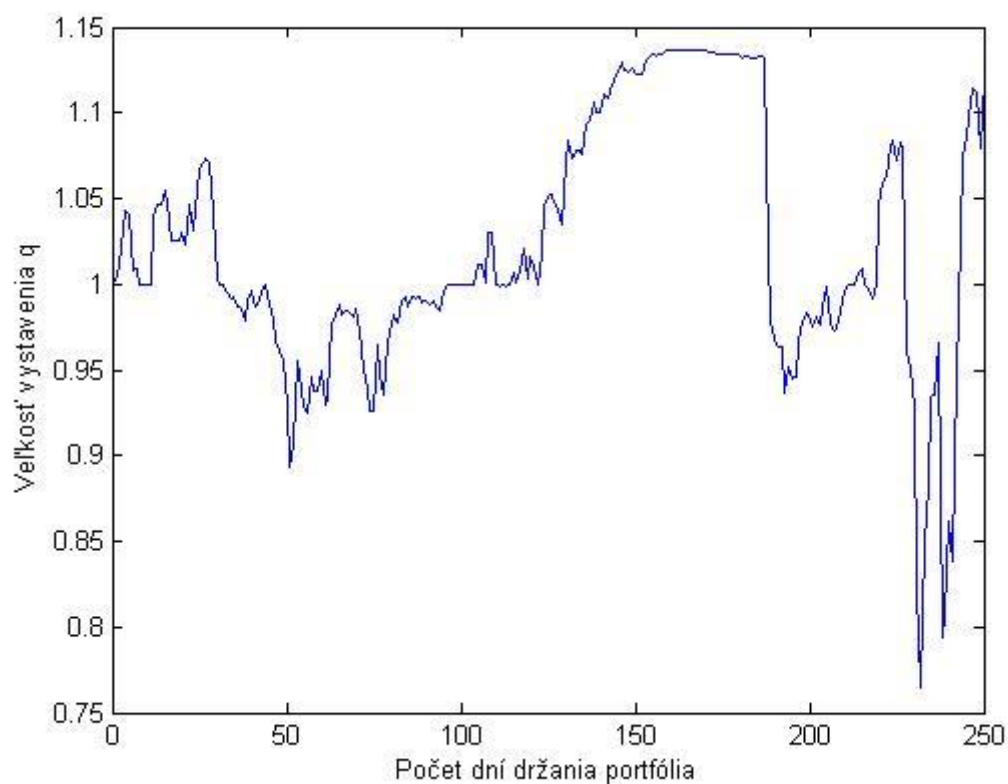
$$\alpha = 0.12,$$

$$\gamma = 3,$$

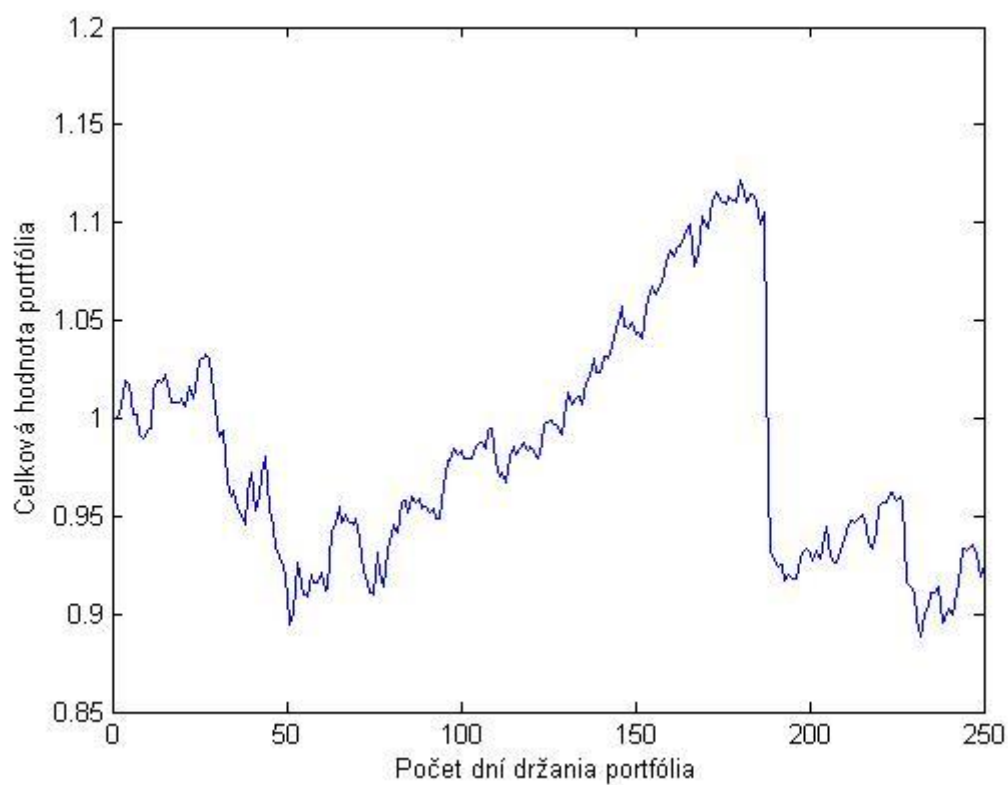
$$W(0) = 1,$$

$$\underline{W} = 0.90.$$

Následne sa hodnota portfólia vyvíjala:



Obrázok 24: Vystavenie do aktív.



Obrázok 25: Hodnota portfólia.

Predchádzajúce grafy nám ukazujú, že pri zvýšení parametra α investor prikladá dnu W menšiu váhu, a teda stratégia sa stáva agresívnejšia. Môže si dovoliť dostať sa s hodnotou portfólia pod úroveň dna s väčšou pravdepodobnosťou a viac investuje do rizikových aktív. V tomto prípade dosahujeme lepšiu konečnú hodnotu portfólia (0.9253) a aj maximálnu hodnotu počas držania portfólia (1.1215). Taktiež sme však mali horšiu aj minimálnu hodnotu portfólia ako v simulácii číslo 7. Môžeme teda prehlásiť, že parametrom α zvyšujeme agresivitu investovania.

V tejto časti sme modifikovali jednotlivé parametre a zisťovali sme ako sa stratégia vyrovná s týmito zmenami. Testovali sme stratégiu generovaným náhodným výnosu rizikového aktíva, ale aj historickými výnosmi, ktoré stratégia dopredu nevedela. Ukázali sme, čo investor môže očakávať od jednotlivých parametrov. Iba od investorovho presvedčenia závisí, aké hodnoty zvolí. Neexistujú najvhodnejšie hodnoty, ktoré by sme odporúčali. V porovnaní inými stratégiami stratégia VAR-MR aktívne prerozdeľuje majetok do rizikových a bezrizikových aktív, čím sa snaží participovať na raste trhu. Taktiež nám ponúka takzvanú funkciu dna, čo je určitá úroveň hodnoty portfólia, ktorú by nemala podliezť.

Záver

V našej diplomovej práci sme sa zamerali na problematiku zaistených stratégií. Najprv sme si rozobrali, čo znamená Value at Risk, takzvané VAR, popísali ako sa rozdeľujú a načrtli spôsoby výpočtu. V ďalšej kapitole sme si povedali o zaistených stratégiách, o najpoužívanejších prístupoch. Rozobrali sme si ako matematické, tak i praktické pozadie a vysvetlili rozdiely medzi nimi. Tieto časti boli skôr teoretické a mali nás „zasvätiť“ a pripraviť na nosnú tému tejto diplomovej práce.

Táto práca rozobrala metódu riadenia stratégie pomocou Value at Risk – Manažment pre riziko, ktorú navrhli Suleyman Basak a Alex Shapiro v práci Value at Risk based risk management: Optimal policies and asset prices. Najskôr sme si túto stratégiu teoreticky vysvetlili. Potom sme si ukázali citlivosť na zmeny jednotlivých parametrov.

Posledná časť tejto diplomovej práce bola praktická ukážka tejto stratégie na reálne dáta. Vysvetlili sme si postup ako pokračovať pri aplikácii tejto stratégie. Zamerali sme sa na simulovanie veľkého počtu jednotlivých výpočtov, pričom sme využívali generovanie výnosov rizikových aktív zachovajúc vzťahy zistených z reálnych dát. Taktiež sme ukázali, ako citlivo reaguje stratégia na zmeny parametrov. Ako ďalšie sme použili túto stratégiu na alokáciu majetku do rizikových aktív, pričom pohyb jednotlivých aktív opisoval historický vývoj. Tiež sme použili jednotlivé modifikácie parametrov a načrtli si „reálnu“ hodnotu majetku, ktorú by dosiahol použitým týchto modifikácií.

Najväčším problémom pri vytváraní praktickej časti tejto diplomovej práce bolo nájsť vhodné dáta, ktoré by mali „vhodné“ vlastnosti. Išlo o kladný výnos počas sledovaného obdobia a vhodné variančné a kovariančné vzťahy, aby trhová cena za riziko nízka ani vysoká. Taktiež pri reálnej aplikácii tejto stratégie je dôležité nájsť vhodné sledovacie okno na zistenie vzájomných vzťahov. Už pri malom posune môžu nastať veľké rozdiely potrebných parametrov.

Ako ďalšiu modifikáciu by bolo zaujímavé vložiť do tejto stratégie transakčné náklady vynaložené pri alokácii majetku do jednotlivých aktív. Sledovať chovanie sa stratégie, keď by mala zahrňovať dodatočné náklady. Potom by bol model viac použiteľný v praxi.

Cieľom tejto diplomovej práce bolo oboznámenie sa a testovanie stratégie VAR-MR na reálnych dátach. Taktiež sme spravili analýzu citlivosti pre jednotlivé parametre, ktoré do tejto stratégie vstupujú. Daný cieľ sme splnili, pričom sme aj poukázali na niektoré problémy, s ktorými sme sa stretli pri aplikácii stratégie.

Dúfame, že touto diplomovou prácou sme dostatočne vysvetlili stratégiu VAR-MR a postup pri jednotlivých krokoch výpočtu. Taktiež sme pripravili pôdu pre ďalšie modifikácie tejto metódy, ktoré sú viac sofistikovanejšie a modernejšie.

Literatúra

- Basak, S. (1995). A General Equilibrium Model of Portfolio Insurance. *Review of Financial Studies* 8 , 1059-1090.
- Basak, S., & Shapiro, A. (2001). Value at Risk based risk management: Optimal Policies and Asset Prices. *Review of Financial Studies* , 371-405.
- Beder, T. (1995). VAR:Seductive but Dangerous. *Financial Analyst Journal* , 12-24.
- Bertrand, P., & Pigent, J.-L. *Portfolio Insurance Strategies: OBPI versus CPPI*.
- Black, F., & Rouhani, R. (1989). *Constant portfolio insurance and the synthetic put option: a comparison, in Institutional Investor focus in Investment Management*. Cambridge: Ballinger.
- Bolulier, J. F., & Kanniganti, A. (2005). *Expected performance and risks of various portfolio insurance strategies*. Paris.
- Cox, J., & Huang, C. (1989). Optimal Consumption and Portfolio Policies when Asset Prices Follow a Diffusion Process. *Journal of Economic Theory* 49 , 33-83.
- Duffie, D., & Pan, J. (1997). An Overview of Value at Risk. *Journal of Derivatives* 4 , 7-49.
- ECB. (2009). *Ročná účtovná zvierka ECB*.
- Grossman, S., & Vila, J. (1989). Portfolio Insurance in Complete Markets:A Note. *Journal of Business* 62 , 473-476.
- Grossman, S., & Zhou, Z. (1996). Equilibrium Analysis of Portfolio Insurance. *Journal of Finance* 51 , 1379-1403.
- Hallerbach, W. G. (1999). Decomposing Portfolio Value at Risk a General Analysis. <http://www.gloriamundi.org/>. (dátum neznámy).
- Hull, J., & White, A. (1998). Value at Risk when daily changes in market variables are not normally distributed. *Journal of Derivatives* .
- Jílek, J. (2000). *Finanční rizika*. Praha: Grada.
- Jorion, P. (1997). *Value at Risk:The New Benchmark for Controlling Market Risk*. Chicago: Irwin.
- Karatzas, I., & Shreve, S. (1998). *Methods of mathematical finance*. New York: Springer-Verlag.
- Karatzas, I., Lehoczky, J., & Shreve, S. (1998). Optimal Portfolio and Consumption Decisions for a Small Investor on a Finite Horizon. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 25 , 1557-1586.
- Krajčovičová, Z. (2009). *Zaistené stratégie, Bakalárska práca*. Bratislava.
- Leland, H., & Rubinstein, M. (1988). *The evolution of portfolio insurance, in dynamic hedging: a guide to portfolio insurance*.
- Ludvik, A. (2005). *Portfolio insurance methods for index-funds*.
- Manganelli, S., & Engle, R. F. (2001). *Value at Risk Models in Finance* . European Central Bank.
- Mantegna, R., & Stanley, H. (2000). *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Melicherčík, I., Olšarová, L., & Úradníček, V. (2005). *Kapitoly z finančnej matematiky*. Bratislava: EPOS.
- Mishra, S. (2010). *Governance Risk Indicators™:A New Measure of Governance-Related Risk*. Governance Institute.
- Mlynarovič, V. *SOME PORTFOLIO INSURANCE STRATEGIES* . Bratislava.
- Perold, A. (1986). *Constant portfolio insurance*. Harvard: Harvard Business School.
- Rimarčík, M. (2004). *Využitie metód Value at risk na meranie kurzového rizika, Dizertačná práca*. Košice.

- Štalmach, M. (2007). *Value at risk: Nástroj na meranie trhového rizika, Diplomová práca*. Bratislava.
- Švarda, N. (2007). *Porovnanie rôznych štatistických testov na validáciu Value at risk modelov, Bakalárska práca*. Bratislava.
- Temporis, p. (Február 2008). *Temporis presentation: Global equities and Derivative Solutions*. Societe Generale, Corporate and Investment Banking.
- Zangari, P. (1997). *An improved methodology for measuring VaR*. New York: J. P. Morgan/Reuters.

Príloha

Výpočet ξ_{PI}

Funkcia $W(T)$ vyzerá nasledovne:

$$W(T) = \begin{cases} I(y\xi(T)) \text{ ak } \xi(T) < \xi_{PI} \\ \underline{W} \text{ ak } \xi(T) \geq \xi_{PI} \end{cases}.$$

V tomto prípade je dôležité poznať bod zlomu, kde sa z konštantnej funkcie stáva rastúca funkcia.

$$\begin{aligned} \xi(T) &< \xi_{PI} \\ e^{-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \|\kappa\|\sqrt{T}Z} &< \xi_{PI} \\ -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \|\kappa\|\sqrt{T}Z &< \log \xi_{PI} \\ M = -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \log \xi_{PI} &< \|\kappa\|\sqrt{T}Z \end{aligned}$$

Teraz, keď už vieme kde sa funkcia láme, tak poznáme nasledovné vzťahy.

$$E(\xi(T)W(T)) = \xi(0)W(0)$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^M \underline{W} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - x)} e^{-\frac{x^2}{2\|\kappa\|^2 T}} dx + \\ &+ \int_M^{\infty} \underline{W} \xi_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - x)\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{-\frac{x^2}{2\|\kappa\|^2 T}} dx = \xi(0)W(0) \end{aligned}$$

Jednotlivé integrály teraz upravíme na:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^M \underline{W} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - x)} e^{-\frac{x^2}{2\|\kappa\|^2 T}} dx = \\ &= \underline{W} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)} \int_{-\infty}^M e^{-\frac{x^2}{2\|\kappa\|^2 T} - x} dx = \\ &= \underline{W} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)} \int_{-\infty}^M e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2T}\|\kappa\|} + \frac{\sqrt{T}\|\kappa\|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\|\kappa\|^2 T}{2}} dx = \\ &= \underline{W} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT)} \int_{-\infty}^M e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\|\right)^2} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underline{W} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2T}} e^{(-rT)} \int_{\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\|}^{\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\|} e^{(-\frac{1}{2}y^2)} \|\kappa\|^2T \, dy = \\
&= \underline{W} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-rT)} \int_{-\infty}^{\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\|} e^{(-\frac{1}{2}y^2)} \, dy = \\
&= \underline{W} e^{(-rT)} \int_{-\infty}^{\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-\frac{1}{2}y^2)} \, dy = \\
&= \underline{W} e^{(-rT)} \Phi\left(\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\|\right).
\end{aligned}$$

Kde $\Phi(\cdot)$ je kumulatívna distribučná funkcia normálneho rozdelenia.

Druhý integrál vieme upraviť na:

$$\begin{aligned}
&\int_M^{\infty} \underline{W} \xi_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T - x)} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) e^{(-\frac{x^2}{2\|\kappa\|^2T})} \, dx = \\
&= \underline{W} \xi_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T)} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \int_M^{\infty} e^{(-\frac{x^2}{2\|\kappa\|^2T} - x \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right))} \, dx = \\
&= \underline{W} \xi_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T)} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \int_M^{\infty} e^{(-\left(\frac{x}{\sqrt{2T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{2T}\|\kappa\|}{2\gamma}\right)^2 + \frac{(\gamma-1)^2T\|\kappa\|^2}{2\gamma^2})} \, dx = \\
&= \underline{W} \xi_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2T}} e^{[-(rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) + \frac{(\gamma-1)^2T\|\kappa\|^2}{2\gamma^2}]} \int_M^{\infty} e^{(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2)} \, dx = \\
&= \underline{W} \xi_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2T}} e^{[-(rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) + \frac{(\gamma-1)^2T\|\kappa\|^2}{2\gamma^2}]} \int_{\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}}^{\infty} e^{(-\frac{1}{2}y^2)} \sqrt{T}\|\kappa\| \, dy = \\
&= \underline{W} \xi_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} e^{[-(rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) + \frac{(\gamma-1)^2T\|\kappa\|^2}{2\gamma^2}]} \int_{\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}}^{\infty} e^{(-\frac{1}{2}y^2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, dy = \\
&= \underline{W} \xi_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} e^{[-(rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) + \frac{(\gamma-1)^2T\|\kappa\|^2}{2\gamma^2}]} \left(1 - \Phi\left(\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ak teraz dosadíme nami vypočítané výrazy do pôvodného vzorca, dostaneme nasledujúcu formulu:

$$\underline{W} \xi_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} e^{[-(rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) + \frac{(\gamma-1)^2T\|\kappa\|^2}{2\gamma^2}]} \left(1 - \Phi\left(\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)\right) +$$

$$+ \underline{W} e^{(-rT)} \Phi \left(\frac{M}{\sqrt{T} \|\kappa\|} + \sqrt{T} \|\kappa\| \right) = \xi(0) W(0)$$

Z tohto výrazu si už numericky vieme vypočítať ξ_{PI} .

Výpočet ξ_{VAR}

Funkcia $W(T)$ vyzerá nasledovne:

$$W(T) = \begin{cases} I(y\xi(T)) \text{ ak } \xi(T) < \xi_{VAR} \\ \underline{W} \text{ ak } \xi_{VAR} < \xi(T) < \bar{\xi} \\ I(y\xi(T)) \text{ ak } \bar{\xi} < \xi(T) \end{cases}$$

Aj tu musíme skúmať, kedy sú dané ohraňovania aktívne.

$$\begin{aligned} & \xi(T) < \xi_{VAR} \\ & e^{-rT - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T - \|\kappa\| \sqrt{T} Z} < \xi_{VAR} \\ & -rT - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T - \|\kappa\| \sqrt{T} Z < \log \xi_{VAR} \\ M^{VAR} & = -rT - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T - \log \xi_{VAR} < \|\kappa\| \sqrt{T} Z \end{aligned}$$

A druhé ohraňovanie je:

$$\begin{aligned} & \xi(T) > \bar{\xi} \\ & e^{-rT - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T - \|\kappa\| \sqrt{T} Z} > \bar{\xi} \\ & -rT - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T - \|\kappa\| \sqrt{T} Z > \log \bar{\xi} \\ M & = -rT - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T - \log \bar{\xi} > \|\kappa\| \sqrt{T} Z \end{aligned}$$

Teraz sa nám rovnica „rozpadne“ na tri integrály.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^M \frac{\underline{W} \xi_{VAR}^{\frac{1}{\gamma}}}{\sqrt{2\pi \|\kappa\|^2 T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T - x) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} e^{-\frac{x^2}{2\|\kappa\|^2 T}} dx \\ & \int_M^{M^{VAR}} \frac{\underline{W}}{\sqrt{2\pi \|\kappa\|^2 T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T - x)} e^{-\frac{x^2}{2\|\kappa\|^2 T}} dx \\ & \int_{M^{VAR}}^{\infty} \frac{\underline{W} \xi_{VAR}^{\frac{1}{\gamma}}}{\sqrt{2\pi \|\kappa\|^2 T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi \|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2} \|\kappa\|^2 T - x) \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)} e^{-\frac{x^2}{2\|\kappa\|^2 T}} dx \end{aligned}$$

Výrazy sa vypočítajú analogicky ako v predchádzajúcich prípadoch a dostávame:

$$\begin{aligned}
& \underline{W} e^{(-rT)} \left[\Phi \left(\frac{M^{VAR}}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\| \right) - \Phi \left(\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\| \right) \right] + \\
& + \underline{W} \tilde{\xi}_{VAR} \frac{1}{\gamma} e^{\left[\left(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T \right) \frac{(\gamma-1)}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2} \right]} \left(\Phi \left(\frac{M}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma} \right) + 1 \right. \\
& \quad \left. - \Phi \left(\frac{M_{VAR}}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma} \right) \right) = \xi(0)W(0)
\end{aligned}$$

Z danej formulky už len numericky vypočítame $\tilde{\xi}_{VAR}$.