

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



OCEŇOVANIE

CMS SPREAD RANGE ACCRUAL

Diplomová práca

Matej Stračiak

Vedúci práce: RNDr. Ing. Ján Pataky

Ekonomická a finančná matematika

BRATISLAVA 2010

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

OCEŇOVANIE CMS SPREAD RANGE ACCRUAL

Diplomová práca

Matej STRAČIAK

Štúdijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Štúdijný program: Ekonomická a finančná matematika

Vedúci práce: RNDr. Ing. Ján Pataky

BRATISLAVA 2010

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcemu mojej diplomovej práce
RNDr. Ing. Jánovi Patakymu, za cenné rady a odborné vedenie počas celého spraco-
vania témy.

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som prácu vypracoval samostatne s využitím svojich poznatkov a s použitím uvedenej literatúry.

Dátum kompilácie: 30. augusta 2010

Typeset in L^AT_EX

Abstrakt

Táto práca pojednáva o konštrukcii rozšírenej verzie stromu pre Hull-Whiteov dvojfaktorový model. V práci sú skombinované dva dvojdimenzionálne trinomické stromy, pre ktoré sú taktiež definované aproximačné ocenenia dlhopisov a diskontných faktorov vo vrchoch zloženého stromu. Aproximačné vyjadrenia cien dlhopisov a diskontných faktorov sú zrátané rešpektujúc časovo závislé váhy stromov. Neskôr sa práca venuje kalibračnému algoritmu, kde lokálne minimá sa hľadajú pomocou optimalizačného Levenberg–Marquardtovho algoritmu. Pri ocenení kalibračného koša sa kladie dôraz na efektívnu implementáciu. V závere je zhodnotená schopnosť oceniť zložitejšie deriváty a porovnanie s klasickou verziou HW2F stromu.

Kľúčové slová: Range Accrual, Constant Maturity Swap Spread, Kalibrácia, Trinomický strom, Swaption

Dátum kompilácie: 30. augusta 2010

Typeset in L^AT_EX

Abstract

In this paper we provide an extension of discrete implementation of Hull-White two-factor model. We combine two two-dimensional trinomial trees together and define approximate formulas for bond prices and discount factors in nodes. We approximated bond prices and discount factors with respect to time dependent weights of two trees. Then we provide brutal-force like calibration method followed by local minima search via Levenberg–Marquardt nonlinear algorithm. We respected rules of effective numerical implementation in algorithm that calculates prices of derivatives in calibration basket. After that, we discuss advantages of this extension over basic HW2F discrete implementation method via tree and compare them.

Key words: Range Accrual, Constant Maturity Swap Spread, Calibration, Trinomial tree, Swaption

Obsah

Úvod	2
1 Základné označenia a pojmy	3
1.1 Short Rate, Bank Account	3
1.2 Discount Factor, Zero Coupon Bond, Spot Rate	4
1.3 IRS - Interest Rate Swap	4
1.3.1 Swaption - Interest Rate Swap Option	7
1.4 CMS Spread	8
1.4.1 CMS Spread Range Accrual	10
2 Modely	13
2.1 Hull-White jednofaktorový model	14
2.1.1 Trinomický strom	14
2.2 Hull-White dvojfaktorový model	17
2.2.1 Dvojdimenziálny trinomický strom	19
2.3 Upravený dvojfaktorový Hull-White model	23
2.3.1 Štvor-dimenziálny trinomický strom	25
2.4 Kalibrácia	28
2.4.1 Kalibračný kôš	31
2.4.2 Ocenenie kalibračného koša	31

2.4.3	Minimalizácia chyby	33
2.4.4	Kalibračný postup	33
2.4.5	Výsledky kalibrácie	36
3	Ocenenie CMS Spread RA	38
3.1	CMS Spread & Modely	38
4	Záver	41
	Literatúra	63

Úvod

S rýchlym rozvojom finančných trhov sa v posledných rokoch začali objavovať stále nové a komplexnejšie deriváty. Paralelne s tým sa začal závod o vymyslenie najlepšieho modelu na oceňovanie. Výsledkom je často krát to, že 3 rôzne deriváty oceňujeme troma rôznymi modelmi. Pri každom modeli je tak nutnosť prejsť viacero procesov; od zvládnutia teoretického pozadia derivátu a modelu, programovej implementácie až po efektívnu kalibráciu a ocenenie. Niekedy sa stane, že príbuzné deriváty oceňujeme rôznymi modelmi, ktoré ani nie sú konzistentné, ako napríklad LSM a LMM¹. Preto pri nutnosti ocenenia nového derivátu je snahou namiesto použitia nového modelu, upraviť alebo vylepšiť model, ktorý už máme zabehnutý.

Vzhľadom na to, cieľom mojej diplomovej práce je preskúmanie možnosti rozšírenia zaužívaného dvojfaktorového Hull-Whiteovho short rate modelu a následná implementácia do používateľskej roviny. Zanalyzujeme schopnosť takto rozšíreného modelu vysporiadať sa so zložitejšími typmi derivátov, akými sú CMS Spread Range Accrualy.

V prvej kapitole sa oboznámime so základnými pojmami a derivátmi, s ktorými budeme pracovať. V ďalšej kapitole predstavíme jedno- a dvojfaktorové Hull-Whiteove modely spolu s ich diskretnou reprezentáciou cez trinomické stromy. Tu skombinujeme dva dvojdimenzionálne trinomické stromy a navrhujeme ich implementáciu. Neskôr sa budeme zaoberať kalibráciou dvojfaktorového Hull-Whiteovho modelu a nami upravenou verziou. V závere takto nakalibrovanými modelmi oceníme niekoľko CMS Spread Range Accrualov a porovnáme výsledky s cenami uvedenými na Bloomburgu. Programovú implementáciu v programe R uvedieme v prílohe. Taktiež zanalyzujeme výhody nami upraveného modelu oproti jeho klasickej H-W dvojfaktorovej verzii.

¹Log-normálny forward-Swap Model a Log-normálny Libor Market Model

Kapitola 1

Základné označenia a pojmy

V tejto kapitole definujeme základné označenia a pojmy, ktoré budeme používať, neskôr predstavíme finančné deriváty, potrebné pri generovaní dát, kalibrácii modelu a ocenení range accrualu a definujeme spôsoby ich ocenenia. Taktiež stručne popíšeme ich význam z hľadiska obchodovania na finančných trhoch.

1.1 Short Rate, Bank Account

Najjednoduchší spôsob vyjadrenia diania na finančnom trhu je pomocou stavu bankového konta. Stav účtu v čase $t > 0$ rokov pri počiatočnom stave $B(0) = 1$, úročený úrokom $r(t)$ p.a. budeme označovať $B(t)$, dané vzťahom:

$$B(t) = e^{\int_0^t r(s) ds} . \quad (1.1)$$

Toto označenie, (v angl. aj *money-market account*) reprezentuje bezrizikovú investíciu, ktorá sa úročí spojito bezrizikovým úrokom.

Bezrizikový τ ročný úrok (a forwardový úrok s maturitou T), v čase t budeme označovať $r_\tau(t)$ (resp. $r_\tau^F(t, T)$).

Napríklad, ak v čase t sa $B(t) = 1.3$, o deň neskôr bude na účte $B(t + 0.04) = B(t)e^{0.004r(t)}$, kde $r(t)$ je okamžitý úrok na dobu 1 deň p.a. v čase t .

Tento úrok nazývame *short rate*, nakoľko je to úrok na veľmi krátku dobu (označovaný aj *overnight rate*).

1.2 Discount Factor, Zero Coupon Bond, Spot Rate

Diskontným faktorom $D(t, T)$ budeme označovať hodnotu bankového účtu v čase t , ktorý bude mať v čase T hodnotu 1 (dolár, euro ...), pri danom vývoji $r(s)$, pre $s \in (t, T)$, teda

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = e^{-\int_0^t r(s) dt} . \quad (1.2)$$

Je zrejmé, že tento *stochastický* diskontný faktor závisí od pohybu úroku r v čase medzi t a T .

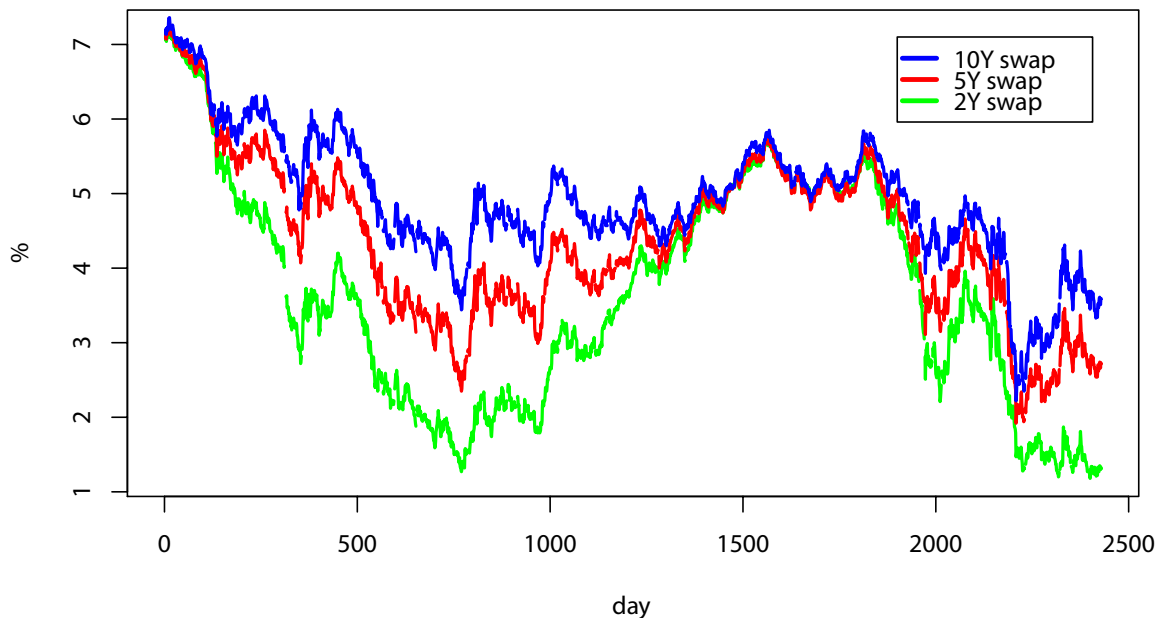
Cenu bezkupónového dlhopisu v čase t , ktorý vyplatí 1\$ v čase T budeme označovať $P(t, T)$. V rizikovo neutrálnom svete zrejme platí, že $P(t, T)$ sa rovná strednej hodnote $D(t, T)$, pri očakávanom vývoji úroku. Zrejme $P(0, T) = D(0, T)$, táto krivka sa niekedy označuje ako *zero-bond curve*.

1.3 IRS - Interest Rate Swap

V našom prípade, úrokový swap je kontrakt (dohoda) o budúcom vymieňaní platieb. IRS musí mať definované **strany** (účastníci dohody), **istinu** - suma z ktorej si budú strany platiť kupóny, **maturita** - dĺžka trvania kontraktu, **frekvenciu** - frekvencia platieb a spôsob výpočtu výšky **kupónov**. Ako príklad uvedieme najbežnejší typ swapu, *fixed for floating* swap, na ktorom sa dohodnú strany **A** a **B**. Z názvu vyplýva, že ide o výmenu fixných platieb za plávajúce. Swap kontrakt môže mať nasledovné parametre:

- maturita : **5Y** (dĺžka swapu je 5 rokov)
- frekvencia A: **6m** (strana A platí fix polročne)
- frekvencia B: **3m** (strana B platí 3M LIBOR každé tri mesiace)
- istina, N : **10M USD** (z tejto sumy sa budú počítať platby)
- A platí : **8.65 %** (A platí strane A fixný úrok (z 10 mil. USD))

- B platí : **LIBOR + 70 bp** (B platí aktuálny LIBOR + 0,7 % (z 10 mil. USD))



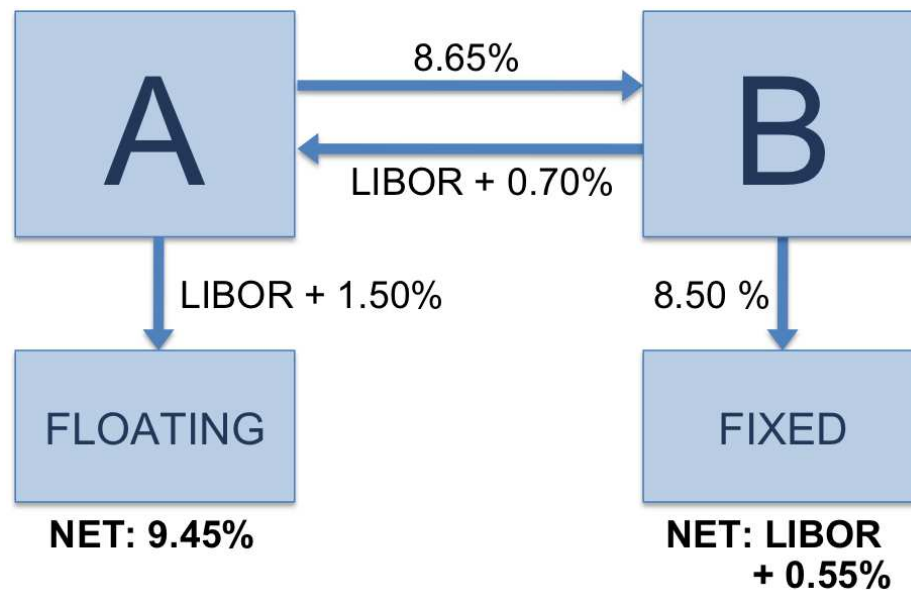
Obr. 1.1: Historický priebeh 10Y, 5Y a 2Y swap úrokov

Motiváciou pre vstup do swapu zo strany **A** môže byť transformácia *fixných* platieb na *plávajúce*, pre **B** naopak.

Z pohľadu strany A ide o *payer* swap (pretože platí fix), naopak pre stranu B je to *receiver* swap. Ako je vidno na obrázku 1.2, strana A transformovala svoje plávajúce platby vo výške LIBOR + 150bp na fix 9.45%. B naopak fixné platby vo výške 8.5% premenila na LIBOR + 55bp.

Pre dolárové swapy je štandardom, že plávajúca zložka je 3M LIBOR (r_{3M}) platená kvartálne (prvá platba je štvrtrok po začatí swapu, posledná na konci swap kontraktu) a fixná časť sa platí polročne. Fixný úrok pri takto definovanom payer swape s maturitou τ , ktorý sa obchoduje v čase t , budeme označovať $S_\tau(t)$. Forwardový swap úrok v čase t , s maturitou T a tenorom ¹ τ označíme $S_\tau^F(t, T)$. V pokračovaní práce budeme vždy uvažovať dolárové LIBOR swapy.

¹V tomto prípade tenor forwardového swapu označuje dĺžku trvania swap kontraktu a maturita čas uplatnenia forwardu.

Obr. 1.2: *fixed for floating* Interest Rate Swap

Je zrejmé, že trhové mechanizmy - dopyt a ponuka, nastaví výšku (dolárového) swap úroku (fixnej časti) tak, aby sa súčet diskontovaných fixných a plávajúcich platieb rovnali. $S_\tau(t)$ je následne riešením:

$$N \sum_{i=1}^{2*\tau} \left[P(t, (t + 0.5i)) \frac{1}{2} S_\tau(t) \right] = N \sum_{i=1}^{4*\tau} \left[P(t, (t + 0.25i)) \frac{1}{4} r_{3M}^F(t, (t + 0.25(i - 1))) \right] \text{ t.j.},$$

$$S_\tau(t) = \frac{2 [1 - P(t, t + \tau)]}{\sum_{i=1}^{2*\tau} P(t, t + 0.5i)} \quad (1.3)$$

Forwardový swap kontrakt je dohoda dvoch strán vstúpiť do swap kontraktu v budúcom čase. Trhové mechanizmy, ako pri swap úroku, nastaví výšku forwardového swap úroku tak, aby dnešná hodnota kontraktu bola nulová. Označme $swap_\tau^F(t, T, S_\tau^F S(t, T))$ hodnotu forwardového swap kontraktu v čase t , maturitou T , tenorom τ s dohodnutým úrokom $S_\tau^F S(t, T)$ a istinou N . Pri férovej výške úroku $S_\tau^F S(t, T)$ zrejme platí

$$swap_\tau^F(0, T, S_\tau^F(0, T)) = N \mathbf{E} \left[D(0, T) \sum_{i=1}^{2\tau} \left[P(t, T_i) \frac{1}{2} (S_\tau(t) - K) \right] \right] = 0, \quad (1.4)$$

kde \mathbf{E} predstavuje strednú hodnotu očakávaného budúceho vývoja.

Existuje veľa dôvodov pre uzatváranie IRS kontraktov, či už poistenie voči poklesu úroku (resp. nárastu), profit zo zmeny úroku. Existuje veľa obmien swapov: úrokové swapy, menové swapy, komoditné swapy, atď.

Kvôli prehľadnosti budeme v grafoch farebne rozlišovať swap úroky, tak ako na obrázku 1.1. Swap s maturitou 10 rokov budeme označovať MODROU, swap s dĺžkou 5 rokov ČERVENOU a dvojročný swap ZELENOU farbou.

1.3.1 Swaption - Interest Rate Swap Option

Spolu s opciami na caps a floors sa obchodujú aj opcie na vstup do IRS. Swaption je opcia, ktorá dáva držiteľovi právo, nie povinnosť, na vstup do IRS. Podľa toho, na aký typ swapu má držiteľ opciu, rozlišujeme *payer* a *receiver* swaption. Kupec a predajca sa pri obchode dohodnú na nasledovných parametroch kontraktu:

- **typ** - *payer* alebo *receiver* swaption,
- **cena** opcie - prémia, ktorú obdrží predávajúci,
- **maturita** opcie - doba expirácie,
- **strike rate** - fixný úrok podkladového swapu,
- **tenor** opcie - dĺžka, resp. maturita podkladového swapu,
- **istina** - istina podkladového swapu.

Opcia na swap s tenorom τ bude v dobe expirácie t uplatnená, ak swap úrok $S_\tau(t)$ bude vyšší ako strike rate K . Takáto swaption bude mať v čase expirácie hodnotu rovnajúcej sa sume očakávaných diskontovaných čistých platieb - rozdielov fixných a plávajúcich platieb, t.j:

$$\text{PV pay-off} = {}_p\text{swp}_\tau(t, t) = N \sum_{i=1}^{2\tau} \left[P(t, T_i) \frac{1}{2} (S_\tau(t) - K)^+ \right] \quad (1.5)$$

kde $T_i = t + 0.5i$ pre $i = 1, 2, \dots, 2\tau$ sú časy vymieňania fixných platieb swapu a ${}_p\text{swp}_\tau(t, T)$ je cena *payer* swaption s maturitou T v čase t . Dnešná cena sa potom

bude rovnať strednej hodnote diskontovaných hodnôt v čase expirácie:

$${}_p\text{swp}_\tau(0, t) = N\mathbf{E} \left[D(0, t) \sum_{i=1}^{2\tau} \left[P(t, T_i) \frac{1}{2} (S_\tau(t) - K)^+ \right] \right]. \quad (1.6)$$

Opcie na swapy patria k tzv. OTC derivátom (Over-the-counter), teda inštrumentom, ktoré sa zvyknú obchodovať priamo, bez tretej strany (sprostredkovateľa). Je trhovým zvykom oceňovať opcie na swap Blackovým modelom, ktorý predpokladá lognormálnosť podkladového aktíva - forwardového swap úroku. Dnešná cena (v čase $t = 0$) payer (reciever) opcie s časom T , tenorom τ a strike úrokom K je daná vzorcom

$${}_{p(r)}\text{swp}_\tau^{BL}(0, T, F, K, \sigma_F) = NA [F\Phi(wd_1) - K\Phi(wd_2)] \quad (1.7)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln \frac{F}{K} + \frac{1}{2}\sigma_F^2 T}{\sigma_F \sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{F}{K} - \frac{1}{2}\sigma_F^2 T}{\sigma_F \sqrt{T}} = d_1 - \sigma_F \sqrt{T}, \quad (1.8)$$

$F = S_\tau^F(0, T)$ je zodpovedajúci forwardový swap úrok, σ_F je volatilita forwardového swap úroku, N je istina a $w = 1$ pre payer (${}_p\text{swp}_\tau^{BL}$) resp. $w = -1$ pre reciever (${}_r\text{swp}_\tau^{BL}$) swaption.

Vo finančných traderoch a softvéroch je zvykom ceny swaptions a implikované volatility usporadúvať v tabuľkách, kde riadky reprezentujú rôzne maturity - doby expirácie opcií a v stĺpcoch sú uvedené rôzne tenory opcií, teda dĺžky podkladových swap kontraktov. Príkladom je tabuľka 1.1 trhom kótovaných ATM swaptions volatilit. Pre jednoduchosť sa zaužívalo skrátenie, ktoré charakterizuje tento typ opcií: **Txτ** označuje swaption, s časom do expirácie T a tenorom τ .

Swaptions sú veľmi flexibilným nástrojom, ktorým sa dá zaistiť cena budúceho vstupu do IRS (poistenie voči nárastu/poklesu úroku, transformácia a riadenie cash flow), ale tiež predstavuje jednoduchý nástroj pre investorov očakávajúcich určitý, špecifický vývoj na trhoch.

1.4 CMS Spread

Swapové kontrakty majú na OTC trhu veľa obmien. Jednou z nich je CMS Spread. CMS spread kontrakt závisí od rozdielu dvoch swap úrokov s konštantnými ma-

Tabuľka 1.1: ATM swaptions $T \times \tau$ volatility implikované Blackovým modelom , 16.5.2001

$T \setminus \tau$	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	7Y	10Y
1Y	16.4	15.8	14.6	13.8	13.3	12.6	11.7
2Y	17.7	15.6	14.1	13.1	12.7	12.2	11.4
3Y	17.6	15.5	13.9	12.7	12.3	11.9	11.3
4Y	16.9	14.6	12.9	11.9	11.6	11.3	10.8
5Y	15.8	13.9	12.4	11.5	11.1	10.8	10.4
7Y	14.5	12.9	11.6	10.8	10.4	10.1	9.6
10Y	13.5	11.5	10.4	9.8	9.4	9.1	8.4

turitami, napríklad S_{10Y} a S_{5Y} . Niekedy sa CMS Spread deriváty označujú aj ako *steepener*², nakoľko takýto spread nezávisí od výšky daných swap úrokov, ale od ich rozdielu - teda šikmosti term structure. Zrejme čím je na trhu väčší rozdiel medzi krátkodobou (2Y) a stredne-dlhodobou (5Y, 10Y) neistotou väčší, tým bude väčší aj rozdiel medzi danými swap úrokmi - CMS spread.

V tejto práci sa budeme zaoberať oceňovaním produktov závislých od kombinácie CMS Spreadov zo swapových úrokov s maturitami 10, 5 a 2 roky.

Je známych viacero prístupov, ako oceniť CMS spready (a opcie na CMS spready). Zrejme najpoužívanejší je LSM - lognormal forward-swap model, ktorý predpokladá lognormálnosť pohybu forwardových swapových úrokov. Princíp je taký, že máme dané dva dynamické systémy - pre pohyb dvoch swap úrokov s konšt. maturitami, pomocou ktorých následne generujeme vývoj potrebných swap úrokov³.

Jedným z ďalších spôsobov ocenenia normálnych a digitálnych⁴ opcií na CMS spread pomocou swaptions volatility smile je popísaný v práci [19].

²Z anglického steep - strmý.

³Viac o LSM sa môžeme dočítať v [2] na strane 195.

⁴Pay-off digitálnej opcie, ktorej podkladové aktívum prekročí strike price je fixný, vopred daný a nezávisí od vzdialenosti od strike hodnoty. Tieto opcie sa niekedy nazývajú aj binárne opcie, alebo all-or-nothing opcie.

1.4.1 CMS Spread Range Accrual

CMS Spread Range Accrual ⁵⁶ patrí do kategórie *CMS based* derivátov - kontraktov závislých od vzťahu swap úrokov s konštantnými maturitami.

Príkladom môže byť nasledujúci Range Accrual, ktorý platí kupón 4% po dobu 5tich rokov, ak je $S_{10Y} > S_{2Y} + 40bp$, teda:

- maturita : 5Y
- frekvencia : 6M
- istina : 10mio USD
- kupón : $(\frac{n}{N} * 4\%)$
- n_i : je počet dní v i-tej perióde, kedy je $S_{10Y} > S_{2Y} + 40bp$
- D_i : je celkový počet dní v i-tej perióde (pri polročnom platení cca 180)

Dnešná hodnota CMS Spread Range Accrualu s istinou N , ktorý v časoch T_i , pre $i = 1, \dots, m$, vypláca kupón vo výške X , ak je splnená podmienka denná podmienka $H - L > y_i$ je rovná

$$V_{RA} = N \mathbf{E} \left[\sum_{i=1}^m D(0, T_i) C_i \right], \quad C_i = X \frac{n_i}{D_i} \quad (1.9)$$

kde C_i je výška nakumulovaného i-teho kupónu, n_i je počet dní v i-tej perióde, kedy je splnená podmienka $H - L > y_i$. y_i je bariéra pre i-te obdobie a D_i je celkový počet dní v t-tje perióde. Pre náš konkrétny príklad je to:

$$V_{RA} = 10^6 \mathbf{E} \left[\sum_{i=1}^{10} D(0, \frac{i}{2}) 0.04 \frac{n_i}{D_i} \right], \quad \text{kde}$$

⁵Inými slovami; CMS Spread Range Accrual je produkt, ktorý vypláca kupóny kumulujúce sa (z angl. accrue - kumulovať) v závislosti od rozdielu (z angl. spread) dvoch swap úrokov s konštantnými maturitami (CMS - Constant Maturity Swap). Kupón v perióde narastá, ak rozdiel dvoch CMS (napríklad 10Y CMS - 2Y CMS) spĺňa určitú podmienku (>0), resp. leží v presne špecifikovanej oblasti (z angl. range)

⁶Reálne príklady Range Accrualov závislých od CMS spreadu môžeme nájsť na [18]

$$n_i = \sum_{j=1}^{D_i} \max \left[0, \operatorname{sgn} \left(S_{10Y} \left(T_{i-1} + \frac{j}{D_i} \right) - S_{2Y} \left(T_{i-1} + \frac{j}{D_i} \right) - 0.004 \right) \right],$$

kde $\operatorname{sgn}()$ je znamienková funkcia, ktorá vráti hodnotu 1 pre čísla > 0 , -1 pre hodnoty < 0 a 0 inak.

Vzhľadom na to, že takéto kontrakty sa obchodujú priamo medzi subjektami, teda bez tretej osoby-sprostredkovateľa, ktorým býva zväčša burza, si parametre kontraktu nastaví vypisovateľ ako chce. Pre porovnanie musíme zvoliť parametre nami oceňovaného range accrualu tak, aby sa dal porovnať s cenou v používaných traderoch (Bloomberg).

Naším cieľom bude nájsť férové výšky polročne platených kumulovaných kupónov X proti štvrťročne platenému 3M Liboru. Kupóny sa budú kumulovať až do výšky X , ak sú splnené podmienky :

$$S_{10Y} > S_{5Y}, S_{10Y} > S_{2Y} \text{ a } S_{5Y} > S_{2Y}. \quad (1.10)$$

Výšky týchto kupónov budeme označovať X_{10Y-5Y} , X_{10Y-2Y} a X_{5Y-2Y} . Každý z kupónov vypočítame pre tri rôzne dĺžky kontraktov: 5, 10 a 15 rokov s rozlíšením : X_{10Y-5Y}^{5Y} , X_{10Y-5Y}^{10Y} a X_{10Y-5Y}^{15Y} , ktoré následne porovnáme s hodnotami na Bloombergu. Inak povedané, výšky kupónov X_{aY-bY}^τ musíme určiť tak, aby PV takýchto range accrualov boli nulové. Je zrejmé, že diskontované očakávané sumy oboch strán (kumulovanej - kupóny X a plávajúcej - 3M Libor) sa musia rovnať:

$$\begin{aligned} N \mathbf{E} \left[\sum_{i=1}^{4\tau} D \left(0, \frac{i}{4} \right) \frac{r_{3M} \left(\frac{i}{4} \right)}{4} \right] &= N \mathbf{E} \left[\sum_{i=1}^{2\tau} D \left(0, \frac{i}{2} \right) C_i \right], \\ \text{a } C_i &= \frac{n_i X_{aY-bY}^\tau}{D_i 2} \end{aligned}$$

kde N je istina, C_i výška i -teho nakumulovaného kupónu, zlomky $\frac{i}{2}$ a $\frac{i}{4}$ sú časy platieb (polročné - kupón a štvrťročné r_{3M}), 4τ a 2τ sú počty platieb, n_i je počet dní v perióde i , kedy je splnená podmienka $S_{aY} > S_{bY}$ a D_i je celkový počet dní v perióde i (6 mesiacov). Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zameniť každý i -ty kupón súborom binárnych denných opcií na CMS Spread

$$S_{aY} \left(T_{i-1} + \frac{j}{2D_i} \right) - S_{bY} \left(T_{i-1} + \frac{j}{2D_i} \right) \text{ pre } j = 1, 2, \dots, D_i.$$

Pri splnení podmienky má každá z takýchto D_i opcií payoff v čase T_i rovný $\frac{X_{aY}^\tau - bY}{2D_i}$. Dnešná hodnota ($t = 0$) digitálnej opcie na CMS spread, ktorá v čase T_i vyplatí sumu Z ak je splnená podmienka $S_{aY} - S_{bY} > 0$ v čase t_j je rovná strednej hodnote jej diskontovaného payoffu:

$$\begin{aligned} bin.opt_{aY-bY>0}(0, t_j, T_i, Z) &= PV \mathbf{E} \begin{cases} Z & \text{ak } S_{aY} - S_{bY} > 0 \\ 0 & \text{ak } S_{aY} - S_{bY} < 0 \end{cases} \\ &= PV Z p_j = \mathbf{E} [D(0, T_i) Z p_j] , \end{aligned} \quad (1.11)$$

kde p_j je pravdepodobnosť, že bude splnená podmienka. Hodnotu⁷ vyššie spomínaného range accrualu s maturitou τ teda môžeme vyjadriť pomocou binárnych opcií na cms spread nasledovne:

$$V_{RA}^\tau = \mathbf{E} \left[\sum_k D(0, k) \frac{r_{3M}(k)}{4} \right] - \sum_{i=1}^{2\tau} \sum_{j=1}^{D_i} bin.opt_{aY-bY>0}(0, t_j^i, T_i, Z) \quad (1.12)$$

$$V_{RA}^\tau = \mathbf{E} \left[\sum_k D(0, k) \frac{r_{3M}(k)}{4} - \left(\sum_{i=1}^{2\tau} D(0, T_i) \sum_{j=1}^{D_i} p_j^i \frac{X_{aY}^\tau - bY}{2D_i} \right) \right] , \quad (1.13)$$

kde t_j^i predstavuje j-ty deň v i-tej perióde a p_j^i je pravdepodobnosť splnenia podmienky kumulovania kupónu v j-tom dni i-tej periódy.

⁷Z pohľadu strany platiacej 3M Libor.

Kapitola 2

Modely

$$dr = a [b - r(t)] dt + \sigma dW, \quad (2.1)$$

V tejto kapitole predstavíme model a jeho diskretnú implementáciu, pomocou ktorého budeme oceňovať CMS Spread Range Accrualy. Tieto deriváty sa pokúsime oceniť **HW2F** - Hull-White dvojfaktorovým modelom, opisujúcim short rate úrok, ktorý predstavili John Hull a Alain White ako dvojdimenzionálnu formuláciu rozšíreného Vašíčkovho modelu [11]. Tento model diskretné implementujeme pomocou dvojdimenzionálneho trimomického rekombinujúceho sa stromu zloženého z dvoch korelovaných trinomických stromov jednofaktorových modelov. Najskôr predstavíme jednofaktorový a dvojfaktorový HW model spolu s výstavbou stromov. Potom prejdeme ku kalibrácii na kôš swaptions, kde ukážeme nie najvhodnejšiu voľbu modelu, nakoľko nedokážeme dobre zachytiť trhové ceny derivátov v kalibračnom koši. Pokúsime sa teda zkonštruovať model zložený z dvoch dvojfaktorových modelov, ktorý by mal mať väčší stupeň voľnosti a tým pádom schopnosť lepšie zachytiť trhové ceny derivátov, od ktorých závisia CMS Spready. Na záver sa takýto model pokúsime nakalibrovať.

2.1 Hull-White jednofaktorový model

Hull a White upravili Vašíčkov jednofaktorový mean-reversion model opisujúci dynamiku úroku v rizikovo-neutrálnom svete, ktorý má tvar:

$$dr = a[b - r(t)] dt + \sigma dW, \quad (2.2)$$

tak, že statickú hodnotu b , ku ktorej sa priťahuje úrok, nahradili funkciou, závislou od času, ktorá pomôže zachytiť veľké množstvo tvarov výnosových kriviek. Takto upravený Vašíčkov model má tvar:

$$dr = [\theta(t) - ar(t)] dt + \sigma dW, \quad (2.3)$$

kde dW sú prírastky Wienerovho procesu.

Vďaka deterministickej, časovo závislej funkcii $\theta(t)$, je model perfektne konzistentný s výnosovou krivkou [9]. Parametre a a σ sa pomerne jednoducho a rýchlo dajú nakalibrovať [13], na príklad na kôš caps a floors [14]. Nakoľko v jednofaktorovom modeli sú ceny derivátov monotónne v stochastickej zložke (kvôli vysokej, skoro dokonalej korelácii výnosov), pomocou analytického vyjadrenia ceny opcie na kupón vyplácajúci dlhopis sa dajú analyticky - veľmi rýchlo oceniť [10]. Tento postup - dekompozícia opcie na kupón vyplácajúci dlhopis, na súbor opcií, vypísaných na bezkupónové dlhopisy s určitými váhami, je známy ako *Jamshidian Decomposition*, alebo *Jamshidian's Trick* [12].

Vďaka týmto vlastnostiam - dobrému intuitívnemu významu parametrov, rýchlosti kalibrácie, simulácie a jednoduchosti implementácie, sa jednofaktorový model stále v nemalej miere používa aj na oceňovanie exotických typov derivátov.

Zrejme najpraktickejšia numerická implementácia je zkonštruovaním short rate stromu.

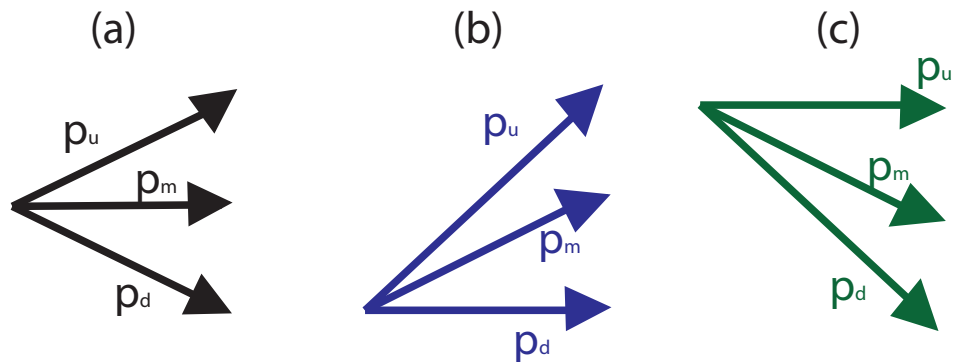
2.1.1 Trinomický strom

Základný princíp konštruovania (nie len úrokových) stromov, určiť časové kroky, uzly a následne zrátať pravdepodobnosti v uzloch¹. Trinomický strom znamená, že

¹Postup konštrukcie stromu nájdeme v práci [9] alebo slovenskej práci [17].

z každého uzla stromu sa vieme za časový krok Δt dostať do troch vrcholov, teda o jeden viac ako pri najjednoduchšiom type - binomickom strome. Ukážeme si, ako takýto strom zkonštruovať pre dĺžku časového skoku Δt .

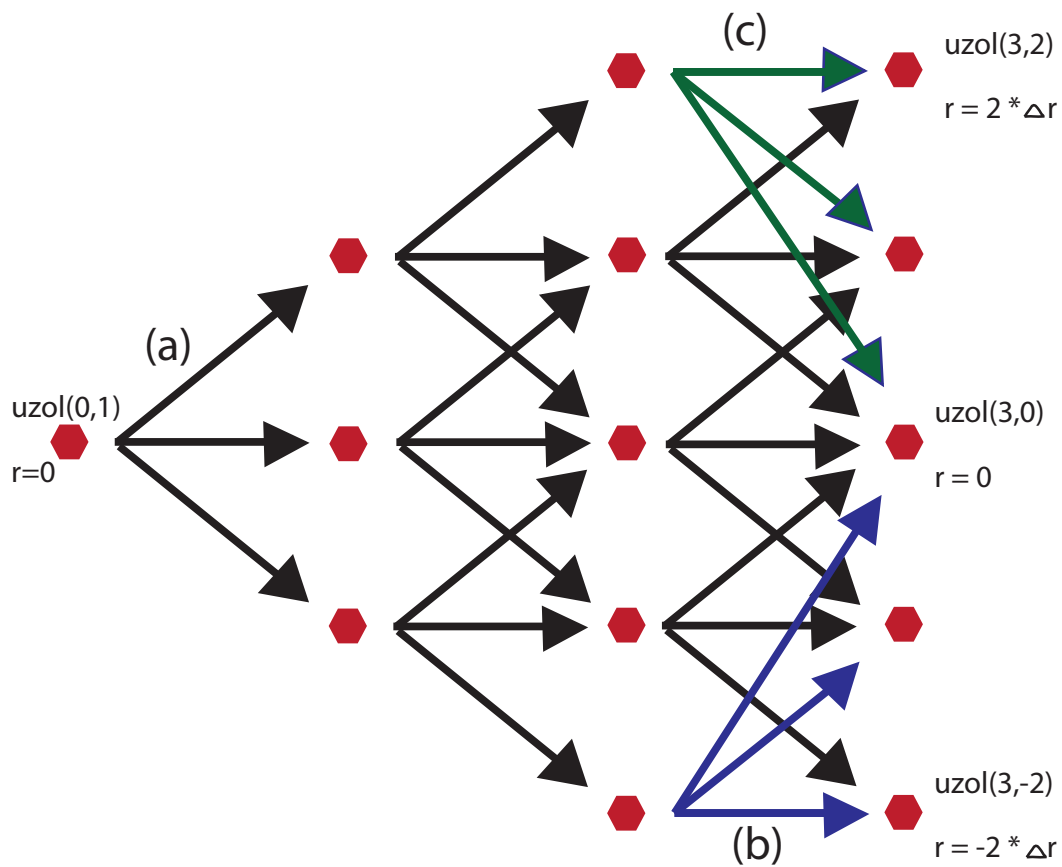
Prvým krokom je vystavať symetrický strom pre r ak uvažujeme $\theta(t) = 0$ pre všetky časy, a počiatočnou hodnotou $r = 0$. Pre tento proces je $r(t + \tau) | r(t)$ normálne rozdelený so strednou hodnotou $r(t)e^{-a\tau}$ a varianciou $V = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2a\tau}}{2a}$. Očakávaná zmena procesu r za časový krok Δt je teda rovná $Mr = [-a\Delta]r$ a variancia zmeny je V . Teraz určíme veľkosť kroku r v strome ako $\Delta r = \sqrt{3V}$ - táto voľba Δr má za následok chyby rádu Δt^2 . Následne určíme šírky stromu j_{max} a j_{min} , teda počet vrcholov od stredy stromu, ktoré proces r bude môcť dosiahnuť. j_{max} zvolíme ako celé číslo medzi $\frac{-0.184}{M}$ a $\frac{-0.816}{M}$. V praxi [9] sa javí ako efektívna voľba j_{max} položiť rovné najmenšiemu celému číslu väčšiemu ako $\frac{-0.184}{M}$ a j_{min} ako $-j_{max}$. Takýto strom bude mať rovnaký počet dosiahnuteľných vrcholov nad a pod stredo stromu. Nakoľko je v každom časovom priereze obmedzený počet dosiahnuteľných vrcholov ($2j_{max} + 1$), je treba definovať tri typy vetvenia stromu², teda tri spôsoby prechodu z vrcholu (j, i) do vrcholov v kroku $i + 1$. Z väčšiny vrcholov, ktoré neležia na okraji stromu použijeme vetvenie (a), no pre vrcholy ležiace na dolnom okraji stromu ($, j_{min}$) vetvenie typu (b), resp. (c) pre vrcholy na hornom okraji, ako môžeme vidieť na obrázku 2.1.



Obr. 2.1: Tri typy vetvenia HW1F stromu.

Ďalší krok je určenie pravdepodobností prechodov z vrcholu (i, j) do vrcholov $(i + 1, \{j + 1, j, j - 1\})$ v prípade vetvenia typu (a) ak $j_{min} < j < j_{max}$, $(i + 1, \{j, j + 1, j + 2\})$

²Kvôli neexistencii vrcholov nad j_{max} , resp. pod j_{min}



Obr. 2.2: Strom so šírkou 2.

vo vetvení typu (b) ak $j = j_{min}$ alebo vrcholov $(i + 1, \{j, j - 1, j - 2\})$ pre $j = j_{max}$ vo vetvení (c). Pravdepodobnosť prechodu hornou vetvou označme p_u , strednou vetvou p_m a dolnou vetvou p_d . Podľa [9] zrátame pravdepodobnosti p_u , p_m a p_d pre typy vetvenia (a), (b) a (c) tak, ako v tabuľke 2.1.

Na obrázku 2.2 môžeme vidieť ako taký strom vyzerá a kedy používame rôzne typy vetvenia. V prípade, že by sme chceli modelovať úrok trinomickým stromom ako implementáciu HW1F modelu, ďalším krokom by bolo zrátať posunutie úrokového stromu tak, aby bol strom konzistentný s výnosovou krivkou. Takto môže čitateľ

Tabuľka 2.1: Pravdepodobnosti prechodov vetvami p_u , p_m a p_d pre typy vetvenia (a), (b) a (c) z uzla (i, j) , kde $M = -a\Delta t$.

vetvy $\nearrow \rightarrow \searrow$	typy vetvenia		
	(a)	(b)	(c)
$\nearrow p_u$	$\frac{1}{6} + \frac{2jM^2 + jM}{2}$	$\frac{1}{6} + \frac{j^2M^2 - jM}{2}$	$\frac{7}{6} + \frac{j^2M^2 + 3jM}{2}$
$\rightarrow p_m$	$\frac{2}{3} - j^2M^2$	$-\frac{1}{3} - j^2M^2 + 2jM$	$-\frac{1}{3} - j^2M^2 - 2jM$
$\searrow p_d$	$\frac{1}{6} + \frac{2jM^2 - jM}{2}$	$\frac{7}{6} + \frac{j^2M^2 - 3jM}{2}$	$\frac{1}{6} + \frac{j^2M^2 + jM}{2}$

spraviť za pomoci [9] alebo slovenskej práce [17]³. My však chceme použiť HW2F strom a tak budeme prispôbovať strom term structure až keď skombinujeme takéto dva symetrické stromy.

Jeden faktor len ťažko dokáže vystihnúť dynamiku trhu (alebo očakávania), ak potrebujeme, aby bol model konzistentný so širším portfóliom derivátov alebo zahrnúť do modelu korelácie budúcich úrokov. V prípade, že oceňujeme produkt závislý podkladových derivátov, ktorých ceny model nedokáže správne zachytiť, zrejme nedostaneme správnu cenu (nemusi fungovať hedgeovanie produktu, môžu vzniknúť arbitrážne príležitosti...). Práve vtedy prichádzajú do úvahy viac-faktorové modely, ktoré majú väčší stupeň voľnosti a tým pádom vedú lepšie zachytiť ceny širšieho portfólia produktov naraz.

2.2 Hull-White dvojfaktorový model

Dvoj-faktorový model znamená, že v rovniciach opisujúcich dynamiku krátkodobého úroku vystupujú dve náhodné premenné (rušenia, šumy...), ktoré reprezentujú budúci

³Vzorec na výpočet α_m - posunu úrokového stromu je v spomínaných prácach chybný, správny vzorec je uvedený na konci v práci [20]

náhodný vývoj faktorov vplývajúcich na úrok (a jeho očakávania). Oproti jednofaktorovým modelom má dvojfaktorový výhodu, že výnosy dlhopisov nie sú tak vysoko korelované, ako pri jednofaktorových modeloch ¹, a z toho dôvodu dokáže lepšie zachytiť trhom očakávaný vývoj.

Dynamiku short rate opisujú diferenciálne rovnice:

$$dr = [\theta(t) + u - ar(t)]dt + \sigma_1 dW_1 \quad (2.4)$$

kde výchylku u v reverzii opisuje diferenčná rovnica

$$du = -bu(t) + \sigma_2 dW_2 \quad (2.5)$$

s počiatočnou hodnotou $u(0) = 0$, kde dW_1 a dW_2 sú prírastky Wienerovho procesu s koreláciou $cor(dW_1, dW_2) = \rho_{\sigma_1\sigma_2}$. V takomto tvare sa význam parametrov modelu chápe len ťažko, no ak model prepíšeme do nasledovnej formy:

$$dr = [\theta'(t) + u - a(u'(t) - r(t))]dt + \sigma_2' dW_1 \quad (2.6)$$

kde výchylku u' v reverzii opisuje diferenčná

$$du' = -b(0 - u'(t)) + \sigma_2' dW_2, \quad (2.7)$$

parametre nadobudnú zrozumiteľné významy. Rovnica (2.6) opisuje zmenu procesu - short rate úroku $r(t)$ s driftom $\theta'(t)$, ktorý sa priťahuje konštantnou rýchlosťou a k hodnote $u'(t)$. $u'(t)$ sa správa ako mean reversion proces so strednou hodnotou 0 s konštantnou rýchlosťou reverzie b [3]. Napriek lepšej intuitívnej predstavivosti o významoch parametrov v takto prepísanom modeli, budeme pracovať s pôvodnou formuláciou a kvôli jednoduchosti s konštantnými parametrami a , b , σ_1 , σ_2 a $\rho_{\sigma_1\sigma_2}$.

Cena dlhopisu v čase t , ktorý vyplatí v T 1\$ pri daných parametroch a , b , σ_1 , σ_2 , $\rho_{\sigma_1\sigma_2}$, okamžitom úroku (short rate) $r(t)$ a $u(t)$, je v HW2F daná vzťahom ²

$$P^{hw2f}(t, T, x(t), u(t), a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho_{\sigma_1\sigma_2}) = A^{hw2f}(t, T, a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho_{\sigma_1\sigma_2}) \quad (2.8)$$

$$e^{-B^{hw2f}(t, T, a)r(t) - C^{hw2f}(t, T, a, b)u(t)} \quad (2.9)$$

¹Ako je ukázané v [15], táto vlastnosť - nemonotónnosť v stochastickej zložke, jednak dáva modelu väčší stupeň voľnosti, no na druhej strane nie je možné vyjadriť opciu na kupón vyplácajúci dlhopis váženou sumou opcií na bezkupónové dlhopisy, teda použiť Jamshidianovu dekompozíciu.

²Odvodenie nájdeme na príklad v [3]

kde

$$\begin{aligned} B^{hw2f}(t, T, a) &= \frac{1}{a} [1 - e^{-a(T-t)}], \\ C^{hw2f}(t, T, a, b) &= \frac{1}{a(a-b)} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{b(a-b)} e^{-b(T-t)} + \frac{1}{ab} \end{aligned}$$

a funkcia $A^{hw2f}(t, T, a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho_{\sigma_1\sigma_2})$ je daná rovnicou (4.1) na strane 43 v Prílohe. Kvôli prehľadnosti budeme funkcie uvádzať bez vstupných parametrov takto:

$$P^{hw2f}(t, T), A^{hw2f}(t, T), B^{hw2f}(t, T) \text{ a } C^{hw2f}(t, T)^3. \quad (2.10)$$

Na základe toho, že v každom čase t vieme zrátať cenu bezkupónového dlhopisu (pre všetky maturity), forward úrok na dobu T_1 až T_2 zrátame nasledovne:

$$r_{T_2-T_1}^F(t, T_1) = \frac{\ln \frac{P^{hw2f}(t, T_2)}{P^{hw2f}(t, T_1)}}{T_2 - T_1} \quad (2.11)$$

Okamžitý swap úrok ⁴ v čase t s maturitou τ vypočítame podľa vzorca (1.3), t.j.

$$S_\tau(t) = \frac{1 - P^{hw2f}(t, t + \tau)}{0.5 \sum_{i=1}^{2\tau} P^{hw2f}(t, t + 0.5i)} \quad (2.12)$$

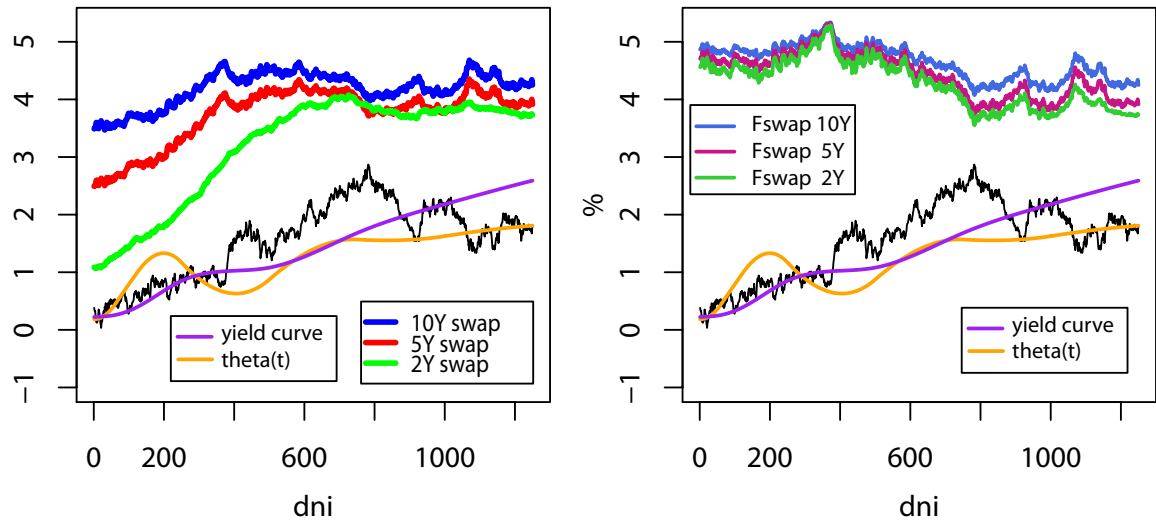
Teraz už vieme pre každý stav $(r(t), u(t))$ zrátať okamžité swap úroky (tým pádom aj cms spready), jednu realizáciu môžeme vidieť na 2.3. Na ocenenie derivátov však ešte potrebujeme vedieť pravdepodobnosti, s akou určité stavy nastanú a prislúchajúce $D(0, t)$ - diskontné faktory pre dané stavy. Takto môžeme urobiť Monte-Carlo simuláciami, ktoré sú však časovo náročné a MC metódami sa pomerne ťažko oceňujú americké typy derivátov. Podobne, ako pri jednofaktorovom modeli zvolíme diskrétnu implementáciu cez strom.

2.2.1 Dvojdimenziálny trinomický strom

Princíp konštruovania stromu pre dvojfaktorový HW model je transformácia modelu na dva korelované jednofaktorové modely a následná výstavba rekombinujúceho sa

³V prílohe funkcie $A_tT()$, $B_tT()$, $C_tT()$ a $P_tT()$

⁴funkcia $SwapUSD()$ v prílohe



Obr. 2.3: Realizácia 5 ročného vývoja denné úroku (čierna) HW2F modelom použitím dynamických rovníc s parametrami $a = 0.5453$ $b = 0.1952$ $\sigma_1 = 0.008$ $\sigma_2 = 0.0072$ $\rho_{\sigma_1\sigma_2} = -0.949$ nakalibrovanými na Blackove implikované volatility swaptions zo 17.3. 2010., k nemu prislúchajúce realizácie swap úrokov naľavo a vývoj forwardových swap úrokov s expiráciov v čase $T=5$ rokov s rovnakým farebným rozdelením. Oranžová farba reprezentuje funkciu $\theta(t)$ a fialová je dolárová výnosová krivka zo 17.3. 2010.

stromu⁴. Za predpokladu $a \neq b$ definujeme novú stochastickú funkciu

$$y(t) = r(t) + \frac{1}{b-a}u(t) \quad (2.13)$$

ktorej derivácia je rovná

$$dy = [\Phi(t) - ay] dt + \sigma_y dW_y. \quad (2.14)$$

Variancia zmien funkcie y

$$\sigma_y^2 = \sigma_1^2 + 2\frac{\rho_{\sigma_1\sigma_2}\sigma_1\sigma_2}{b-a} + \frac{\sigma_2^2}{(b-a)^2} \quad (2.15)$$

a korelácia s procesom u

$$\rho_{yu} = \rho_{\sigma_1\sigma_2} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_y(b-a)}. \quad (2.16)$$

⁴Postup môžeme nájsť v literatúre [20].

Takouto transformáciou nám z jednej dvojfaktorovej rovnice vznikli dva na sebe nezávislé procesy s koreláciou ρ_{yu} . Pre obidva procesy

$$du = -bu(t) + \sigma_2 dW_2 \quad (2.17)$$

a

$$dy = [\Phi(t) - ay] dt + \sigma_y dW_y \quad (2.18)$$

kde uvažujeme $\Phi(t) = 0$ vieme na základe 2.1.1 zkonštruovať trinomické stromy.

Označme $j_{max}^u = -j_{min}^u$ šírku stromu pre proces (2.17) a $\{p_u^u, p_m^u, p_d^u\}$ pravdepodobnosti prechodu vetvami v zodpovedajúcich typoch vetvenia v tomto strome. Podobne pre proces (2.18) s $\Phi(t) = 0$, je $j_{max}^y = -j_{min}^y$ šírka stromu a $\{p_u^y, p_m^y, p_d^y\}$ pravdepodobnosti prechodu vetvami zo zodpovedajúcich uzlov. Skombinovaním týchto trinomických stromov dostávame dvojdimenzionálny strom, ktorého body (i, j^y, j^u) sú určené tromi súradnicami - i predstavuje krok (v čase $i\Delta t$), $j^y \in \{j_{min}^y, \dots, j_{max}^y\}$ prierezová⁵ y súradnicu a $j^u \in \{j_{min}^u, \dots, j_{max}^u\}$ prierezová u súradnicu. Vzhľadom na to, že kombinujeme 2 trinomické stromy, z každého bodu (i, j^y, j^u) sa vieme dostať po deviatich vetvách do deviatich bodov v ďalšom časovom kroku. Pravdepodobnosti prechodov v takomto nekorelovanom rekombinujúcom sa strome vystihuje matica Π :

$$\Pi \equiv \begin{pmatrix} \pi_{uu} & \pi_{um} & \pi_{ud} \\ \pi_{mu} & \pi_{mm} & \pi_{md} \\ \pi_{du} & \pi_{dm} & \pi_{dd} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p_u^y p_u^u & p_u^y p_m^u & p_u^y p_d^u \\ p_m^y p_u^u & p_m^y p_m^u & p_m^y p_d^u \\ p_d^y p_u^u & p_d^y p_m^u & p_d^y p_d^u \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Pre body (i, j^y, j^u) neležiacie na okraji prierezu stromu, teda $|j^y| \neq j_{max}^y$ a $|j^u| \neq j_{max}^u$, matica Π hovorí o pravdepodobnostiach prechodu z bodu (i, j^y, j^u) do bodov

$$\begin{pmatrix} (i+1, j^y+1, j^u+1) & (i+1, j^y+1, j^u) & (i+1, j^y+1, j^u-1) \\ (i+1, j^y, j^u+1) & (i+1, j^y, j^u) & (i+1, j^y, j^u-1) \\ (i+1, j^y-1, j^u+1) & (i+1, j^y-1, j^u) & (i+1, j^y-1, j^u-1) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Nakoľko korelácia medzi procesmi y a u ρ_{yu} je nenulová, treba ju zahrnúť do pravdepodobnosti rekombinácií. Podľa [20] definujeme Π_{adj} - maticu pravdepodobností pre-

⁵Ako prierez stromu v čase i teraz chápeme všetky vrcholy (i, j^y, j^u) v čase i . Počet takýchto vrcholov je $(2j_{max}^y + 1)(2j_{max}^u + 1)$.

chodu vetvami prispôsobenú korelácii ρ_{yu} :

$$\Pi_{adj} = \begin{pmatrix} \pi_{uu} + 5\epsilon & \pi_{um} - 4\epsilon & \pi_{ud} - 3\epsilon \\ \pi_{mu} - 4\epsilon & \pi_{mm} + 8\epsilon & \pi_{md} - 4\epsilon \\ \pi_{du} - \epsilon & \pi_{dm} - 4\epsilon & \pi_{dd} + 5\epsilon \end{pmatrix}, \text{ kde} \quad (2.21)$$

$$\epsilon = \min \left[\frac{\pi_{um}}{4}, \pi_{ud}, \frac{\pi_{mu}}{4}, \frac{\pi_{md}}{4}, \pi_{du}, \frac{\pi_{dm}}{4}, \frac{\rho_{yu}}{36} \right] \text{ pre } \rho_{yu} > 0, \quad (2.22)$$

a

$$\Pi_{adj} = \begin{pmatrix} \pi_{uu} - \epsilon & \pi_{um} - 4\epsilon & \pi_{ud} + 5\epsilon \\ \pi_{mu} - 4\epsilon & \pi_{mm} + 8\epsilon & \pi_{md} - 4\epsilon \\ \pi_{du} + 5\epsilon & \pi_{dm} - 4\epsilon & \pi_{dd} - 3\epsilon \end{pmatrix}, \text{ kde} \quad (2.23)$$

$$\epsilon = -\max \left[-\pi_{uu}, -\frac{\pi_{um}}{4}, -\frac{\pi_{mu}}{4}, -\frac{\pi_{md}}{4}, -\frac{\pi_{dm}}{4}, \pi_{dd}, \frac{\rho_{yu}}{36} \right] \text{ pre } \rho_{yu} < 0. \quad (2.24)$$

Teraz už vieme zkonštruovať rekombinujúci sa strom pre procesy y a u . V každom uzle (i, j^y, j^u) je úrok $r_i^{j^y, j^u}$ rovný

$$r_i^{j^y, j^u} = j^y \Delta y - \frac{j^u \Delta u}{b - a}. \quad (2.25)$$

Definujme posunutie α_i pre časové kroky $i\Delta t$ také, že

$$r_i^{j^y, j^u} = \alpha_i + j^y \Delta y - \frac{j^u \Delta u}{b - a}. \quad (2.26)$$

Naším ďalším cieľom je určiť posunutia α_m tak, aby bol strom konzistentný s terajšou výnosovou krivkou. Definujme Q_{i, j^y, j^u} ako dnešnú cenu derivátu, ktorý vyplatí jednu peňažnú jednotku, ak bude v čase i v strome dosiahnutý vrchol (i, j^y, j^u) . Niekedy sa takáto cena derivátu nazýva *Arrow-Debreu (A-D) cena vrcholu*. Zrejme $Q_{0,0,0} = 1$ a $\alpha_0 = r(\Delta t)$. Pri známej hodnote α_m teda poznáme úroky vo vrcholoch stromu v kroku m a pravdepodobnosti prechodu do ďalších vrcholov v kroku $m + 1$. Vďaka tomu vieme zrátať Q hodnoty pre ďalší krok nasledovne:

$$Q_{i+1, j^y, j^u} = \sum_{j^{y*}, j^{u*}} Q_{i, j^{y*}, j^{u*}} p(j^y, j^u, j^{y*}, j^{u*}) e^{-[\alpha_i + j^{y*} \Delta y - \frac{j^{u*} \Delta u}{b-a}] \Delta t}, \text{ kde} \quad (2.27)$$

$p(j^y, j^u, j^{y*}, j^{u*})$ je pravdepodobnosť prechodu z bodu (i, j^{y*}, j^{u*}) do bodu $(i+1, j^y, j^u)$ a suma je cez všetky dvojice j^{y*}, j^{u*} také, aby bol vrchol $(i+1, j^y, j^u)$ z (i, j^{y*}, j^{u*})

dosiahnuteľný. Ak pre daný krok i poznáme A - D ceny vrcholov, posunutie α_i zrátame podľa vzorca

$$\alpha_i = \frac{\log \sum_{j^y, j^u} Q_{i, j^y, j^u} e^{j^y \Delta y - \frac{j^u \Delta u}{b-a}} - \log P(0, (i+1)\Delta t)}{\Delta t}. \quad (2.28)$$

Taktéto posunutie má za následok to, že suma A - D cien vrcholov pre každý časový krok i bude rovná dnešnej cene bezkupónového dlhopisu $P(0, i\Delta t)$ ⁶. Pravdepodobnosť dosiahnutia vrcholu (i, j^y, j^u) P_{i, j^y, j^u} zrátavame postupne ako Q pri vznechaní *diskontovacieho* člena $e^{\Delta t r_i^{j^y, j^u}}$:

$$P_{i+1, j^y, j^u} = \sum_{j^{y*}, j^{u*}} P_{i, j^{y*}, j^{u*}} p(j^y, j^u, j^{y*}, j^{u*}). \quad (2.29)$$

Označme očakávaný diskontný faktor $D(0, i\Delta t)$ pri dosiahnutí vrcholu (i, j^y, j^u) ako D_{i, j^y, j^u} ktorého hodnota

$$D_{i, j^y, j^u} = \frac{Q_{i, j^y, j^u}}{P_{i, j^y, j^u}} \quad (2.30)$$

Teraz už vieme vystavať celý strom pre HW2F model. Cenu derivátu U v čase 0 s maturitou $i\Delta t$ zrátame ako diskontovanú sumu hodnôt derivátu vo vrcholoch priereze stromu v kroku i :

$$V_U(0, i\Delta t) = \sum_{j^y, j^u} V_U^{i, j^y, j^u} Q_{i, j^y, j^u} = \sum_{j^y, j^u} V_U^{i, j^y, j^u} D_{i, j^y, j^u} P_{i, j^y, j^u} \quad (2.31)$$

pre všetky vrcholy (i, j^y, j^u) .

2.3 Upravený dvojfaktorový Hull-White model

Motiváciu rozšírenia klasického HW2F sú pomerne neuspokojivé výsledky kalibrácie, ako môžeme vidieť v 2.4. Vzhľadom na to, že sa jedná o dvoj-faktorový short rate model, ťažko sme mohli očakávať podobné zachytenie volatility smile swaptions tak, ako značne zložitejšie modely⁷. Princíp našej úpravy HW2F modelu bude vážené,

⁶Inými slovami, pri takto definovaných A - D cenách, nakúpenie takýchto derivátov vo všetkých vrcholoch, ktoré vyplácajú jednu peňažnú jednotku v čase $i\Delta t$ je to isté ako kúpiť dlhopis s tou istou maturitou.

⁷Napríklad vyššie spomínaný LSM, v ktorom má lognormálna dynamika pohybu swapov rôzne parametre pre rôzne maturity swapov

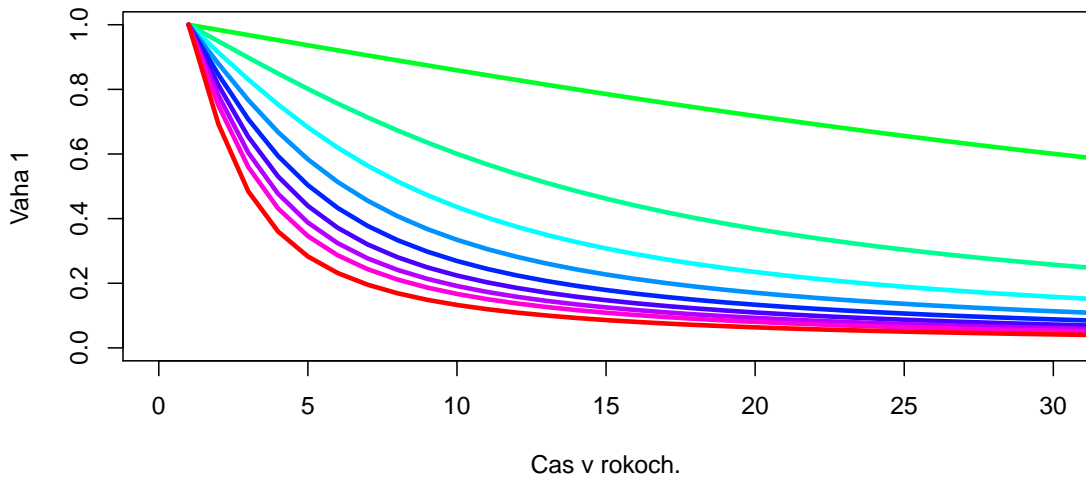
časovo závislé skombinovanie dvoch dynamík HW2F s rôznymi parametrami. Majme dva HW2F modely s parametrami

$$\{a_1^1, b_1^1, \sigma_1^1, \sigma_2^1, \rho^1\} \text{ a } \{a_1^2, b_1^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho^2\} . \quad (2.32)$$

Dynamiku úrokov popisujú rovnice (2.4) a (2.5) nasledovne:

$$\begin{aligned} dr^1 &= [\theta(t) + u^1 - a^1 r^1(t)]dt + \sigma_1^1 dW_1^1 & dr^2 &= [\theta(t) + u^2 - a^2 r^2(t)]dt + \sigma_1^2 dW_1^2 \\ du^1 &= -b^1 u^1(t) + \sigma_2^1 dW_2^1 & du^2 &= -b^2 u^2(t) + \sigma_2^2 dW_2^2 . \end{aligned}$$

HW2F model so sadou parametrami s horným indexom 1 budeme označovať HW2F-1



Obr. 2.4: Časové priebehy funkcie $v_1(t)$ od 0 po 30 rokov pre sadu parametrov $V = \{0.1, 0.3, 0.5, \dots, 1.9, 2.1\}$, kde parameter 0.1 konverguje k hodnote 0 najpomalšie (horný).

(respektíve HW2F-2). Úrok $r(t)$ v nami konštruovanom modeli bude vážený priemer úrokov r^1 a r^2 :

$$r(t) = v_1(t)r^1 + v_2(t)r^2 , \quad (2.33)$$

kde $v_1 + v_2 = 1$. Ako funkcie v_1 a v_2 môžeme zvoliť ľubovoľné funkcie, závislé od času. Intuícia vraví, že zmena dynamiky modelu za časové obdobie by mala byť vyššia

pre skoršie maturity, ako neskôr, a bolo by dobré, keby funkcie boli monotónne⁸. Ako vhodný kandidát funkcie v_1 sa javí $v_1(t) = 1 - \frac{2 \arctan(Vt)}{\pi}$, kde parameter V bude rýchlosť (respektíve pomalosť) konvergencie ku hodnote 1. Pre dobrú ilustráciu môžeme vidieť časový priebeh váhy $v_1(t)$ pre rôzne parametre V^9 na obrázku 2.4.

Od takto navrhnutého modelu očakávame lepší fit na kalibračný kôš. S diskretnou implementáciou (znova cez strom) sa budeme zaoberať v ďalšej podsekcii.

2.3.1 Štvor-dimenzionálny trinomický strom

V tejto sekcii sa pokúsime vystavať strom pre model opísaný v sekcii 2.3. Uvažujeme dve sady parametreov pre dva HW2F modely: HW2F-1 a HW2F-2. Prvý krok je vystavať stromy pre každý model zvlášť. Potom skombinujeme stromy pre HW2F-1 a HW2F-2 modely podobne, ako časti 2.2.1. Vrchol v takomto strome v kroku i budeme označovať (i, j^y, j^u, k^y, k^u) , kde j^y, j^u sú súradnice stromu HW2F-1 a k^y, k^u stromu modelu HW2F-2. Označme Π_1 (a Π_2) pravdepodobnosti prechodu po vetvách v HW2F-1 (HW2F-2) modeli¹⁰. Pravdepodobnosti prechodu po vetvách z vrcholu (i, j^y, j^u, k^y, k^u) do bodov o krok ďalej sú rovné

$$\Pi_{12} = \begin{pmatrix} \pi_{uu}^1 \Pi_2 & \pi_{um}^1 \Pi_2 & \pi_{ud}^1 \Pi_2 \\ \pi_{mu}^1 \Pi_2 & \pi_{mm}^1 \Pi_2 & \pi_{md}^1 \Pi_2 \\ \pi_{du}^1 \Pi_2 & \pi_{dm}^1 \Pi_2 & \pi_{dd}^1 \Pi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

kde 9 členov Π_{12} sú matice pravdepodobnosti prechodov vetvami modelu HW2F-2 násobené skalármi pravdepodobnosťami prechodov vetvami v HW2F-1. Táto matica je rozmeru $3^2 x 3^{211}$, teda z vrcholu v takto skombinovanom strome sa vieme dostať do 81 vrcholov v ďalšom kroku. Pre lepšiu predstavivosť; pravdepodobnosť prechodu z bodu (i, j^y, j^u, k^y, k^u) do bodu $(i+1, j^y+1, j^u-1, k^y, k^u-1)$ ¹² je $\pi_{ud}^1 \pi_{md}^2$, ktorú obsahuje člen matice $\Pi_{12} \pi_{ud}^1 \Pi_2$. Pravdepodobnosti dosiahnutia vrcholu (i, j^y, j^u, k^y, k^u)

⁸Uvažovanie autora; myslené ako konvergencia dynamiky modelu ku dlhodobému stavu

⁹Parameter $v_2(t)$ je tým pádom jednoznačne určený.

¹⁰Pravdepodobnosti prechodov už upravené o koreláciu.

¹¹Kombinácia 4 trinomických stromov.

¹²Hornou vetvou po y a dolnou vetvou po u súradnici v strome HW2F-1, strednou vetvou po y a dolnou po u súradnici v strome HW2F-2.

kvôli nezávislosti modelov/stromov vieme vypočítať jednoducho ako

$$P_{i,j^y,j^u,k^y,k^u}^{12} = P_{i,j^y,j^u}^1 P_{i,k^y,k^u}^2 \quad (2.35)$$

kde P^1 (P^2) predstavujú pravdepodobnosti dosiahnutia vrcholov v HW2F-1(2).

Nakoľko takýto strom má veľa vrcholov¹³ postupná výstavba stromu by bola zdĺhavá na výpočet. Vďaka tomu, že modely HW2F-1 a HW2F-2 nie sú od seba nijako závislé a korelované, môžeme vystavať stromy zvlášť a pravdepodobnosti zrátať rýchlo podľa vzorca (2.35). Na výpočet cien derivátov v uzloch stromu v čase t musíme poznať hodnoty dlhopisov $P(t, T)$. V klasickom HW2F sú tieto ceny dané vzorcom (2.9). Vzhľadom na to, že úrok $r(t) = v_1(t)r^1 + v_2(t)r^2$, kde funkcie v sú časovo závislé, vypočítanie ceny dlhopisov by viedlo k integrálnemu počtu, ktorý však nie je moc rýchly. Preto ceny dlhopisov v uzloch stromu budeme rátať pomocou jednoduchej, diskkrétnej aproximácie.

Ceny dlhopisov vo vrcholoch

Naším cieľom je vypočítať ceny dlhopisov v uzle (i, j^y, j^u, k^y, k^u) pre rôzne maturity. Označme $P^1(\Delta t, T, j^y, j^u)$ a $P^2(\Delta t, T, k^y, k^u)$ ceny dlhopisov s maturitou T v uzloch (i, j^y, j^u) a (i, k^y, k^u) modeloch HW2F-1 a HW2F-2¹⁴. Cenu dlhopisu s maturitou $T = (x+i)\Delta t$ v takto upravenom modeli vo vrchole (i, j^y, j^u, k^y, k^u) strome aproximujeme ako

$$P_{i,j^y,j^u,k^y,k^u}^{12}(T) = \prod_{m=1}^x \left[\left(\frac{P^1(i\Delta t, (i+m)\Delta t, j^y, j^u)}{P^1(i\Delta t, (i+m-1)\Delta t, j^y, j^u)} \right)^{v_1((i-1)\Delta t)} \right] \quad (2.36)$$

$$\left[\left(\frac{P^2(i\Delta t, (i+m)\Delta t, k^y, k^u)}{P^2(i\Delta t, (i+m-1)\Delta t, k^y, k^u)} \right)^{v_2((i-1)\Delta t)} \right]. \quad (2.37)$$

Inak povedané, cena dlhopisu s maturitou $(x+i)\Delta t$ bude rovná váženému súčinu diskontných faktorov pre obdobia s dĺžkou kroku Δt . Všimnime si, že uvažujeme maturity, ktoré sú násobkami dĺžky časového kroku v strome Δt . Pri vhodne zvolenom kroku Δt (napríklad $\Delta t = 3M = 0.25$) nás však nijako nelimituje, nakoľko najkratšie

¹³Približne kvadratickú mocninu počtu vrcholov stromu modelu HW2F pri rovnakom časovom kroku Δt a približne rovnakých parametroch.

¹⁴Dané vzorcom (2.9).

obdobia medzi platbami v nami uvažovaných derivátoch - amerických swapoch sú práve 3 mesiace. Pri vhodnej implementácii je tento spôsob rátania pomerne rýchly.

Diskontné faktory vo vrcholoch

Ťažšie však zrátame diskontné faktory¹⁵ vrcholov, nakoľko tie závisia od úrokov a pravdepodobností vo všetkých možných cestách, ktorými sa do uzlu dá dostať. Samozrejme, poznáme úroky a aj pravdepodobnosti prechodov, tak môžeme diskontné faktory vypočítať iteratívne ako pri klasickom dvojfaktorovom modeli v (2.27). Vzhľadom na veľký počet vrcholov a 81! vetvení by výstavba takéhoto stromu bola extrémne zdĺhavá¹⁶. Rýchlosť výstavby je problém hlavne v prípadoch, kedy potrebujeme stavať takéto stromy opakovane, rýchlo za sebou. Nakoľko ceny derivátov vo vrcholoch musíme diskontovať A-D cenami a pravdepodobnosti dosiahnutia vrcholov poznáme, potrebujeme rýchlo zrátať diskontné faktory pre vrcholy. Tie zrátame taktiež diskrétnou aproximáciou pre uvažovaný časový krok Δt .

Naším cieľom je zrátať hodnotu D_{i,j^y,j^u,k^y,k^u} , teda diskontný faktor vo vrchole stromu. D_{i,j^y,j^u,k^y,k^u} inými slovami predstavuje férovú cenu derivátu v čase 0, ktorý vyplatí jednu peňažnú jednotku ak bude dosiahnutý uzol (i, j^y, j^u, k^y, k^u) ak vieme, že uzol bude dosiahnutý. Uvažujme vrchol (i, j^y, j^u, k^y, k^u) a $i > 1$. Definujme dve premenné $c.D_{i,j^y,j^u}^1$ a $c.D_{i,k^y,k^u}^2$, ktoré budú mať zmysel *priemerných čiastočných* diskontných faktorov pre úseky dĺžky Δt do času $i\Delta t$. Tieto vypočítame ako

$$c.D_{i,j^y,j^u}^1 = \sqrt[i]{D_{i,j^y,j^u}^1} \quad (2.38)$$

$$c.D_{i,k^y,k^u}^2 = \sqrt[i]{D_{i,k^y,k^u}^2}, \quad (2.39)$$

kde D_{i,j^y,j^u}^1 a D_{i,k^y,k^u}^2 sú diskontné faktory vo vrcholoch stromov pre HW2F-1 a HW2F-2 modely zrátané podľa vzorca 2.30. Diskontný faktor pre vrchol (i, j^y, j^u, k^y, k^u)

¹⁵Respektíve (A-D) ceny vrcholov.

¹⁶Pri dĺžke časového kroku $\Delta t = 0.25$ je počet vrcholov v priereze stromu pohybuje zhruba okolo 4000, vzhľadom na parametre. Medzi jednotlivými krokmi by sme tak museli rátať s cez 300.000 cestami.

a $i > 1$ vypočítame ako vážený súčin pomocných diskontných faktorov nasledovne

$$D_{i,j^y,j^u,k^y,k^u}^{12} = \prod_{m=1}^i \left[(c.D_{i,j^y,j^u}^1)^{v_1((m-1)\Delta t)} (c.D_{i,k^y,k^u}^2)^{v_2((m-1)\Delta t)} \right]. \quad (2.40)$$

Nakoľko pravdepodobnosti P^{12} dosiahnutia vrcholov v skombinovanom strome poznáme¹⁷, A-D ceny pre vrcholy, teda výrazy ktorými budeme diskontovať ceny derivátov vo vrcholoch, vieme vypočítať podľa vzorca (2.30) ako

$$Q_{i,j^y,j^u,k^y,k^u}^{12} = D_{i,j^y,j^u,k^y,k^u}^{12} P_{i,j^y,j^u,k^y,k^u}^{12}. \quad (2.41)$$

Teraz už vieme vystavať strom a následne ním oceniť deriváty. Dnešná ($t = 0$) hodnota derivátu U s maturitou $i\Delta t$ bude rovná súčtu násobku hodnôt U a A-D cien vo všetkých vrcholoch prierezu stromu v kroku i ;

$$V_U = \sum_{j^y,j^u,k^y,k^u} V_U^{i,j^y,j^u,k^y,k^u} D_{i,j^y,j^u,k^y,k^u}^{12} P_{i,j^y,j^u,k^y,k^u}^{12}, \quad (2.42)$$

kde V_U^{i,j^y,j^u,k^y,k^u} je hodnota derivátu U v čase uplatnenia vo vrchole stromu (i, j^y, j^u, k^y, k^u) .

Pre kontrolu správnej implementácie je dobré overiť, či suma A-D cien vo všetkých vrcholoch prierezu v kroku i je skutočne rovná dnešnej cene dlhopisu s maturitou $i\Delta t$;

$$P(0, i\Delta t) = \sum_{j^y,j^u,k^y,k^u} Q_{i,j^y,j^u,k^y,k^u}^{12}. \quad (2.43)$$

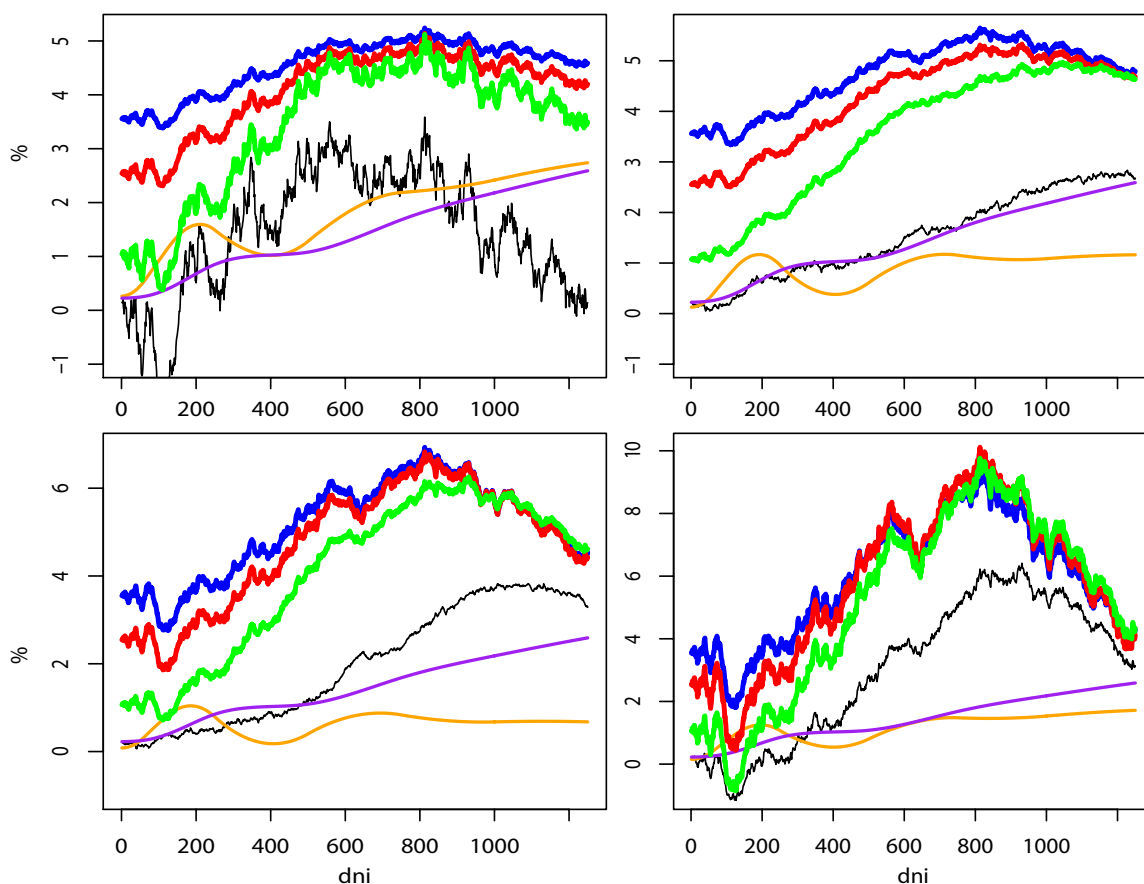
Ako nastaviť parametre HW2F a upraveného HW2F modelu sa dozvieme v ďalšej kapitole.

2.4 Kalibrácia

Aby cena derivátu ocenená modelom bola správna¹⁸, mali by ceny podkladových aktív implikované modelom spĺňať určité podmienky. Tie sú zväčša trhové očakávania reprezentované cenami derivátov obchodovanými na trhu. Samozrejme, ak máme iné

¹⁷Vzorec (2.35).

¹⁸V zmysle konzistencie s očakávaniami trhu, s podkladovými aktívami, aby fungovalo hedgeovanie, atď.



Obr. 2.5: Realizácie úrokov s rôznymi parametrami, pri rovnakých realizáciach Wienerových procesov. Vľavo hore : $a = 0.9$ $b = 0.01$ $\sigma_1 = 0.02$ $\sigma_2 = 0.001$ $\rho_{\sigma_1\sigma_2} = 0.7$, vpravo hore: $a = 0.3$ $b = 0.1$ $\sigma_1 = 0.003$ $\sigma_2 = 0.002$ $\rho_{\sigma_1\sigma_2} = 0$, vľavo dole: $a = 0.1$ $b = 0.7$ $\sigma_1 = 0.01$ $\sigma_2 = 0.003$ $\rho_{\sigma_1\sigma_2} = 0.5$ a vpravo dole: $a = 0.4$ $b = 0.25$ $\sigma_1 = 0.01$ $\sigma_2 = 0.015$ $\rho_{\sigma_1\sigma_2} = 0.9$

očkávania (vývoj na trhu, určitých cien, ceny rizika), môžeme ich zohľadniť pri kalibrácii. My sa pokúsime nastaviť parametre modelov tak, aby čo najlepšie reprezentovali trhové očakávania.

Ak máme parametre modelu ktorým oceňujeme, realizácie úrokov (v našom prípade cez stromy) sú už pomerne jednoduché, a tým pádom aj onenenie rôznych typov derivátov by nemal byť problém. Úplne iná situácia nastáva, keď potrebujeme nastaviť parametre modelu tak, aby sa správal podľa určitých pravidiel. Naším cieľom

bude nastaviť 5 parametrov

$$a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho \quad (2.44)$$

modela HW2F a 11 parametrov

$$a_1^1, b_1^1, \sigma_1^1, \sigma_2^1, \rho^1, a_1^2, b_1^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho^2, V \quad (2.45)$$

rozšíreného HW2F modelu tak, aby ceny derivátov, ktoré vyberieme do kalibračného koša, boli čo najbližšie tým, ktoré sa obchodujú na trhu.

Na obrázku 2.5 môžeme vidieť 4 realizácie úrokov HW2F modelom pri rôznych parametroch. Pre lepšiu predstavivosť, ako tieto parametre ovplyvňujú správanie, všetky štyri denné realizácie majú rovnaké zmeny Wienerových procesov¹⁹.

Nakoľko sú známe analytické vyjadrenia ceny swaptions implikované HW2F modelom²⁰, zaužívaný postup kalibrácie je minimalizovať chybu rozdielu Blackových volatilit swaptions implikovaných modelom s trhovými volatilitami. Pri následno uplatnené Monte-Carlo simulácii modelu použitím dynamických rovníc by to nemal byť problém. Ako je však ukázané v [21], ceny derivátov implikovaných HW2F stromom konštruovaným podľa [9] a [20], teda tak ako sme ich konštruovali my, sa pomerne dosť líšia od analytického vyjadrenia. V práci sú porovnávané ceny caplet²¹ zrátaných stromom a analytickým vyjadrením. Pre dĺžku časového kroku v strome $\Delta t = 0.5$ sa relatívna chyba pohybovala od 50% do 500% v závislosti od parametrov. Aby sme sa vyvarovali takýmto chybám, pokúsime sa nakalibrovať *priamo* stromy modelov tak, aby ceny implikované týmito stromami boli čo najbližšie trhovým.

¹⁹V programe **R** nastavíme rovnankú počiatočnú hodnotu generátora náhodných čísel funkciou `set.seed(x)`. Toto nám umožní fakt, že v počítačoch sú implementované pseudo-náhodné rekurenčné generátory náhodných čísel, ktoré generujú náhodné čísla pomocou rekurentných vzťahov. Vlastnosti týchto realizácií sú veľmi podobné náhodným. Viac o generovaní normálnych rozdelení sa môžeme dočítať na začiatku práce [16]

²⁰Literatúra [2], strana 158.

²¹Jednoduchá opcia na úrok.

2.4.1 Kalibračný koš

Aké deriváty je vhodné zahrnúť do kalibračného koša? Zrejme tie, od ktorých závisí cena derivátu, ktorý chceme modelom oceniť. Nakoľko sa v tejto práci zaoberáme oceňovaním CMS Spread Range Accrualov, kde sa kupóny kumulujú v závislosti od rozdielu swap úrokov (s maturitami 2, 5 a 10 rokov), do kalibračného koša zahrnieme:

- **swaptions ATM** : 2x2 , 5x2 , 10x2 , 2x5 , 5x5 , 10x5 , 2x10 , 5x10 , 10x10
- **swaptions ATM-100bps** : 2x2 , 5x2 , 10x2 , 2x5 , 5x5 , 10x5 , 2x10 , 5x10 , 10x10
- **swaptions ATM+100bps** : 5x2 , 5x5 , 5x10 , 10x2 , 10x5 , 10x10
- **ceny Forwardových Swap kontraktov** pre všetky kombinácie maturít 1, 2, 5, 10 a tenorov 1, 2, 5, 10
- **krivku diskontných faktorov** (časovú štruktúru úrokových mier, výnosovú krivku ...)

Ak už poznáme deriváty v kalibračnom koši potrebujeme ich oceniť.

2.4.2 Ocenenie kalibračného koša

Ak už máme vystavané stromy pre modely HW2F a náš upravený model (označme 2xHW2F), môžeme prejsť k oceneniu derivátov v kalibračnom koši. Cenu USD payer swaptions s tenorom τ , maturitou $T = i\Delta t$ a strike úrokom K vypočítame pre modely podľa vzorca (1.7) nasledovne:

pre model **HW2F**:

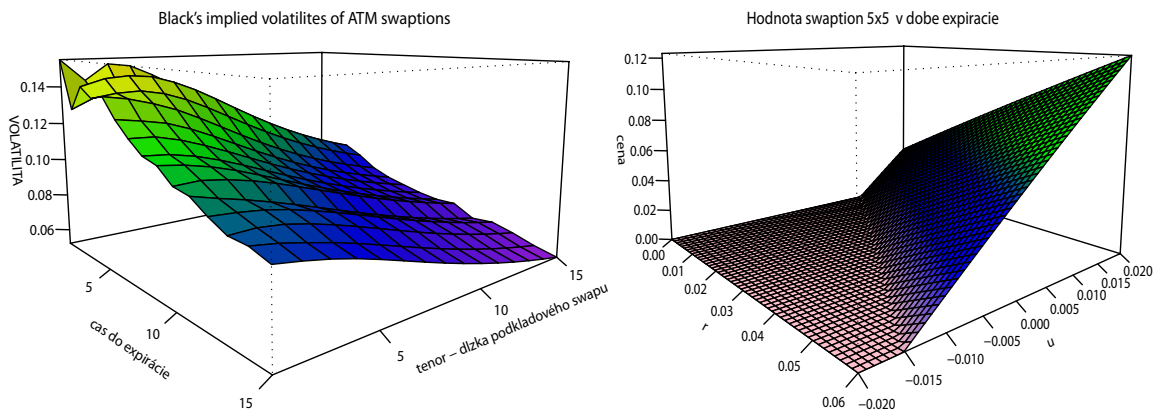
$${}^p\text{swp}_\tau(0, T) = \sum_{j^y, j^u} \left[Q_{i, j^y, j^u} \sum_{m=1}^{2\tau} P_{j^y, j^u}^{hw2f} \left(T, T + \frac{m}{2} \right) (S_\tau(j^y, j^u) - K)^+ \right], \quad (2.46)$$

kde P_{j^y, j^u}^{hw2f} je funkcia uvedená v (2.9) a $S_\tau(j^y, j^u)$ je swap úrok s maturitou τ vo vrchole (j^y, j^u) vypočítaný podľa (2.12);

pre model **2xHW2F**:

$${}_p\text{swp}_\tau(0, T) = \sum_{j^y, j^u, k^y, k^u} \left[Q_{i, j^y, j^u, k^y, k^u} \sum_{m=1}^{2\tau} P_{j^y, j^u, k^y, k^u}^{2xhw2f} \left(T, T + \frac{m}{2} \right) (S_\tau(j^y, j^u, k^y, k^u) - K)^+ \right], \quad (2.47)$$

kde $P_{j^y, j^u, k^y, k^u}^{2xhw2f}$ je funkcia uvedená v (2.36) a $S_{\tau}(j^y, j^u, k^y, k^u)$ je swap úrok s maturitou τ vo vrchole (j^y, j^u, k^y, k^u) vzpočítaný podľa (2.12)²². Ceny forwardových kontraktov zrátame veľmi podobne, musíme však dať pozor, aby sme neuvažovali len kladné hodnoty výrazu $(S_\tau(\text{vrchol}) - K)$ ²³. Ceny swaptions a forward rátame funk-



Obr. 2.6: Implikované volatility ATM swaptions a cena swaption 5x5 v dobe expirácie v závislosti od rôznych hodnôt r a u v HW2F pri parametroch $a = 0.5453$ $b = 0.1952$ $\sigma_1 = 0.008$ $\sigma_2 = 0.0072$ $\rho = -0.949$.

ciami `ratajCenyKalibKosa` pre HW2F model a `ratajCenyKalibKosa2` pre 2xHW2F upravený model, uvedené v prílohe. Pre čo najrýchlejšie vyrátanie cien vo všetkých vrcholoch prierezu sa snažíme vyvarovať sa: opakovaným volaniam tých istých funkcií²⁴ obsiahnutých vo funkcii `PtT`, zbytočným for-cyklo²⁵ a postupnému vytváraniu premenných, nakoľko viac-násobné realokovanie miesta na disku vyhradeného pre premennú zaberá veľa času²⁶. Pri dodržaní týchto zásad sa nám podarilo oceniť 80

²²Samozrejme musíme nahradiť funkciu P^{hw2f} funkciou uvedenou v rovnici (2.36).

²³Iba kladné hodnoty sú reprezentované plusovým znamienkom za výrazom $()^+$.

²⁴`AtT()`, `BtT()` a `CtT()`, ktoré si predpripravíme.

²⁵Ktoré sa snažíme nahradiť maticovými a vektorovými operáciami.

²⁶V prípade nevyhnutnosti použitia for-cyklov si dopredu pripravíme premennú o rozmere aký potrebujeme, namiesto postupného pridávania rozmerov.

derivátov (64 swaptions a 16 forwardov)²⁷ 2xHW2F stromom s počtom vrcholov v priereze približne 4000 za približne 3 sekundy!²⁸.

Pre lepšiu predstavivosť ako vyzerá hodnota swaption 5x5 v čase expirácie v závislosti od parametrov, a implikované volatility swaptions nakalibrovaného modelu HW2F na trhové volatility zo 17.3. môžeme vidieť na obrázku 2.6.

2.4.3 Minimalizácia chyby

Máme dané trhové ceny swaptions a forwardové úroky. Ako chybovú funkciu zvolíme súčet štvorcov relatívnych odchýlok cien swaptions implikované modelom - $V_{model}^{swaption}$ od cien derivátov v kalibračnom koši obchodovaných na trhu - $V_{TRH}^{swaption}$

$$\left(\frac{V_{model}^{swaption} - V_{TRH}^{swaption}}{V_{TRH}^{swaption}} \right)^2$$

a štvorcov hodnôt forwardových swap kontraktov²⁹

$$\left(V_{model}^{Fswap} \right)^2 .$$

Vektor relatívnych odchýlok od trhových cien derivátov v kalibračnom koši rátame funkciami `chyba.hw2f.KalibKos()` pre HW2F model a `chyba.hw2x2f.KalibKos()` pre 2xHW2F model. Vstupy do týchto funkcií sú iba parametre modelov. Časový krok, $P(0,t)$, trhové ceny derivátov musíme mať dopredu definované ako globálne premenné³⁰.

2.4.4 Kalibračný postup

Vzľadom na to, že nevieme či je priestor chybovej funkcie v závislosti od parametrov konvexný, musíme vymyslieť spôsob, ako nájdeme jej globálne minimum. Zvolíme nasledovný spôsob.

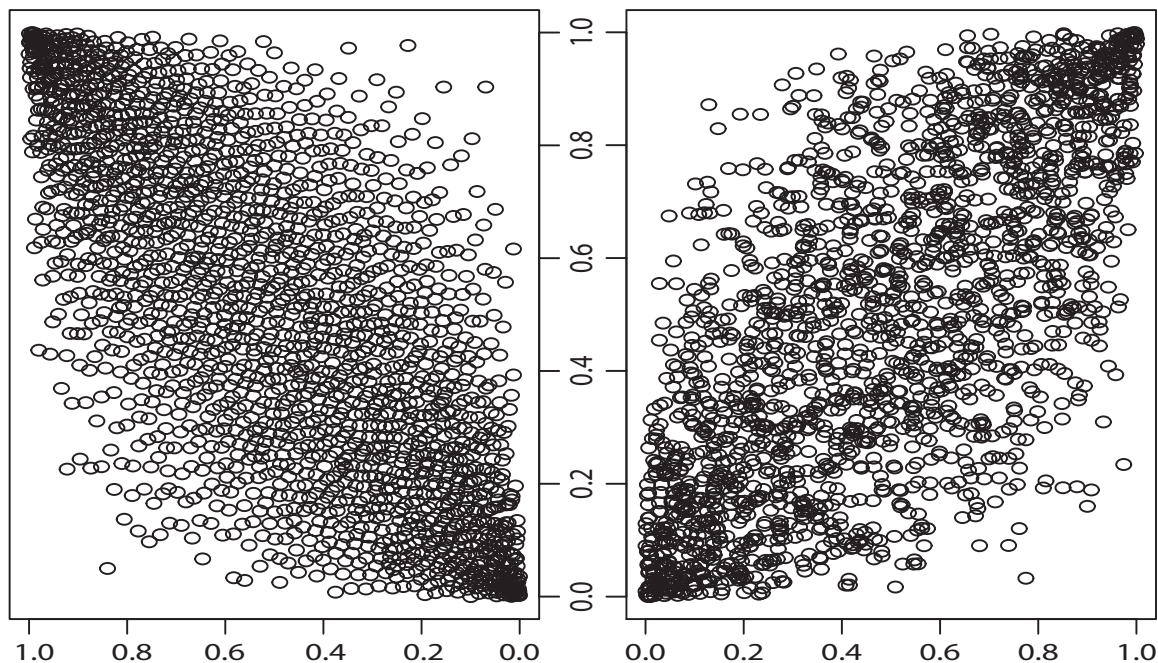
²⁷Do kalibračného koša sme nezahrnuli všetky.

²⁸Počet vrcholov je len približná hodnota pre $\Delta t = 0.25$, ktorá závisí od parametrov modelu.

²⁹Ktorých dnešná hodnota má byť nulová.

³⁰V programe R sa globálne premenné vytvárajú symbolom «-» .

Určíme horné a dolné hranice parametrov. Následne z priestoru parametrov³¹ *rozumne* vyberieme zvolený počet vektorov parametrov. Vypočítame chybovú funkciu pre model(y) v závislosti od týchto *rozumne* vybraných parametrov a zapamätám si *niekoľko* najlepších kandidátov, v ktorých okolí nakoniec nájdeme lokálne minimum.

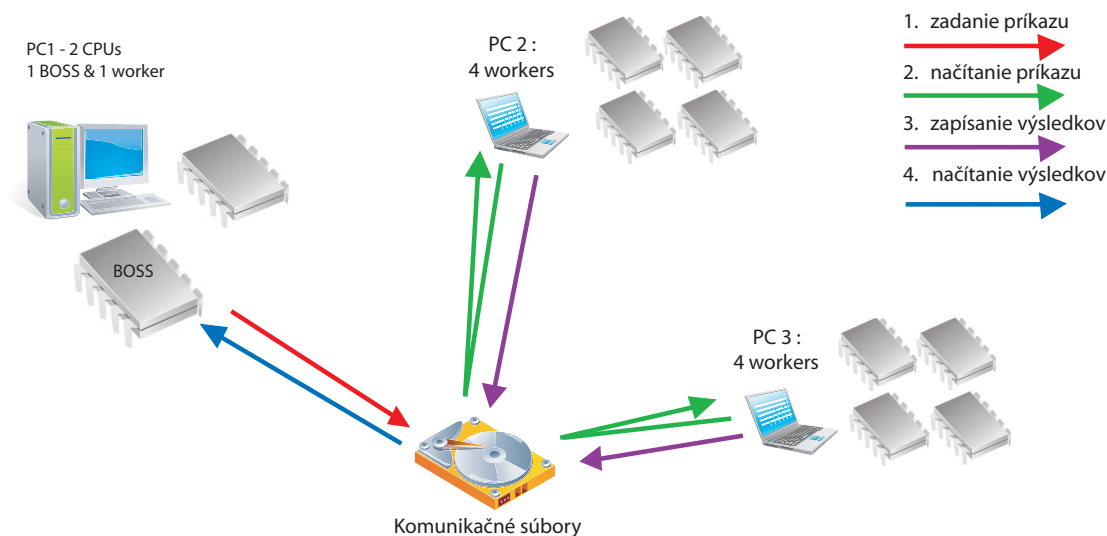


Obr. 2.7: Dvojrozmerné korelované náhodné realizácie z rovnomerného rozdelenia (napravo) a vzorka vygenerovaná metódou LHS (naľavo).

Ako príklad uvedieme postup pre HW2F model. Za horné a dolné hranice parametrov $a, b, \sigma_1, \sigma_2, \rho$ zvolíme nasledovné hodnoty; $(0.1, 0.1, 0.001, 0.001, -0.9)$ ako dolnú a $(0.9, 0.9, 0.2, 0.2, 0.9)$ ako hornú hranicu. Do chybovej funkcie³² zahrnieme penalizáciu pri prekročení hraníc. Následne pomocou upravenej techniky LHS - Latin Hypercube Sampling vygenerujem 5000 vektorov parametrov z priestoru medzi dolnou a hornou hranicou. Samplovací postup LHS slúži na generovanie reprezentatívnych vzoriek z viac-dimenzionálneho priestoru tým, že pomocou permutácii sa snaží optimalizovať euklidovskú vzdialenosť medzi jednotlivými bodmi (vektormi priestoru). Na obrázku 2.7 vidíme dve sady generácii dvojrozmerných korelovaných bodov, kde je vidieť, ako vzorky vygenerované LHS metódou lepšie *pokryjú* priestor ako náhodne vygen-

³¹Pre model HW2F 5-rozmerný a pre 2xHW2F 11 rozmerný priestor.

³²Chybová funkcia pre HW2F model je `ratajCenyKalibKosa`.



Obr. 2.8: Multi-desktopová schéma.

erované. Ak sme už zráтали chybovú funkciu pre všetky pripravené sady parametrov a máme uchovaných kandidátov, pomocou Levenberg-Marquardt nelineárneho algoritmu na hľadanie minimálnej sumy štvorcov nájdeme lokálne minimum okolo každého kandidáta. Samozrejme nie je garancia, že nájdená sada parametrov bude skutočne globálnym minimumom. Počet bodov, na ktoré rozdelíme priestor, tak isto ako počet kandidátov na minimum, zvolíme podľa časovej dostupnosti a výkonu počítača. Je zrejmé, že tento postup je časovo náročný avšak pri vhodne vytvorenom výpočtovom prostredí sme schopní na 2 PC (spolu 6 jadier) za približne 30 minút vypočítať chybu pre 3500 s následným hľadaním lokálneho minima pre 2xHW2F strom. Vzhľadom na 11 parametrov a *neanalytické* ocenenie derivátov v kalibračnom koši je výsledný čas dobrý. Na obrázku 2.8 môžeme vidieť približnú schému, ako do kalibračného procesu zapojiť viac PC. Algoritmy, na zosynchronizovanie, zadávanie príkazov a zapisovanie výsledkov kvôli neprehľadnosti nebudeme uvádzať³³. Princíp vytvorenia multi-počítačového prostredia je však pomerne jednoduchý. Vytvoríme zdieľaný priečinok s povoleným zapisovaním. Na ostatných PC ho pridáme ako virtuálny disk (vytvorenie

³³Napríklad treba odstrániť chyby spôsobené čítaním súboru práve keď sa do neho zapisuje úpravou funkcie `read.table`, taktiež sme pozorovali nestabilitu pri paralelnom budovaní stromov pomocou `multi.core` knižnice - čas od času program krachne z nezistenej príčiny

prístupovej cesty z R). Vytvoríme komunikačné súbory³⁴ a funkcie na zápis príkazov, čítanie príkazov, zápis výsledkov a podobne... Samozrejme, takáto implementácia je časovo rentabilná iba pri veľmi dlhých výpočtoch, ktoré vieme zbehnúť paralelne.

Výsledky kalibrácie HW2F a 2xHW2F modelov sú uvedené v ďalšej sekcii.

2.4.5 Výsledky kalibrácie

Relatívne chyby, uvedené v časti 2.4.3 pre modely sú uvedené v nasledujúcich tabuľkách. Sumu štvorcov chýb pre HW2F model sa nám podarilo minimalizovať na hodnotu **16.48** pre parametre

$$a = 0.9, b = 0.6358682, \sigma_1 = 0.004095610, \sigma_2 = 0.001370888, \rho = -0.01982009.$$

Rozšíreným modelom 2xHW2F sme chybovú funkciu znížili na **7.9** pri parametroch

$$\begin{aligned} \{a_1^1, b_1^1, \sigma_1^1, \sigma_2^1, \rho^1\} &= \{0.171845, 0.899, 0.0016, 0.0011, -0.0199\} \\ \{a_1^2, b_1^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho^2\} &= \{0.51699, 0.85190, 0.02517, 0.0047, -0.8761\} \\ V &= 1.48, \end{aligned}$$

čím sme dosiahli lepší fit na kalibračný kôš. Strom modelu HW2F sme stavali pre časový krok $\Delta t = \frac{1}{12}$ a počet vrcholov v priereze stromu je pri optimálnych parametroch 99. Strom pre 2xHW2F sme vystavali pre časový krok $\Delta t = 0.25$ s počtom vrcholov 2275 v priereze pri optimálnych parametroch. Je zaujímavé, že ocenenie kalibračného koša (vrátane výstavby stromov) je rýchlejšie pre model 2xHW2F, nakoľko so znižujúcim sa časovým krokom sa výstavba stromu značne predlžuje a vďaka vhodnej implementácii je samotné oceňovanie opcií rýchle.

³⁴V našom prípade .TXT súbory.

Tabuľka 2.2: Chyba v % , ATM - 100 bps Swaptions $T \times \tau$, 17.3.2010

T \ τ	HW2F			2xHW2F		
	2Y	5Y	10Y	2Y	5Y	10Y
2Y	47	-60	-92	63	27	14
5Y	129	5.8	-43	78	32.3	14.2
10Y	79	-4	-33	42.9	12.5	2.8

Tabuľka 2.3: Chyba v % , At-the-money Swaptions $T \times \tau$, 17.3.2010

T \ τ	HW2F			2xHW2F		
	2Y	5Y	10Y	2Y	5Y	10Y
2Y	38.1	-50	-56	76.5	17.7	-10
5Y	97	-31	-57	56.1	5.7	-17
10Y	40	-66	-92	13.7	-26	-48

Tabuľka 2.4: Chyba v % , ATM + 100 bps Swaptions $T \times \tau$, 17.3.2010

T \ τ	HW2F			2xHW2F		
	2Y	5Y	10Y	2Y	5Y	10Y
5Y	192	-100	-100	54.8	-66	-95
10Y	-51	-100	-100	-39	-83	-98

Tabuľka 2.5: Ceny forwardových swap kontraktov s maturitou T a tenorom τ v % ,pri forwardových úrokoch zo 17.3.2010

T \ τ	HW2F				2xHW2F			
	1 Y	2 Y	5Y	10Y	1Y	2Y	5Y	10Y
1Y	0	-1.1	-6.1	-11	0.29	0.4	0.6	0.6
2Y	1.1	0.6	-2.9	-7.6	0.17	0.78	1.34	1.4
5Y	2.1	2.3	0.7	-2.3	-0.7	-0.6	0.5	0.6
10Y	1.1	2.3	0.4	-1.1	-0.8	-0.5	-0.23	-0.2

Kapitola 3

Ocenenie CMS Spread RA

3.1 CMS Spread & Modely

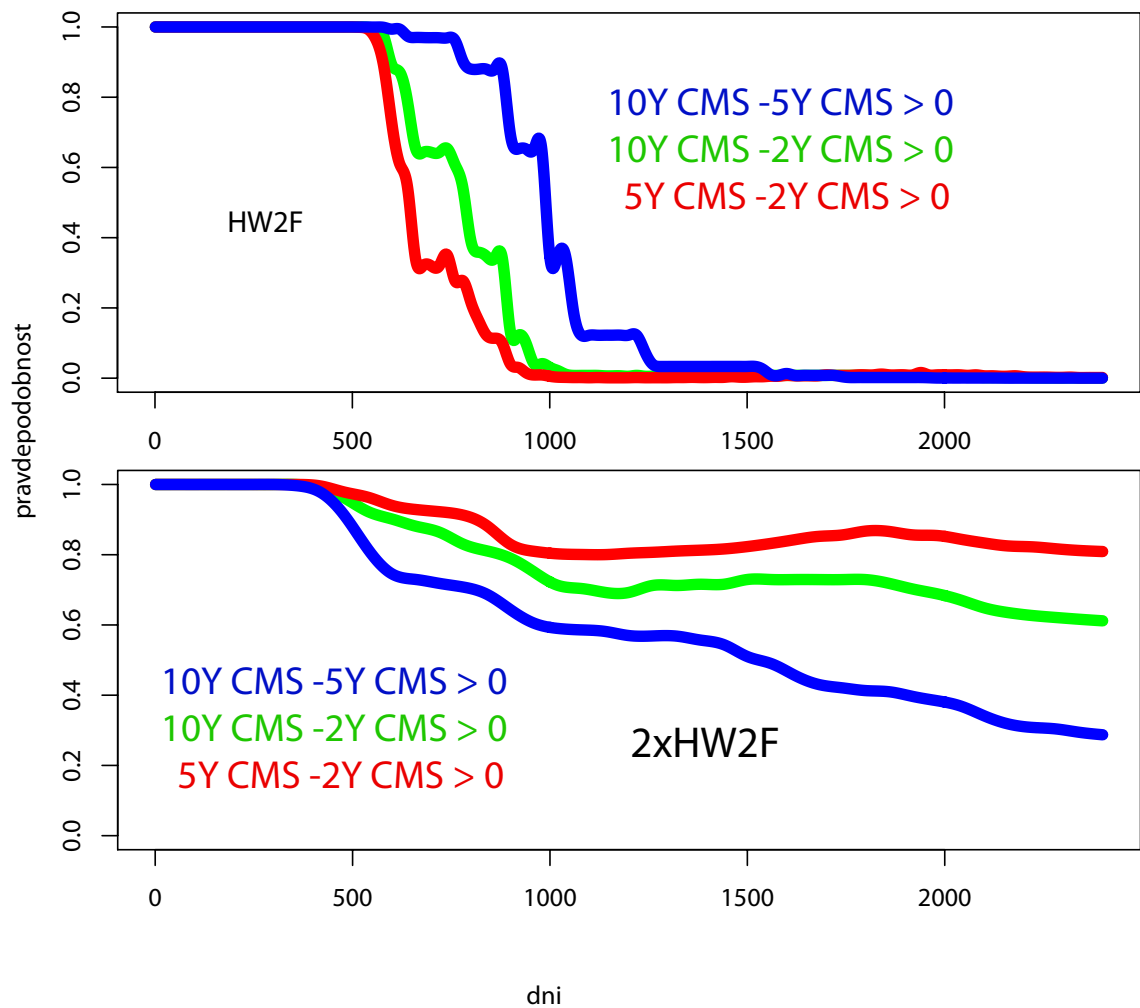
V tejto kapitole zhodnotíme, či sú modely, ktoré sme nakalibrovali, vhodné na oceňovanie CMS spread based derivátov. Jasnou odpoveďou nám môže byť pohľad na obrázky 3.1 ktoré hovoria o budúcej pravdepodobnosti splnení nasledujúcich podmienok:

$$S_{10Y} > S_{5Y} , S_{10Y} > S_{2Y} \text{ a } S_{5Y} > S_{2Y} .$$

Označme spread $S_{10Y} > S_{5Y}$ modrou, $S_{10Y} > S_{2Y}$ červenou a $S_{5Y} > S_{2Y}$ zelenou farbou. Na obrázku 3.1 môžeme vidieť grafické znázornenie pravdepodobností, že tieto spready budú v budúcnosti kladné. Z pohľadu na obrázky je zrejmé, že ani jeden z nami nakalibrovaných modelov nie je vhodný na oceňovanie tak zložitých derivátov ako sú CMS spread Range accuracy¹. Nakoľko tieto deriváty závisia od rozdielov swap úrokov s rôznymi maturitami v každom čase², model by mal zachytiť ceny swaptions pre všetky strike hodnoty vo všetkých maturitách - minimálne počas trvania range accrualu. To sme samozrejme nemohli čakať od pomerne jednoduchého modelu akým je HW2F. Tento model dokáže dobre zachytiť ceny atm swaptions, ale pri pokuse vniesť do modelu swaptions volatility smile už kalibrácia nebude úspešná. Ani pri nami upravenom modeli 2xHW2F sme nedosiahli perfektný fit, no vzhľadom na to,

¹Nakoľko od istého času v modeli HW2F budú swapy s nízkymi maturitami vyššie ako s nízkymi.

²Pretože sa kupóny kumulujú denne.



Obr. 3.1: Pravdepodobnosti, že v budúcom čase budú dané CMS Spready >0 .

že sme kalibrovali *priamo* veľký strom, výsledky sa zdajú byť dobré. Ešte lepšie sa 2xHW2F model javí pri uvažovaní CMS Spreadu, kde je klasický HW2F strom úplne nepoužiteľný³. 2xHW2F síce v takejto podobe tiež nedokáže správne reprodukovať vývoj CMS spreadov, no obrázok 3.1 napovedá, že pri vhodnej úprave⁴ môže byť tento model vhodným doplnením iných modelov⁵.

Ceny CMS Spread range accrualov implikové modelmi tým pádom ani nie je potrebné uvádzať - pre HW2F určite nie, ako vidieť na 3.1. Približne 80 percentná

³Pri nami nájdených parametroch pravdepodobnosti kladných spreadov zrátané v strome sú od určitého času nulové, čo je samozrejme nereálne.

⁴A zahrnutí trhových cien opcií na CMS Spready do kalibračného koša.

⁵Napríklad LSM, nakoľko je vždy lepšie zohľadniť ceny zrátané viacerými modelmi, ako jedným.

pravdepodobnosť implikovaná 2xHW2F, že za 10 rokov bude $S_{10Y} < S_{5Y}$ svedčí, že ani v 2xHW2F modeli nemá význam oceňovať CMS Spread RA.

Kapitola 4

Záver

Oceňovanie derivátov zohráva na finančnom trhu dôležitú úlohu. Správne ocenenie minimalizuje riziká plynúce z obchodovania s týmito derivátmi. Hlavným cieľom diplomovej práce bolo rozšírenie zaužívaného dvojfaktorového Hull-Whiteovho modelu tak, aby bol schopný zohľadniť širšie portfólio vstupných derivátov a tým pádom lepšie oceniť zložitejšie typy derivátov - CMS Range Accrualy.

V práci sme predstavili základné pojmy a typy derivátov súvisiace s danou problematikou. Ďalej sme sa oboznámili s Hull-Whiteovými jedno- a dvojfaktorovými modelmi a ich diskretnou reprezentáciou - úrokovým stromom. Podrobne sme popísali výstavbu jedno- a dvojrozmerného trinomického rekombinujúceho sa stromu pre dané modely. Tieto postupy sme použili pri konštrukcii nového aparátu - štvordimenzionálneho rekombinujúceho sa stromu. Pre tento strom sme definovali aproximácie diskontných faktorov (bez iteratívneho výpočtu) a cien dlhopisov vo vrchoch. Funkcie na ocenenie kalibračného koša sme naprogramovali rešpektujúc zásady efektívneho počtu. Namiesto zdĺhavých for-cyklov sme swap úroky vo vrchoch stromu zráтали maticovými a vektorovými operáciami, čo nám za približne 3 sekundy umožnilo: vystavať štvordimenzionálny strom s dĺžkou časového kroku $\Delta t = 0.25$ (po 10 rokov) s 5000 uzlami v priereze a oceniť skoro 100 derivátov. Vďaka tomu sme mohli zvoliť hrubý prístup ku kalibrácii, kde pomocou samplovacej techniky LHS vygenerujeme reprezentatívnu vzorku z priestoru parametrov a následným L-M nelineárnym algoritmom nájdeme lokálne minimá. Takto sme sumu štvorcov relatívnych odchýlok

oproti HW2F modelu zmenšili na polovicu. V poslednej kapitole sme ukázali, že takto zkonštruovaný model vie nielenže lepšie zachytiť vstupné ceny derivátov, ale pri uvažovaní CMS spreadov sa model správa oveľa *rozumnejšie*. Aj napriek tomu nie je vhodný na oceňovanie CMS Spread Range Accrualov, ktoré sme tým pádom ani neocenili, nakoľko by to viedlo k nezmyselným výsledkom.

Prácu sme poňali komplexne a popísali sme všetky procesy pri oceňovaní: predstavenie derivátov, modelov, implementácia, výber kalibračného koša, proces kalibrácie. 2xHW2F model, ktorý sme zostrojili, síce nedokáže správne oceniť CMS Spread Range Accrualy, no dokáže zachytiť širšie portfólio vstupných derivátov ako klasický HW2F model. Vďaka rýchlej implementácii vo freeware programe **R** môže byť tento model použitý v praxi ako náhrada za klasický HW2F model.

Príloha

V tejto kapitole sa nachádzajú spracované vybrané algoritmy a vzorce z predchádzajúcich kapitol.

funkcia AtT

$$\ln A^{hw2f}(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + B^{hw2f}(t, T)r_t(0) - \eta \quad (4.1)$$

kde

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\sigma_1^2}{4a} (1 - e^{-2at}) B^{hw2f}(t, T)^2 \\ &\quad - \rho_{\sigma_1\sigma_2} [B^{hw2f}(0, t)C^{hw2f}(0, t)B^{hw2f}(t, T) + \gamma_4 - \gamma_2] \\ &\quad - \frac{1}{2}\sigma_2^2 [C(0, t)^2 B^{hw2f}(t, T) + \gamma_6 - \gamma_5] \\ \gamma_1 &= \frac{e^{-(a+b)T}[e^{(a+b)t-1}]}{(a+b)(a+b)} - \frac{e^{-2aT}(e^{2at}-1)}{2a(a-b)} \\ \gamma_2 &= \frac{1}{ab} \left[\gamma_1 + C^{hw2f}(t, T) - C^{hw2f}(0, T) + \frac{1}{2}B^{hw2f}(t, T) \right] \\ &\quad + \frac{1}{ab} \left[-\frac{1}{2}B^{hw2f}(0, T)^2 + \frac{1}{a} - \frac{e^{-a(T-t)} - e^{-aT}}{a^2} \right] \\ \gamma_3 &= -\frac{e^{-(a+b)t} - 1}{(a+b)(a-b)} + \frac{e^{-2at} - 1}{2a(a-b)} \\ \gamma_4 &= \frac{1}{ab} \left[\gamma_3 - C^{hw2f}(0, t) - \frac{1}{2}B^{hw2f}(0, t)^2 + \frac{1}{a} + \frac{e^{-at} - 1}{a^2} \right] \\ \gamma_5 &= \frac{1}{b} \left[\frac{1}{2}C^{hw2f}(t, T)^2 - \frac{1}{2}C^{hw2f}(0, T)^2 + \gamma_2 \right] \\ \gamma_6 &= \frac{1}{b} \left[\gamma_4 - \frac{1}{2}C^{hw2f}(0, t)^2 \right]. \end{aligned}$$

FUNKCIE HW2F - AtT, BtT, CtT, PtT

```

PtT <- function (a,b,sigma1,sigma2,rho,t,T,r,u){
  if (a==b) b<-b+0.0000001
  if (t<0.004) return(POT(T))
  return( AtT(a,b,sigma1,sigma2,rho,t,T)*exp( -BtT(a,t,T)*r - CtT(a,b,t,T)*u ) ) }

BtT <- function (a,t,T){
  #if (a==b) b<-b+0.0000001
  return( (1-exp(-a*(T-t)))/a ) }

CtT <- function (a,b,t,T){
  if (a==b) b<-b+0.0000001
  return( exp(-a*(T-t))/(a*(a-b)) - exp(-b*(T-t))/(b*(a-b)) + 1/(a*b) ) }

AtT <- function (a,b,sigma1,sigma2,rho,t,T){
  if (a==b) b<-b+0.0000001
  K1 <- (exp(-(a+b)*T)*(exp((a+b)*t)-1)) / ((a+b)*(a-b)) -
  (exp(-2*a*T)*(exp(2*a*t)-1)) / ( 2*a*(a-b) )
  K2 <- (1/(a*b))*( K1 + CtT(a,b,t,T) - CtT(a,b,0,T) +
  (BtT(a,t,T)^2)/2 -
  (BtT(a,0,T)^2)/2 + t/a - (exp(-a*(T-t))-exp(-a*T))/
  (a^2) )
  K3 <-- (exp(-t*(a+b))-1)/((a-b)*(a+b)) + (exp(-2*a*t)-1)/
  (2*a*(a-b))
  K4 <- ( K3 - CtT(a,b,0,t) - (BtT(a,0,t)^2)/2 + t/a +
  (exp(-a*t)-1)/(a^2) )/(a*b)
  K5 <- ( (CtT(a,b,t,T)^2)/2 - (CtT(a,b,0,T)^2)/2 + K2 )/b
  K6 <- ( K4 - (CtT(a,b,0,t)^2)/2 )/b
  Ni <- (sigma1^2)/(4*a)*(1-exp(-2*a*t))*(BtT(a,t,T)^2) -
  rho*sigma1*sigma2*( BtT(a,0,t)*CtT(a,b,0,t)*BtT(a,t,T) +
  K4 - K2 ) -

```

```
( BtT(a,t,T)*(CtT(a,b,0,t)^2) + K6 - K5 ) * sigma2^2/2
A <-exp( (POT(T)/POT(t)) + BtT(a,t,T)*urok(t) - Ni )
return ( A ) }
```

FUNKCIE pravdepodobnosti v stromoch

```
PvStrome <-function(a,sigma,DELTA){

V <-(sigma^2)*(1-exp(-2*a*DELTA))
deltaR <-sqrt(3*V)
sirka <-floor(0.184/(a*DELTA))+2
vektorR <-seq(-sirka*deltaR,sirka*deltaR,,sirka*2+1)
M = -a*DELTA
strom<-array(0,c(3,sirka*2+1))
for (uzol in 1:(sirka*2+1)){
j <-uzol-sirka-1
strom[,uzol]<-c( 1/6+0.5*(M^2*j^2+M*j),
2/3-j^2*M^2,
1/6+0.5*(M^2*j^2-M*j))}
j <--sirka
strom[,1]<-c( 1/6+0.5*(M^2*j^2-M*j),
-1/3-j^2*M^2+2*j*M,
7/6+0.5*(M^2*j^2-3*M*j))
strom[,sirka*2+1]<-strom[,1][c(3,2,1)]
return(strom)}

emPadj<-function (RHOYU,P) {
e<-ePgen(RHOYU,P)
if (RHOYU > 0)
return( matrix ( c( 5*e , -4*e , -e,
-4*e , 8*e , -4*e,
```



```

-e ,-4*e ,5*e ) , byrow=TRUE ,ncol=3) )
return( matrix ( c( -e ,-4*e ,5*e,
-4*e ,8*e ,-4*e,
5*e ,-4*e ,-e ) , byrow=TRUE ,ncol=3) ) }

```

```

ePgen <-function (RHOYU,P) {
if (RHOYU>0)
return( min ( P[1,2]/4, P[1,3], P[2,1]/4, P[2,3]/4,
P[3,1], P[3,2]/4, RHOYU/36 ) )
if (RHOYU<0)
return( -max( -P[1,1], -P[1,2]/4, -P[2,1]/4, -P[2,3]/4,
-P[3,2]/4, -P[3,3] , RHOYU/36 ) )}

```

Výstavba HW2F STROMU

```

Strom2F <-function (A,B,SIGMA1,SIGMA2,RHO,DELTA,KolkoKrok){

SIGMAY <-sqrt( SIGMA1^2 + 2*RHO*SIGMA1*SIGMA2/(B-A) +
(SIGMA2^2)/((B-A)^2) )
RHOYU <-RHO*SIGMA1/SIGMAY + (SIGMA2/(B-A))/SIGMAY
pStromY <-PvStrome(A,SIGMAY,DELTA)
pStromU <-PvStrome(B,SIGMA2,DELTA)
pocU <-length(pStromU[1,])
pocY <-length(pStromY[1,])
pocYxU <-pocU*pocY
sirkaU <-pocU/2 - 0.5
sirkaY <-pocY/2 - 0.5
Vy <-(SIGMAY^2)*(1-exp(-2*A*DELTA))/(2*A)
Vu <-(SIGMA2^2)*(1-exp(-2*B*DELTA))/(2*B)
deltaY <-sqrt(3*Vy)
deltaU <-sqrt(3*Vu)

```

```

vektorU <-deltaU*(c(-sirkaU:sirkaU))
vektorY <-deltaY*(c(-sirkaY:sirkaY))
pStromYU <-array(0,c(3,3,pocY,pocU))

for (y in 1:pocY)
for (u in 1:pocU)
pStromYU[, ,y,u]<-pStromY[,y] %*% t(pStromU[,u])

PadjStromYU <-pStromYU

for (y in 1:pocY)
for (u in 1:pocU){
PadjStromYU[, ,y,u]<-pStromYU[, ,y,u] +
emPadj(RHOYU,pStromYU[, ,y,u])
PadjStromYU[, ,y,u]<-PadjStromYU[, ,y,u]/
sum(PadjStromYU[, ,y,u])}

StromYU <-ADstromYU <-Zhodnot <-array (0,c(length(pStromY[1,]),
length(pStromU[1,]),KolkoKrok+1))
StromYU [sirkaY+1,sirkaU+1,1] <-1
ADstromYU [sirkaY+1,sirkaU+1,1] <-1
matica1 <-ADstromYU[, ,1]*0+1
matY <-matica1*vektorY
matU <-t(t(matica1)*vektorU/(B-A))
matR <-matY-matU
posun <-urok(DELTA)
for (krok in 1:KolkoKrok){
mat.diskF <-exp( -(matR + posun[krok])*DELTA )
for (nY in      max(sirkaY+2-krok,1):min(sirkaY+krok,pocY))

```

```

for (nU in      max(sirkaU+2-krok,1):min(sirkaU+krok,pocU)){
posunY <-posunU <-c(1,0,-1)
p <-StromYU [nY , nU  , krok  ]

if (min(nY,nU)==1 | nY==pocY | nU==pocU){
if (nY==1)
posunY <-c(2,1,0)
if (nY==sirkaY*2+1)
posunY <-c(0,-1,-2)
if (nU==1)
posunU <-c(2,1,0)
if (nU==sirkaU*2+1)
posunU <-c(0,-1,-2)}

for(cY in 1:3)
for(cU in 1:3){
StromYU [nY+posunY[cY] , nU+posunU[cU] , krok +1 ] <-
StromYU [nY+posunY[cY] , nU+posunU[cU] , krok +1 ] +
p* PadjStromYU[cY ,cU ,nY,nU]
ADstromYU[nY+posunY[cY] , nU+posunU[cU] , krok +1 ] <-
ADstromYU[nY+posunY[cY] , nU+posunU[cU] , krok +1 ]+
ADstromYU[nY,nU,krok]*PadjStromYU[cY,cU,nY,nU]*mat.diskF[nY,nU]   } }
posun[krok +1] <- (log ( sum( ADstromYU[, ,krok +1]*exp(matR) ) ) -
log( POT(DELTA*(krok +2)) ) ) /DELTA      }

VYSLEDOK <-list( strom = StromYU[, ,1:KolkoKrok +1] ,
  vY = vektorY , vU = vektorU ,
ADstrom = ADstromYU[, ,1:KolkoKrok +1] ,
  posun = posun[1:KolkoKrok +1] )

```

```
return (VYSLEDOK) }
```

Ocenenie Kalibracneho Kosa pre HW2F

```
ratajCenyKalibKosa<-function(a1,b1,sigma11,sigma21,rho1,
StromYU1,posun1,vektorY1,vektorU1,ADstrom1,
SwaptionAtmMaturity,SwaptionAtmTenor,strajky,
DELTA,pocetCasti,cast){

pocStrajkov <-length(strajky)
pocTenorov <-length(SwaptionAtmTenor)
pocMaturit <-length(SwaptionAtmMaturity)
pocY1 <-length(vektorY1)
pocU1 <-length(vektorU1)
comb1 <-permutations(max(pocY1,pocU1),2,repats.allowed = TRUE)
comb1 <-comb1[comb1[,1]<=pocY1,]
comb1 <-comb1[comb1[,2]<=pocU1,]
comb <-comb1
rm(comb1)
mojaCast <-1:length(comb[,1])

if (pocetCasti>1){
pocKombNaC <-floor(length(comb[,1])/pocetCasti)
mojaCast <-c((pocKombNaC*(cast-1)+1):(pocKombNaC*cast))
if (cast==pocetCasti)
mojaCast <-c((pocKombNaC*(cast-1)+1):length(comb[,1]))}

mojaCastPoc <<-length(mojaCast)
matica1 <-StromYU1[,1]*0+1
matY1 <-matica1*vektorY1
```

```

matU1 <-t(t(matica1)*vektorU1/(b1-a1))
matR1 <-matY1-matU1

vysledokSWP <-array(0,c(pocMaturit,pocTenorov,pocStrajkov))
vysledokFswp <-vysledokSWP[, ,1]

TenorMax <-SwaptionAtmTenor [pocTenorov]

for (maturita in 1:pocMaturit){

Krok <-round(SwaptionAtmMaturity[maturita ]/DELTA)
rHodnoty1 <-matR1 + posun1[Krok]
pravdep <-StromYU1[ , ,Krok ] [comb]
Maturita <-SwaptionAtmMaturity [maturita]
AtT1.priprava <<-AtT(a1,b1,sigma11,sigma21,rho1,Maturita,
Maturita+0.5*(1:(2*TenorMax)))
BtT1.priprava <<-BtT(a1,Maturita,Maturita+0.5*(1:(2*TenorMax)))
CtT1.priprava <<-CtT(a1,b1,Maturita,Maturita+0.5*
(1:(2*TenorMax)))
PtT1.priprava <<- t( t( exp( -rHodnoty1
[comb[mojaCast,c(1,2)]]%*%t(BtT1.priprava)
-vektorU1[comb[mojaCast,2]]%*%t(CtT1.priprava)) ) *
AtT1.priprava )

for (tenor in 1:pocTenorov){
Tenor <-SwaptionAtmTenor [tenor]
levelySwapov <-0*1:mojaCastPoc
for (i in 1:(Tenor*2))
levelySwapov <-levelySwapov + PtT1.priprava[mojaCast,i]
swapy <-2*(1-PtT1.priprava[,Tenor*2])/levelySwapov

```

```

# FS <-Fswap(SwaptionAtmMaturity[maturita ],SwaptionAtmTenor[tenor ])
FS <-forwardy[maturita,tenor]

rozdielF <-(swapy-FS)*0.5
cenyF <-0
for (i in 1:(Tenor*2))
    cenyF <-cenyF +PtT1.priprava[,i]*rozdielF
cenaF <-sum(ADstrom1[,Krok]*cenyF)
vysledokFswp[maturita,tenor]<-cenaF

for (STRAJK in 1:pocStrajkov){

rozdiel <-(swapy-FS-strajky[STRAJK])*0.5
rozdiel[rozdiel<0] <-0
ceny <-0
for (i in 1:(Tenor*2))
    ceny <-ceny +PtT1.priprava[,i]*rozdiel
cena <-sum(ADstrom1[,Krok]*ceny)
vysledokSWP [maturita,tenor,STRAJK]<-cena  }}}

return(list(cenySWP=vysledokSWP,cenyFswp=vysledokFswp))
}

```

Ocenenie Kalibracneho Kosa pre 2xHW2F

```

ratajCenyKalibKosa2<-function(a1,b1,sigma11,sigma21,rho1,
StromYU1,ADstrom1,posun1,vektorY1,vektorU1,
a2,b2,sigma12,sigma22,rho2,StromYU2,ADstrom2,posun2,
vektorY2,vektorU2,VAHA.sklon,SwaptionAtmMaturity,SwaptionAtmTenor,

```

```
strajky,DELTA,pocetCasti,cast){

pocStrajkov <-length(strajky)
pocTenorov <-length(SwaptionAtmTenor)
pocMaturit <-length(SwaptionAtmMaturity)

pocY1 <-length(vektorY1)
pocY2 <-length(vektorY2)
pocU1 <-length(vektorU1)
pocU2 <-length(vektorU2)
comb1 <-permutations(max(pocY1,pocU1),2,repeats.allowed = TRUE)
comb1 <-comb1[comb1[,1]<=pocY1,]
comb1 <-comb1[comb1[,2]<=pocU1,]
comb2 <-permutations(max(pocY2,pocU2),2,repeats.allowed = TRUE)
comb2 <-comb2[comb2[,1]<=pocY2,]
comb2 <-comb2[comb2[,2]<=pocU2,]
comb3 <-permutations(max(pocY1*pocU1,pocY2*pocU2),2,repeats.allowed = TRUE)
comb3 <-comb3[comb3[,1]<=pocY1*pocU1,]
comb3 <-comb3[comb3[,2]<=pocY2*pocU2,]
comb <-array(0,c(pocY1*pocU1*pocY2*pocU2,4))
comb[,c(1,2)] <-comb1[comb3[,1],]
comb[,c(3,4)] <-comb2[comb3[,2],]

rm(comb1,comb2,comb3)

mojaCast <-1:length(comb[,1])

if (pocetCasti>1){
pocKombNaC <-floor(length(comb[,1])/pocetCasti)
mojaCast <-c((pocKombNaC*(cast-1)+1):(pocKombNaC*cast))
```

```

if (cast==pocetCasti)
mojaCast <-c((pocKombNaC*(cast-1)+1):length(comb[,1]))}
mojaCastPoc <<-length(mojaCast)
#return(mojaCastPoc)
matica1 <-StromYU1[,1]*0+1
matY1 <-matica1*vektorY1
matU1 <-t(t(matica1)*vektorU1/(b1-a1))
matR1 <-matY1-matU1
matica2 <-StromYU2[,1]*0+1
matY2 <-matica2*vektorY2
matU2 <-t(t(matica2)*vektorU2/(b2-a2))
matR2 <-matY2-matU2
vysledokSWP <-array(0,c(pocMaturit,pocTenorov,pocStrajkov))
vysledokFswp <-vysledokSWP[,1]
TenorMax <-SwaptionAtmTenor[pocTenorov]
for (maturita in 1:pocMaturit){

Maturita <-SwaptionAtmMaturity [maturita]

Vaha2 <-atan(VAHA.sklon*Maturita)*2/pi
Vaha1 <-1-Vaha2
Krok <-round(SwaptionAtmMaturity[maturita ]/DELTA)
diskF1.cast <-((ADstrom1[ ,Krok ][comb[mojaCast,c(1,2)]]/StromYU1
[ ,Krok ][comb[mojaCast,c(1,2)]]))^(DELTA/Maturita)
diskF2.cast <-((ADstrom2[ ,Krok ][comb[mojaCast,c(3,4)]]/
StromYU2[ ,Krok ][comb[mojaCast,c(3,4)]]))^(DELTA/Maturita)
diskF <-1
for (i in 1 : (Maturita/DELTA)){
V2 <-atan(VAHA.sklon*((i-1)*DELTA))*2/pi
V1 <-1-V2

```



```

diskF <-diskF* (diskF1.cast^V1) * (diskF2.cast^V2) }

ADstrom2x2F <-diskF * StromYU1[ ,Krok ][comb[mojaCast,c(1,2)]]*
StromYU2[ ,Krok ][comb[mojaCast,c(3,4)]]
ADstrom2x2F[is.na(ADstrom2x2F)] <-0

rHodnoty1 <-matR1 + posun1[Krok]
rHodnoty2 <-matR2 + posun2[Krok]
rHodnoty <-rHodnoty1[comb[mojaCast,c(1,2)]]* Vaha1 +
rHodnoty2[comb[mojaCast,c(3,4)]]* Vaha2

AtT1.priprava <<-AtT(a1,b1,sigma11,sigma21,rho1,
Maturita,Maturita+0.5*(1:(2*TenorMax)))
AtT2.priprava <<-AtT(a2,b2,sigma12,sigma22,rho2,Maturita,
Maturita+0.5*(1:(2*TenorMax)))
BtT1.priprava <<-BtT(a1,Maturita,Maturita+0.5*(1:(2*TenorMax)))
BtT2.priprava <<-BtT(a2,Maturita,Maturita+0.5*(1:(2*TenorMax)))
CtT1.priprava <<-CtT(a1,b1,Maturita,Maturita+0.5*(1:(2*TenorMax)))
CtT2.priprava <<-CtT(a2,b2,Maturita,Maturita+0.5*(1:(2*TenorMax)))

PtT1.priprava <<- t( t( exp( -rHodnoty1[comb[mojaCast,c(1,2)]]**%
t(BtT1.priprava)-vektorU1[comb[mojaCast,2]]**%
t(CtT1.priprava)) ) * AtT1.priprava )

PtT2.priprava <<- t( t( exp( -rHodnoty2[comb[mojaCast,c(3,4)]]**%
t(BtT2.priprava)-vektorU2[comb[mojaCast,4]]**%
t(CtT2.priprava)) ) * AtT2.priprava )

PtT4.priprava <<- PtT1.priprava^Vaha1 * PtT2.priprava^Vaha2
for (i in 2:(2*TenorMax)){

```

```
Vaha2 <-atan(VAHA.sklon*(Maturita+0.5*(i-1)))*2/pi
Vaha1 <-1-Vaha2
diskF1.cast <-PtT1.priprava[,i]/PtT1.priprava[,i-1]
diskF2.cast <-PtT2.priprava[,i]/PtT2.priprava[,i-1]

  PtT4.priprava[,i] <-PtT4.priprava[,i-1]*diskF1.cast^Vaha1 *
  diskF2.cast^Vaha2}
for (tenor in 1:pocTenorov){
Tenor <-SwaptionAtmTenor [tenor]
levelySwapov <-0*1:mojaCastPoc
for (i in 1:(Tenor*2))
levelySwapov <-levelySwapov + PtT4.priprava[mojaCast,i]

swapy <-2*(1-PtT4.priprava[,Tenor*2])/levelySwapov
# FS <-Fswap(SwaptionAtmMaturity[maturita ],SwaptionAtmTenor[tenor ])
FS <-forwardy[maturita,tenor]

rozdielF <-(swapy-FS)*0.5
cenyF <-0
for (i in 1:(Tenor*2))
cenyF <-cenyF +PtT4.priprava[,i]*rozdielF
cenaF <-sum(ADstrom2x2F*cenyF)
vysledokFswp[maturita,tenor]<-cenaF

for (STRAJK in 1:pocStrajkov){

rozdiel <-(swapy-FS-strajky[STRAJK])*0.5
rozdiel[rozdiel<0] <-0
ceny <-0
for (i in 1:(Tenor*2))
```

```

ceny <-ceny +PtT4.priprava[,i]*rozdiel
cena <-sum(ADstrom2x2F*ceny)
vysledokSWP [maturita,tenor,STRAJK]<-cena  ]}]

return(list(cenySWP=vysledokSWP,cenyFswp=vysledokFswp))

}

```

CHYBOVÁ funkcia pre HW2F model

```

chyba.hw2f.KalibKos <-function(parametre){

a1<-parametre[1]
b1<-parametre[2]
if (a1==b1) {
b1<-b1+0.00000001
a1<-a1-0.00000001}
sigma11<-parametre[3]
sigma21<-parametre[4]
rho1<-parametre[5]

cat( "pre param:", "\n", a1, b1, sigma11, sigma21, rho1, "\n")
flush.console()
if ( max ( parametre - c(0.9,0.9,0.2,0.2,0.95) ) > 0)
return((max ( parametre - c(0.9,0.9,0.2,0.2,0.95) )+50)^10)
if ( max ( -parametre + c(0.1,0.1,0.001,0.001,-0.95) ) > 0)
return((max ( -parametre + c(0.1,0.1,0.001,0.001,-0.95) )+50)^10)
A1<<-a1;B1<<-b1;SIGMA11<<-sigma11;SIGMA21<<-sigma21;RH01<<-rho1
KolkoKrok <<-max(SwaptionAtmMaturity)/DELTA
StromYU1 <-Strom2F(A1,B1,SIGMA11,SIGMA21,RH01,DELTA,KolkoKrok)

```

```

vektorY1 <-StromYU1$vY
vektorU1 <-StromYU1$vU
ADstrom1 <-StromYU1$ADstrom
posun1 <-StromYU1$posun
StromYU1 <-StromYU1$strom

cenyKalibKosa <-ratajCenyKalibKosa( a1,b1,sigma11,sigma21,rho1,StromYU1,
posun1,vektorY1,vektorU1,ADstrom1,SwaptionAtmMaturity,
SwaptionAtmTenor,strajky,DELTA,pocetCasti,cast)

cenySwaptions <-cenyKalibKosa$cenySWP
cenyForwardov <-cenyKalibKosa$cenyFswp

chyba1 <-(cenySwaptions[,1] -swapcieAtmMinus100bps) /swapcieAtmMinus100bps
chyba2 <-(cenySwaptions[,2] -swapcieAtm) /swapcie
chyba3 <-(cenySwaptions[,3] -swapcieAtmPlus100bps) /swapcieAtmPlus100bps

chyba <-c(chyba1[2:4,2:4],chyba2[2:4,2:4],chyba3[3:4,2:4],cenyForwardov)

cat( "je chyba = ",sum(chyba^2)," a vrcholov s strome je: ",mojaCastPoc,"\n")
flush.console()
return(chyba)      }

```

CHYBOVÁ funkcia pre 2xHW2F model

```

chyba.hw2x2f.KalibKos <-function(parametre){

a1<-parametre[1]
b1<-parametre[2]
if (a1==b1) {

```

```
b1<-b1+0.00000001
a1<-a1-0.00000001}
sigma11<-parametre[3]
sigma21<-parametre[4]
rho1<-parametre[5]
a2<-parametre[6]
b2<-parametre[7]
if (a2==b2) {
b2<-b+0.00000001
a2<-a-0.00000001}
sigma12<-parametre[8]
sigma22<-parametre[9]
rho2<-parametre[10]
VAHA.sklon<-parametre[11]

cat( "pre param:", "\n", a1, b1, sigma11, sigma21, rho1, "\n",
a2, b2, sigma12, sigma22, rho2, "\n")
flush.console()
if ( max ( parametre[1:10] -
c(0.9,0.9,0.2,0.2,0.95,0.9,0.9,0.2,0.2,0.95) ) > 0)
return((max ( parametre[1:10] -
c(0.9,0.9,0.2,0.2,0.95,0.9,0.9,0.2,0.2,0.95) )+50)^10)
if ( max ( -parametre[1:10] +
c(0.1,0.1,0.001,0.001,-0.95,0.1,0.1,0.001,0.001,-0.95) ) > 0)
return((max ( -parametre[1:10] +
c(0.1,0.1,0.001,0.001,-0.95,0.1,0.1,0.001,0.001,-0.95) )+50)^10)
A1<<-a1;B1<<-b1;SIGMA11<<-sigma11;SIGMA21<<-sigma21;RHO1<<-rho1
A2<<-a2;B2<<-b2;SIGMA12<<-sigma12;SIGMA22<<-sigma22;RHO2<<-rho2
KolkoKrok <<-max(SwaptionAtmMaturity)/DELTA
StromYU1 <-Strom2F(A1,B1,SIGMA11,SIGMA21,RHO1,DELTA,KolkoKrok)
```

```
vektorY1 <-StromYU1$vY
vektorU1 <-StromYU1$vU
posun1 <-StromYU1$posun
ADstrom1 <-StromYU1$ADstrom
StromYU1 <-StromYU1$strom
StromYU2 <-Strom2F(A2,B2,SIGMA12,SIGMA22,RHO2,DELTA,KolkoKrok)
vektorY2 <-StromYU2$vY
vektorU2 <-StromYU2$vU
posun2 <-StromYU2$posun
ADstrom2 <-StromYU2$ADstrom
StromYU2 <-StromYU2$strom
cenyKalibKosa <-ratajCenyKalibKosa2( a1,b1,sigma11,sigma21,rho1,
StromYU1,ADstrom1,posun1,vektorY1,vektorU1,
a2,b2,sigma12,sigma22,rho2,StromYU2,ADstrom2,
posun2,vektorY2,vektorU2,VAHA.sklon,
SwaptionAtmMaturity,SwaptionAtmTenor,strajky,
DELTA,pocetCasti,cast)

cenySwaptions <-cenyKalibKosa$cenysWP
cenyForwardov <-cenyKalibKosa$cenysFswp
chyba1 <-(cenySwaptions[, ,1] -swapcieAtmMinus100bps) /swapcieAtmMinus100bps
chyba2 <-(cenySwaptions[, ,2] -swapcieAtm) /swapcie
chyba3 <-(cenySwaptions[, ,3] -swapcieAtmPlus100bps) /swapcieAtmPlus100bps
chyba <-c(chyba1[2:4,2:4],chyba2[2:4,2:4],chyba3[3:4,2:4],cenyForwardov)

cat( "je chyba = ",sum(chyba^2)," a vrcholov s strome je: ",mojaCastPoc,"\n")
flush.console()

return(chyba) }
```

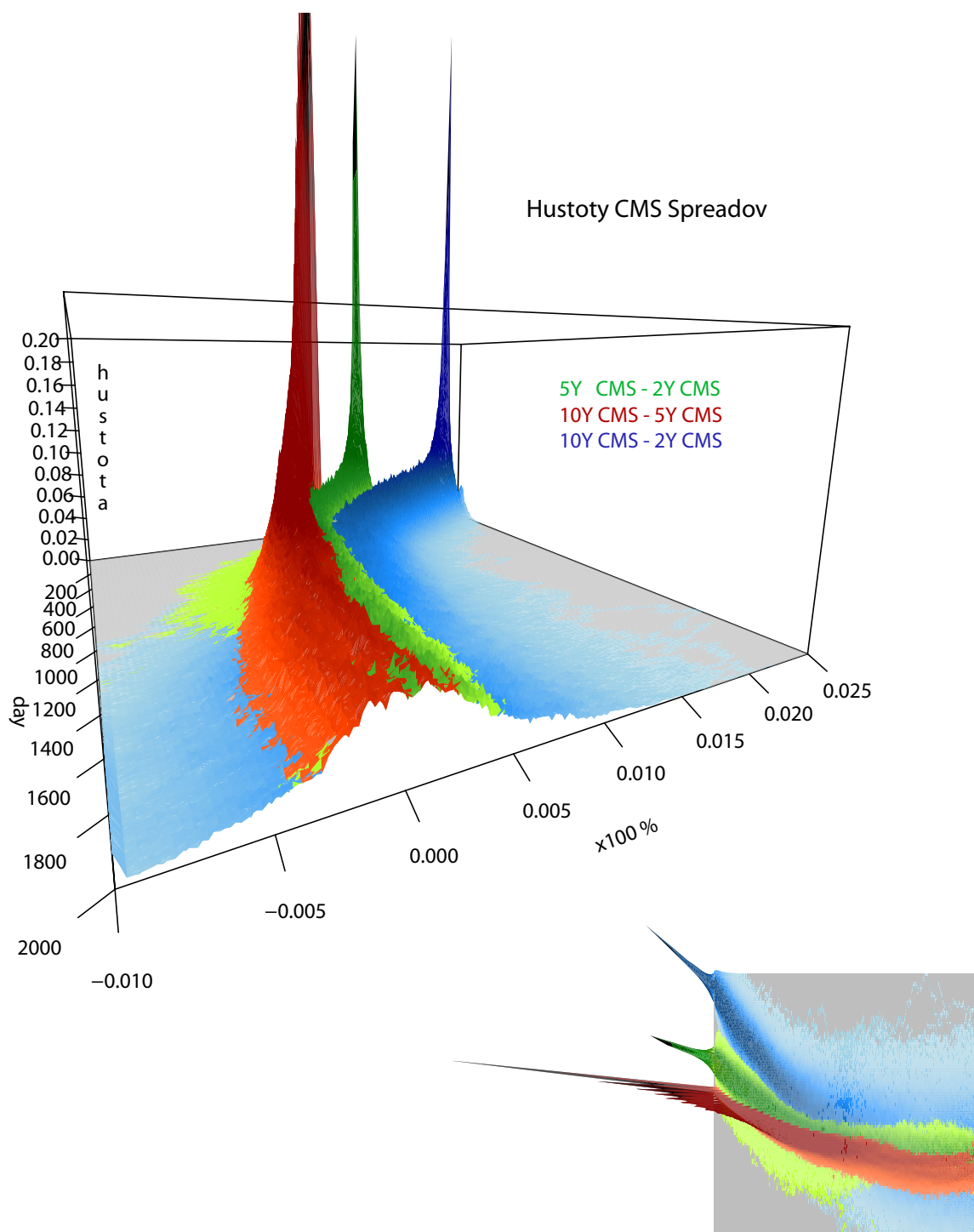
UKAZKA KALIBRACNEHO POSTUPU

```
predpriprava.par <-improvedLHS(3000,11,1)
parametre.skusky <-predpriprava.par

parametre.skusky[,c(1,2,6,7)] <-predpriprava.par[,c(1,2,6,7)]*0.8+0.1
parametre.skusky[,c(3,4,8,9)] <-predpriprava.par[,c(3,4,8,9)]*0.199+0.001
parametre.skusky[,5] <-predpriprava.par[,5] *1.9 - 0.95
parametre.skusky[,10] <-predpriprava.par[,10] *1.9 - 0.95
parametre.skusky[,11] <-predpriprava.par[,11] *2.5

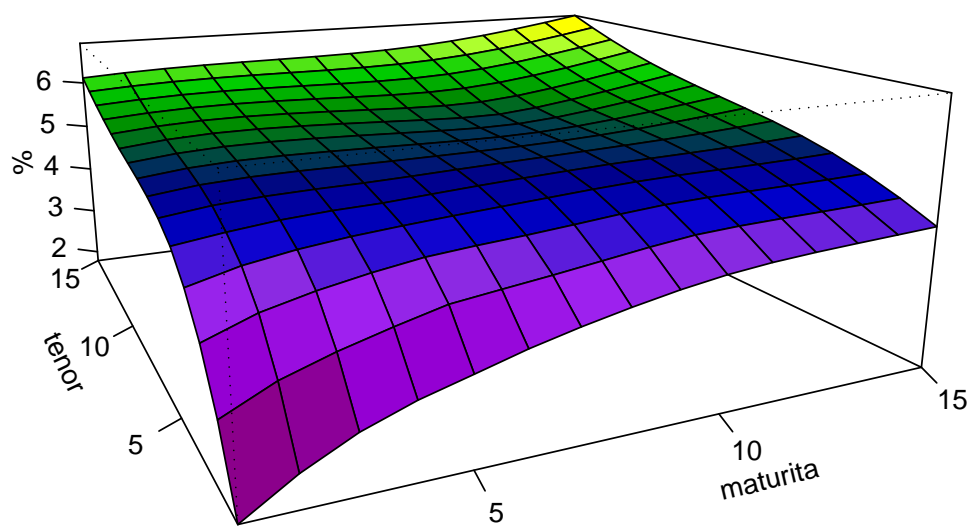
hisMinPar <-0
minimum<-10000000000pa
Parametree<-9
for (i in 1:3000){
CH<-sum( chyba.hw2x2f.KalibKos (parametre.skusky[i,])^2 )
if (!(is.na(CH))){
if (CH<minimum){
Parametree<-parametre.skusky[i,]
minimum<-CH
hisMinPar<-c(i,hisMinPar) } }}
XXX<-nls.lm( Parametree, chyba.hw2x2f.KalibKos, jac = NULL )
```

Grafy - pre zaujímavosť



Obr. 4.1: Hustoty CMS Spreadov implikované HW2F modelom zrátané Monte-Carlo metódou, pri parametroch nakalibrovaných na implikované volatily ATM swaptions zo 17.3.

Interpolovane Forward Swaps 17.3.2010



Obr. 4.2: Trhové forwardové swap úroky

Literatúra

- [1] John C. HULL, 1998. *Options, Futures and Other Derivatives 7th editin.* Pearson Prentice Hall, New Jersey, USA.
- [2] Damiano Brigo & Fabio Mercurio, 1985. *Interest Rate Models - Theory and Practice.* Springer, 2001.
- [3] Ricardo Rebonato , 1998. *Interest-Rate Option Models second edition .* John Wiley & sons.
- [4] Patrick S. Hagan , 2000+. *Accrual Swaps And Range Notes .* Bloomberg.
- [5] Patrick S. Hagan , 2000+. *Convexity conundrums .* Bloomberg.
- [6] Yinqiu Lu and Salih Neftci , 2003. *Convexity Adjustments and Forward Libor Model : Case of Constant Maturity Swaps .* National Centre of Competence in Research Financial Valuation and Risk Management.
- [7] Akume, Luderer, Weber , 2003. *Pricing and Hedging of Swaptions*
- [8] John Hull , 1998. *Technical Note No. 14 - Options, Futures, and Other Derivatives, Seventh Edition*
- [9] John Hull and Alan White , 1994. *Numerical procedures for implementing term structure models I*
- [10] MARC HENRARD , 2009. *Efficient swaptions price in Hull-White one factor model.*
- [11] John Hull and Alan White , 1990. *Pricing Interest-Rate Derivative Securities*

- [12] Marc P. A. Henrard , 2003. *Explicit bond option and swaption formula in HJM one factor model*
- [13] A. Falc'ó, Ll. Navarro and J. Nave , 2009. *The Hull-White model and multiobjective calibration with consistent curves: empirical evidence*
- [14] John Hull and Alan White , 2000. *The General Hull-White Model and Super Calibration*
- [15] John Hull and Alan White , 2000. *Technical Note No. 15 - Options, Futures, and Other Derivatives, Seventh Edition*
- [16] Matej Stračiak , 2008. *Testy normality dát* Bakalárska práca, FMFI UK.
- [17] Martin Guzi, Diplomová práca , 2003 *Bezarbitrážne modelovanie vývoja úrokových mier s aplikáciou na optimalizáciu portfólia dlhopisov.*
- [18] 10y EUR Callable Range Accrual on CMS Spread, BNP Paribas SA <http://www.onfinance.ch/php/doc.php?id=323>
- [19] Mourad Berrahoui, Commerzbank London, WILMOTT magazine *Pricing CMS Spread Options and Digital CMS Spread Options with Smile*
- [20] John Hull and Alan White , 1994. *Numerical procedures for implementing term structure models II: Two-factor models*
- [21] Matthias Muck and Markus Rudolf , 2002. *An extension of the discrete implementation of the Hull-and-White-2-Factor-Model*