Katedra Aplikovanej Matematiky a Štatistiky
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Úlohy optimálneho riadenia s ekonomickou motiváciou

(Diplomová práca)

Bc. Michal Strelka

9.1.9 Aplikovaná matematika

Vedúca diplomovej práce: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Bratislava, 2010

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne na základe vedomostí získaných štúdiom a s použitím citovaných zdrojov.

....

Poďakovanie

Svojej školiteľke doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc. ďakujem za jej čas, početné konzultácie a cenné rady počas tvorby mojej diplomovej práce. Taktiež ďakujem ľuďom v mojom okolí za drobnú pomoc a hlavne podporu.

Abstrakt

STRELKA, Michal: Úlohy optimálneho riadenia s ekonomickou motiváciou. [Diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúca diplomovej práce: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc. Bratislava: FMFI UK, 2010. 59 s.

Diplomová práca si kladie za cieľ zozbierať resp. vymyslieť úlohy zo spojitej teórie optimálneho riadenia s ekonomickou resp. finančnou interpretáciou. Je teda akousi zbierkou úloh k predmetu: Optimálne riadenie 2, v ktorej možno nájsť komplikovanejšie modely spolu s riešeniami.

Kľúčové slová: Pontrjaginov princíp maxima

Abstract

STRELKA, Michal: Models from optimal control theory with economic motivation. [Master thesis]. Comenius University, Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics; Department of Applied Mathematics and Statistics. Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc. Bratislava: FMFI UK, 2009. 59 p.

The goal of this master thesis is to collect or think up models from continuous optimal control theory with economic or financial interpretation. It is the models collection to subject: Optimálne riadenie 2, in which there are more complicated models with thier solutions.

Keywords: Pontrjagin principle of maximum

Obsah

Úvod

Teória optimálneho riadenia je ako povinný predmet súčasťou magisterského študijného programu Ekonomická a finančná matematika. Počas jeho výučby sa oboznamujeme so základmi teórie, ktoré sú potom ilustrované na niekoľkých príkladoch. Diplomová práca obsahuje zložitejšie úlohy z optimálneho riadenia a ponúka ich riešenie pomocou tzv. Pontrjaginovho princípu maxima (PPM), ktorý formuluje nutné podmienky optimality.

Nasleduje niekoľko slov o štruktúre práce. Práca je rozdelená do šiestich častí, pričom prvá je úvodom do diplomovej práce. Nasledujúce štyri kapitoly obsahujú jednotlivé úlohy optimálneho riadenia spolu s riešeniami. Poslednú časť tvorí záver, v ktorom stručne zhrnieme výsledky práce, zhodnotíme plnenie zadaného cieľu.

Do prvej kapitoly sú zaradené modely, ktorých spoločným znakom je, že v účelovej funkcii vystupuje funkcia koncového stavu. Prvý príklad je úlohou v Mayerovom tvare, zatiaľ čo druhá úloha má Bolzový tvar účelovej funkcie.

Druhá kapitola obsahuje úlohy, ktorých špecifikom je prítomnosť diskontného faktora v účelovej funkcii. Táto neautonómnosť sa potom prenáša aj do podmienok PPM a vhodnou substitúciou je možné ju odstrániť. Druhá úloha tejto kapitoly je ešte špecifická v tom, že riadenie má singulárny charakter.

Tretia a štvrtá kapitola obsahujú po jednom príklade. V tretej kapitole máme úlohu s ohraničením typu nerovnosti na koncový stav a vo štvrtej kapitole máme dvojrozmernú úlohu optimálneho riadenia.

Kapitola 1

Úlohy v Bolzovom tvare

Do Kapitoly 1 sú zaradené dve úlohy optimálneho riadenia, ktorých spoločným znakom je, že v účelovej funkcii vystupuje funkcia koncového stavu. V prvom modeli - Problém hotovostnej bilancie sa jedná o úlohu v Mayerovom tvare, pretože účelová funkcia je definovaná iba ako funkcia koncového stavu. Druhý model - Obchodovanie s komoditami je úlohou, ktorú klasifikujeme ako úlohu v Bolzovom tvare, pretože účelová funkcia je súčtom integrálu a funkcie koncového stavu.

1.1 Problém hotovostnej bilancie

Model a jeho riešenie vychádza z (Sethi and Thompson, 2000). Z hľadiska klasifikácie úloh optimálneho riadenia sa jedná o neautonómnu úlohu s pevným časom. Úloha je bez ohraničenia na koncový stav, teda ide o úlohu s voľným koncom, ohraničenú na riadenie.

$$max \quad x_1(T) + x_2(T) \tag{1.1}$$

$$\dot{x}_1(t) = r_1(t)x_1(t) - d(t) + u(t) - \alpha|u(t)|, \quad x_1(0) = x_1^0 \tag{1.2}$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2(t)x_2(t) - u(t), \quad x_2(0) = x_2^0 \tag{1.3}$$

$$-U_2 \leq u(t) \leq U_1 \tag{1.4}$$

T	časový horizont (daná konštanta)
$x_1(t)$	stav hotovosti v eurách v čase t (stavová premenná)
$x_2(t)$	stav cenných papierov v eurách v čase t (stavová premenná)
$u(t)$	rýchlosť predaja cenných papierov v eurách (riadiaca premenná)
$d(t)$	okamžitá zmena dopytu po hotovosti, môže nadobúdať kladné aj záporné hodnoty (daná funkcia)
$r_1(t)$	úroková miera pre hotovosť držanú na účte (daná spojitá funkcia)
$r_2(t)$	úroková miera pre cenné papiere (daná spojitá funkcia)
α	obchodníkova odmena za sprostredkovaný predaj alebo kúpu cenných papierov $0 < \alpha < 1$ (daná konštanta)
x_1^0, x_2^0	počiatočné stavy (dané konštanty)
U_1, U_2	dané konštanty

Špecifikom tejto úlohy je, že obsahuje absolútnu hodnotu z riadenia. Počas riešenia tejto úlohy uvidíme, ako možno takúto úlohu previesť na úlohu bez absolútnej hodnoty ale s dvoma riadiacimi premennými.

1.1.1 Interpretácia

Predstavme si firmu, ktorá na daný časový horizont pozná svoj dopyt po peňažnej hotovosti. Na uspokojenie tohto dopytu, firma musí držať istú časť hotovosti na firemnom účte, za nepotrebnú hotovosť môže nakúpiť cenné papiere. Môže nastať taká vec, keď vedenie firmy nesprávne odhadne situáciu a ponechá si príliš veľa hotovosti na účte. Firma tým pádom stráca na zisku (cena stratenej príležitosti), keďže za hotovosť mohla nakúpiť cenné papiere, ktoré by jej priniesli vyššie výnosy. Na druhej strane, ak je finančná hotovosť firmy príliš malá, musí na pokrytie dopytu predať svoje cenné papiere, a tým pádom zaplatiť poplatok za sprostredkovanie predaja. Úlohou optimálneho riadenia je teda nájsť kompromis medzi hotovostnou bilanciou a množstvom cenných papierov, ktoré firma vlastní, a to tak, aby maximalizovala veľkosť svojich aktív na konci časového obdobia.

1.1.2 Formulácia podmienok PPM

Podmienky PPM pre túto úlohu formulujeme na základe (Halická, 2009), konkrétne z časti 4.6.

(PM)

$$\psi_1(r_1x_1 - d + u - \alpha|u|) + \psi_2(r_2x_2 - u) \to \max_{u\in[-U_2,U_1]} \tag{1.5}$$

(AR)

$$\dot{\psi}_1(t) = -\psi_1(t)r_1(t) \tag{1.6}$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\psi_2(t)r_2(t) \tag{1.7}$$

(PT)

$$\psi_1(T) = \psi_0 \tag{1.8}$$

$$\psi_2(T) = \psi_0 \tag{1.9}$$

1.1.3 Riešenie

Keďže daná úloha optimálneho riadenia je úlohou na maximum, $\psi_0 \geq 0$. Ak by $\psi_0 = 0$ potom z podmienky transverzality sa $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$, a keďže platí podmienka $(\psi_0, \psi_1(t), \psi_2(t)) \neq (0, 0, 0)$ pre všetky $t \in [0, T]$, potom aby daný vzťah platil aj pre $t = T$, nesmie byť $\psi_0 = 0 \Rightarrow \psi_0 = 1$. Podmienku transverzality tak môžme prepísať nasledovne:
(PT)

$$\psi_1(T) = 1 \tag{1.10}$$

$$\psi_2(T) = 1 \tag{1.11}$$

Riešením adjungovanej rovnice s využitím podmienky transverzality dostávame:

$$\psi_1(t) = e^{\int_t^T r_1(\tau)d\tau} \tag{1.12}$$

$$\psi_2(t) = e^{\int_t^T r_2(\tau)d\tau} \tag{1.13}$$

Interpretácia adjungovaných premenných je v tomto prípade celkom zrejmá. $\psi_1(t)$ vyjadruje budúcu hodnotu (hodnotu v čase T) jedného eura držaného na bankovom účte v čase od t do T. $\psi_2(t)$ vyjadruje budúcu hodnotu jedného eura investovaného do cenných papierov v čase od t do T.
Prejdeme teraz k odvodeniu stratégie, ktorú by malo vedenie firmy stanoviť, aby maximalizovalo zisk, t.j. nájdeme také riadenie u, ktoré maximalizuje (1.5). Keďže v podmienke maxima vystupuje absolútna hodnota, nahradíme riadiacu premennú u rozdielom dvoch nezáporných premenných, ktoré zároveň spĺňajú kvadratické ohraničenie (1.15):

$$u = u_1 - u_2, \quad u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \tag{1.14}$$

$$u_1 u_2 = 0, \tag{1.15}$$

t.j. aspoň jedna z premenných u_1, u_2 je nulová. Pre riadenie u teda platí $u = u_1$, ak u_1 je kladné a $u = -u_2$, ak u_2 je kladné. S využitím vzťahov (1.14) a (1.15) môžme pre $|u|$ odvodiť nasledovný predpis:

$$|u| = u_1 + u_2 \tag{1.16}$$

Nahradili sme tak nelineárnu funkciu $|u|$ lineárnou funkciou s kvadratickým ohraničením. Dosadíme teraz odvodené vzťahy pre u a $|u|$ do ekvivalentnej podmienky maxima vychádzajúcej z podmienky maxima (1.5), ktorá vyzerá nasledovne:

$$\psi_1(u - \alpha|u|) - \psi_2 u \to \underset{u \in [-U_2, U_1]}{max} \tag{1.17}$$

Výraz na pravej strane (1.17) má tvar:

$$\psi_1(u_1 - u_2 - \alpha(u_1 + u_2)) - \psi_2(u_1 - u_2), \tag{1.18}$$

Ak tento výraz označíme W, potom po úprave máme

$$W = u_1[(1-\alpha)\psi_1 - \psi_2] - u_2[(1+\alpha)\psi_1 - \psi_2]. \tag{1.19}$$

Maximalizovať (1.5) vzhľadom na $u \in [-U_2, U_1]$ je ekvivalentné s tým, že maximalizujeme W vzhľadom na $u_1 \in [0, U_1], u_2 \in [0, U_2]$ a $u_1 u_2 = 0$. Riešenie podmienky maxima tak nadobúda takýto tvar:

$$u^*(t) = u_1^*(t) - u_2^*(t), \tag{1.20}$$

kde

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{ak } (1-\alpha)\psi_1(t) - \psi_2(t) < 0 \\ U_1, & \text{ak } (1-\alpha)\psi_1(t) - \psi_2(t) > 0 \\ \text{neurčené}, & \text{ak } (1-\alpha)\psi_1(t) - \psi_2(t) = 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

$$u_2^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{ak } -(1+\alpha)\psi_1 + \psi_2 < 0 \\ U_2, & \text{ak } -(1+\alpha)\psi_1 + \psi_2 > 0 \\ \text{neurčené,} & \text{ak } -(1+\alpha)\psi_1 + \psi_2 = 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

Všimnime si, že takto určené riadenie spĺňa (1.15). Naozaj, ak

$$(1-\alpha)\psi_1(t) \geq \psi_2(t),$$

potom aj

$$(1+\alpha)\psi_1(t) > \psi_2(t),$$

pretože zo vzťahu (1.12) vyplýva, že $\psi_1(t) > 0$. To znamená, že ak $u_1(t) > 0$, potom $u_2(t) = 0$. Obdobne, ak

$$(1+\alpha)\psi_1(t) \leq \psi_2(t),$$

potom aj

$$(1-\alpha)\psi_1(t) < \psi_2(t),$$

t.j. ak $u_2(t) > 0$, potom $u_1(t) = 0$.

Keďže funkcie $\psi_1(t)$ a $\psi_2(t)$ sú určené vzťahmi (1.12) a (1.13), možno ich vypočítať akonáhle sú známe funkcie $r_1(t)$ a $r_2(t)$. Pomocou funkcií $\psi_1(t)$ a $\psi_2(t)$ potom určíme $u_1^*(t)$ a $u_2^*(t)$ až na výnimočné prípady, kedy $\dfrac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} \equiv 1-\alpha$ resp. $\dfrac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} \equiv 1+\alpha$ na nejakých podintervaloch $[0, T]$.

Pretože $u_1(t)$ reprezentuje rýchlosť predaja cenných papierov v eurách, vzťah (1.21) dáva vedeniu firmy nasledovnú informáciu: predávať maximálnou rýchlosťou cenné papiere v prípade, že budúca hodnota jedného eura mínus obchodníkova odmena za sprostredkovaný predaj (resp. budúca hodnota z $(1-\alpha)$ eura) je väčšia ako budúca hodnota jedného eura investovaného do cenných papierov a nepredávať v opačnom prípade. V prípade, že budúca hodnota jedného eura ponížená o obchodníkovu maržu za sprostredkovanie predaja je rovnaká ako budúca hodnota jedného eura investovaného do cenných papierov, vedenie firmy je indiferentné v rozhodovaní. Obdobne $u_2(t)$ reprezentuje rýchlosť kupovania cenných papierov v eurách, a preto rozhodovacia stratégia je nasledovná: kupovať maximálnou rýchlosťou cenné papiere v prípade, že budúca hodnota jedného eura plus obchodníkova odmena za sprostredkovanú kúpu je menšia ako budúca hodnota jedného eura investovaného do cenných papierov a nekupovať v opačnom prípade.

1.1.4 Príklad

Nájdeme teraz optimálnu stratégiu predaja a nákupu cenných papierov s takýmito hodnotami vstupných parametrov: $x_1^0 = 2,\ x_2^0 = 2, U_1 = U_2 = 5,\ T = 1,\ \alpha = 0,01,\ r_1(t) = \frac{1}{2}\ r_2(t) = \frac{1}{3}$. Pre zjednodušenie budeme predpokladať, že $d(t) = 0, \forall t \in [0,1]$ Dostávame takúto úlohu optimálneho riadenia:

$$max \quad x_1(T) + x_2(T) \tag{1.23}$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{2}x_1(t) + u(t) - 0,01|u(t)| \tag{1.24}$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{3}x_2(t) - u(t) \tag{1.25}$$

$$x_1(0) = 2 \tag{1.26}$$

$$x_2(0) = 2 \tag{1.27}$$

$$-5 \leq u(t) \leq 5 \tag{1.28}$$

Formulácia podmienok PPM

(PM)

$$\psi_1(\frac{1}{2}x_1 + u - 0,01|u|) + \psi_2(\frac{1}{3}x_2 - u) \to \max_{u\in[-5,5]} \tag{1.29}$$

(AR)

$$\dot{\psi}_1(t) = -\frac{1}{2}\psi_1(t) \tag{1.30}$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\frac{1}{3}\psi_2(t) \tag{1.31}$$

(PT)

$$\psi_1(1) = 1 \tag{1.32}$$

$$\psi_2(1) = 1 \tag{1.33}$$

Riešením adjungovanej rovnice a podmienky transverzality je:

$$\psi_1(t) = e^{\frac{1}{2}(1-t)} \tag{1.34}$$

$$\psi_2(t) = e^{\frac{1}{3}(1-t)} \tag{1.35}$$

Optimálne riadenie na základe predchádzajúcich výpočtov bude vyzerať takto:

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{ak } (1-0,01)e^{\frac{1}{2}(1-t)} - e^{\frac{1}{3}(1-t)} < 0 \\ 5, & \text{ak } (1-0,01)e^{\frac{1}{2}(1-t)} - e^{\frac{1}{3}(1-t)} > 0 \end{cases} \tag{1.36}$$

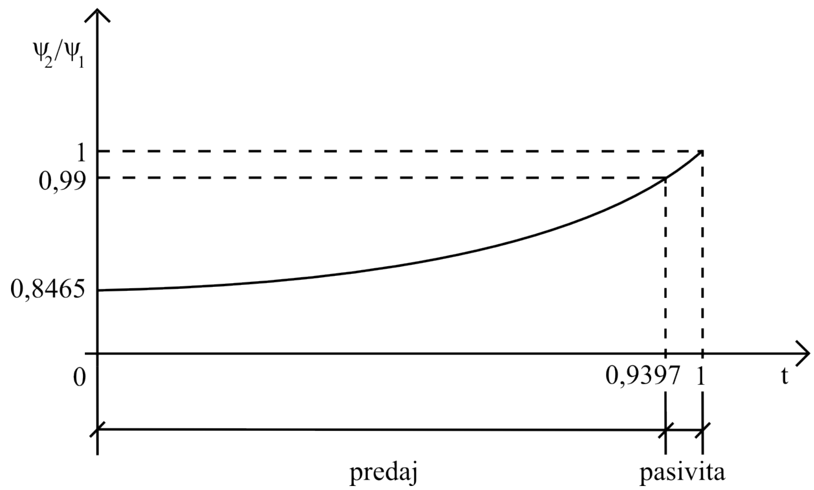
$$u_2^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{ak } -(1+0,01)e^{\frac{1}{2}(1-t)} + e^{\frac{1}{3}(1-t)} < 0 \\ 5, & \text{ak } -(1+0,01)e^{\frac{1}{2}(1-t)} + e^{\frac{1}{3}(1-t)} > 0 \end{cases} \tag{1.37}$$

Po úprave dostávame:

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{ak } t > 0,9397 \\ 5, & \text{ak } t < 0,9397 \end{cases} \tag{1.38}$$

$$u_2^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{ak } t < 1,0597 \\ 5, & \text{ak } t > 1,0597 \end{cases} \tag{1.39}$$

(Obr. 1.1) zachytáva, ako sa má firma správať (či nakupovať, predavát cenné papiere alebo ostať pasívnou), pričom tieto rozhodnutia vykonáva na základe podielu budúcich hodnôt cenných papierov a hotovosti.



Obr. 1.1: Optimálna stratégia vyjadrená v priestore $(t, \dfrac{\psi_2}{\psi_1})$

1.2 Obchodovanie s komoditami

Model Obchodovania s komoditami ako úloha optimálneho riadenia je sformulovaný v učebnom texte (Halická, 2009), ale len ako úloha v Mayerovom tvare, t.j. v účelovej funkcii vystupuje len funkcia koncového stavu. Z dôvodov uvedených v ďalšom texte sme tvar účelovej funkcie preformulovali pridaním integrálu. Rovnako ako v predchádzajúcej úlohe sa jedná o neautonómnu úlohu s pevným časom. Úloha je bez ohraničenia na koncový stav, teda ide o úlohu s voľným koncom, ohraničenú na riadenie.

$$max \int_0^T -u^2(t)dt + x_1(T) + p(T)x_2(T) \tag{1.40}$$

$$\dot{x}_1(t) = p(t)u(t) - sx_2(t) \tag{1.41}$$

$$\dot{x}_2(t) = -u(t) \tag{1.42}$$

$$x_1(0) = a_1 > 0 \tag{1.43}$$

$$x_2(0) = a_2 > 0 \tag{1.44}$$

$$u(t) \in [-1, 1] \tag{1.45}$$

T časový horizont (daná konštanta)

$x_1(t)$ množstvo hotovosti v eurách v čase t (stavová premenná)

$x_2(t)$ množstvo komodity v čase t (stavová premenná)

$p(t)$ cena komodity v čase t (daná funkcia)

$u(t)$ rýchlosť predávania, záporné hodnoty predstavujú nakupovanie (riadiaca premenná)

s cena v eurách za skladovanie jednotky danej komodity za jednotku času (daná konštanta, $s > 0$)

a_1 počiatočný stav hotovosti (daná konštanta, $a_1 > 0$)

a_2 počiatočné množstvo komodít (daná konštanta, $a_2 > 0$)

1.2.1 Interpretácia

Ako už bolo v úvode spomínané, model Obchodovanie s komoditami už bol v istom tvare sformulovaný v (Halická, 2009). Hlavná myšlienka spočívala v tom, že obchodníci nakupujú a znova predávajú komodity s cieľom získať profit. Aktivita obchodníkov (nakupovanie, predaj komodít resp. pasivita) závisí od ich schopnosti robiť presnú predpoveď budúcich cien komodít. Podstatou modelu bolo maximalizovať aktíva v koncovom čase, teda keď $t = T$, pričom aktíva v čase T pozostávajú z hotovosti, ktorou v čase T disponujeme a hodnotou komodít, ktoré v čase T vlastníme, t.j. snažíme sa maximalizovať $x_1(T) + p(T)x_2(T)$. Ako bolo ukázané v (Halická, 2009), pri takomto tvare účelovej funkcie vychádza za istých predpokladov optimálne akékoľvek riadenie. Predaj a nákup komodít by teda nebol nijak obmedzený. Preto sme sa rozhodli pôvodný model upraviť a zahrnúť do modelu aj akési transakčné náklady, ktoré nám pri obchodovaní vznikajú. Zmena oproti pôvodnej úlohe je teda v tvare účelovej funkcie a spočíva v tom, že náš zisk bude počas obdobia predávania a nakupovania ponížený o spomínané transakčné náklady. Začíname v čase $t = 0$, kedy vlastníme komodity o množstve a_2 a máme k dispozícii hotovosť vo výške a_1.

1.2.2 Formulácia podmienok PPM

Podmienky PPM pre túto úlohu formulujeme na základe (Halická, 2009), konkrétne z časti 4.6.

(PM)

$$\psi_0(-u^2) + \psi_1(pu - sx_2) - \psi_2 u \to \underset{u\in[-1,1]}{max} \tag{1.46}$$

(AR)

$$\dot{\psi}_1(t) = 0 \tag{1.47}$$

$$\dot{\psi}_2(t) = s\psi_1(t) \tag{1.48}$$

(PT)

$$\psi_1(T) = \psi_0 \tag{1.49}$$

$$\psi_2(T) = p(T)\psi_0 \tag{1.50}$$

1.2.3 Riešenie

Zistíme najskôr, aké môže byť ψ_0. Keďže sa jedná o úlohu na maximum, zrejme $\psi_0 \geq 0$. Ak predpokladáme, že $\psi_0 = 0$, potom by bolo podľa podmienky transverzality aj $\psi_1(T) = 0$ a $\psi_2(T) = 0$, čo je spor s tým, že $(\psi_0, \psi_1, \psi_2) \neq (0, 0, 0)$ a teda $\psi_0 = 1$. Podmienka maxima (1.46) je ekvivalentná s podmienkou:

$$-u^2 + u(\psi_1 p - \psi_2) \to \underset{u\in[-1,1]}{max}, \tag{1.51}$$

kde hľadáme maximum konkávnej funkcie na uzavretom intervale $[-1, 1]$. Riešením (1.51) je

$$u = \begin{cases} -1 & \text{, ak } \dfrac{\psi_1 p - \psi_2}{2} < -1 \\ 1 & \text{, ak } \dfrac{\psi_1 p - \psi_2}{2} > 1 \\ \dfrac{\psi_1 p - \psi_2}{2} & \text{, ak } \dfrac{\psi_1 p - \psi_2}{2} \in [-1, 1]. \end{cases} \tag{1.52}$$

Podmienku transverzality môžeme po položení $\psi_0 = 1$ prepísať nasledovne:
(PT)

$$\psi_1(T) = 1 \tag{1.53}$$

$$\psi_2(T) = p(T) \tag{1.54}$$

Všeobecným riešením adjungovanej rovnice pre ψ_1 je

$$\psi_1(t) = A, \tag{1.55}$$

kde A je konštanta. Využitím podmienky transverzality (1.53) dostávame

$$\psi_1(t) \equiv 1 \tag{1.56}$$

Všeobecným riešením adjungovanej rovnice (1.48) pre ψ_2, po využití informácie z rovnice (1.56) dostávame

$$\psi_2(t) = st + B, \tag{1.57}$$

kde B je konštanta. Z podmienky transverzality (1.54) pre ψ_2 vieme určiť, čomu je rovná konštanta B, a teda dostávame pre $\psi_2(t)$ nasledovný predpis

$$\psi_2(t) = p(T) + s(t - T). \tag{1.58}$$

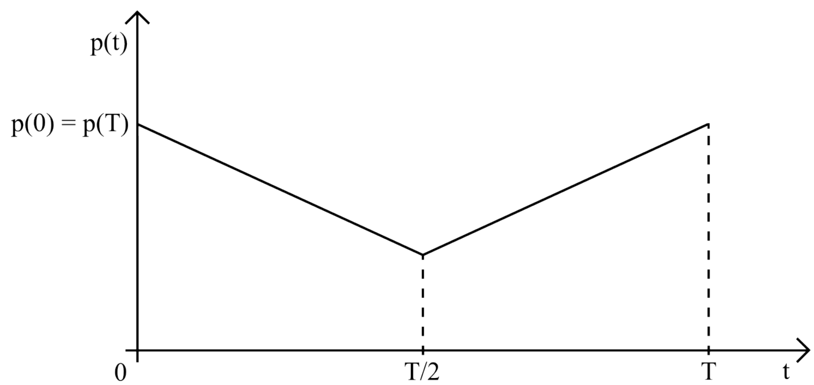
Po dosadení adjungovanej funkcie do (1.52) dostaneme pre riadenie u(t) tieto možnosti:

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{, ak } \dfrac{p(t) - p(T) - s(t-T)}{2} < -1 \\ 1 & \text{, ak } \dfrac{p(t) - p(T) - s(t-T)}{2} > 1 \\ \dfrac{p(t) - p(T) - s(t-T)}{2} & \text{, ak } \dfrac{p(t) - p(T) - s(t-T)}{2} \in [-1, 1] \end{cases} \tag{1.59}$$

a teda pokiaľ poznáme priebeh cenovej funkcie $p(t)$, vieme určiť riadenie. Nech je napríklad cenová funkcia daná nasledovným predpisom:

$$p(t) = \begin{cases} p_0 - p_1 t & , \text{ak } t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right] \\ p_0 + p_1(t-T) & , \text{ak } t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right] \end{cases}, \tag{1.60}$$

kde $p_0, p_1 > 0$. To znamená, že na prvej polovici uvažovaného obdobia najprv cena klesá rýchlosťou p_1 a na druhej polovici rastie tou istou rýchlosťou, v dôsledku čoho $p(0) = p(T)$.



Obr. 1.2: Cenová funkcia

Definujme teraz pomocnú funkciu $v(t)$ nasledovne:

$$v(t) := \frac{p(t) - p(T) - s(t-T)}{2}. \tag{1.61}$$

Je to spojitá funkcia, ktorá vstupuje do vzťahov (1.59). V závislosti od toho, aké hodnoty bude nadobúdať, vieme určiť hodnotu riadenia. Funkcia $v(t)$ pre priebeh cenovej funkcie popísanej rovnicou (1.60) nadobúda takýto tvar:

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{sT - t(p_1 + s)}{2} & , \text{ak } t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right] \\ \dfrac{t(p_1 - s) - T(p_1 - s)}{2} & , \text{ak } t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right] \end{cases}, \tag{1.62}$$

pričom $v(0) = \dfrac{sT}{2}, v(T) = 0$. To znamená, že spojitá funkcia $v(t)$ v čase $t = 0$ nadobúda kladné hodnoty (lebo $s > 0$) a v čase $t = T$ je rovná nule. Na intervale $\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$ funkcia $v(t)$ klesá s časom t. Na intervale $\left[\dfrac{T}{2}, T\right]$ závisí jej správanie od znamienka výrazu $p_1 - s$. Budeme teda rozlišovať tri možnosti, a to keď $p_1 < s, p_1 > s, p_1 = s$.

Prípad $p_1 < s$:

Pri takejto voľbe parametrov p_1 a s bude funkcia $v(t)$ klesať s časom aj na intervale $\left[\dfrac{T}{2}, T\right]$ a keďže $v(T) = 0$, tak $v(t) > 0$ na celom intervale $[0, T]$. To znamená, že riadenie bude takisto vždy väčšie ako nula, a teda komodity sa budú iba predávať. Veľkosť riadenia resp. rýchlosť predávania komodít je v tomto prípade ešte ovplyvnená tým, či hodnota funkcie $v(t)$ je v čase $t = 0$ väčšia alebo menšia ako 1.

a) Ak $v(0) = \dfrac{sT}{2} \leq 1$, potom funkcia $v(t) \in [0, 1]$ a jej priebeh ilustruje (Obr. 1.3).

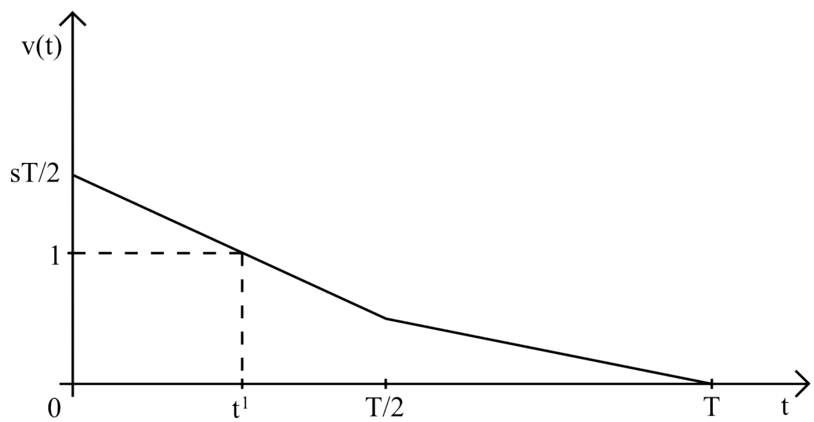
Obr. 1.3: $\dfrac{sT}{2} \leq 1, p_1 < s$

Riadenie bude potom dané týmto predpisom:

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{sT - t(p_1 + s)}{2} & , \text{ak } t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right] \\ \dfrac{t(p_1 - s) - T(p_1 - s)}{2} & , \text{ak } t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right]. \end{cases} \tag{1.63}$$

b) Ak $v(0) = \dfrac{sT}{2} > 1$, potom existuje také $t^1 \in [0, T]$, že $v(t^1) = 1$

- Ak $t^1 \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$, tak $\dfrac{sT - t^1(p_1 + s)}{2} = 1$ a teda $t^1 = \dfrac{sT - 2}{p_1 + s}$.

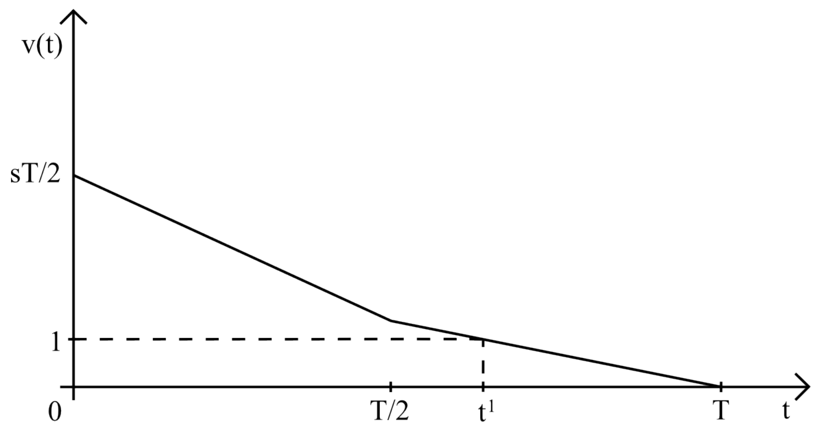


Obr. 1.4: $\dfrac{sT}{2} > 1, p_1 < s, t^1 \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right]$

Pre riadenie potom dostávame:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ak } t \in [0, t^1] \\ \dfrac{sT - t(p_1 + s)}{2} & , \text{ak } t \in \left[t^1, \dfrac{T}{2}\right] \\ \dfrac{t(p_1 - s) - T(p_1 - s)}{2} & , \text{ak } t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right]. \end{cases} \tag{1.64}$$

- Ak $t^1 \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right]$, tak funkcia $v(t)$ musí byť v čase $\dfrac{T}{2}$ väčšia ako 1 (viď



Obr. 1.5: $\dfrac{sT}{2} > 1, p_1 < s, t^1 \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right]$

Obr. 1.5), t.j.

$$v\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{sT - \dfrac{T}{2}(p_1 + s)}{2} > 1.$$

Z toho dostávame, že

$$T(s - p_1) > 4,$$

čo pri voľbe parametrov $p_1, s, T > 0$ môže nastať, keďže uvažujeme situáciu keď $p_1 < s$. Riadenie vyzerá potom nasledovne:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ak } t \in [0, t^1] \\ \dfrac{t(p_1 - s) - T(p_1 - s)}{2} & , \text{ak } t \in [t^1, T] \end{cases} \tag{1.65}$$

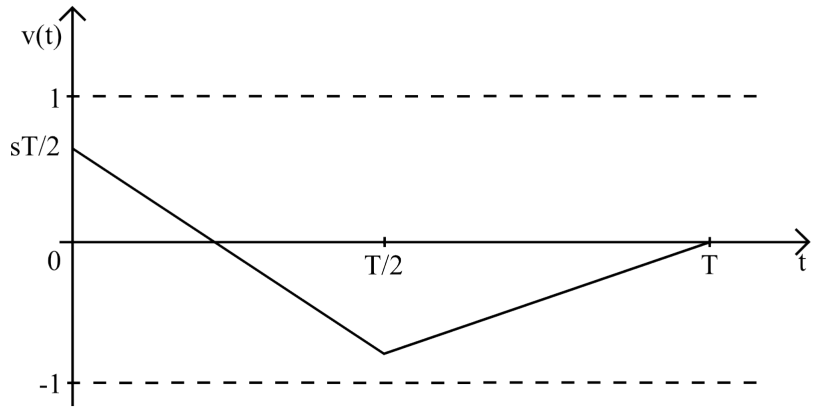
pričom $t^1 = \dfrac{2}{p_1 - s} + T$.

Prípad $p_1 > s$:

V tomto prípade $v(t)$ klesá na intervale $\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$ a na intervale $\left[\dfrac{T}{2}, T\right]$ rastie do nuly. Opäť rozlíšime prípapdy, keď $v(0) \leq 1$ a $v(0) > 1$.

a) Ak $v(0) = \dfrac{sT}{2} \leq 1$, potom môžu nastať dve možnosti:

- Buď celá funkcia $v(t)$ bude ležať v intervale $[-1, 1]$ ako ilustruje (Obr. 1.6)



Obr. 1.6: $\dfrac{sT}{2} \leq 1, p_1 > s, T(s - p_1) \geq -4$

Vtedy je riadenie nasledovné:

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{sT - t(p_1 + s)}{2} & , \text{ak } t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right] \\ \dfrac{t(p_1 - s) - T(p_1 - s)}{2} & , \text{ak } t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right] \end{cases}, \tag{1.66}$$

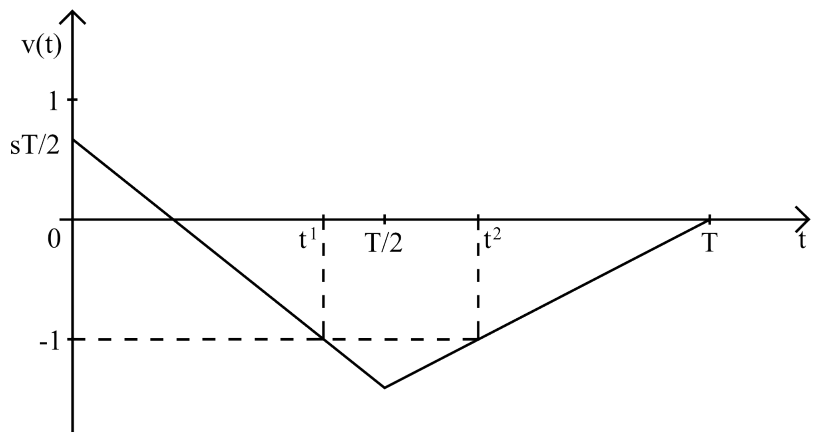
zároveň musí pre $v(t)$ platiť, že jej hodnota v čase $\dfrac{T}{2}$ je väčšia nanajvýš rovná mínus jednej:

$$v\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{sT - \frac{T}{2}(p_1 + s)}{2} \geq -1.$$

Z toho dostávame, že

$$T(s - p_1) \geq -4.$$

- Ďalšiu situáciu popisuje (Obr. 1.7).



Obr. 1.7: $\dfrac{sT}{2} \leq 1, p_1 > s, T(s - p_1) < -4$

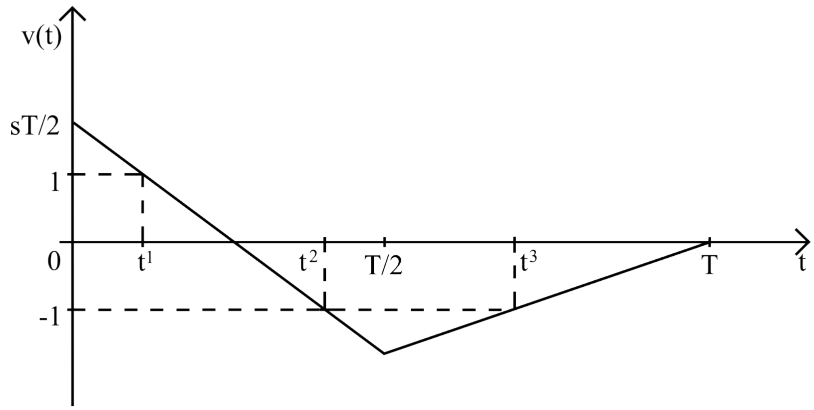
Riadenie má potom takýto tvar:

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{sT - t(p_1 + s)}{2} & \text{, ak } t \in [0, t^1] \\ -1 & \text{, ak } t \in [t^1, t^2] \\ \dfrac{t(p_1 - s) - T(p_1 - s)}{2} & \text{, ak } t \in [t^2, T], \end{cases} \tag{1.67}$$

pričom $t^1 = \dfrac{sT + 2}{p_1 + s}, t_2 = \dfrac{-2}{p_1 - s} + T.$

b) Ak $v(0) = \dfrac{sT}{2} > 1$, potom opäť na základe hodnoty výrazu $T(s - p_1)$ môžu nastať dve situácie:

- Ak je hodnota funkcie $v\left(\dfrac{T}{2}\right) < -1$, potom má $v(t)$ takýto priebeh:



Obr. 1.8: $\dfrac{sT}{2} > 1, p_1 > s, T(s-p_1) < -4$

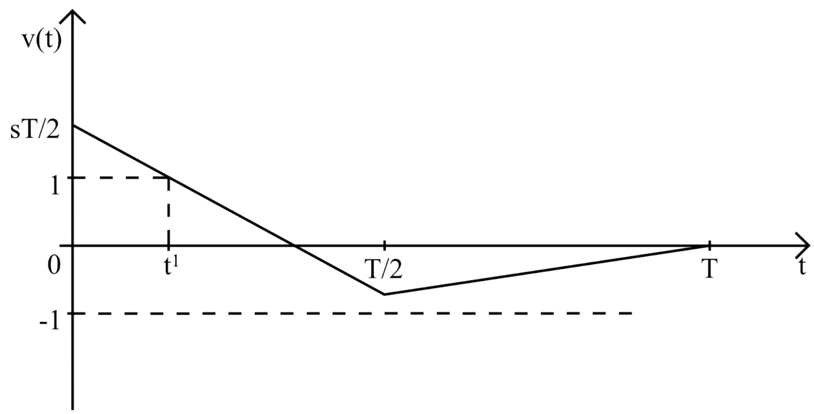
a pre riadenie platí:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{, ak } t \in [0, t^1] \\ \dfrac{sT - t(p_1 + s)}{2} & \text{, ak } t \in [t^1, t^2] \\ -1 & \text{, ak } t \in [t^2, t^3] \\ \dfrac{t(p_1 - s) - T(p_1 - s)}{2} & \text{, ak } t \in [t^3, T], \end{cases} \tag{1.68}$$

pričom $t^1 = \dfrac{sT-2}{p_1+s},\ t^2 = \dfrac{sT+2}{p_1+s},\ t^3 = \dfrac{-2}{p_1-s} + T.$

- V prípade platnosti opačnej podmienky, a teda $v\left(\dfrac{T}{2}\right) \geq -1$ je optimálne riadenie nasledovné:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{, ak } t \in [0, t^1] \\ \dfrac{sT - t(p_1 + s)}{2} & \text{, ak } t \in \left[t^1, \dfrac{T}{2}\right] \\ \dfrac{t(p_1 - s) - T(p_1 - s)}{2} & \text{, ak } t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right] \end{cases} \tag{1.69}$$



Obr. 1.9: $\dfrac{sT}{2} > 1, p_1 > s, T(s-p_1) \geq -4$

Prípad $p_1 = s$:

Pri takejto voľbe parametrov p_1 a s sa pôvodná pomocná funkcia $v(t)$ zmení, a to nasledovným spôsobom:

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{sT-2st}{2} & \text{, ak } t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{, ak } t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right]. \end{cases} \tag{1.70}$$

To znamená, že na intervale $\left[0, \dfrac{T}{2}\right]$ bude $v(t)$ s časom klesať a na intervale $\left[\dfrac{T}{2}, T\right]$ bude jej hodnota nulová. V závislosti od hodnoty výrazu $\dfrac{sT}{2}$ môžeme teda opäť rozlíšiť dve situácie:

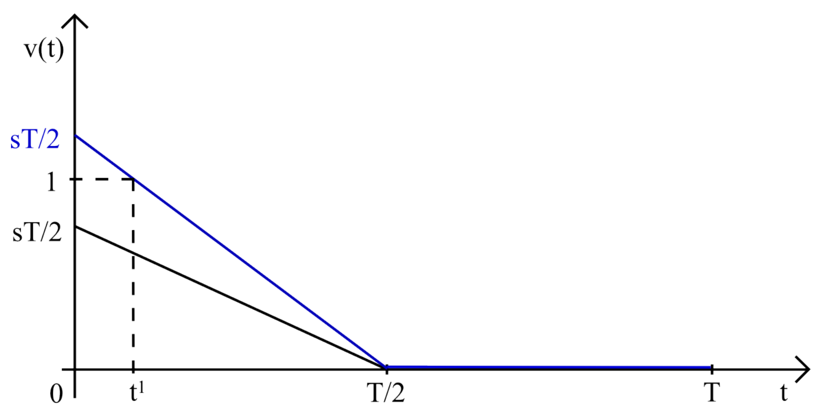
a) Ak $v(0) = \dfrac{sT}{2} \leq 1$, potom je riadenie dané takto:

$$u(t) = \begin{cases} \dfrac{sT-t(p_1+s)}{2} & \text{, ak } t \in \left[0, \dfrac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{, ak } t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right]. \end{cases} \tag{1.71}$$

b) V prípade, že $v(0) = \dfrac{sT}{2} > 1$ sa riadenie zmení:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{, ak } t \in [0, t^1] \\ \dfrac{sT - t(p_1 + s)}{2} & \text{, ak } t \in \left[t^1, \dfrac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{, ak } t \in \left[\dfrac{T}{2}, T\right], \end{cases} \tag{1.72}$$

kde $t^1 = \dfrac{sT - 2}{p_1 + s}$. Graficky je priebeh riadení znázornený na (Obr. 1.10), pričom čierna čiara predstavuje prípad a) a modrá prípad b).



Obr. 1.10: $p_1 = s$

Kapitola 2

Úlohy s diskontným faktorom

V Kapitole 2 sa budeme zaoberať dvoma modelmi, ktoré v teórii optimálneho riadenia klasifikujeme ako diskontované úlohy s pevným časom. V obidvoch prípadoch ide o neautonómnu úlohu, kde neautonómnosť spôsobuje iba diskontný faktor v účelovej funkcii.

2.1 Systém efektívneho využitia zásob a produkcie

Model Systém efektívneho využitia zásob a produkcie a jeho riešenie vychádza z (Sethi and Thompson, 2000). Úloha je bez ohraničenia na koncový stav, teda ide o úlohu s voľným koncom, ohraničenú na riadenie.

$$min \int_0^T e^{-\rho t} \left[\frac{h}{2}(x(t) - \hat{x})^2 + \frac{c}{2}(u(t) - \hat{u})^2 \right] dt \tag{2.1}$$

$$\dot{x}(t) = u(t) - s(t) \tag{2.2}$$

$$x(0) = x_0 \tag{2.3}$$

$$u(t) \geq 0 \tag{2.4}$$

T časový horizont (daná konštanta)

$x(t)$ stav zásob v čase t (stavová premenná)

$u(t)$ rýchlosť produkcie v čase t (riadiaca premenná)

$s(t)$ rýchlosť predaja v čase t (daná funkcia)

$\hat{x}$ cieľový stav zásob; poistná zásoba, ktorú chce mať firma k dispozícii (jej hodnota môže byť získaná ako mesačný priemer predaných tovarov) (daná kladná konštanta)

$\hat{u}$ cieľová úroveň produkcie; znamená najefektívnejšiu rýchlosť produkcie (daná kladná konštanta)

$e^{-\rho t}$ diskontný faktor, kde $\rho \geq 0$ je diskontná úroková miera

h koeficient nákladov spojených s držaním zásob (daná konštanta $h > 0$)

c koeficient nákladov na produkciu (daná konštanta $c \geq 0$)

x_0 počiatočný stav zásob (daná konštanta $x_0 \geq 0$)

2.1.1 Interpretácia

Mnoho výrobných podnikov používa systém efektívneho využívania zásob a produkcie, aby dokázali pružne reagovať na prípadnú zmenu dopytu svojich zákazníkov po ich produkte. Tento systém pozostáva z výrobného závodu a skladu, kde sa produkty vyrobené spoločnosťou uložia a čakajú na svoj predaj. Podniku však v súvislosti s takouto výrobou na sklad vznikajú náklady. Či už sú to náklady na fyzické uskladnenie produktov (teda platenie prenajatých priestorov) alebo sa jedná o náklady stratenej príležitosti, ktoré mohla firma namiesto vyrobenia produktu investovať do cenných papierov. Daný systém má aj svoje výhody. Firma je okamžite schopná pokryť požiadavky odberateľa, v prípade malého dopytu si tak vytvára istú rezervu, ktorú potom môže využiť v prípade náhleho zvýšenia dopytu. Interpretácia účelovej funkcie spočíva v tom, že sa snažíme udržať stav zásob najbližšie ako je to možné k cieľovému stavu $\hat{x}$ a to isté platí o produkcii, t.j, snažíme sa o to, aby výroba bola čo najefektívnejšia. Kvadratický zápis $\frac{h}{2}(x(t)-\hat{x})^2+\frac{c}{2}(u(t)-\hat{u})^2$ vyjadruje pokutu za to, keď x a u nie sú dostatočne blízko svojim cieľovým hodnotám a túto pokutu sa snažíme minimalizovať.

2.1.2 Formulácia podmienok PPM

Pri formulácii podmienok PPM sme využili skutočnosť, že minimalizovať nejakú funkciu je ekvivalentné s tým, že maximalizujeme mínusovú hodnotu danej funkcie. A teda naša účelová funkcia bude vyzerať nasledovne:

$$max \int_0^T -e^{-\rho t}\left[\frac{h}{2}(x(t)-\hat{x})^2+\frac{c}{2}(u(t)-\hat{u})^2\right]dt \tag{2.5}$$

Podmienky PPM formulujeme podľa 4.3.1. (Halická, 2009) nasledovne:

(PM)

$$-e^{-\rho t}\left[\frac{h}{2}(x-\hat{x})^2+\frac{c}{2}(u-\hat{u})^2\right]\psi_0+(u-s)\psi \to \underset{u\geq 0}{max} \tag{2.6}$$

(AR)

$$\dot{\psi}(t)=e^{-\rho t}h(x-\hat{x})\psi_0 \tag{2.7}$$

(PT)

$$\psi(T)=0 \tag{2.8}$$

Vidíme, že neautonómnosť úlohy sa preniesla aj do podmienok PPM, čo možno odstrániť prenásobením vzťahov výrazom $e^{\rho t}$ a zavedením substitúcie: $\tilde{\psi}=e^{\rho t}\psi \Rightarrow \dot{\tilde{\psi}}=\rho e^{\rho t}\psi+e^{\rho t}\dot{\psi}$, a z pôvodných podmienok dostávame:

$(\tilde{PM})$

$$-\left[\frac{h}{2}(x-\hat{x})^2+\frac{c}{2}(u-\hat{u})^2\right]\psi_0+(u-s)\tilde{\psi}\to \max_{u\geq 0} \tag{2.9}$$

$(\tilde{AR})$

$$\dot{\tilde{\psi}}(t)=\rho\tilde{\psi}+h(x-\hat{x})\psi_0 \tag{2.10}$$

$(\tilde{PT})$

$$\tilde{\psi}(T)=0 \tag{2.11}$$

Na základe Vety 4 (Halická, 2009) budeme v ďalšom texte vychádzať z podmienok PPM, kde už je neautonómnosť odstránená, pričom pre jednoduchosť všetky $\tilde{\psi}$ resp. $\dot{\tilde{\psi}}$ nahradíme ψ resp. $\dot{\psi}$.

2.1.3 Riešenie

Úlohu máme teraz preformulovanú tak, že účelovú funkciu maximalizujeme, a teda $\psi_0 \geq 0$. Podľa podmienky transverzality je $\psi(T) = 0$, a pretože $(\psi_0, \psi(t)) \neq 0$, tak z toho vyplýva, že $\psi_0 \neq 0$. Vo všetkých rovniciach, v ktorých vystupuje ψ_0 preto dosadzujeme $\psi_0 = 1$. Riešením podmienky maxima, bez ohraničenia na u, dostávame pre u takýto predpis:

$$u=\hat{u}+\frac{\psi}{c}, \tag{2.12}$$

a keďže pri formulácii úlohy sme uvádzali, že u je nezáporné, optimálne riadenie je v tvare:

$$u^*=max\left\{\hat{u}+\frac{\psi}{c},0\right\}. \tag{2.13}$$

Najskôr budeme predpokladať, že $\hat{u}$ je dostatočne veľké, a teda vzťah (2.12) nám vždy dáva nezápornú úroveň produkcie. Dosadíme teraz (2.12) do (2.2). Dostaneme:

$$\dot{x} = \hat{u} + \frac{\psi}{c} - s \tag{2.14}$$

V ďalších výpočtoch budeme vychádzať zo vzťahu (2.14) a adjungovanej rovnice (2.10). Deriváciou (2.14) podľa času dostaneme:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = \frac{\dot{\psi}}{c} - \dot{s} &= \rho\left(\frac{\psi}{c}\right) + \left(\frac{h}{c}\right)(x - \hat{x}) - \dot{s} \\ &= \rho(\dot{x} - \hat{u} + s) + \left(\frac{h}{c}\right)(x - \hat{x}) - \dot{s} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Prepisom dostávame:

$$\ddot{x} - \rho\dot{x} - \alpha^2 x = -\alpha^2\hat{x} - \dot{s} - \rho(\hat{u} - s), \tag{2.16}$$

kde konštanta α je daná ako

$$\alpha = \sqrt{\frac{h}{c}}. \tag{2.17}$$

Riešime teda diferenciálnu rovnicu (2.16), pre ktorú pomocná (homogénna) rovnica vyzerá nasledovne:

$$\lambda^2 - \rho\lambda - \alpha^2 = 0 \tag{2.18}$$

a λ_1, λ_2 sú jej reálne korene:

$$\lambda_1 = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 4\alpha^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\alpha^2}}{2} \tag{2.19}$$

pričom $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Všeobecné riešenie (2.16) je potom:

$$x(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} + Q(t), \tag{2.20}$$

pričom $Q(t)$ je partikulárne riešenie z (2.16) a a_1, a_2 sú konštanty, ktoré dopočítame jednak zo začiatočnej podmienky pre $x(0)$ a jednak z koncovej podmienky pre $\psi(T)$. Na to budeme ešte potrebovať odvodiť predpis pre adjungovanú premennú, a to dosiahneme tak, že (2.20) dosadíme do (2.14), pričom dostávame:

$$\psi(t) = c(\lambda_1 a_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 a_2 e^{\lambda_2 t} + \dot{Q} + s - \hat{u}). \tag{2.21}$$

Teraz prejdeme k samotnému dopočítaniu konštánt a_1, a_2:

$$x(0) = x_0 = a_1 + a_2 + Q(0) \tag{2.22}$$

$$\psi(T) = 0 = c(\lambda_1 a_1 e^{\lambda_1 T} + \lambda_2 a_2 e^{\lambda_2 T} + \dot{Q}(T) + s(T) - \hat{u}). \tag{2.23}$$

Označíme

$$b_1 = x_0 - Q(0) \quad \Rightarrow \quad a_1 = b_1 - a_2, \tag{2.24}$$

$$b_2 = \hat{u} - \dot{Q}(T) - s(T) \quad \Rightarrow \quad b_2 = \lambda_1(b_1 - a_2)e^{\lambda_1 T} + \lambda_2 a_2 e^{\lambda_2 T}, \tag{2.25}$$

Teraz už nie je ťažké dorátať, že:

$$a_1 = \frac{b_2 e^{\lambda_1 T} - b_1 \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)T}}{\lambda_1 e^{2\lambda_1 T} - \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)T}} \tag{2.26}$$

$$a_2 = \frac{b_1 \lambda_1 e^{2\lambda_1 T} - b_2 e^{\lambda_1 T}}{\lambda_1 e^{2\lambda_1 T} - \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)T}}. \tag{2.27}$$

Keď teraz využijeme, že $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, potom pre T dostatočne veľké sú $e^{\lambda_1 T}$ a $e^{2\lambda_1 T}$ zanedbateľné hodnoty a preto:

$$a_1 \approx b_1 \tag{2.28}$$

$$a_2 \approx \frac{b_2}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 T}. \tag{2.29}$$

Teraz už môžme hodnoty a_1, a_2 dosadiť do stavovej, riadiacej aj adjungovanej premennej:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= b_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{b_2}{\lambda_2} e^{\lambda_2(t-T)} + Q(t), \\ u^*(t) &= \lambda_1 b_1 e^{\lambda_1 t} + b_2 e^{\lambda_2(t-T)} + \dot{Q}(t) + s(t), \\ \psi^*(t) &= c(\lambda_1 b_1 e^{\lambda_1 t} + b_2 e^{\lambda_2(t-T)} + \dot{Q}(t) + s(t) - \hat{u}), \end{aligned} \tag{2.30}$$

čím sme dostali približné riešenie úlohy. Vychádzali sme pritom z predpokladu, že úroveň produkcie je nezáporná počas celého obdobia.

Pozrieme sa teraz, ako riešenie úlohy ovplyvní skutočnosť, že produkčné ohraničenie je v tvare $u \geq 0$ (doteraz sme za optimálne rozhodovacie kritérium uvažovali vzťah (2.12), teraz budeme vychádzať z (2.13)). Pre zjednodušenie tejto analýzy budeme predpokladať, že s je kladná konštanta, z čoho vyplýva, že aj Q je konštanta, $T = \infty$ a $\rho > 0$. Ďalej predpokladáme, že na túto úlohu možno použiť limitnú verziu podmienky transverzality. Vďaka týmto predpokladom, riadenie, tak ako je uvedené v (2.30), mení svoj tvar, a to nasledovne:

$$u(t) = \lambda_1 b_1 e^{\lambda_1 t} + s = \lambda_1 (x_0 - Q) e^{\lambda_1 t} + s \tag{2.31}$$

pretože $\dot{Q} = 0$ a $b_2 e^{\lambda_2 (t-T)}$ je pre $T \to \infty$ blízke nule. Ak je $x_0 \leq Q$, potom dostávame opäť nezápornosť produkcie ($\lambda_1 < 0$). Zápornosť riadenia môže byť teda spôsobená vtedy, ak $x_0 > Q$. Vidíme, že vtedy $u(t)$ rastie s časom a

$$u(0) = \lambda_1 (x_0 - Q) + s. \tag{2.32}$$

To znamená, že $u(0)$ je záporné ak $x_0 - Q > \dfrac{-s}{\lambda_1}$, čo nie je možné a podľa (2.13) je $u^*(0) = 0$. Danú situáciu ilustruje (Obr. 2.1). $\hat{t}$ je čas, v ktorom $\hat{u} + \dfrac{\psi(\hat{t})}{c} = 0$. Po dosadení $\hat{t}$ do (2.31) dostávame:

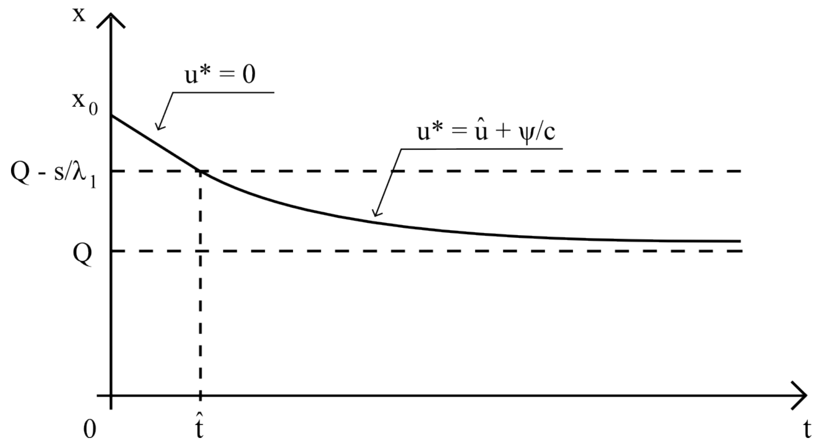
$$u(\hat{t}) = \lambda_1 b_1 e^{\lambda_1 \hat{t}} + s = 0, \tag{2.33}$$

a teda

$$b_1 e^{\lambda_1 \hat{t}} = -\frac{s}{\lambda_1}. \tag{2.34}$$

Pre $x(\hat{t})$ tak dostávame (dosadením do (2.30)):

$$x(\hat{t}) = b_1 e^{\lambda_1 \hat{t}} + Q = -\frac{s}{\lambda_1} + Q \tag{2.35}$$



Obr. 2.1: Optimálna úroveň produkcie a zásob

Pre $t < \hat{t}$ teda dostávame:

$$\dot{x}(t) = -s \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 - st \tag{2.36}$$

$$\dot{\psi}(t) = \rho\psi(t) + h(x(t) - \hat{x}), \quad \psi(\hat{t}) = -c\hat{u} \tag{2.37}$$

Pre $t > \hat{t}$ platia vzťahy dané (2.30), pričom t nahradíme $(t - \hat{t})$ a $b_1 = x(\hat{t}) - Q = -\dfrac{s}{\lambda_1}$

Dopočítame ešte čas $\hat{t}$, v ktorom dochádza k zmene optimálneho riadenia $(0 \to \hat{u} + \dfrac{\psi}{c})$:

$$x_0 - s\hat{t} = Q - \frac{s}{\lambda_1} \quad \Rightarrow \quad \hat{t} = \frac{x_0 - Q}{s} + \frac{1}{\lambda_1} \tag{2.38}$$

2.1.4 Príklad

Vyriešime teraz daný model s konkrétnymi parametrami: $\hat{u} = 20$, $\hat{x} = 10$, $x_0 = 10$, $T = 8$, $\rho = 0$, $h = c = 1 \;\Rightarrow\; \alpha = 1$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ a funkcia predaja nech má takýto priebeh:

$$s(t) = t(t-4)(t-8) + 30 = t^3 - 12t^2 + 32t + 30. \tag{2.39}$$

Riešenie:

Vypočítame najskôr predpis pre Q. Dosadením zadaných parametrov do (2.16) dostávame:

$$\ddot{x} - x = -3t^2 + 24t - 42 \tag{2.40}$$

Partikulárne riešenie nehomogénnej rovnice hľadáme v tvare:

$$Q(t) = c_1 t^2 + c_2 t + c_3, \tag{2.41}$$

pričom jeho prvá a druhá derivácia vyzerajú nasledovne:

$$\dot{Q}(t) = 2c_1 t + c_2 \tag{2.42}$$

$$\ddot{Q}(t) = 2c_1. \tag{2.43}$$

Dosadením do diferenciálnej rovnice:

$$\ddot{x} - x = 2c_1 - (c_1 t^2 + c_2 t + c_3) = -3t^2 + 24t - 42 \tag{2.44}$$

$$c_1 = 3,\ c_2 = -24,\ c_3 = 48 \tag{2.45}$$

Hľadaným partikulárnym riešením rovnice (2.40) je teda:

$$Q(t) = 3t^2 - 24t + 48 \quad \text{a} \quad \dot{Q}(t) = 6t - 24. \tag{2.46}$$

Ďalej potrebujeme poznať hodnotu parametrov b_1, b_2. Dosadením do (2.24) a (2.25) dostávame:

$$b_1 = x_0 - Q(0) = 10 - 48 = -38$$

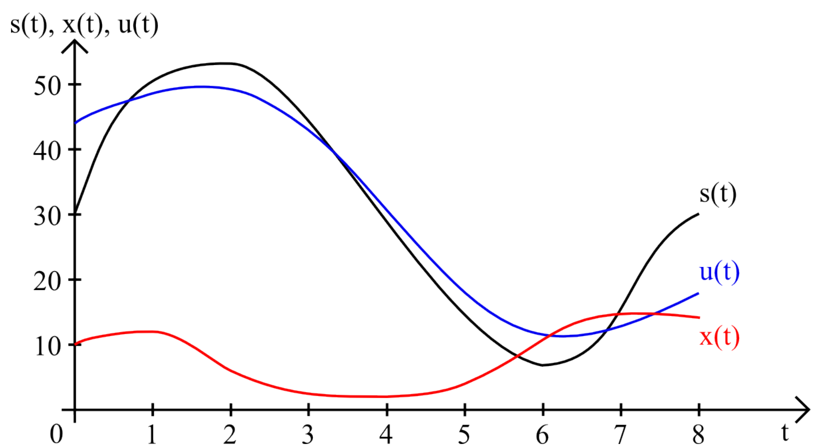
$$b_2 = \hat{u} - \dot{Q}(8) - s(8) = 20 - 24 - 30 = -34$$

Výsledok je potom nasledovný (dosadením do (2.30)):

$$x(t) = -38e^{-t} - 34e^{t-8} + Q(t) \tag{2.47}$$

$$u(t) = 38e^{-t} - 34e^{t-8} + \dot{Q}(t) + s(t) \tag{2.48}$$

Približný priebeh $s(t), x(t)$ a $u(t)$ je na (Obr. 2.2). Ako vidieť z obrázkov, $u(t)$ vypočítané na základe (2.12) je stále kladné, a teda $u(t) = u^*(t)$ spĺňa (2.13) a je riešením PPM.



Obr. 2.2: Približný priebeh funkcií $s(t), u(t), x(t)$

2.2 Nerlove - Arrow reklamný model

Tento model je modifikáciou tzv. Nerlove - Arrow reklamného modelu a vychádza z (Sethi and Thompson, 2000). Modifikácia spočíva zmene ohraničenia riadiacej premennej, kde sme zaviedli horné ohraničenie na riadenie. Takisto pôvodná úloha bola úlohou s voľným časom. Úloha je bez ohraničenia na koncový stav, teda ide o úlohu s voľným koncom, ohraničenú na riadenie. Táto úloha je od predchádzajúcej špecifická tým, že sa jedná o úlohu na singulárne riadenie.

$$max \int_0^T e^{-\rho t}[\pi(x(t)) - u(t)]dt \tag{2.49}$$

$$\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t) \tag{2.50}$$

$$x(0) = x_0 \tag{2.51}$$

$$0 \leq u(t) \leq U \tag{2.52}$$

T	časový horizont (daná konštanta)
$x(t)$	určuje, ako dobre je produkt známy na trhu (zásoba goodwill-u = dobrého mena) (stavová premenná)
$u(t)$	náklady vynaložené na budovanie goodwill-u, merané v eurách za jadnotku času (riadiaca premenná)
δ	miera zabúdania (daná konštanta)
$e^{-\rho t}$	diskontný faktor, kde $\rho > 0$ je diskontná úroková miera
U	daná kladná konštanta
π	funkcia zisku (daná funkcia)

O funkcii π predpokladáme: $\pi \in C^2, \pi(0) = 0$, $\pi'(x) > 0$, $\pi''(x) < 0$, $lim_{x\to 0}\pi'(x) = \infty$, $lim_{x\to\infty}\pi'(x) = 0$.

2.2.1 Interpretácia

Nerlove - Arrow reklamný model vychádza z predpokladu, že firma investujúca časť svojich zdrojov do reklamy si týmto zvyšuje súčasný a budúci predaj svojich produktov a s tým súvisiaci súčasný a budúci čistý zisk. Investíciu do reklamy chápe ako investíciu do akéhosi reklamného kapitálu, zvyčajne nazývaného goodwill - dobré meno spoločnosti. Zmena goodwill-u môže byť spôsobená tým, že firma priláka svojou reklamou, službami nových zákazníkov alebo naopak vplyvom konkurenčných bojov stratí časť svojich zákazníkov, ktorí prechádzajú k iným spoločnostiam. Zároveň zmena goodwill-u môže byť zapríčinená zmenou preferencií spotrebiteľov, čím sa zmení ich dopyt po produktoch firmy. V danom modeli je našim cieľom určiť, akou mierou je potrebné v čase t prispievať na propagáciu produktu (určiť $u(t)$), aby náš zisk z jeho predaja bol maximálny. To, ako dobre je produkt spropagovaný, ako dobre ho ľudia poznajú, vyjadruje stavová premenná $x(t)$. V ďalšom texte ju budeme interpretovať ako zásobu goodwill-u. Cena jednej jednotky goodwill-u je jedno euro, čiže jedno euro investované do reklamy zvýši zásobu goodwill-u o jednotku. Predpokladáme ďalej, že na trhu funguje istá miera zabúdania, ktorá má negatívny vplyv na zásobu goodwill-u.

2.2.2 Formulácia podmienok PPM

Podmienky PPM formulujeme rovnako ako v predchádzajúcom príklade podľa 4.3.1. (Halická, 2009) nasledovne:

(PM)

$$e^{-\rho t}(\pi(x) - u)\psi_0 + (u - \delta x)\psi \to \max_{0 \le u \le U} \tag{2.53}$$

(AR)

$$\dot{\psi}(t) = -e^{-\rho t}\frac{\partial(\pi(x)-u)}{\partial x}\psi_0 - \frac{\partial(u-\delta x)}{\partial x}\psi \tag{2.54}$$

(PT)

$$\psi(T) = 0 \tag{2.55}$$

Opäť zavedením substitúcie dostávame ekvivalentné podmienky PPM:

$(\tilde{PM})$

$$(\pi(x)-u)\psi_0 + (u-\delta x)\tilde{\psi} \to \max_{0\le u\le U} \tag{2.56}$$

$(\tilde{AR})$

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\psi}}(t) &= \rho\tilde{\psi} + e^{\rho t}\left(-e^{-\rho t}\frac{\partial(\pi(x)-u)}{\partial x}\psi_0 - \frac{\partial(u-\delta x)}{\partial x}\psi\right)\\ &= (\rho+\delta)\tilde{\psi} - \frac{\partial(\pi(x))}{\partial x}\psi_0\end{aligned} \tag{2.57}$$

$(\tilde{PT})$

$$\tilde{\psi}(T) = 0 \tag{2.58}$$

Na základe Vety 4 (Halická, 2009) budeme v ďalšom texte vychádzať z podmienok PPM, kde už je neautonómnosť odstránená, pričom pre jednoduchosť všetky $\tilde{\psi}$ resp. $\dot{\tilde{\psi}}$ nahradíme ψ resp. $\dot{\psi}$.

2.2.3 Riešenie

Keďže daná úloha optimálneho riadenia je úlohou na maximum, $\psi_0 \geq 0$. Z podmienky transverzality (2.58) sa $\psi(T) = 0$, a keďže platí podmienka $(\psi_0, \psi(t)) \neq (0,0)$ pre všetky $t \in [0,T]$, potom aby daný vzťah platil aj pre $t = T$, musí byť $\psi_0 = 1$. Dosadíme teraz ψ_0 do všetkých podmienok PPM a postupne začíname riešiť danú úlohu. Keďže v podmienke maxima maximalizujeme vzhľadom na u, môžme túto podmienku ekvivalentne prepísať nasledovne:

$$u(\psi - 1) \to \max_{0 \leq u \leq U}. \tag{2.59}$$

Maximalizačná funkcia je lineána v u, a preto nastávajú tieto možnosti riešenia:

$$u = \begin{cases} U & , \text{ak } \psi > 1 \\ 0 & , \text{ak } \psi < 1 \\ \text{neurčené} & , \text{ak } \psi = 1 \end{cases} \tag{2.60}$$

Vidíme, že ψ spĺňa pomerne zložitú diferenciálnu rovnicu. Nevieme preto povedať, či $\psi(t) = 1$ nastane iba v konečnom počte bodov, a preto pripustíme možnosť, že $\psi(t) = 1$ na nejakom intervale. Nech je teda $\psi(t) = 1$ pre všetky $t \in I$ a teda $\dot{\psi}(t) = 0$ pre všetky $t \in I$. Pre adjungovanú rovnicu (2.57) teda platí:

$$\dot{\psi} = (\rho + \delta) - \frac{\partial(\pi(x))}{\partial x} = 0, \tag{2.61}$$

a teda

$$\frac{\partial(\pi(x(t)))}{\partial x} = (\rho + \delta) \text{ pre všetky } t \in I \tag{2.62}$$

Z vlastností funkcie π vyplýva, že existuje práve jeden bod x_s, pre ktorý platí:

$$\frac{\partial(\pi(x_s))}{\partial x} = (\rho + \delta). \tag{2.63}$$

Pre $x(t)$ teda platí:

$$x(t) = x_s \text{ pre každé } t \in I, \tag{2.64}$$

z toho vyplýva, že $\dot{x} = 0$, a teda:

$$\dot{\hat{x}} = u^* - \delta x_s = 0 \text{ pre každé } t \in I. \tag{2.65}$$

Z predchádzajúcej rovnice vyjadríme $u^*(t)$

$$u^*(t) = u_s = \delta x_s \text{ pre každé } t \in I, \tag{2.66}$$

a teda pre riadenie dostávame:

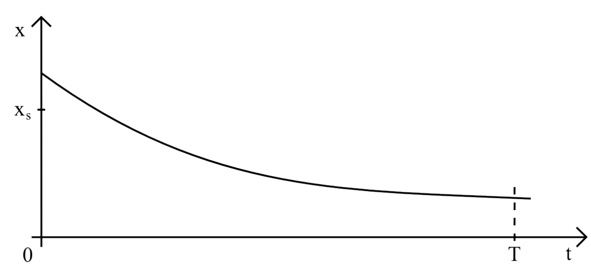
$$u^* = \begin{cases} U & \text{, ak } \psi > 1 \\ 0 & \text{, ak } \psi < 1 \\ \delta x_s & \text{, ak } \psi = 1 \end{cases} \tag{2.67}$$

Keďže $\psi(T) = 0$, musí existovať $t^1 < T$, pre ktoré $\psi(t) < 1$ pre všetky $t \in [t^1, T]$ a teda $u^*(t) = 0$ na $[t^1, T]$. Ďalšia analýza časového priebehu optimálneho riadenia a jeho odozvy je pomerne náročná, a preto ju tu neuvádzame. Predpokladáme, že podobne ako v (Brunovský, 1980) sa dá ukázať, že môžu nastať nasledovné možnosti. Ktorá z nich nastáva pre danú úlohu, to závisí hlavne od T (ak je T dosť veľké, tak nastáva aj singulárny úsek, t.j. prípady (2.70) resp. (2.71)).

1. Prípad: ak $t^1 = 0$, potom $u^*(t) = 0$ pre všetky $t \in [0, T]$. Odozva je potom v tvare:

$$x^*(t) = x_0 e^{-\delta t} \tag{2.68}$$

a jej časový priebeh je znázornený na (Obr. 2.3).

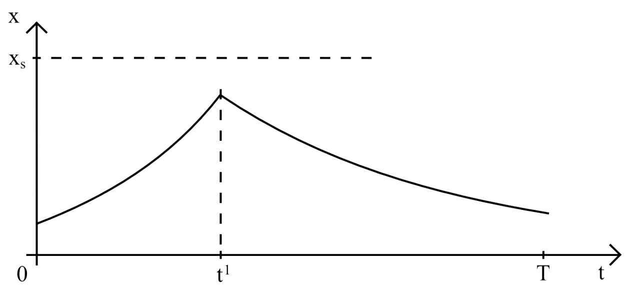


Obr. 2.3

2. Prípad: ak $t_1 > 0$ potom nastávajú tri možnosti:

$$u^* = \begin{cases} 1 & , \text{ak } t \in [0, t^1) \\ 0 & , \text{ak } t \in [t^1, T] \end{cases} \tag{2.69}$$

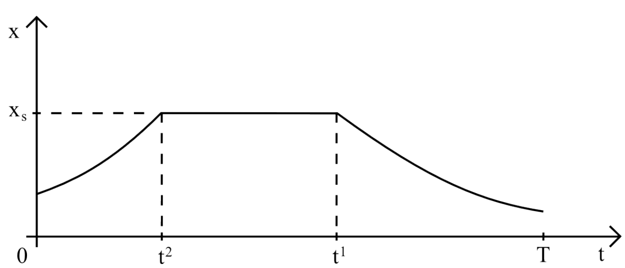
Časový priebeh optimálnej odozvy na riadenie dané vzťahom (2.69) je na (Obr. 2.4).



Obr. 2.4

$$u^* = \begin{cases} 1 & , \text{ak } t \in [0, t^2) \\ u_s & , \text{ak } t \in [t^2, t^1) \\ 0 & , \text{ak } t \in [t^1, T] \end{cases} \tag{2.70}$$

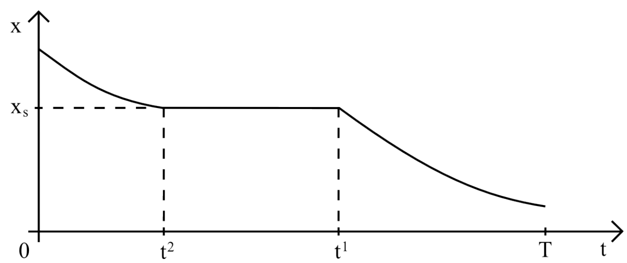
Časový priebeh optimálnej odozvy na riadenie dané vzťahom (2.70) je na (Obr. 2.5).



Obr. 2.5

$$u^* = \begin{cases} 0 & , \text{ak } t \in [0, t^2) \\ u_s & , \text{ak } t \in [t_2, t^1) \\ 0 & , \text{ak } t \in [t^1, T] \end{cases} \tag{2.71}$$

Časový priebeh optimálnej odozvy na riadenie dané vzťahom (2.71) je na (Obr. 2.6).



Obr. 2.6

Kapitola 3

Úloha s ohraničením typu nerovnosti na koncový stav

3.1 Spotreba verzus investície

Model a jeho riešenie vychádza z (Seierstad and Sydsaeter, 1986). Z hľadiska klasifikácie úloh optimálneho riadenia sa jedná o autonómnu úlohu s pevným časom. Koncový stav je ohraničený, ohraničenie je v tvare nerovnosti, úloha obsahuje ohraničenia na riadenie.

$$max \int_0^T U(1 - u(t))dt \tag{3.1}$$

$$\dot{x}(t) = u(t) \tag{3.2}$$

$$x(0) = x_0 \tag{3.3}$$

$$x(T) \geq x_T \tag{3.4}$$

$$u(t) \in [0, 1] \tag{3.5}$$

O hodnotách x_0, x_T a T predpokladáme, že

$$x_0 < x_T < x_0 + T \tag{3.6}$$

a funkcii užitočnosti U predpokladáme, že je C^2 spojitá v jednej premennej s vlastnosťami: $U' > 0$ a $U'' < 0$, definovaná na $[0, \infty)$, $lim_{c \to 0} U'(c) = \infty$, $lim_{c \to \infty} U'(c) = 0$.

T	časový horizont (daná konštanta)
$x(t)$	úroveň infraštruktúry v čase t (stavová premenná)
$u(t)$	predstavuje časť z príspevku, ktorý sa použije ako investícia do rozvoja infraštruktúry v čase t (riadiaca premenná)
U	funkcia užitočnosti (daná funkcia)
x_0, x_T	dané kladné konštanty

3.1.1 Interpretácia

Členský štát Európskej únie, povedzme SR, dostáva konštantný príspevok z fondov EÚ vo výške jednej peňažnej jednotky, na zabezpečenie udržateľného rastu ekonomiky, zvýšenie životnej úrovne obyvateľstva a zamestnanosti, zníženie regionálnych rozdielov. Budeme teraz predpokladať, že investíciami do projektov týkajúcich sa zlepšenia úrovne infraštruktúry sa podporí rozvoj a rast už spomínaných ekonomických ukazovateľov. Hodnota $1 - u(t)$ predstavuje takú časť z príspevku, ktorá je určená na spotrebu. Plánované obdobie je interval $[0, T]$ a predpoklad $x(T) \geq x_T$ znamená, že krajina musí dosiahnuť na konci obdobia poberania príspevkov aspoň úroveň infraštruktúry rovnú x_T. Úlohou optimálneho riadenia je teda nájsť také rozvrhnutie investícií, ktoré maximalizuje celkovú užitočnosť zo spotreby.

3.1.2 Formulácia podmienok PPM

Podmienky PPM formulujeme na základe paragrafu 4.2.2. z (Halická, 2009) a tiež vychádzame z paragrafu 4.8.1. z (Halická, 2009).

(PM)

$$H = \psi_0 U(1-u) + \psi u \rightarrow \max_{u \in [0,1]} \tag{3.7}$$

(AR)

$$\dot{\psi}(t) = 0 \tag{3.8}$$

(PT)

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \geq 0:\ \lambda(x(T) - x_T) = 0,\ \psi(T) = \lambda \tag{3.9}$$

3.1.3 Riešenie

Najskôr upravíme podmienku transverzality. Pretože platí rovnosť $\psi(T) = \lambda$, môžme pomocnú premennú λ odstrániť a dostávame podmienku:

$$\psi(T) \geq 0,\ \psi(T)(x(T) - x_T) = 0. \tag{3.10}$$

Ak je teda $x(T) > x_T$, potom $\psi(T) = 0$, a ak $\psi(T) > 0$, potom $x(T) = x_T$. Riešením adjungovanej rovnice a podmienky transverzality dostávame pre adjungovanú premennú nasledovný predpis:

$$\psi(t) \equiv \lambda \geq 0. \tag{3.11}$$

Keďže daná úloha optimálneho riadenia je úlohou na maximum, $\psi_0 \geq 0$. Predpokladajme, že $\psi_0 = 0$. Potom z (3.11) a z podmienky $(\psi_0, \psi(t)) \neq (0,0)$ dostávame, že $\lambda > 0$. Potom z podmienky maxima (3.7) dostávame, že $u = 1$ pre všetky t. Riešenie (3.2) a (3.3) má pre $u \equiv 1$ takýto tvar:

$$x(t) = t + x_0 \tag{3.12}$$

Pre koncový stav teda platí:

$$x(T) = T + x_0 = x_T \tag{3.13}$$

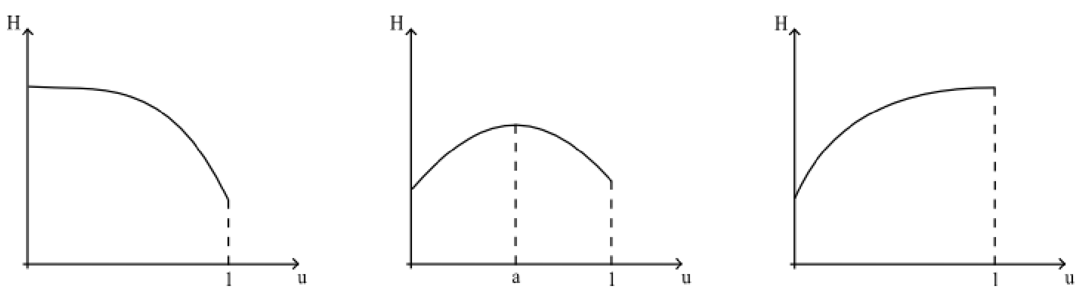
a teda nie je splnená podmienka, že $x_T < T + x_0$. Z toho vyplýva, že riadenie $u(t) \equiv 1$ nie je prípustné pre danú úlohu. Predpoklad $\psi_0 = 0$ teda nedáva žiadne prípustné riadenie.

Nech teraz $\psi_0 = 1$. Zameriame sa teraz na podmienku maxima. Vidíme, že

$$H'_u = -U'(1-u) + \lambda \tag{3.14}$$

$$H''_{uu} = U''(1-u) \leq 0, \tag{3.15}$$

a teda Hamiltonova funkcia je konkávna v u, maximum sa teda nadobúda v rámci intervalu $(0, 1)$ alebo v jeho okrajových bodoch. Všetky tri prípady nastatia sú znázornené na (Obr. 3.1).



Obr. 3.1

Rozoberieme teraz všetky tri možnosti:

- optimálnym riadením je $u^*(t) = 0$ (nastala by teda možnosť, ktorú znázorňuje prvý podobrázok (Obr. 3.1)), potom na základe podmienky maxima pre $u = 0$ nemôže byť $H'_u = -U'(1) + \lambda > 0$, a teda $-U'(1) + \lambda \leq 0$

- optimálnym riadením je hodnota z intervalu $(0,1)$ (nastala by teda možnosť, ktorú znázorňuje druhý podobrázok (Obr. 3.1)), potom $H'_u = 0$ a teda $U'(1-u^*(t)) = \lambda$

- optimálnym riadením je $u^*(t) = 1$ (nastala by teda možnosť, ktorú znázorňuje tretí podobrázok (Obr. 3.1)), potom $H'_u \geq 0$ pre $u = 1$, a teda $-U'(0) + \lambda \geq 0$

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{ak } \lambda \leq U'(1) \\ \in (0,1) & \text{ak } U'(1-u^*(t)) = \lambda \\ 1 & \text{ak } U'(0) \leq \lambda \end{cases} \tag{3.16}$$

Hamiltonova funkcia $H = U(1-u) + \lambda u$ je teda rýdzokonkávna a má na $[0,1]$ jediné maximum $\bar{u}$, ktoré nie je závislé od t. Z tohto dôvodu $u^*(t) = \bar{u}$ pre $\bar{u} \in [0,1]$. Možnosť $\bar{u} = 0$ nemôže nastať, pretože riadenie $u(t) \equiv 0$ nie je prípustné pre úlohu (3.1) - (3.5) pri predpoklade (3.6). Naozaj, odozvou na $u(t) \equiv 0$ je $x(t) \equiv x_0$ a teda $x(T) = x_0 < x_T$. Z toho vyplýva, že nie je splnená podmienka (3.5). Preto $\bar{u} > 0$. Možnosť $\psi(t) = \lambda = 0$ nemôže nastať pre (3.16), a preto $\psi(t) = \lambda > 0$ a teda z podmienky transverzality (3.10) platí:

$$x^*(T) = x_T \tag{3.17}$$

Možnosť $\bar{u} = 1$ sme už vylúčili pri analyzovaní prípadu $\psi_0 = 1$, preto $\bar{u} \in (0,1)$ a optimálna hodnota stavovej premennej sa teda bude riadiť takýmto predpisom: $x^*(t) = t\bar{u} + x_0$ a v koncovom čase, kedy $t = T$ bude jej hodnota: $x^*(T) = T\bar{u} + x_0$. Pretože však musí platiť (3.17), dostávame pre optimálne riadenie nasledujúci predpis:

$$u^*(t) = \bar{u} = \frac{x_T - x_0}{T}, \tag{3.18}$$

a pre stavovú premennú:

$$x^*(t) = x_0 + \frac{x_T - x_0}{T} t. \tag{3.19}$$

Pomocou podmienky maxima sme našli jediného kandidáta na optimálne riešenie danej úlohy. Optimálna dvojica $(x^*(t), u^*(t))$ spolu s adjungovanou funkciou:

$$\psi(t) = c = U' \left(1 - \frac{x_T - x_0}{T}\right) \tag{3.20}$$

spĺňajú nutné podmienky optimality. Dá sa ukázať, že spĺňajú aj postačujúce, a teda je to optimálna dvojica.

Kapitola 4

Dvojrozmerná úloha

4.1 Dvojsektorový model

Model a jeho riešenie vychádza z (Seierstad and Sydsaeter, 1986). Je to úloha, ktorú z hľadiska klasifikácie úloh optimálneho riadenia zaraďujeme k autonómnym úlohám s pevným časom. Je bez ohraničenia na koncový stav, teda ide o úlohu s voľným koncom, a keďže riadenie patrí do zadaného intervalu, úloha je ohraničená na riadenie.

$$max \int_0^T x_2(t)dt \tag{4.1}$$

$$\dot{x}_1(t) = au(t)x_1(t), \quad x_1(0) = x_1^0, \quad x_1(T) \text{ - voľné} \tag{4.2}$$

$$\dot{x}_2(t) = a(1-u(t))x_1(t), \quad x_2(0) = x_2^0, \quad x_2(T) \text{ - voľné} \tag{4.3}$$

$$u(t) \in [0,1] \tag{4.4}$$

T	časový horizont (daná konštanta)
$x_1(t)$	produkcia sektoru číslo 1 v čase t (stavová premenná)
$x_2(t)$	produkcia sektoru číslo 2 v čase t (stavová premenná)

$u(t)$	predstavuje časť investície, ktorá je v čase t pridelená do sektoru číslo 1 (veľkosť investície nech je a) (riadiaca premenná)
a, x_1^0, x_2^0	dané kladné konštanty

4.1.1 Interpretácia

Predstavme si ekonomiku, ktorá pozostáva z dvoch sektorov. Nech sektor číslo 1 produkuje investičný tovar a sektor číslo 2 spotrebný tovar. Vidíme, že dané sektory sú vzájomne prepojené, a to cez vzťah (4.3), t.j. veľkosť vyprodukovaného spotrebného tovaru je závislá od toho, aká je veľkosť produkcie sektoru číslo 1. Produkciu oboch sektorov môžeme zvýšiť investíciami do ich rozvoja, pričom veľkosť investície je a peňažných jednotiek za jednotku času, investovaných v čase t do oboch sektorov naraz, t.j. pokiaľ do sektoru číslo 1 investujeme $\frac{a}{3}$ peňažných jednotiek, potom do sektoru číslo 2 investujeme $\frac{2a}{3}$ peňažných jednotiek. Úlohou optimálneho riadenia bude maximalizovať za dané časové obdobie produkciu spotrebného tovaru.

4.1.2 Formulácia podmienok PPM

Podmienky PPM budeme formulovať na základe paragarfu 4.2.2. z (Halická, 2009).

(PM)

$$\psi_0 x_2 + \psi_1 a u x_1 + \psi_2 a(1-u)x_1 \to \max_{u\in[0,1]} \tag{4.5}$$

(AR)

$$\dot{\psi}_1(t) = -\psi_1(t) a u(t) - \psi_2(t) a(1-u(t)) \tag{4.6}$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\psi_0 \tag{4.7}$$

(PT)

$$\psi_1(T) = 0 \tag{4.8}$$

$$\psi_2(T) = 0 \tag{4.9}$$

(podmienka transverzality pre obe adjungované premenné je rovná nule, pretože stavové premenné sú pre koncový čas definované ako voľné)

4.1.3 Riešenie

Keďže daná úloha optimálneho riadenia je úlohou na maximum, $\psi_0 \geq 0$. Z podmienky transverzality sa $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$, a keďže platí podmienka $(\psi_0, \psi_1(t), \psi_2(t)) \neq (0,0,0)$ pre všetky $t \in [0,T]$, potom aby daný vzťah platil aj pre $t = T$, musí byť $\psi_0 = 1$.

Dosadíme teraz $\psi_0 = 1$ do (4.7) a pre danú diferenciálnu rovnicu s podmienkou (4.9) dostávame:

$$\psi_2(t) = T - t. \tag{4.10}$$

Podmienka maxima (4.5) je ekvivalentná s podmienkou:

$$a(\psi_1 - \psi_2)x_1 u \to \max_{u\in[0,1]} . \tag{4.11}$$

Hľadáme teda maximum lineárnej funkcie na $[0, 1]$, pričom hodnota riadenia bude závisieť od znamienka jednotlivých činiteľov. Zo zadania máme:

$$a > 0.$$

Ďalej, pretože

$$x_1(0) = x_1^0 > 0 \text{ a } \dot{x}_1(t) = au(t)x_1(t) \geq 0 \text{ pre každé } t,$$

tak zrejme

$$x_1(t) > 0 \text{ pre každé } t.$$

Podmienka maxima (4.11) nám teda pre optimálne riadenie $u^*(t)$ dáva nasledujúcu podmienku:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{ak } \psi_1(t) > \psi_2(t) \\ 0, & \text{ak } \psi_1(t) < \psi_2(t) \\ \text{neurčené}, & \text{ak } \psi_1(t) = \psi_2(t) \end{cases} \tag{4.12}$$

Budeme vidieť, že prípad, keď $\psi_1(t) = \psi_2(t)$ nastáva najviac v dvoch časových okamihoch, a teda prípad, keď je $u^*(t)$ neurčené, nemusíme uvažovať. Z predchádzajúcich vzťahov (4.6) a podmienky transverzality vyplýva, že $\dot{\psi}_1(T) = 0$. Pretože $\dot{\psi}_2(t) = -1$ a zároveň platí $\psi_1(T) = \psi_2(T) = 0$, musí byť $\psi_1(t) < \psi_2(t)$ a toto platí na nejakom intervale vľavo od T. Nech t^* je najväčšia hodnota spomedzi t, pre ktorú $\psi_1(t) \geq \psi_2(t) = T - t$ (t^* môže byť aj 0). Potom podľa (4.12) $u^*(t) = 0$ na intervale (t^*, T). Adjungovaná rovnica pre ψ_1 potom vyzerá nasledovne:

$$\dot{\psi}_1(t) = -a\psi_2(t) = -a(T - t) \quad t \in [t^*, T]. \tag{4.13}$$

Po zintegrovaní dostávame:

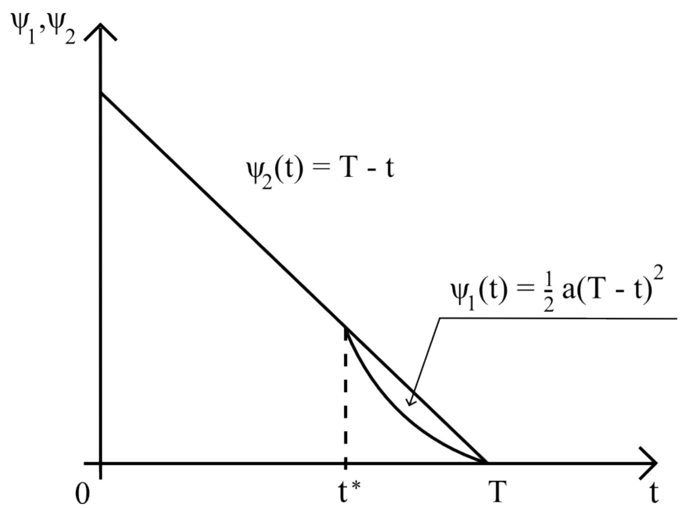
$$\psi_1(t) = \frac{1}{2}a(T-t)^2 + B, \tag{4.14}$$

kde B je konštanta, ktorú dopočítame z podmienky transverzality $\psi_1(T) = 0$. Zrejme $B = 0$ a

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2}a(T-t)^2 \quad t \in [t^*, T] \tag{4.15}$$

Na základe definície o t^* platí:

$$\psi_1(t^*) = \psi_2(t^*), \quad t^* > 0. \tag{4.16}$$



Obr. 4.1

Dosadíme teraz vzťahy (4.10) a (4.15) do rovnice (4.16):

$$\frac{1}{2}a(T-t^*)^2 = T - t^*, \tag{4.17}$$

a pre t^* dostávame:

$$t^* = T - \frac{2}{a}. \tag{4.18}$$

1. Prípad: $T \leq \dfrac{2}{a}$**.** Vtedy $u^* = 0$ a teda $x_1^*(t) \equiv x_1^0$ a $x_2^*(t) = ax_1^0 t + x_2^0$.

2. Prípad: $T > \dfrac{2}{a}$ a teda $t^* > 0$. Zaujíma nás, aké je správanie adjungovanej premennej $\psi_1(t)$ na intervale $[0, t^*]$. Z (4.12) a (4.6) vyplýva:

$$\dot{\psi}_1(t) = \begin{cases} -a\psi_1(t), & \text{ak } \psi_1(t) > \psi_2(t) \\ -a\psi_2(t), & \text{ak } \psi_1(t) \leq \psi_2(t) \end{cases} \tag{4.19}$$

Ak $\psi_1(t) > \psi_2(t)$, potom $-\psi_1(t) < -\psi_2(t)$, v dôsledku čoho aj $-a\psi_1(t) < -a\psi_2(t)$, keďže $a > 0$. Na základe tejto úvahy, bez ohľadu na to, aký je vzťah medzi $\psi_1(t)$ a $\psi_2(t)$ vieme $\dot{\psi}_1$ ohraničiť zhora:

$$\dot{\psi}_1(t) \leq -a\psi_2(t) = a(t - T). \tag{4.20}$$

Pre $t < t^*$, $\dot{\psi}_1(t) \leq a(t - T) < a(t^* - T) = -2$. Pretože $\dot{\psi}_2(t) = -1$ pre všetky t a $\psi_1(t^*) = \psi_2(t^*)$, potom $\psi_1(t) > \psi_2(t)$ pre $t < t^*$ a teda $u^*(t) = 1$ pre $t \in [0, t^*]$.

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & \text{ak } t \in \left[0, T - \dfrac{2}{a}\right] \\ 0, & \text{ak } t \in \left(T - \dfrac{2}{a}, T\right] \end{cases} \tag{4.21}$$

Z (4.6) vyplýva, že

$$\dot{\psi}_1(t) = -a\psi_1(t) \quad \text{pre } t \in \left[0, T - \frac{2}{a}\right] \tag{4.22}$$

Po zintegrovaní dostávame:

$$\psi_1(t) = Ce^{-at}, \tag{4.23}$$

kde C je konštanta, ktorú dopočítame využitím rovnice $\psi_1(t^*) = \psi_2(t^*)$.

$$Ce^{-at^*} = T - t^* \Rightarrow C = \frac{2}{a} e^{aT-2} \tag{4.24}$$

Riešením adjungovanej rovnice pre ψ_1 na intervale $[0, t^*]$ je:

$$\psi_1(t) = \frac{2}{a} \, e^{-a(t-T+\frac{2}{a})} \quad \text{pre } t \in \left[0, T - \frac{2}{a}\right] \tag{4.25}$$

Dopočítame teraz odozvu pre riadenie dané (4.21). Pre každé $t \in \left[0, T - \frac{2}{a}\right]$ je $u^*(t) = 1$ a teda

$$\dot{x}_1(t) = ax_1(t) \Rightarrow x_1(t) = c_1 e^{at}, \tag{4.26}$$

pričom konštantu c_1 dorátame zo začiatočnej podmienky $x_1(0) = c_1 = x_1^0$. Výsledná rovnica pre $x_1(t)$ vyzerá nasledovne:

$$x_1(t) = x_1^0 e^{at}, \qquad t \in \left[0, T - \frac{2}{a}\right] \tag{4.27}$$

Pre $x_2(t)$ na tomto intervale platí:

$$\dot{x}_2(t) = 0 \;\Rightarrow\; x_2(t) = c_2, \tag{4.28}$$

pričom konštantu c_2 dorátame opäť zo začiatočnej podmienky. Dostaneme:

$$x_2(t) = x_2^0, \qquad t \in \left[0, T - \frac{2}{a}\right] \tag{4.29}$$

Pre každé $t \in \left[T - \frac{2}{a}, T\right]$ je $u^*(t) = 0$ a teda

$$\dot{x}_1(t) = 0 \Rightarrow x_1(t) = c_3, \tag{4.30}$$

pričom konštantu c_3 dorátame zo vzťahu (4.27), pre čas $t = T - \frac{2}{a}$.

$$x_1\left(T - \frac{2}{a}\right) = x_1^0 e^{aT-2} = c_3.$$

Výsledná rovnica pre $x_1(t)$ na danom intervale vyzerá nasledovne:

$$x_1(t) = x_1^0 e^{aT-2}, \qquad t \in \left[T - \frac{2}{a}, T\right] \tag{4.31}$$

Pre $x_2(t)$ na tomto intervale platí:

$$\dot{x}_2(t) = ax_1(t) = ax_1^0 e^{aT-2} \Rightarrow x_2(t) = ax_1^0 e^{aT-2} t + c_4, \tag{4.32}$$

pričom konštantu c_4 dorátame s využitím podmienky (4.29), pre čas $t = T - \frac{2}{a}$.

$$x_2\left(T - \frac{2}{a}\right) = ax_1^0 e^{aT-2}\left(T - \frac{2}{a}\right) + c_4 = x_2^0.$$

Pre $x_2(t)$ tak dostávame:

$$x_2(t) = ax_1^0 e^{aT-2} t + x_2^0 - ax_1^0 e^{aT-2}\left(T - \frac{2}{a}\right) \qquad t \in \left[T - \frac{2}{a}, T\right] \tag{4.33}$$

Celkovo teda

$$x_1^*(t) = \begin{cases} x_1^0 e^{at}, & \text{ak } t \in \left[0, T - \frac{2}{a}\right] \\ x_1^0 e^{aT-2}, & \text{ak } t \in \left[T - \frac{2}{a}, T\right] \end{cases} \tag{4.34}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} x_2^0, & \text{ak } t \in \left[0, T - \frac{2}{a}\right] \\ ax_1^0 e^{aT-2} t + x_2^0 - ax_1^0 e^{aT-2}\left(T - \frac{2}{a}\right), & \text{ak } t \in \left[T - \frac{2}{a}, T\right] \end{cases} \tag{4.35}$$

Dostali sme aj v prípade $T \leq \frac{2}{a}$ aj $T > \frac{2}{a}$ jediného kandidáta na optimálne riešenie.

Záver

Cieľom diplomovej práce bolo zozbierať resp. vymyslieť úlohy zo spojitej teórie optimálneho riadenia s ekonomickou resp. finančnou interpretáciou a riešiť ich pomocou PPM. Práca obsahuje štyri úlohy prevzaté z uvedených zdrojov, pričom súčasťou niektorých z nich sú aj konkrétne preriešené príklady, a dve modifikované úlohy.

Literatúra

Brunovský, P.: 1980, *Matematická teória optimálneho riadenia*, ALFA.

Brunovský, P.: n.d., *Diferenčné a diferenciálne rovnice.*
URL: *http://pc2.iam.fmph.uniba.sk/skripta/brunovsky/*

Halická, M.: 2009, *Optimálne riadenie 2*, Učebný text k predmetu Optimálne riadenie.
URL: *http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/halicka/teaching.xhtml*

Seierstad, A. and Sydsaeter, K.: 1986, *Optimal control theory with economic applications*, Elsevier North-Holland, Inc., New York, NY, USA.

Sethi, S. P. and Thompson, G. L.: 2000, *Optimal control theory : applications to management science and economics*, Kluwer Academic Publishers.