FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

RIEŠITEĽNOSŤ ROVNÍC CGE MODELOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

PETRA ŠTÚRIKOVÁ

2010

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITY KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

RIEŠITEĽNOSŤ ROVNÍC CGE MODELOV

DIPLOMOVÁ PRÁCA

PETRA ŠTÚRIKOVÁ

Študijný odbor: Ekonomická a finančná matematika
Vedúci diplomovej práce: prof. RNDr. Pavel Brunovský, DrSc.

Bratislava 2010

Čestné prehlásenie

Týmto čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne, len s využitím teoretických vedomostí a s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave 23.apríl 2010

Poďakovanie

Týmto by som sa chcela poďakovať svoju diplomovému vedúcemu

prof. RNDr. Pavlovi Brunovskému, DrSc.,

za všetok svoj čas a námahu, ktoré vynaložil a za cenné rady a pripomienky, ktoré mi pomohli pri písaní tejto práce.

Abstrakt

Existencia riešenia CGE modelu bola dokázaná len pre jednoduchý model (v diplomovej práci Lívii Šmátralovej [4]). Cieľom tejto diplomovej práce bolo rozšíriť jednoduchý model o ďalšie faktory a dokázať existenciu riešenia pre takto rozšírený model. Pomocou článku, ktorý napísali Arrow a Debreu, sa nám podarilo dokázať existenciu riešenia pre model rozšírený o sektor vlády a investícií, o dane a o zahraničie.

Kľúčové slová: Arrow-Debreuova teória, CGE modely, riešiteľnosť rovníc CGE modelov, ohraničenosť, existencia rovnováhy, rozšírený model

Abstract

The existence of CGE model solutions has been demonstrated only for a simple model (in thesis of Lívia Šmátralová [4]). The purpose of this thesis was to extend the simple model by other factors and prove the existence of solutions for such an extended model. Using the article by Arrow and Debreu, we have proved the existence of solution for the model extended by the government and investment sectors as well as taxes and import-export.

Key words: Arrow-Debreu´s theory, CGE models, CGE models equations solvability, Definitude, Existence of equilibrium, Extended model.

Obsah

Úvod

Modely všeobecnej vypočítateľnej rovnováhy (CGE – Computable General Equlibrium) sa v posledných dvoch desaťročiach stali široko používaným nástrojom na prognózovanie efektov rozličných zásahov do ekonomiky. Preto je prekvapujúce, že len malá pozornosť je venovaná v literatúre fundamentálnej otázke existencie riešení nelineárnej sústavy rovníc, dávajúcich rovnovážny stav ekonomiky.

Existenčné dôkazy sú dobre rozpracované pre klasické úlohy všeobecnej rovnováhy. Opierajú sa o dôkaz existencie Nashovej rovnováhy v hre, ktorá ekonomiku reprezentuje. V tejto hre sú hráčmi výrobné odvetvia, ako aj spotrebitelia, doplnení o „trhového hráča". Jeho optimálna stratégia zabezpečuje rovnováhu dopytu a ponuky po statkoch.

Existenčný dôkaz pre klasické úlohy všeobecnej rovnováhy predpokladá kompaktnosť množín stratégií hráčov. Vzhľadom na predpoklad konštantných výnosov z rozsahu však tento predpoklad v prípade CGE modelov splnený nie je. Preto kľúčovou zložkou existenčného dôkazu je dôkaz ohraničenosti množiny, v ktorej sa rovnováha môže dokázať.

Dôkazu existencie riešenia rovníc CGE modelov je venovaná diplomová práca [4]. Pretože CGE modely sú veľmi rozmanité, dôkaz je urobený pre základný zjednodušený model, ktorý je jadrom prakticky všetkých modelov.

Cieľom tejto diplomovej práce je rozšíriť dôkaz zo [4] na širšiu triedu modelov. Ide o modely zohľadňujúce spotrebu vlády, investície, dane, ako i export a import.

1 CGE modely

CGE (Computable General Equlibrium) modely sú triedou makroekonomických modelov, ktoré používajú reálne dáta na odhadovanie, ako bude ekonomika reagovať na zmenu exogénnych faktorov. Pozostávajú zo systému nelineárnych rovníc. Sú založené na mikroekonomických predpokladoch o správaní sa jednotlivých ekonomických subjektov na trhu (domácnosti, firmy, štát, zahraničie), pričom musia byť splnené podmienky mikroekonomickej rovnováhy.

CGE modely z časového hľadiska rozdeľujeme na statické a dynamické. V dynamických CGE modeloch sa skúma odozva ekonomiky na zmenu exogénnych faktorov v rôznych časových obdobiach. V statických modeloch túto časovú zložku nemáme a predpokladáme, že ekonomika prechádza zo starého rovnovážneho bodu do nového okamžite. V tejto práci sa budeme zaoberať iba statickými modelmi.

Výhoda používania CGE modelov je v ich nenáročnosti na rozsah dát. Na ich konštruovanie stačia údaje za jedno časové obdobie (väčšinou sa používa jeden rok). Základom týchto modelov je matica spoločenských účtov - SAM (Social Accounting Matrix). SAM je štvorcová matica, v ktorej sa súčty zodpovedajúcich riadkov a stĺpcov rovnajú. Zobrazuje všetky toky tovarov, služieb a peňazí v ekonomike. SAM matica pre jednoduchý model vyzerá takto:

	Produkčné sektory	**Práca**	**Kapitál**	**Domácnosti**
Komodity	$p_j X_{ij}$			$p_j H_j$
Práca	wL_j			
Kapitál	rK_j			
Domácnosti		$w\sum_j L_j$	$r\sum_j K_j$	

2 Arrow-Debreuova teória

Francúzsky ekonóm 19. storočia Léon Walras ako prvý formuloval teóriu rovnováhy ekonomického systému ako riešenie systému rovníc predstavujúcich dopyt po tovaroch spotrebiteľmi a ponuku tovarov výrobcami, za podmienky rovnosti ponuky a dopytu na každom trhu. Predpokladalo sa, že každý spotrebiteľ koná tak, aby maximalizoval svoju užitočnosť a každý výrobca koná tak, aby maximalizoval svoj zisk. Dokonalá konkurencia panuje v tom zmysle, že žiaden výrobca ani spotrebiteľ nemôže určovať cenu tovarov podľa vlastnej voľby. Walras však neposkytol žiaden exaktný dôkaz, že tento systém rovníc, ako ho formuloval, má riešenie.

Až v druhej polovici 20. storočia podali americkí nositelia Nobelovej ceny za ekonómiu Kenneth Arrow a Gerard Debreu dôkaz existencie rovnováhy pre modely všeobecnej rovnováhy (GE). Vo svojej práci [1] uviedli tvrdenie o existencii rovnovážneho bodu, ktoré budeme používať pri dokazovaní existencie riešenia pre CGE modely. Ale ešte pred uvedením tohto tvrdenia si definujme základné pojmy.

Definícia (abstraktná ekonomika): *Nech* $U_1, \dots U_\nu$ *sú podmnožiny* $\mathbb{R}^l$*, nech* $U = U_1 \times \dots \times U_\nu$ *a nech* $f_\iota: U \to \mathbb{R}\ (\forall \iota = 1, \dots, \nu)$*. Označme* $\overline{U}_\iota = U_1 \times \dots \times U_{\iota-1} \times U_{\iota+1} \times \dots \times U_\nu$*. Nech* $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ *je multifunkcia definovaná v každom bode* $\bar{a}_\iota \in \overline{U}_\iota$ *tak, že* $A_\iota(\bar{a}_\iota) \in U_\iota$*. Potom postupnosť* $[U_1, \dots, U_\nu, f_1, \dots, f_\nu, A_1(\bar{a}_1), \dots, A_\nu(\bar{a}_\nu)]$ *nazývame abstraktná ekonomika.*

Abstraktnú ekonomiku môžeme chápať ako hru ν hráčov, kde ι-ty hráč s výplatnou funkciou f_ι ($\iota=1,\dots,\nu$) volí svoju stratégiu z množiny $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ nezávisle od ostatných hráčov. Ale každý hráč svojou voľbou ovplyvňuje výplatu ostatných hráčov.

Po definícii abstraktnej ekonomiky si ešte uvedieme definíciu rovnovážneho bodu. Formálnu definíciu, ktorú zaviedol Nash, rozšírili Arrow a Debreu vo svojom článku [1] na abstraktnú ekonomiku.

Definícia (rovnovážny bod): a^* *nazývame rovnovážnym bodom ekonomiky* $[U_1, \dots, U_\nu, f_1, \dots, f_\nu, A_1(\bar{a}_1), \dots, A_\nu(\bar{a}_\nu)]$*, ak* $a_\iota^* \in A_\iota(\bar{a}_\iota^*)$ *a* $f_\iota(\bar{a}_\iota^*, a_\iota^*) = max_{a_\iota \in A_\iota(\bar{a}_\iota^*)} f_\iota(\bar{a}_\iota^*, a_\iota)$ *pre každé* $\iota=1,\dots,\nu$.

Keď sme si definovali pojmy abstraktná ekonomika a rovnovážny bod, môže uviesť tvrdenie o existencii rovnovážneho bodu.

Lema 2.1 (o existencii rovnovážneho bodu): *Nech U_ι je kompaktná a konvexná množina (pre každé ι=1,...,ν), $f_\iota(\bar{a}_\iota, a_\iota)$ je spojitá funkcia na U a je kvázikonkávna v a_ι pre každé $\bar{a}_\iota$ (ι=1,...,ν). Nech $A_\iota(\bar{a}_\iota)$ je spojitá multifunkcia, ktorá je konvexná a neprázdna pre každé ι=1,...,ν. Potom abstraktná ekonomika $[U_1, \dots, U_\nu, f_1, \dots, f_\nu, A_1(\bar{a}_1), \dots, A_\nu(\bar{a}_\nu)]$ má rovnovážny bod.*

Definícia spojitosti multifunkcie bude špecifikovaná ďalej.

3 Zostavenie CGE modelu

Základnou časťou skoro všetkých CGE modelov je jednoduchý model, pre ktorý dokazovala Lívia Šmátralová vo svojej práci [4] existenciu riešenia.

V tejto kapitole opíšeme jednoduchý model, ale rovnice uvedieme až pre nový model, ktorým rozširujeme tento jednoduchý model o vládny sektor a investície.

3.1 Jednoduchý CGE model

Jednoduchý CGE model môžeme opísať pomocou rovníc, ktoré vychádzajú z nasledujúcich predpokladov:

- uzavretá ekonomika – na trhu sa vyskytujú iba firmy a domácnosti danej krajiny a žiadne výrobky sa nevyvážajú do zahraničia
- racionálne správajúce sa firmy a domácnosti – to znamená, že každá firma maximalizuje svoj zisk a domácnosti maximalizujú svoju užitočnosť. Ďalej predpokladáme jednu reprezentatívnu domácnosť. Produkčnú funkciu volíme podľa miery elasticity. Ak je elasticita rovná 1 (vstupy sú dokonalo zameniteľné) volíme Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu:

  $$Y = \prod_i X_i^{a_i} L^{\delta_L} K^{\delta_K}$$

  kde $\sum_i a_i + \delta_L + \delta_K = 1$.

  Ak je elasticita rovná 0 (vstupy sú dokonalo nezameniteľné) volíme Leontiffovu produkčnú funkciu:

  $$Y = \min\left\{\frac{X_i}{a_i}, \frac{L}{\delta_L}, \frac{K}{\delta_K}\right\}$$

  kde $\sum_i a_i + \delta_L + \delta_K = 1$.

  Inak volíme CES produkčnú funkciu:

  $$Y_i = \left(\sum_j a_{ji} X_{ji}^{\rho} + \delta_{Li} L_i^{\rho} + \delta_{Ki} K_i^{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

  kde $\sum_i a_i + \delta_L + \delta_K = 1$ a jej elasticita je rovná $\frac{1}{1-\rho}$.
- dokonalá konkurencia – žiaden subjekt na trhu nemôže priamo ovplyvniť ceny svojím správaním

- každá firma vyrába iba jednu komoditu – na jej výrobu využíva prácu produkovanú domácnosťami, kapitál vlastnený domácnosťami a ďalšie komodity
- konštantné výnosy z rozsahu – produkčná funkcia, ktorá opisuje produkciu, ako aj funkcia užitočnosti domácnosti majú konštantné výnosy z rozsahu
- rovnováha na trhu – rovnováha musí platiť na všetkých trhoch, t.j. na trhu statkov, na trhu práce a na kapitálovom trhu. Zároveň z nenulovej produkcie, z nulového zisku a z konštantných výnosov z rozsahu vyplýva peňažná rovnováha.
- všetky výrobné faktory sú využité – z čoho vyplýva, že nezamestnanosť je nulová

3.2 Model rozšírený o sektor vlády a investícií

V tomto modeli zahrnieme do spotrebného sektora domácnosti, ku ktorým navyše pribudnú vláda a investície. Sektor vlády a sektor investícií sa modelujú ako ďalší spotrebitelia. Podobne ako domácnosti maximalizujú svoje funkcie užitočnosti. Úžitková funkcia má pre reprezentatívnu domácnosť a pre vládu tvar Cobb-Douglasovej funkcie. Príjem spotrebného sektora sa nám zmení, pretože kapitál je rozdelený medzi domácnosťami a vládou podľa fixného koeficientu α^H, resp. $(1-\alpha^H)$. Navyše ešte pribudnú prímy investícií, ktoré sú tvorené domácnosťami a vládou, a to takým spôsobom, že fixnú časť β^H z príjmu domácnosti spotrebúvajú, zvyšná časť z príjmu ide na úspory. Vláda tiež delí svoj príjem na spotrebu a úspory, ale podľa vlastného fixného koeficientu β^G.

Úspory domácností a vlády tvoria príjem investícií. Investície tiež vytvárajú dopyt po statkoch, na ktorý spotrebúvajú všetok svoj príjem. Budeme ich modelovať ako nového hráča na trhu, ktorého funkcia užitočnosti má tvar Leontieffovej funkcie.

3.2.1 Rovnice modelu

Produkcia:

$$Y_j = f_j(X_{1j}, \dots, X_{nj}, L_j, K_j)$$

Dopyt firiem:

$$L_j = L_j(Y_j, w, r, p)$$

$$K_j = K_j(Y_j, w, r, p)$$

$$X_{ij} = X_{ij}(Y_j, w, r, p)$$

Dopyt domácností:

$$H_j = H_j(TH, p)$$

Dopyt vlády:

$$G_j = G_j(TG, p)$$

Dopyt investícií:

$$I_j = I_j(M^I, p)$$

Rovnica nulového zisku:

$$p_j Y_j = wL_j + rK_j + \sum_i p_i X_{ij}$$

Rovnováha na trhoch:

$$Y_j = \sum_i X_{ij} + H_j + G_j + I_j$$

$$\overline{TL} = \sum_j L_j$$

$$\overline{TK} = \sum_j K_j$$

Príjmy domácnosti:

$$M^H = \sum_j wL_j + \alpha^H \sum_j rK_j$$

Príjmy vlády:

$$M^G = (1 - \alpha^H) \sum_j rK_j$$

Príjmy sektora investícií:

$$M^I = (1 - \beta^H)M^H + (1 - \beta^G)M^G$$

Rozpočtové ohraničenia:

$$TH = \beta^H M^H$$

$$TG = \beta^G M^G$$

3.2.2 Premenné v modeli

Endogénne premenné:

$Y_j -$ produkcia v sektore *j*

$L_j -$ dopyt po práci v sektore *j*

$K_j -$ dopyt po kapitáli v sektore *j*

$X_{ij} -$ dopyt po komodite *j* v sektore *i*

$H_j -$ dopyt po komodite *j* v sektore domácností

$G_j -$ dopyt po komodite *j* v sektore vlády

$I_j -$ dopyt po komodite *j* v sektore investícií

$TH -$ celková spotreba domácností

$TG -$ celková spotreba vlády

$p_j -$ cena komodity *j*

$w -$ cena práce

$r -$ cena kapitálu

$M^H -$ príjem domácností,

$M^G -$ príjem vlády,

$M^I -$ príjem investícií

Exogénne premenné:

$\overline{TL} -$ celková ponuka práce

$\overline{TK} -$ celková ponuka kapitálu

$\alpha^H -$ časť celkových zásob kapitálu, ktoré sú vlastnené domácnosťami

$1 - \alpha^H -$ časť celkových zásob kapitálu, ktoré sú vlastnené vládou

$\beta^H -$ sklon domácností k spotrebe (časť príjmov, ktorá je určená na spotrebu)

$\beta^G -$ sklon vlády k spotrebe (časť príjmov, ktorá je určená na spotrebu)

4 Existencia riešenia

Existenciu rovnováhy budeme dokazovať pomocou Arrow-Debreuovej teórie, tak isto ako aj Lívia Šmátralová vo svojej práci [4]. Preto môžeme využiť niektoré jej spôsoby dokazovania a závery. Dôkaz uviedla Šmátralová pre jednoduchý model opísaný v časti 3.1. Pozrieme sa, či sa dá tento dôkaz použiť aj na model rozšírený o vládny sektor a investície.

4.1 CGE model ako abstraktná ekonomika

V tejto časti preformulujeme náš model s vládou a investíciami tak, aby mal tvar abstraktnej ekonomiky. Potom budeme môcť použiť lemu 1.1 (o existencii rovnovážneho bodu). Naša abstraktná ekonomika má teda tvar:

$$E = [\bar{H}, \bar{G}, \bar{I}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n, \bar{P}, u_H(H), u_G(G), u_I(I), \langle \bar{y}_1, \bar{p} \rangle, \dots, \langle \bar{y}_n, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}};$$
$$A_H(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p}), A_G(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p}), A_I(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p}), \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n, \bar{P}].$$

Množiny $\bar{H}, \bar{G}, \bar{I}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n, \bar{P}$ predstavujú hráčov na trhu, $\bar{H}, \bar{G}, \bar{I}$ sú spotrebitelia, $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n$ sú výrobcovia a $\bar{P}$ je trhový hráč. Hráči volia stratégiu z prislúchajúcich množín $u_H(H), u_G(G), u_I(I), \langle \bar{y}_1, \bar{p} \rangle, \dots, \langle \bar{y}_n, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}}$, pričom musia byť splnené ohraničenia na spotrebu $A_H(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p}), A_G(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p}), A_I(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p}), \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n, \bar{P}$. Poďme si podrobnejšie predstaviť túto hru:

- $\bar{H}$ predstavuje množinu spotrebných košov pre domácnosť, ktorá je definovaná nasledovne:
$$\bar{H} = \mathbb{R}_+^n = \{H = (H_1, \dots, H_n) | H_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n\} \tag{4.1}$$

- $\bar{G}$ predstavuje množinu spotrebných košov vlády, ktorá je definovaná nasledovne:
$$\bar{G} = \mathbb{R}_+^n = \{G = (G_1, \dots, G_n) | G_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n\} \tag{4.2}$$

- $\bar{I}$ predstavuje množinu spotrebných košov investícií, ktorá je definovaná nasledovne:
$$\bar{I} = \mathbb{R}_+^n = \{I = (I_1, \dots, I_n) | I_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n\} \tag{4.3}$$

- $\bar{Y}_j$ predstavuje produkčnú množinu j-teho odvetvia $(\forall j = 1, \dots, n)$, ktorá je definovaná nasledovne:

$$\bar{Y} = \{\bar{y}_j = \left(-X_{1j}, \dots, -X_{j-1,j}, Y_j - X_{jj} - X_{j+1,j}, \dots, -X_{nj}, -L_j, -K_j\right) | \\ | \, Y_j \le f_j\left(X_{1j}, \dots, X_{nj}, L_j, K_j\right)\}, \tag{4.4}$$

kde f_j je produkčná funkcia j-teho odvetvia.

- $\bar{P}$ predstavuje množinu cenových stratégií „trhového hráča“, ktorý určuje ceny s cieľom dosiahnuť rovnováhu ponuky a dopytu. Definujeme ju ako:

$$\bar{P} = \{\bar{p} = (p_1, \dots, p_n, w, r) | p_i \ge 0 \ \forall i = 1, \dots, n, w \ge 0, r \ge 0, \\ \textstyle\sum_i p_i + w + r = 1\}. \tag{4.5}$$

- $u_H: \bar{H} \to \mathbb{R}$ predstavuje funkciu užitočnosti domácnosti

- $u_G: \bar{G} \to \mathbb{R}$ predstavuje funkciu užitočnosti vlády

- $u_I: \bar{I} \to \mathbb{R}$ predstavuje funkciu užitočnosti sektora investícií

- $\langle \bar{y}_j, \bar{p} \rangle$ je funkcia zisku j-teho odvetvia, $\langle \bar{y}_j, \bar{p} \rangle: \bar{Y}_j \times \bar{P} \to \mathbb{R}$, definujeme ju ako skalárny súčin vektorov $\bar{y}_j, \bar{p}$:

$$\langle \bar{y}_j, \bar{p} \rangle = p_j Y_j - \sum_i p_i X_{ij} - wL_j - rK_j \tag{4.6}$$

Zisk j-teho odvetvia je tvorený rozdielom medzi príjmami a výdavkami j-teho odvetvia. Príjmy získava j-te odvetvie z predaných tovarov, ktoré vyrobili, t.j. $p_j Y_j$, a výdavky majú na statky potrebné na výrobu $\left(\sum_j p_j X_{ij}\right)$, a tiež potrebujú prácu a kapitál, ktoré získavajú od domácností $\left(wL_j \text{ a } rK_j\right)$.

- $v_{\bar{p}}$ predstavuje užitočnosť trhu, $v_{\bar{p}}: \bar{H} \times \bar{G} \times \bar{I} \times \bar{Y}_1 \times \dots \times \bar{Y}_n \times \bar{P} \to \mathbb{R}$ a platí:

$$v_{\bar{p}}(H, G, I, \bar{y}_1, \dots \bar{y}_n, \bar{p}) = \\ = \sum_i p_i \left(\sum_j X_{ij} + H_i + G_i + I_i - Y_i \right) + w \left(\sum_j L_j - \overline{TL} \right) + r \left(\sum_j K_j - \overline{TK} \right) \tag{4.7}$$

- $A_H(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p})$ je multifunkcia vyjadrujúca ohraničenie pre spotrebu domácností. Spotreba je preto ohraničená, lebo príjem domácností deliaci sa na spotrebu a úspory je limitovaný príjmom z práce a príjmom z kapitálu, ktoré domácnosti vlastnia. Preto platí:

$$A_H = \left\{ H \in \bar{H} | \langle p, H \rangle \leq \beta^H \left(\sum_j wL_j + \propto^H \sum_j rK_j \right) \right\} \tag{4.8}$$

- $A_G(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p})$ je multifunkcia vyjadrujúca ohraničenie spotreby vlády. Keďže príjem je limitovaný príjmom z kapitálu, ktorý vláda vlastní, a navyše sa ešte delí na spotrebu a úspory, tak aj samotná spotreba je limitovaná a platí:

$$A_G = \left\{ G \in \bar{G} | \langle p, G \rangle \leq \beta^G (1 - \propto^H) \sum_j rK_j \right\} \tag{4.9}$$

- $A_I(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p})$ je multifunkcia vyjadrujúca ohraničenie príjmu investícií, keďže celý príjem ide na spotrebu a príjem je limitovaný úsporami domácností a vlády. Preto platí:

$$A_I = \left\{ I \in \bar{I} | \langle p, I \rangle \leq (1 - \beta^H) \left(\sum_j wL_j + \propto^H \sum_j rK_j \right) + (1 - \beta^G)(1 - \propto^H) \sum_j rK_j \right\} \tag{4.10}$$

- Pre výrobný sektor a trhového hráča nemáme žiadne ohraničenie.

4.2 Rovnováha

Na to, aby sme mohli použiť lemu 2.1 (o existencii rovnovážneho bodu) musíme overiť, či sú splnené všetky jej predpoklady.

Nanešťastie množiny $\bar{H}, \bar{G}, \bar{I}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n$ nie sú kompaktné, preto ich musíme nahradiť novými množinami, a to takým spôsobom, že pôvodné množiny umiestnime do kociek. Takže naše nové množiny majú tvar:

$\tilde{H} = \bar{H} \cap \{H \in \mathbb{R}^n | \|H\| \leq c\}$,

$\tilde{G} = \bar{G} \cap \{G \in \mathbb{R}^n | \|G\| \leq c\}$,

$\tilde{I} = \bar{I} \cap \{I \in \mathbb{R}^n | \|I\| \leq c\}$,

$\tilde{Y}_j = \bar{Y}_j \cap \{Y \in \mathbb{R}^{n+2} | \|Y\| \leq c\} \qquad \forall j = 1, \dots, n$, kde $c \in \mathbb{R}$ je kladná konštanta.

Takto nám vznikne modifikovaná ekonomika, pre ktorú budeme dokazovať existenciu riešenia. Modifikovaná ekonomika má tvar:

$$\tilde{E} = [\tilde{H}, \tilde{G}, \tilde{I}, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n, \bar{P}, u(H), u(G), u(I), \langle \tilde{y}_1, \bar{p} \rangle, \dots, \langle \tilde{y}_n, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}};$$
$$\tilde{A}_H(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n, \bar{p}), \tilde{A}_G(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n, \bar{p}), \tilde{A}_I(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n, \bar{p}), \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n, \bar{P}],$$

kde $\tilde{A}_H = A_H \cap \{\|H\| \leq c\}$, $\tilde{A}_G = A_G \cap \{\|G\| \leq c\}$, $\tilde{A}_I = A_I \cap \{\|I\| \leq c\}$.

4.2.1 Rovnováha v modifikovanej ekonomike

Teraz vyslovíme tvrdenie, podľa ktorého takáto modifikovaná ekonomika má rovnovážny bod.

Veta 4.1 (o existencii rovnovážneho bodu): *Modifikovanú ekonomika:*

$$\tilde{E} = [\tilde{H}, \tilde{G}, \tilde{I}, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n, \bar{P}, u(H), u(G), u(I), \langle \tilde{y}_1, \bar{p} \rangle, \dots, \langle \tilde{y}_n, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}};$$
$$\tilde{A}_H(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n, \bar{p}), \tilde{A}_G(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n, \bar{p}), \tilde{A}_I(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n, \bar{p}), \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n, \bar{P}]$$

má rovnovážny bod.

Dôkaz: Overíme, že takáto modifikovaná ekonomika spĺňa predpoklady z Arrow-Debreuovej lemy 2.1 o existencii rovnovážneho bodu.

Ohraničenosť množín $\tilde{H}, \tilde{G}, \tilde{I}, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n, \bar{P}$

Ohraničenosť množín $\tilde{H}, \tilde{G}, \tilde{I}, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n$ je zrejmá z ich definície.
Ohraničenosť množiny $\bar{P}$ je zrejmá z definície simplexu.

Uzavretosť množín $\tilde{H}, \tilde{G}, \tilde{I}, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n, \bar{P}$

Uzavretosť množín $\tilde{H}, \tilde{G}, \tilde{I}, \tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n$ je zrejmá z ich definície.
Uzavretosť množiny $\bar{P}$ je zrejmá z definície simplexu.

Konvexnosť množín $\widetilde{H}, \widetilde{G}, \widetilde{I}, \widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_n, \bar{P}$

Ak sú konvexné množiny $\bar{H}, \bar{G}, \bar{I}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n$, potom aj modifikované množiny $\widetilde{H}, \widetilde{G}, \widetilde{I}, \widetilde{Y}_1, \dots, \widetilde{Y}_n$ sú konvexné, pretože sme ich vytvorili ako prienik konvexných množín.

Preto nám stačí overiť konvexnosť pôvodných množín.

Konvexnosť množín $\bar{H}, \bar{G}, \bar{I}$ vyplýva z ich definície, t.j. $\bar{H} = \mathbb{R}_+^n$, $\bar{G} = \mathbb{R}_+^n$, $\bar{I} = \mathbb{R}_+^n$ pričom vieme, že množina $\mathbb{R}_+^n$ je konvexná.

Teraz overíme konvexnosť množín $\bar{Y}_j\ \forall j = 1, \dots, n$. Zoberme si ľubovoľné dva body $\bar{y}^1, \bar{y}^2 \in \bar{Y}_j$. Vieme, že platí: $Y_j^1 \leq f_j(X_{1j}^1, \dots, X_{nj}^1, L_j^1, K_j^1)$, resp. $Y_j^2 \leq f_j(X_{1j}^2, \dots, X_{nj}^2, L_j^2, K_j^2)$. Nech γ ľubovoľné číslo také, že $\gamma \in (0,1)$. Potom za predpokladu, že produkčná funkcia má konštantné výnosy z rozsahu, platí:

$$\gamma Y_j^1 \leq f_j(\gamma X_{1j}^1, \dots, \gamma X_{nj}^1, \gamma L_j^1, \gamma K_j^1) = \gamma f_j(X_{1j}^1, \dots, X_{nj}^1, L_j^1, K_j^1), \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}(1-\gamma)Y_j^2 &\leq f_j((1-\gamma)X_{1j}^2, \dots, (1-\gamma)X_{nj}^2, (1-\gamma)L_j^2, (1-\gamma)K_j^2) \\ &= (1-\gamma) f_j(X_{1j}^2, \dots, X_{nj}^2, L_j^2, K_j^2).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Sčítaním týchto dvoch nerovností (4.11) a (4.12)dostaneme:

$$\gamma Y_j^1 + (1-\gamma)Y_j^2 \leq \gamma f_j(X_{1j}^1, \dots, X_{nj}^1, L_j^1, K_j^1) + (1-\gamma) f_j(X_{1j}^2, \dots, X_{nj}^2, L_j^2, K_j^2), \tag{4.13}$$

z čoho vyplýva, že $\gamma \bar{y}_j^1 + (1-\gamma)\bar{y}_j^2 \in \bar{Y}_j$ a teda množina $\bar{Y}_j$ je konvexná pre každé *j=1,...,n*.

Konvexnosť množiny $\bar{P}$ je jasná z definície simplexu.[1]

Spojitosť funkcií $u_H(H), u_G(G), u_I(I), \langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}}$

V tomto modeli funkcie užitočnosti domácností $u_H(H)$ a vlády $u_G(G)$ majú tvar Cobb-Douglasovej funkcie, a za úžitkovú funkciu investícií $u_I(I)$ vezmeme Leontieffovu funkciu. Obidve tieto funkcie sú spojité.

Funkcia zisku *j*-teho produkčného odvetvia $\langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle$ je skalárny súčin a vieme, že skalárny súčin je spojitá funkcia.

Spojitosť funkcie užitočnosti trhu $v_{\bar{p}}$ vyplýva z toho, že je definovaná ako skalárny súčin.

---

[1] pozri [4], str. 30

Kvázikonkávnosť $u_H(H), u_G(G), u_I(I), \langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}}$

Definícia (kvázikonkávnosť): *Majme funkciu* $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. *Funkciu* f *nazývame kvázikonkávnou, ak pre ľubovoľné* $a^1, a^2 \in \mathbb{R}^N$ *také, že* $f(a^1) \leq f(a^2)$ *a pre ľubovoľné* $\lambda \in (0,1)$ *platí:*

$$f(\lambda a^1 + (1-\lambda)a^2) \geq f(a^1).$$

Vieme, že každá konkávna funkcia je aj kvázikonkávna. A keďže Cobb-Douglasova a Leontieffova funkcia, sú konkávne, tak z toho vyplýva, že úžitkové funkcie $u_H(H)$, $u_G(G)$ a $u_I(I)$ sú kvázikonkávne.

Funkcia zisku j-teho produkčného odvetvia $\langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle$ je v podstate definovaná ako skalárny súčin. A z definície skalárneho súčinu vyplýva, že je to lineárna funkcia. Každá lineárna funkcia je konkávna, a preto aj kvázikonkávna.

Kvázikonkávnosť funkcie užitočnosti trhu $v_{\bar{p}}$ taktiež vyplýva z toho, ako je definovaná.[2]

Spojitosť multifunkcií $\tilde{A}_H, \tilde{A}_G, \tilde{A}_I$

Multifunkcia je spojitá, ak je hemispojitá zdola a súčasne hemispojitá zhora.

Definícia (hemispojitosť zdola): *Nech je* $\Gamma: X \to Y$ *multifunkcia taká, že pre ľubovoľný bod* $x^0 \in X$ *je množina* $\Gamma(x^0)$ *neprázdna. Ak pre každé* $y^0 \in \Gamma(x^0)$ *a pre každú postupnosť* $\{x^k\} \in X$*, ktorá konverguje k* x^0 *pre* $k \to \infty$*, existuje postupnosť* $\{y^k\} \in Y$ *taká, že* $y^k \to y^0$ *pre* $k \to \infty$ *a* $y^k \in \Gamma(x^k)$*, potom multifunkcia* Γ *sa nazýva hemispojitá zdola v bode* $x^0 \in X$ *pre* $k \to \infty$.[3]

Definícia (hemispojitosť zhora): *Nech je* $\Gamma: X \to Y$ *multifunkcia taká, že pre ľubovoľný bod* $x^0 \in X$ *množina* $\Gamma(x^0)$ *je neprázdna. Multifunkcia* Γ *sa nazýva hemispojitá zhora v bode* $x^0 \in X$ *ak pre každú postupnosť* $\{x^k\} \in X$ *konvergujúcu k* x^0 *pre* $k \to \infty$, *ľubovoľná postupnosť* $\{y^k\} \in \Gamma(x^k)$ *konverguje k* $y^0 \in \Gamma(x^0)$.[4]

[2] pozri [4], str. 31
[3] pozri [4], str. 32
[4] pozri [4], str. 32

Podobne ako v práci [4], kde je urobený dôkaz spojitosti multifunkcie $\tilde{A}_H$, dokážeme aj my spojitosť multifunkcie, nie však len pre túto konkrétnu multifunkcie $\tilde{A}_H$, ale náš dôkaz rozšírime na všeobecnú multifunkciu.

Tvrdenie 4.1 (o spojitosti multifunkcie): *Majme všeobecnú multifunkciu, ktorá je daná vzťahom:*

$$A = \{x | \langle p, x\rangle \leq f(w, r) : x \geq 0, \|x\| \leq c, f - spojitá\}.$$

Takáto multifunkcia A je spojitá.

Dôkaz: Najskôr overíme, že multifunkcia A je hemispojitá zdola.

Multifunkcia A je neprázdna, pretože jej patrí nulový bod x^0. Teraz chceme dokázať, že pre ľubovoľný bod x_0 spĺňajúci podmienku $\langle p^0, x^0\rangle \leq f^0$ a pre ľubovoľnú postupnosť $\{(p^k, x^k)\}$ konvergujúcu k°(p^0, x^0) pre $k \to \infty$ existuje taká postupnosť $\{x^k\}$ konvergujúca k°H^0 pre $k \to \infty$, že bude splnená podmienka $\langle p^k, x^k\rangle \leq f^k$.

Rozoberieme to v dvoch krokoch. V prvom kroku nech bod x^0 spĺňa podmienku $\langle p^0, x^0\rangle < f^0$ a v druhom kroku, nech spĺňa podmienku $\langle p^0, x^0\rangle = f^0$.

1. Nech x^0 je ľubovoľný bod spĺňajúci podmienku $\langle p^0, x^0\rangle < f^0$, nech $\{(p^k, x^k)\}$ je ľubovoľná postupnosť konvergujúca k°(p^0, x^0) pre $k \to \infty$ a nech postupnosť $\{x^k\}$ je konštantná, t.j. $x^k = x^0$. Po dosadení x^0 za x^k dostávame $\langle p^k, x^0\rangle$, čo je lineárna funkcia od p^k, a teda je spojitá. Z toho vyplýva, že konverguje k bodu (p^0, x^0). pre $k \to \infty$. Preto vieme, že existuje taká konštanta $N \geq 1$, že pre každé $k \geq N$ bude splnená podmienka $\langle p^k, x^0\rangle \leq f^k$, takže $x^k \in A$.
2. Nech x^0 je ľubovoľný bod spĺňajúci podmienku $\langle p^0, x^0\rangle = f^0$ a nech $\{(p^k, x^k)\}$ je ľubovoľná postupnosť konvergujúca k°(p^0, x^0) pre $k \to \infty$. Potom postupnosť $\{x^k\}$ skonštruujeme nasledovne:

$$x^k = q^k x^0,$$

kde

$$q^k = \frac{f^k}{\langle p^k, x^0\rangle}.$$

Keďže f^k aj $\langle p^k, x^0\rangle$ sú spojité funkcie, tak platí, že pre $k \to \infty$ $q^k \to \frac{f^0}{\langle p^0, x^0\rangle} = 1$. Z toho vyplýva, že $\langle p^k, x^0\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} (p^0, x^0)$. Preto vieme, že existuje taká konštanta

$N \geq 1$, že pre každé $k \geq N$ bude splnená podmienka $\langle p^k, \frac{f^0}{\langle p^0, x^0 \rangle} x^0 \rangle \leq f^k$, takže $x^k \in A$.

Teraz overíme, že multifunkcia A je hemispojitá zhora.

Multifunkcia A je neprázdna, pretože jej patrí nulový bod x^0. Teraz chceme dokázať, že pre ľubovoľnú postupnosť $\{(p^k, x^k)\}$ konvergujúcu k bodu (p^0, x^0) pre $k \to \infty$ a pre ľubovoľnú postupnosť $\{x^k\}$, takú, že $x^k \in A$, a pre $k \to \infty$ $\{x^k\} \to x^0$, bod $x^0 \in A$. Vieme, že platí $\langle p^k, x^k \rangle \leq f^k$. Zo spojitosti skalárneho súčinu vyplýva, že pre $k \to \infty$ platí nerovnosť $\langle p^0, x^0 \rangle \leq f^0$, a teda $x^0 \in A$.

Tým sme ukázali, že multifunkcia A je hemispojitá aj zdola aj zhora v ľubovoľnom bode (p^0, x^0), a teda je spojitá v každom bode množiny. A tým sme dokázali naše tvrdenie.

Teraz nám stačí ukázať, že funkcie *TH, TG* a M_I sú spojité. Z ich definícií vidno, že sú to lineárne funkcie a teda sú spojité.

Neprázdnosť a konvexnosť multifunkcií $\tilde{A}_H, \tilde{A}_G, \tilde{A}_I$

Množiny $\tilde{A}_H, \tilde{A}_G, \tilde{A}_I$ sú neprázdne, pretože im patrí nulový bod ($H = (0, \ldots, 0) \in \tilde{A}_H$, $G = (0, \ldots, 0) \in \tilde{A}_G, I = (0, \ldots, 0) \in \tilde{A}_I$).

Z definície množín $\tilde{A}_H, \tilde{A}_G, \tilde{A}_I$ je zrejmé, že sú konvexné, pretože ide o uzavreté mnohosteny.[5]

Ukázali sme, že pre modifikovanú ekonomiku $\tilde{E}$ platia všetky predpoklady abstraktnej lemy, teda ekonomika $\tilde{E}$ má rovnovážny bod v zmysle Arrow-Debreuovej teórie.

4.2.2 Rovnováha v pôvodnej ekonomike

Naším cieľom je teraz ukázať, že rovnováha, ktorú sme našli v ekonomike $\tilde{E}$ je aj rovnováhou v našej pôvodnej ekonomike E.

[5] pozri [4], str. 34

Veta 4.3: *Existuje konštanta* $c \in \mathbb{R}$ *taká, že rovnováha ekonomiky* $\tilde{E}$ *je rovnováhou ekonomiky* E.

Dôkaz: Najskôr overíme ohraničenosť produkčných množín nezávisle od konštanty *c*, a potom overíme, či modifikovaná ekonomika spĺňa podmienky rovnováhy.

Označme: $\bar{Y} = \bar{Y}_1 \times \ldots \times \bar{Y}_n$ a

$$\bar{S} = \left\{ \begin{pmatrix} H_1,\cdots,H_n, & -\beta_H L, & -\beta_H \alpha_H K \\ G_1,\cdots,G_n, & 0, & -\beta_G(1-\alpha_H)K \\ I_1,\cdots,I_n, & -(1-\beta_H)L, & -(\alpha_H\beta_G + 1 - \alpha_H\beta_H - \beta_G)K \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} (H_1,\ldots,H_n) \in \bar{H}, (G_1,\ldots,G_n) \in \bar{G}, \\ (I_1,\ldots,I_n) \in \bar{I}, \\ 0 \le L \le \overline{TL}, 0 \le K \le \overline{TK} \end{matrix} \right\}$$

Definujme zobrazenie $Z: \bar{S} \times \bar{Y} \to \mathbb{R}^{n+2}$ vzťahom:

$$Z(S, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{3} S_{ij} - \sum_j \bar{y}_j \tag{4.14}$$

pre $S \in \bar{S}$ a $\bar{y} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \in \bar{Y}$.

Definujme množiny $\hat{S}, \hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_n$ vzťahmi:

$$\hat{S} = \pi_S\{(S,\bar{y}) | Z(S,\bar{y}) \le 0\},$$

$$\hat{Y}_j = \pi_j\{(S,\bar{y}) | Z(S,\bar{y}) \le 0\},$$

kde π_S a π_j sú prirodzené projekcie množiny $\bar{S} \times \bar{Y}$.

Ohraničenosť množín $H, G, I, Y_1, \ldots, Y_n$

V práci [4] je dôkaz urobený pre Cobb-Douglasovu funkciu a zmiešanú Cobb-Douglasovu a Leontieffovu funkciu. Tento dôkaz je možné použiť aj pre rozšírený model bezo zmeny. S cieľom rozšíriť možnosť výberu na iné typy produkčných funkcií urobíme dôkaz pre CES funkciu.

Ak množiny $H_i, G_i, I_i, Y_i, X_{ij}, L_i, K_i$ spĺňajú podmienku rovnováhy (4.14) potom vieme, že platí: $Z(S,\bar{y}) = \sum_{i=1}^{3} S_{ij} - \sum_j \bar{y}_j \le 0$. Z tejto nerovnosti vyplýva, že:

$$H_i + G_i + I_i + \textstyle\sum_j X_{ij} - Y_i \le 0, \tag{4.15}$$

$$L \le \overline{TL} \tag{4.16}$$

$$K \le \overline{TK}. \tag{4.17}$$

Nerovnosť (4.15) môžeme upraviť na tvar:

$$\textstyle\sum_j X_{ij} \le Y_i - H_i - G_i - I_i \le Y_i, \tag{4.18}$$

lebo H_i, G_i, I_i sú kladné.

Takže môžeme napísať, že:

$$\sum_j X_{ij} \le Y_i \quad \forall i = 1, \dots, n \tag{4.19}$$

Z toho vyplýva, že stačí dokázať ohraničenosť Y_j $\forall j = 1, \dots, n$.

Z nerovností (4.19), (4.16) a (4.17) dostávame vzťahy:

$$X_{ij} = \xi_{ij} Y_i, \sum_j \xi_{ij} \le 1, \xi_{ij} \ge 0 \; \forall i, j = 1, \dots, n, \tag{4.20}$$

$$L_i = \eta_i \overline{TL}, \sum_i \eta_i = 1, \eta_i \ge 0 \; \forall i = 1, \dots, n, \tag{4.21}$$

$$K_i = \mu_i \overline{TK}, \sum_i \mu_i = 1, \mu_i \ge 0 \; \forall i = 1, \dots, n. \tag{4.22}$$

CES produkčná funkcia má tvar:

$$Y_i = \left(\sum_j a_{ji} X_{ji}^{\rho} + \delta_{Li} L_i^{\rho} + \delta_{Ki} K_i^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \tag{4.23}$$

Po dosadení rovností (4.20), (4.21) a (4.22) do produkčnej funkcie (4.23) dostaneme:

$$Y_i \le f_i = \left(\sum_j a_{ji} \xi_{ji}^{\rho} Y_j^{\rho} + \delta_{Li} \eta_i^{\rho} \overline{TL}_i^{\rho} + \delta_{Ki} \mu_i^{\rho} \overline{TK}_i^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \quad \forall i = 1, \dots, n \tag{4.24}$$

Po úprave dostávame vzťah:

$$Y_i^{\rho} \le \sum_j a_{ji} \xi_{ji}^{\rho} Y_j^{\rho} + \theta_i \quad \forall i = 1, \dots, n, \tag{4.25}$$

kde $\theta_i = \delta_{Li} \eta_i^{\rho} \overline{TL}_i^{\rho} + \delta_{Ki} \mu_i^{\rho} \overline{TK}_i^{\rho} \le \infty$.

Predchádzajúci vzťah (4.25) zapíšeme do maticového tvaru:

$$(I - A^T) \Lambda^{\rho} \le \theta, \tag{4.26}$$

kde $A^T = \left\{ a_{ij} \xi_{ij}^{\rho} \right\}, \Lambda = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ a $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$.

Vzhľadom na to, že $a_{ij} \xi_{ij}^{\rho} > 0$ a $\sum_j a_{ij} \xi_{ij}^{\rho} \le \sum_j a_{ij} = 1 - \delta_{Li} - \delta_{Ki} < 1$ je matica $(I - A^T)$ regulárna, to znamená, že má inverznú maticu $(I - A^T)^{-1}$, ktorá má kladné prvky. Preto môžeme vzťah (4.26) upraviť a dostaneme: $\Lambda^{\rho} \le (I - A^T)^{-1} \theta$. A teda platí, že:

$$Y_i^{\rho} \le \sum_j \alpha_{ji} \xi_{ji}^{\rho} \theta_i \quad \forall i = 1, \dots, n, \tag{4.27}$$

kde $\left\{ \alpha_{ji} \xi_{ji}^{\rho} \right\} = (I - A^T)^{-1}$.

Z toho vyplýva, že:

$$0 < Y_i \leq \left(\sum_j \alpha_{ji} \xi_{ji}^{\rho} \theta_i\right)^{\frac{1}{\rho}} \quad \forall i = 1, \dots, n. \tag{4.28}$$

Teda výstup i-teho odvetvia Y_i, ktorý používa CES produkčnú funkciu je ohraničený pre ľubovoľné $i = 1, \dots, n$.

Z toho, že množiny $\hat{Y}_i$ spĺňajú ohraničenie, ktoré je nezávislé od c vyplýva, že aj množiny $\hat{H}, \hat{G}, \hat{I}$ sú ohraničené nezávislé od c a navyše z toho vyplýva, že v rovnováhe pre dostatočne veľké c platí, že $\tilde{A}_H = A_H$, teda aj $\tilde{A}_G = A_G$, $\tilde{A}_I = A_I$.

Teraz ukážeme, že pre rovnovážny bod $(H^*, G^*, I^*, \tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)$ ekonomiky $\tilde{E}$ platia rovnovážne rovnice CGE modelu z tretej kapitoly.

Z definície rovnovážneho bodu vyplýva:

- pre rovnovážny vektor spotreby domácností $H^* \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)$ platí:

$$u_H(H^*) = \max_{H \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)} u_H(H) \tag{4.29}$$

- pre rovnovážny vektor spotreby vlády $G^* \in \tilde{A}_G(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)$ platí:

$$u_G(G^*) = \max_{G \in \tilde{A}_G(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)} u_G(G) \tag{4.30}$$

- pre rovnovážny vektor spotreby investícií $I^* \in \tilde{A}_I(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)$ platí:

$$u_I(I^*) = \max_{I \in \tilde{A}_I(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)} u_I(I) \tag{4.31}$$

- pre rovnovážny produkčný vektor j-teho odvetvia ($j=1,\dots,n$) $\tilde{y}^* \in \tilde{Y}_j$ platí:

$$\langle \tilde{y}_j^*, \bar{p}^* \rangle = \max_{\tilde{y}_j \in \tilde{Y}_j} \langle \tilde{y}_j, \bar{p}^* \rangle \tag{4.32}$$

- pre rovnovážny vektor cien $\bar{p}^* \in \bar{P}$ platí:

$$v_{\bar{p}}(H^*, G^*, I^*, \tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*) = \max_{\bar{p} \in \bar{P}} v_{\bar{p}}(H^*, G^*, I^*, \tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*) \tag{4.33}$$

Z definície (4.5) vyplýva, že vektor cien $\bar{p}^*$ je nezáporný. Pre Cobb-Douglasovu funkciu užitočnosti spotrebiteľov platí, že ak $\bar{p}_i^* \to 0$ (pre ľubovoľné $i = 1, \dots, n+2$), tak rastie podmienený dopyt po statkoch i neobmedzene. To znamená, že ceny v rovnováhe musia byť kladné, t.j. $\bar{p}^* > 0$.

Z rovníc (4.31), (4.32), (4.33), z definícií multifunkcií a z toho, že úžitkové funkcie sú rastúce vyplýva, že:

$$\langle p^*, H^* \rangle = \beta^H \left(w^* \sum_j L_j^* + \alpha^H r^* \sum_j K_j^* \right) \tag{4.34}$$

$$\langle p^*, G^* \rangle = \beta^G (1 - \alpha^H) r^* \sum_j K_j^* \tag{4.35}$$

$$\langle p^*, I^* \rangle = (1 - \beta^H) \left(\sum_j w L_j + \propto^H \sum_j r K_j \right) + (1 - \beta^G)(1 - \propto^H) \sum_j r K_j \tag{4.36}$$

Sčítaním rovníc (4.34), (4.35) a (4.36) dostaneme:

$$\langle p^*, H^* \rangle + \langle p^*, G^* \rangle + \langle p^*, I^* \rangle = w^* \sum_j L_j^* + r^* \sum_j K_j^* \tag{4.37}$$

Keďže ceny tovarov sú kladné, zisková funkcia j-teho odvetvia rastie s rastúcou hodnotou výstupu Y_j. Z definície ziskovej funkcie a z rovnice (4.32) potom vyplýva:

$$Y_j^* = f_j\left(X_{1j}^*, \dots, X_{nj}^*, L_j^*, K_j^*\right). \tag{4.38}$$

Ako je uvedené v práci [4], z konštantných výnosov z rozsahu v rovnováhe vyplýva nulový zisk pre všetky výrobné odvetvia. Lebo keby bol zisk rôzny od 0, z konštantných výnosov z rozsahu vyplýva, že ak zvýšime množstvo vstupov, zvýši sa nám výstup a tým sa zväčší zisk produkčného odvetvia, čo je v spore s tým, že sme v rovnováhe. Preto musí platiť peňažná rovnováha na trhu, t.j. platí:

$$\langle \tilde{y}_j^*, \bar{p}^* \rangle = 0. \tag{4.39}$$

Pre užitočnosť trhu v rovnovážnom bode platí:

$$v_{\bar{p}}(H^*, G^*, I^*, \tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*) =$$

$$= \sum_i p_i^* \left(\sum_j X_{ij}^* + H_i^* + G_i^* + I_i^* - Y_i^* \right) + w^* \left(\sum_j L_j^* - \overline{TL} \right) + r^* \left(\sum_j K_j^* - \overline{TK} \right) = 0 \tag{4.40}$$

Rovnovážny úžitok trhu môžeme napísať aj pomocou vektora Z^* nasledovne:

$$v_{\bar{p}}(H^*, G^*, I^*, \tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*) =$$

$$\sum_i p_i^* \left(\sum_j X_{ij}^* + H_i^* + G_i^* + I_i^* - Y_i^* \right) + w^* \left(\sum_j L_j^* - \overline{TL} \right) + r^* \left(\sum_j K_j^* - \overline{TK} \right) =$$

$$= \left[\sum_i p_i^* \left(\sum_j X_{ij}^* - Y_i^* \right) + w^* \sum_j L_j^* + r^* \sum_j K_j^* \right] + \left[\sum_i p_i^* (H_i^* + G_i^* + I_i^*) - w^* \overline{TL} - r^* \overline{TK} \right] = \tag{4.41}$$

$$= -\langle \sum_j \bar{y}_j^*, \bar{p}^* \rangle + \langle \sum_{i=1}^{3} S_{ij}^*, \bar{p}^* \rangle = \langle Z^*, \bar{p}^* \rangle$$

Teraz ukážeme, že v rovnováhe nemôže byť $Z^* > 0$, t.j. nemôže platiť, že $Z_i^* > 0$ pre každé $i = 1, \dots, n+2$. Označme $\bar{p}' = \left(\frac{\varepsilon}{n+1}, \dots, \frac{\varepsilon}{n+1}, 1-\varepsilon, \frac{\varepsilon}{n+1}, \dots, \frac{\varepsilon}{n+1}\right)$, vektor $\bar{p}'$ je rôzny od vektora rovnovážnych cien $\bar{p}^*$, kde $\varepsilon \in (0,1)$ je ľubovoľná konštanta a $1-\varepsilon$ je ξ-ta zložka vektora $\bar{p}'$. Predpokladajme, že $Z_\xi^* > 0$ pre nejaké $\xi \in (1, \dots, n+2)$ Podľa definície rovnovážneho bodu musí platiť:

$$0 = \langle Z^*, \bar{p}^* \rangle \geq \langle Z^*, \bar{p}' \rangle = (1-\varepsilon) Z_\xi^* + \frac{\varepsilon}{n+1} \sum_{i \neq \xi} Z_i^* \tag{4.42}$$

Z nerovnice (4.42) pre $\varepsilon \to 0$ dostávame:

$$0 = \langle Z^*, \bar{p}^* \rangle \geq \langle Z^*, \bar{p}' \rangle = Z_\xi^*, \tag{4.43}$$

čo je v spore s tým, že $Z_\xi^* > 0$. Z toho vyplýva, že $Z_i^* \leq 0$ pre každé i=1,...,n+2, t.j.:

$$\begin{gathered} \sum_j X_{ij}^* + H_i^* + G_i^* + I_i^* - Y_i^* \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \sum_j L_j^* - \overline{TL} \leq 0, \\ \sum_j K_j^* - \overline{TK} \leq 0. \end{gathered} \tag{4.44}$$

Z nulového úžitku trhového hráča a z toho, že vektor cien $\bar{p}^*$ je kladný, tak v rovnováhe musia platiť rovnosti:

$$\begin{gathered} \sum_j X_{ij}^* + H_i^* + G_i^* + I_i^* - Y_i^* = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \sum_j L_j^* - \overline{TL} = 0, \\ \sum_j K_j^* - \overline{TK} = 0. \end{gathered} \tag{4.45}$$

Tým sme dokázali, že v rovnováhe platia všetky príslušné rovnovážne rovnice CGE modelu. Z toho, že Y_i, H, G, I spĺňajú ohraničenie, ktoré je nezávislé od c, a z toho, že pre dostatočne veľké c platí: $\tilde{A}_H = A_H$, $\tilde{A}_G = A_G$, $\tilde{A}_I = A_I$, tak rovnováha nenastáva iba na ohraničených množinách, ale aj na pôvodných. A teda rovnováha platí v pôvodnom CGE modeli.

5 Rozšírenie modelu o dane

Doteraz sme predpokladali, že vláda má iba príjem z kapitálu, ktorý vlastní. Teraz budeme uvažovať, že k tomu ešte pribudne príjem z vybraných daní. Dane však zjednodušíme a budeme predpokladať, že vláda vyberá rovnú daň $\tau \in (0,1)$, a to takú, že zdaňuje príjem domácností a príjem produkčného sektora.

Takže pre príjem domácností platí, že zo svojho pôvodného príjmu zaplatia daň τ. Veľkosť príjmu po zaplatení daní je rovná: $M^H = (1-\tau)\left(\sum_j wL_j + \alpha^H \sum_j rK_j\right)$. Z tohto príjmu ide časť β^H na spotrebu a zvyšok $(1-\beta^H)$ na investície.

Príjmy vlády sú teraz zložené z kapitálu, ktorý vlastní, a z daní, ktoré vyberie od domácností a od firiem. Teda príjem vlády je: $M^G = (1-\alpha^H)\sum_j rK_j + \tau\left(\sum_j wL_j + \alpha^H \sum_j rK_j\right) + \tau \sum_j p_j Y_j$. Časť β^G z tohto príjmu ide na spotrebu a časť $(1-\beta^G)$ na investície.

Preto pre príjem investícií platí: $M^I = (1-\beta^H)M^H + (1-\beta^G)M^G$, čo môžeme upraviť na tvar:

$$M^I = [(1-\beta^H)(1-\tau) + (1-\beta^G)\tau]\left(\sum_j wL_j + \alpha^H \sum_j rK_j\right) + (1-\beta^G)(1-\alpha^H)\sum_j rK_j + (1-\beta^G)\,\tau \sum_j p_j Y_j.$$

Navyše sa ešte zmení aj príjem produkčného sektora, keďže aj produkčný sektor musí zo svojho pôvodného príjmu zaplatiť daň τ.

5.1 Rovnice modelu

Rovnice modelu rozšíreného o dane sa zmenia, a to takým spôsobom, že sa zmenia príjmy jednotlivých subjektov v ekonomike. Nové rovnice majú teda tvar:

Produkcia:

$$Y_j = f_j\left(X_{1j}, \dots, X_{nj}, L_j, K_j\right)$$

Dopyt firiem:

$$L_j = L_j\left(Y_j, w, r, p\right)$$

$$K_j = K_j\left(Y_j, w, r, p\right)$$

$$X_{ij} = X_{ij}\left(Y_j, w, r, p\right)$$

Dopyt domácností:

$$H_j = H_j(TH, p)$$

Dopyt vlády:

$$G_j = G_j(TG, p)$$

Dopyt investícií:

$$I_j = I_j(M^I, p)$$

Rovnica nulového zisku:

$$p_j Y_j = wL_j + rK_j + \sum_i p_i X_{ij}$$

Rovnováha na trhoch:

$$Y_j = \sum_i X_{ij} + H_j + G_j + I_j$$

$$\overline{TL} = \sum_j L_j$$

$$\overline{TK} = \sum_j K_j$$

Príjmy domácnosti:

$$M^H = (1-\tau)\left(\sum_j wL_j + \alpha^H \sum_j rK_j\right)$$

Príjmy vlády:

$$M^G = (1-\alpha^H)\sum_j rK_j + \tau\left(\sum_j wL_j + \alpha^H \sum_j rK_j + \sum_j (p_j Y_j)\right)$$

Príjmy investícií:

$$M^I = [(1-\beta^H)(1-\tau) + (1-\beta^G)\tau]\left(\sum_j wL_j + \alpha^H \sum_j rK_j\right) +$$
$$+ (1-\beta^G)(1-\alpha^H)\sum_j rK_j + (1-\beta^G)\,\tau \sum_j (p_j Y_j)$$

Rozpočtové ohraničenia:

$$TH = \beta^H M^H$$

$$TG = \beta^G M^G$$

5.2 Premenné v modeli

5.2.1. Endogénne premenné

Y_j – produkcia v sektore *j*

L_j – dopyt po práci v sektore *j*

K_j – dopyt po kapitáli v sektore *j*

X_{ij} – dopyt po komodite *j* v sektore *i*

H_j – dopyt po komodite *j* v sektore rozšíriť domácností

G_j – dopyt po komodite *j* v sektore vlády

I_j – dopyt po komodite *j* v sektore investícií

$TH -$ celková spotreba domácností

$TG -$ celková spotreba vlády

$p_j -$ cena komodity j

$w -$ cena práce

$r -$ cena kapitálu

$M^H -$ príjem domácností,

$M^G -$ príjem vlády,

$M^I -$ príjem investícií

5.2.2. Exogénne premenné

$\overline{TL} -$ celková ponuka práce

$\overline{TK} -$ celková ponuka kapitálu

$\tau -$ daň z príjmu

$\alpha^H -$ časť celkových zásob kapitálu, ktoré sú vlastnené domácnosťami

$1 - \alpha^H -$ časť celkových zásob kapitálu, ktoré sú vlastnené vládou

$\beta^H -$ sklon domácností k spotrebe (časť príjmov, ktorá je určená na spotrebu)

$\beta^G -$ sklon vlády k spotrebe (časť príjmov, ktorá je určená na spotrebu)

5.3 CGE model ako abstraktná ekonomika

V tomto modeli budeme používať ohraničené modifikované množiny.

Oproti modelu v kapitole 3 sa nám zmení funkcia zisku výrobného odvetvia a multifunkcie $\tilde{A}_H, \tilde{A}_G, \tilde{A}_I$. Preto ich musíme predefinovať:

- $\langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle$ je funkcia zisku j-teho odvetvia, $\langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle : \bar{Y}_j \times \bar{P} \to \mathbb{R}$, definujeme ju ako skalárny súčin vektorov $\bar{y}_j, \bar{p}$, znížený o daň:

$$\langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle = \left(p_j Y_j - \sum_i p_i X_{ij} - wL_j - rK_j \right)(1 - \tau) \tag{5.1}$$

- multifunkcia $\tilde{A}_H(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p})$, ktorá určuje ohraničenie pre spotrebu domácnosti je daná vzťahom:

$$\tilde{A}_H = \left\{ H \in \bar{H} | \langle p, H \rangle \leq \beta^H (1-\tau) \left(\sum_j wL_j + \propto^H \sum_j rK_j \right) \right\} \tag{5.2}$$

- multifunkcia $\tilde{A}_G(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p})$, ktorá určuje ohraničenie pre spotrebu vlády je daná vzťahom:

$$\tilde{A}_G = \{ G \in \bar{G} | \langle p, G \rangle \leq \beta^G M^G \} \tag{5.3}$$

- multifunkcia $A_I(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{p})$, ktorá určuje ohraničenie pre spotrebu investícií je daná vzťahom:

$$\tilde{A}_I = \{ I \in \bar{I} | \langle p, I \rangle \leq M^I \} \tag{5.4}$$

5.4 Overenie predpokladov

V časti 4.3 sme dokázali, že ak ekonomika spĺňa predpoklady dané lemou 2.1 (o existencii rovnovážneho bodu), tak potom existuje rovnováha v danej ekonomike. Preto nám stačí overiť tieto predpoklady.

Z predpokladov, ktoré majú platiť, budeme overovať len spojitosť a kvázikonkávnosť funkcií $\langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle$ $\forall j = 1, \dots, n$ a spojitosť multifunkcií A_H, A_G, A_I, pretože zvyšné predpoklady by sme dokazovali identicky ako v kapitole 4.

Spojitosť funkcií $\langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle$

Funkcia zisku j-teho produkčného odvetvia $\langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle$ je skalárny súčin vynásobený konštantou $(1-\tau)$ a vieme, že skalárny súčin vynásobený konštantou je spojitá funkcia.

Kvázikonkávnosť funkcií $\langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle$

Z definície funkcií $\langle \tilde{y}_j, \bar{p} \rangle$ vidno, že ide o lineárne funkcie. Vieme, že každá lineárna funkcia je konkávna, a preto je aj kvázikonkávna.

Spojitosť multifunkcií $\tilde{A}_H, \tilde{A}_G, \tilde{A}_I$

Z tvrdenia 4.1 (o spojitosti multifunkcie) vyplýva, že na dokázanie spojitosti multifunkcií nám stačí dokázať spojitosť funkcií *TH, TG* a M^I. Z ich definície vidno, že sú to lineárne funkcie, a teda sú spojité. A preto aj multifunkcie $\tilde{A}_H, \tilde{A}_G, \tilde{A}_I$ sú spojité.

Teraz ukážeme, že pre rovnovážny bod $(H^*, G^*, I^*, \tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)$ ekonomiky $\tilde{E}$ platia rovnovážne rovnice CGE modelu.

Tak isto vo štvrtej kapitole platí pre rovnovážny bod:

- pre rovnovážny vektor spotreby domácností $H^* \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)$ platí:

$$u_H(H^*) = \max_{H \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)} u_H(H) \tag{5.5}$$

- pre rovnovážny vektor spotreby vlády $G^* \in \tilde{A}_G(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)$ platí:

$$u_G(G^*) = \max_{G \in \tilde{A}_G(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)} u_G(G) \tag{5.6}$$

- pre rovnovážny vektor spotreby investícií $I^* \in \tilde{A}_I(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)$ platí:

$$u_I(I^*) = \max_{I \in \tilde{A}_I(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)} u_I(I) \tag{5.7}$$

- pre rovnovážny produkčný vektor *j*-teho odvetvia (*j=1,...,n*) $\tilde{y}^* \in \tilde{Y}_j$ platí:

$$\langle \tilde{y}_j^*, \bar{p}^* \rangle = \max_{\tilde{y}_j \in \tilde{Y}_j} \langle \tilde{y}_j, \bar{p}^* \rangle \tag{5.8}$$

- pre rovnovážny vektor cien $\bar{p}^* \in \bar{P}$ platí:

$$v_{\bar{p}}(H^*, G^*, I^*, \tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*) = \max_{\bar{p} \in \bar{P}} v_{\bar{p}}(H^*, G^*, I^*, \bar{y}_1^*, \dots, \bar{y}_n^*, \bar{p}^*) \tag{5.9}$$

Z definície (4.5) vyplýva, že vektor cien $\bar{p}^*$ je nezáporný. Pre Cobb-Douglasovu funkciu užitočnosti spotrebiteľov platí, že ak $\bar{p}_i^* \to 0$ (pre ľubovoľné $i = 1, \dots, n+2$), tak rastie podmienený dopyt po statkoch i neobmedzene. To znamená, že ceny v rovnováhe musia byť kladné, t.j. $\bar{p}^* > 0$.

Z rovnice (5.5), z definície multifunkcie a z toho, že úžitkové funkcie sú rastúce vyplýva, že v multifunkcii musí platiť rovnosť, t.j:

$$\langle p^*, H^* \rangle = \beta^H (1-\tau) \left(w^* \sum_j L_j^* + \alpha^H r^* \sum_j K_j^* \right) \tag{5.10}$$

Tak isto aj pre ostatných spotrebiteľov musí platiť rovnosť, t.j.:

$$\langle p^*, G^* \rangle = \beta^G M^G \tag{5.11}$$

$$\langle p^*, I^* \rangle = M^I \tag{5.12}$$

Keďže ceny tovarov sú kladné, zisková funkcia j-teho odvetvia rastie s rastúcou hodnotou výstupu Y_j. Z definície ziskovej funkcie a z rovnice (5.8) potom vyplýva:

$$Y_j^* = f_j\left(X_{1j}^*, \dots, X_{nj}^*, L_j^*, K_j^*\right). \tag{5.13}$$

Ako sme uviedli v kapitole 4, z konštantných výnosov z rozsahu v rovnováhe vyplýva nulový zisk pre všetky výrobné odvetvia, t.j. platí:

$$\langle \tilde{y}_j^*, \bar{p}^* \rangle = 0. \tag{5.14}$$

Pre užitočnosť trhu v rovnovážnom bode platí:

$$\begin{aligned} & v_{\bar{p}}(H^*, G^*, I^*, \tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*) = \\ & = \sum_i p_i^* \left(\sum_j X_{ij}^* + H_i^* + G_i^* + I_i^* - Y_i^* \right) + w^* \left(\sum_j L_j^* - \overline{TL} \right) + r^* \left(\sum_j K_j^* - \overline{TK} \right) = 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Tak ako v kapitole 4 môžeme rovnovážny úžitok trhu môžeme napísať aj pomocou vektora Z^* nasledovne:

$$v_{\bar{p}}(H^*, G^*, I^*, \tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*) = \langle Z^*, \bar{p}^* \rangle \tag{5.16}$$

Ako sme predtým ukázali, v rovnováhe platí, že $Z^* \leq 0$, t.j. $Z_i^* \leq 0$ pre každé $i = 1, \dots, n + 2$. Z nulového úžitku trhového hráča a z toho, že vektor cien $\bar{p}^*$ je kladný, tak v rovnováhe musia platiť rovnosti:

$$\begin{gathered} \sum_j X_{ij}^* + H_i^* + G_i^* + I_i^* - Y_i^* = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ \sum_j L_j^* - \overline{TL} = 0, \\ \sum_j K_j^* - \overline{TK} = 0. \end{gathered} \tag{5.17}$$

Tým sme dokázali, že v rovnováhe platia všetky príslušné rovnovážne rovnice CGE modelu. Z toho, že Y_i, H, G, I spĺňajú ohraničenie, ktoré je nezávislé od c, a z toho, že pre dostatočne veľké c platí: $\tilde{A}_H = A_H$, $\tilde{A}_G = A_G$, $\tilde{A}_I = A_I$, tak rovnováha nenastáva iba na ohraničených množinách, ale aj na pôvodných. A teda rovnováha platí v pôvodnom CGE modeli.

6 Model rozšírený o zahraničie

Doteraz sme počítali s modelmi s uzavretou ekonomikou. Teraz otvoríme ekonomiku svetovému trhu. Pre zjednodušenie skonštruujeme tento model bez sektora vlády a investícií, ale tie sa dajú bez problémov doplniť.

Takže v tomto modeli na strane výrobcov figurujú firmy a na strane spotrebiteľov je reprezentatívna domácnosť. Výrobcova delia svoju výrobu na domácu spotrebu a na export. Domácnosti využívajú na konzum okrem domácich výrobkov aj výrobky dovezené zo zahraničia. A taktiež aj výrobné odvetvia môžu spotrebovávať ako aj domáce tovary, tak aj zahraničné.

Zahraničie sa dá modelovať rôznymi spôsobmi. Najznámejším je asi Armingtonov prístup (viď. [3]). My sme sa inšpirovali prácou Willenbockela ([5]).

Predpokladáme, že domácnosti rozlišujú domáce a zahraničné tovary. Ale predpokladá sa, že substitúcia medzi zahraničnými a domácimi je elastickejšia ako substitúcia medzi inými tovarmi. To sa vyjadruje tým, že za funkciu užitočnosti sa volí vnorená funkcia. Funkcia CES je vnorená do Cobb-Douglasovej funkcie:

$$u(H) = \prod_i \left[\delta_i D_i^{s_i} + (1-\delta_i) M_i^{s_i}\right]^{\frac{\varepsilon_i}{s_i}}.$$

Príjem domácností plynie z vykonanej práce a z kapitálu. V tomto modeli kapitál je plne vlastnený domácnosťami. Všetok príjem domácností ide na spotrebu.

Hlavným rozdielom oproti jednoduchému modelu je fakt, že na trhu nemusí platiť celková rovnováha medzi ponukou a dopytom, pretože veľkosť exportu nemusí byť rovná veľkosti importu. Ale musí platiť čiastočná rovnováha medzi domácou ponukou a domácim dopytom, t.j.:

$$Y_j = \sum_j X_{ij} + D_j$$

Rovnováhy na trhu práce a na kapitálovom trhu musia platiť aj v tomto modeli:

$$\overline{TL} = \sum_j L_j$$

$$\overline{TK} = \sum_j K_j$$

Podstatou tohto modelu je, že ceny exportných výrobkov nie sú stanovené podľa cien na svetovom trhu, ale export sa realizuje za domáce ceny. Keby bol dopyt zahraničia po domácich tovaroch dokonale elastický, znamenalo by to, že ak sú domáce ceny nižšie ako svetové, tak by sa predalo všetko, a naopak, ak by ceny boli vyššie nepredalo by sa nič. Čím je cena vyššia, tým sa v zahraničí predá menej komodít, a teda objem exportu je klesajúcou funkciou ceny:

$$E_j = \gamma_j p_j^{\eta_j},$$

kde $-\infty < \eta_j < 0$.

Oproti Willenbockelovi ale zanedbávame výmenný kurz, pretože najväčším obchodným partnerom pre Slovensko je Európska únia, ktorej spoločnou menou je euro. Objem exportu teda závisí iba od ceny.

Import sa realizuje za svetové ceny, ktoré sú v našom modeli fixné. Potom pre výrobné odvetvia dostávame rovnicu nulového zisku:

$$p_j V_j = \sum_j p_j X_{ij} + \sum_j q_j Z_{ij} + wL_j + rK_j$$

6.1 Rovnice modelu

Produkcia:

$$V_j = Y_j + E_j$$

$$Y_j = f_j(X_{1j}, \dots, X_{nj}, Z_{1j}, \dots, Z_{nj}, L_j, K_j)$$

$$E_j = \gamma_j p_j^{\eta_j}$$

Dopyt firiem:

$$L_j = L_j(V_j, w, r, p, q)$$

$$K_j = K_j(V_j, w, r, p, q)$$

$$X_{ij} = X_{ij}(V_j, w, r, p, q)$$

$$Z_{ij} = Z_{ij}(V_j, w, r, p, q)$$

Dopyt domácnosti:

$$H_j = H_j(M^H, p)$$

Rovnica nulového zisku:

$$p_j V_j = \sum_j p_j X_{ij} + \sum_j q_j Z_{ij} + wL_j + rK_j$$

Rovnováha na trhoch:

$$Y_j = \sum_j X_{ij} + D_j$$

$$\overline{TL} = \sum_j L_j$$

$$\overline{TK} = \sum_j K_j$$

Príjmy domácnosti:

$$M^H = \sum_j wL_j + \sum_j rK_j$$

6.2 Premenné v modeli

6.2.1 Endogénne premenné:

V_j – produkcia v sektore j

Y_j – produkcia v sektore j idúca na domácu spotrebu

E_j – produkcia v sektore j idúca na export

L_j – dopyt po práci v sektore j

K_j – dopyt po kapitáli v sektore j

X_{ij} – dopyt po domácej komodite i v sektore j

Z_{ij} – dopyt po zahraničnej komodite i v sektore j

H_j – celkový dopyt domácností po komodite j

D_j – dopyt domácností po domácej komodite j

M_j – dopyt domácností po zahraničnej komodite j

p_j – cena domáca komodity j

q_j – cena zahraničná komodity j

w – cena práce

r – cena kapitálu

M^H – príjem domácností

6.2.2 Exogénne premenné:

$\overline{TL}$ – celková ponuka práce

$\overline{TK}$ – celková ponuka kapitálu

6.3 Model ako abstraktná ekonomika

$E = [\bar{H}, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n, \bar{P}, u(H), \langle \bar{v}_1, \bar{p} \rangle, \ldots, \langle \bar{v}_n, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}}; A_H(h_1, \ldots, h_n, p, q, w, r), \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n, \bar{P}]$.

- $\bar{H}$ predstavuje množinu spotrebných košov pre domácnosť, ktorá spotrebováva domáce aj zahraničné tovary a je definovaná nasledovne:

$$\bar{H} = \mathbb{R}_+^n = \{H = (H_1, \ldots, H_n) | H_i = (D_i, M_i), H_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, n\} \quad (6.1)$$

- $\bar{V}_j$ predstavuje produkčnú množinu j-teho odvetvia $(\forall j = 1, \ldots, n)$, ktorá na výrobu spotrebováva domáce aj zahraničné tovary a prácu a kapitál od domácností. Definovaná je nasledovne:

$$\begin{aligned} \bar{V}_j = \{\bar{v}_j = \big(&-X_{1j} - Z_{1j}, \ldots, -X_{j-1,j} - Z_{j-1,j}, V_j - X_{jj} - Z_{jj}, \\ &-X_{j+1,j} - Z_{j+1,j}, \ldots, -X_{nj} - Z_{nj}, -L_j, -K_j\big) | \\ &| V_j \leq f_j\big(X_{1j}, \ldots, X_{nj}, Z_{1j}, \ldots, Z_{nj}, L_j, K_j\big) + g_j\big(p_j\big)\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

kde f_j je produkčná funkcia j-teho odvetvia a g_j je funkcia exportu, ktorá je klesajúca v závislosti od ceny.

- $\bar{P}$ predstavuje množinu cenových stratégií „trhového hráča", ktorý určuje ceny s cieľom dosiahnuť rovnováhu ponuky a dopytu. Definujeme ju ako:

$$\begin{aligned} \bar{P} = \{\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n, w, r) | p_i \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots, n, w \geq 0, r \geq 0, \\ \textstyle\sum_i p_i + w + r = 1\}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

- $u: \bar{H} \to \mathbb{R}$ predstavuje funkciu užitočnosti domácnosti, v tomto prípade je definovaná nasledovne:

$$u(H) = \prod_i \left[\delta_i D_i^{s_i} + (1 - \delta_i) M_i^{s_i}\right]^{\frac{\varepsilon_i}{s_i}} \quad (6.4)$$

kde $\sum_i \varepsilon_i = 1$ a $0 < s_i < 1$, D_i - je dopyt domácností po domácich tovaroch a M_i - je dopyt po zahraničných tovaroch.

- $\langle \bar{v}_j, \bar{p} \rangle$ je funkcia zisku j-teho odvetvia, $\langle \bar{v}_j, \bar{p} \rangle: \bar{V}_j \times \bar{P} \to \mathbb{R}$, definujeme ju nasledovne:

$$\langle \bar{v}_j, \bar{p} \rangle = p_j V_j - \textstyle\sum_i p_i X_{ij} - \sum_i q_i Z_{ij} - w L_j - r K_j, \quad (6.5)$$

kde X_i - sú domáce tovary spotrebované výrobcami a Z_i - sú zahraničné tovary spotrebované výrobcami.

- $v_{\bar{p}}$ predstavuje užitočnosť trhu, $v_{\bar{p}}: \bar{D} \times \bar{Y}_1 \times \dots \times \bar{Y}_n \times \bar{P} \to \mathbb{R}$ a platí:

$$v_{\bar{p}}(D, \bar{y}_1, \dots \bar{y}_n, \bar{p}) =$$
$$= \sum_i p_i \left(\sum_j X_{ij} + D_i - Y_i \right) + w \left(\sum_j L_j - \overline{TL} \right) + r \left(\sum_j K_j - \overline{TK} \right) \tag{6.6}$$

- $A_H(h_1, \dots, h_n, p, q, w, r)$ je multifunkcia vyjadrujúca ohraničenie pre príjem domácností, ktorý je tvorený z ceny za vykonanú prácu a zo zisku z kapitálu. Preto platí:

$$A_H = \left\{ H \in \bar{H} | \langle p, D \rangle + \langle q, M \rangle \leq w \sum_j L_j + r \sum_j K_j \right\} \tag{6.7}$$

6.4 Overenie predpokladov

Keďže množiny $\bar{H}, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_n$ nie sú ohraničené, nahradíme ich rovnako ako v kapitole 4 modifikovanými množinami:$\tilde{H} = \bar{H} \cap \{H \in \mathbb{R}^n | \|H\| \leq c\}$, $\tilde{Y}_j = \bar{Y}_j \cap \{Y \in \mathbb{R}^{n+2} | \|Y\| \leq c\}$ $\forall j = 1, \dots, n$, kde $c \in \mathbb{R}$ je kladná konštanta.

Overme predpoklady pre takto modifikovanú ekonomiku $\tilde{E}$:

$$\tilde{E} = [\tilde{H}, \tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n, \bar{P}, u(H), \langle \tilde{v}_1, \bar{p} \rangle, \dots, \langle \tilde{v}_n, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}}; \tilde{A}_H(\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n, p, q, w, r), \tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n, \bar{P}],$$

kde $\tilde{A}_H = A_H \cap \{\|H\| \leq c\}$.

Ohraničenosť a uzavretosť množín $\tilde{H}, \tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n, \bar{P}$

Ohraničenosť a uzavretosť množín $\tilde{H}, \tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_n$ je zrejmá z ich definície.

Ohraničenosť a uzavretosť množiny $\bar{P}$ je zrejmá z definície simplexu.

Konvexnosť množín $\widetilde{H}, \widetilde{V}_1, \dots, \widetilde{V}_n, \bar{P}$

Konvexnosť $\bar{P}$ je zrejmá z definície simplexu.

Konvexnosť množiny $\bar{H}$ je tiež zrejmá z jej definície ako sme uviedli v kapitole 4. Modifikovanú množinu $\widetilde{H}$ sme vytvorili ako prienik konvexných množín, preto aj množina $\widetilde{H}$ je konvexná.

Teraz overíme konvexnosť množín $\bar{V}_j\ \forall j = 1, \dots, n$. Zoberme si ľubovoľné dva body $\bar{v}^1, \bar{v}^2 \in \bar{V}_j$. Vieme, že pre $\bar{v}^1, \bar{v}^2$ platí: $V_j^1 \leq f_j\left(X_{1j}^1, \dots, X_{nj}^1, Z_{1j}^1, \dots, Z_{nj}^1, L_j^1, K_j^1\right) + g_j\left(p_j\right)$, resp. $V_j^2 \leq f_j\left(X_{1j}^2, \dots, X_{nj}^2, Z_{1j}^2, \dots, Z_{nj}^2, L_j^2, K_j^2\right) + g_j\left(p_j\right)$. Nech γ je ľubovoľné číslo také, že $\gamma \in (0,1)$. Potom za predpokladu, že produkčná funkcia má konštantné výnosy z rozsahu, platí:

$$\begin{aligned} \gamma V_j^1 &\leq f_j\left(\gamma X_{1j}^1, \dots, \gamma X_{nj}^1, \gamma Z_{1j}^1, \dots, \gamma Z_{nj}^1, \gamma L_j^1, \gamma K_j^1\right) + g_j\left(\gamma p_j\right) = \\ &= \gamma f_j\left(X_{1j}^1, \dots, X_{nj}^1, Z_{1j}^1, \dots, Z_{nj}^1, L_j^1, K_j^1\right) + \gamma g_j\left(p_j\right) \\ &= \gamma\left[f_j\left(X_{1j}^1, \dots, X_{nj}^1, Z_{1j}^1, \dots, Z_{nj}^1 L_j^1, K_j^1\right) + g_j\left(p_j\right)\right], \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} (1-\gamma)V_j^2 &\leq f_j\big((1-\gamma)X_{1j}^2, \dots, (1-\gamma)X_{nj}^2, (1-\gamma)Z_{1j}^2, \dots, (1-\gamma)Z_{nj}^2, \\ &\qquad (1-\gamma)L_j^2, (1-\gamma)K_j^2\big) + g_j\left[(1-\gamma)p_j\right]\big) = \\ &= (1-\gamma)\left[f_j\left(X_{1j}^2, \dots, X_{nj}^2, Z_{1j}^2, \dots, Z_{nj}^2, L_j^2, K_j^2\right) + g_j\left(p_j\right)\right] \end{aligned} \tag{6.9}$$

Sčítaním týchto dvoch nerovností (6.8) a (6.9)dostaneme:

$$\begin{aligned} \gamma V_j^1 + (1-\gamma)V_j^2 &\leq \gamma\left[f_j\left(X_{1j}^1, \dots, X_{nj}^1, Z_{1j}^1, \dots, Z_{nj}^1, L_j^1, K_j^1\right) + g_j\left(p_j\right)\right] \\ &+ (1-\gamma)\left[f_j\left(X_{1j}^2, \dots, X_{nj}^2, Z_{1j}^2, \dots, Z_{nj}^2, L_j^2, K_j^2\right) + g_j\left(p_j\right)\right], \end{aligned} \tag{6.10}$$

z čoho vyplýva, že $\gamma\bar{v}_j^1 + (1-\gamma)\bar{v}_j^2 \in \bar{V}_j$ a teda množina $\bar{V}_j$ je konvexná pre každé *j=1,...,n*.

Spojitosť funkcií $u(H), \langle\tilde{v}_j, \bar{p}\rangle, v_{\bar{p}}$

V tomto modeli funkcia užitočnosti domácností $u(H)$ má tvar vnorenej funkcie, ktorá sa skladá z Cobb-Douglasovej funkcie a CES funkcie. Obidve tieto funkcie sú spojité, preto aj úžitková funkcia je spojitá.

Funkcia zisku j-teho produkčného odvetvia $\langle \tilde{v}_j, \bar{p} \rangle$ je podobne ako v kapitole 4 definovaná ako skalárny súčin a vieme, že skalárny súčin je spojitá funkcia.

Spojitosť funkcie $v_{\bar{p}}$, užitočnosti trhu, vyplýva z toho, že je definovaná ako skalárny súčin.

Kvázikonkávnosť $u(H), \langle \tilde{v}_j, \bar{p} \rangle, v_{\bar{p}}$

Vieme, že každá konkávna funkcia je aj kvázikonkávna. Vnorená funkcia užitočnosti je konkávna a preto aj kvázikonkávna.

Funkcia zisku j-teho produkčného odvetvia $\langle \tilde{v}_j, \bar{p} \rangle$ je definovaná ako skalárny súčin. A z definície skalárneho súčinu vyplýva, že je to lineárna funkcia. Každá lineárna funkcia je konkávna, a preto aj kvázikonkávna.

Kvázikonkávnosť funkcie užitočnosti trhu $v_{\bar{p}}$ takisto ako vo štvrtej kapitole vyplýva z toho, ako je definovaná.

Spojitosť multifunkcie $\tilde{A}_H$

Podľa tvrdenia 4.1 je (o spojitosti multifunkcie) multifunkcia $\tilde{A}_H$ spojitá, lebo funkcia $M^H = w \sum_i L_i + r \sum_i K_i$ je spojitá.

Neprázdnosť a konvexnosť multifunkcie $\tilde{A}_H$

Množina $\tilde{A}_H$ je neprázdna, pretože jej patrí nulový bod ($H = (0, \dots, 0) \in \tilde{A}_H$).

Z definície množiny $\tilde{A}_H$ je zrejmé, že je konvexná, pretože ide o uzavretý mnohosten.

Ukázali sme, že pre modifikovanú ekonomiku $\tilde{E}$ platia všetky predpoklady abstraktnej lemy, teda ekonomika $\tilde{E}$ má rovnovážny bod.

Teraz ukážeme, že rovnováha v ekonomike $\tilde{E}$ je tiež rovnováhou v ekonomike E.

Označme: $\bar{V} = \bar{V}_1 \times \dots \times \bar{V}_n$ a

$$\bar{S} = \{(D_1 + M_1, \dots, D_n + M_n, -L, -K) | (H_1, \dots, H_n) \in \bar{H}, 0 \leq L \leq \overline{TL}, 0 \leq K \leq \overline{TK}\}.$$

Pripomeňme si, ako je definovaný vektor $\bar{v}_j$:

$$\bar{v}_j = \left(-X_{1j} - Z_{1j}, \dots, -X_{j-1,j} - Z_{j-1,j}, V_j - X_{jj} - Z_{jj}, -X_{j+1,j} - Z_{j+1,j}, \dots, -X_{nj} - Z_{nj}, -L_j, -K_j\right)$$

Definujme zobrazenie $Z: \bar{S} \times \bar{V} \to \mathbb{R}^{n+2}$ vzťahom:

$$Z(S, \bar{v}) = S - \sum_j \bar{v}_j \tag{6.11}$$

pre $S \in \bar{S}$ a $\bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n) \in \bar{V}$.

Definujme množiny $\hat{S}, \hat{V}_1, \dots, \hat{V}_n$ vzťahmi:

$$\hat{S} = \pi_S\{(S, \bar{v}) | Z(S, \bar{v}) \leq 0\},$$

$$\hat{V}_j = \pi_j\{(S, \bar{v}) | Z(S, \bar{v}) \leq 0\},$$

kde π_S a π_j sú prirodzené projekcie množiny $\bar{S} \times \bar{V}$.

Ohraničenosť množín $\hat{H}, \hat{V}_1, \dots, \hat{V}_n$

Ohraničenosť $\hat{H}$ je zrejmá z definície $\hat{S}$.

Teraz dokážme ohraničenosť množín $\hat{V}_1, \dots, \hat{V}_n$ dokážeme pre Cobb-Douglasovu produkčnú funkciu.

Vieme, že platí: $Z(S, \bar{v}) = S - \sum_j \bar{v}_j \leq 0$. Z tejto nerovnosti vyplýva, že:

$$H_i + \sum_j X_{ij} + \sum_j Z_{ij} - V_i \leq 0, \tag{6.12}$$

$$L \leq \overline{TL} \tag{6.13}$$

$$K \leq \overline{TK}. \tag{6.14}$$

Nerovnosť (6.11) môžeme upraviť na tvar:

$$\sum_j X_{ij} + \sum_j Z_{ij} \leq V_i - H_i \leq V_i, \tag{6.15}$$

lebo pre všetky H_i platí, že sú kladné. Takže môžeme napísať, že:

$$\sum_j X_{ij} + \sum_j Z_{ij} \leq \mathrm{V}_i \quad \forall i = 1, \dots, n \tag{6.16}$$

Z toho vyplýva, že stačí dokázať ohraničenosť V_j $\forall j = 1, \dots, n$.

Z nerovnosti (6.16) dostávame vzťahy:

$$X_{ij} = \xi_{ij} V_i, \sum_j \xi_{ij} \leq 1, \xi_{ij} \geq 0 \; \forall i, j = 1, \dots, n, \tag{6.17}$$

$$Z_{ij} = \zeta_{ij} V_i, \sum_j \zeta_{ij} \leq 1, \zeta_{ij} \geq 0 \; \forall i, j = 1, \dots, n. \tag{6.18}$$

Z nerovností (6.13) a (6.14) dostávame vzťahy:

$$L_i = \eta_i \overline{TL}, \sum_i \eta_i = 1, \eta_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n, \tag{6.19}$$

$$K_i = \mu_i \overline{TK}, \sum_i \mu_i = 1, \mu_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n. \tag{6.20}$$

Cobb-Douglasova produkčná funkcia má tvar:

$$V_j = \prod_i \left(X_{ij}^{a_{ij}} Z_{ij}^{b_{ij}} \right) L_j^{\delta_L} K_j^{\delta_K} \tag{6.21}$$

Po dosadení vzťahov (6.17) - (6.20) do produkčnej funkcie (6.21) dostávame:

$$V_j = \prod_i \left[\left(\xi_{ij} V_i \right)^{a_{ij}} \left(\zeta_{ij} V_i \right)^{b_{ij}} \right] \left(\eta_j \overline{TL} \right)^{\delta_L} \left(\mu_j \overline{TK} \right)^{\delta_K} \tag{6.22}$$

Po zlogaritmovaní dostávame:

$$\ln V_j = \sum_i \left(a_{ij} + b_{ij} \right) \ln V_i + \theta, \tag{6.23}$$

kde $\theta = \sum_i \left(a_{ij} \ln \xi_{ij} + b_{ij} \ln \zeta_{ij} \right) + \delta_L \ln\left(\eta_j \overline{TL} \right) + \delta_K \ln\left(\mu_j \overline{TK} \right)$.

Vzťah (6.19) môžeme napísať do maticového tvaru:

$$(I - A^T)\Lambda \leq \theta,$$

kde $A^T = \{a_{ij} + b_{ij}\}$, $\Lambda = (\ln V_1, \dots, \ln V_n)^T$ a $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$.

Keďže $a_{ij} + b_{ij} < 1 \ \forall i, j$, tak matica $(I - A^T)$ má inverznú maticu, pre ktorú platí: $(I - A^T)^{-1} = \{\alpha_{ij}\}$. Preto môžeme napísať:

$$\ln V_j \leq \sum_i \alpha_{ij} \theta_j \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

Z toho vyplýva, že:

$$0 < V_j \leq e^{\sum_i \alpha_{ij} \theta_i} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Teda výstup j-teho odvetvia V_j je ohraničený pre ľubovoľné $j = 1, \dots, n$, nezávisle od c Z toho vyplýva, že aj množiny $\widehat{H}, \widehat{G}, \widehat{I}$ sú ohraničené nezávislé od c. A keďže v rovnováhe platí, že pre dostatočne veľké c: $\tilde{A}_H = A_H$, tak v ekonomike E existuje rovnováha, ktorá je zhodná s rovnováhou v ekonomike $\tilde{E}$.

Ešte ukážeme, že pre rovnovážny bod $(H^*, \tilde{v}_1^*, \dots, \tilde{v}_n^*, \bar{p}^*)$ ekonomiky $\tilde{E}$ platia rovnovážne rovnice CGE modelu.

Z definície rovnovážneho bodu vyplýva:

- pre rovnovážny vektor spotreby domácností $H^* \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)$ platí:

$$u_H(H^*) = \max_{H \in \tilde{A}_H(\tilde{y}_1^*, \dots, \tilde{y}_n^*, \bar{p}^*)} u_H(H) \tag{6.24}$$

- pre rovnovážny produkčný vektor *j*-teho odvetvia (*j=1,...,n*) $\tilde{v}^* \in \tilde{V}_j$ platí:

$$\langle \tilde{v}_j^*, \bar{p}^* \rangle = \max_{\tilde{v}_j \in \tilde{V}_j} \langle \tilde{v}_j, \bar{p}^* \rangle \tag{6.25}$$

- pre rovnovážny vektor cien $\bar{p}^* \in \bar{P}$ platí:

$$v_{\bar{p}}(H^*, \tilde{v}_1^*, \dots, \tilde{v}_n^*, \bar{p}^*) = \max_{\bar{p} \in \bar{P}} v_{\bar{p}}(H^*, \bar{v}_1^*, \dots, \bar{v}_n^*, \bar{p}^*) \tag{6.26}$$

Z definície (6.3) vyplýva, že vektor cien $\bar{p}^*$ je nezáporný. Pre Cobb-Douglasovu funkciu užitočnosti spotrebiteľov platí, že ak $\bar{p}_i^* \to 0$ (pre ľubovoľné $i = 1, \dots, n+2$), tak rastie podmienený dopyt po statkoch *i* neobmedzene. To znamená, že ceny v rovnováhe musia byť kladné, t.j. $\bar{p}^* > 0$.

Z rovnice (6.24), z definície multifunkcie a z toho, že úžitková funkcia je rastúca vyplýva, že:

$$\langle p^*, D^* \rangle + \langle q^*, M^* \rangle = w^* \sum_j L_j^* + r^* \sum_j K_j^* \tag{6.27}$$

Keďže ceny tovarov sú kladné, zisková funkcia *j*-teho odvetvia rastie s rastúcou hodnotou výstupu V_j. Z definície ziskovej funkcie a z rovnice (6.25) potom vyplýva:

$$V_j^* = f_j\left(X_{1j}^*, \dots, X_{nj}^*, Z_{1j}^*, \dots, Z_{nj}^*, L_j^*, K_j^*\right) + \gamma_j \left(p_j^*\right)^{\eta_j}. \tag{6.28}$$

Ako sme vo štvrtej kapitole uviedli, z konštantných výnosov z rozsahu vyplýva nulový zisk pre všetky výrobné odvetvia a teda peňažná rovnováha na trhu, t.j. platí:

$$\langle \tilde{v}_j^*, \bar{p}^* \rangle = 0. \tag{6.29}$$

Pre užitočnosť trhu v rovnovážnom bode platí:

$$v_{\bar{p}}(H^*, \tilde{v}_1^*, \dots, \tilde{v}_n^*, \bar{p}^*) =$$
$$= \sum_i p_i^* \left(\sum_j X_{ij}^* + D_i^* - Y_i^* \right) + w^* \left(\sum_j L_j^* - \overline{TL} \right) + r^* \left(\sum_j K_j^* - \overline{TK} \right) = 0 \tag{6.30}$$

Z nulového úžitku trhového hráča a z toho, že vektor cien $\bar{p}^*$ je kladný, tak v rovnováhe musia platiť rovnosti:

$$
\begin{gathered}
\sum_i X_{ij}^* + D_j^* - Y_j^* = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n, \\
\sum_j L_j^* - \overline{TL} = 0, \\
\sum_j K_j^* - \overline{TK} = 0.
\end{gathered} \tag{6.31}
$$

Tým sme dokázali, že v rovnováhe platia všetky príslušné rovnovážne rovnice CGE modelu. Z toho, že V_j, spĺňajú ohraničenie, ktoré je nezávislé od c, a z toho, že pre dostatočne veľké c platí: $\tilde{A}_H = A_H$, tak rovnováha nenastáva iba na ohraničených množinách, ale aj na pôvodných. A teda rovnováha platí v pôvodnom CGE modeli.

Záver

Riešiteľnosť rovníc CGE modelov sa nám podarilo rozšíriť z jednoduchého modelu z práce [4] aj na ďalšie CGE modely. Najskôr sme do jednoduché modelu pridali sektor vlády a sektor investícií, ktorí vystupovali ako noví spotrebitelia na trhu. Ďalej sme doplnili jednoduchý model o dane, ale pre zjednodušenie sme používali iba jednu rovnú daň, a to daň z príjmu. Na záver sme rozšírili model o zahraničie.

Dôkaz existencie riešenia sme robili podľa Arrow-Debreuovej teórie. Hlavným problémom bolo, že produkčné množiny neboli ohraničené. Museli sme použiť modifikované produkčné množiny. Ale nakoniec sme dokázali, že rovnovážny bod modifikovanej ekonomiky je aj rovnovážnym bodom v pôvodnej ekonomike.

Navyše sme dokázali riešiteľnosť rovníc CGE modelov, aj keď za produkčnú funkciu vezmeme nielen Cobb-Douglasovu, ale aj Leontieffovu alebo CES funkciu.

Použitá literatúra

[1] ARROW, Kenneth, DEBREU, Gerard: *Existence of an equilibrium for a competitive economy.* Econometrica 22, 1954, str. 265-290.

[2] MENKYNA Robert: CGE modely a vstupno-výstupné modely, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2005.

[3] SEKEREŠ Stanislav: Teória statických a dynamických CGE modelov, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2006.

[4] ŠMÁTRALOVÁ Lívia: Riešiteľnosť rovníc CGE modelov, Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, 2008.

[5] WILLENBOCKEL, Dirk: Applied General Equilibrium Modelling : Imperfect Competition and European Integration , Middlesex University, UK, 1994.