

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

**Optimalizácia nákupných kontraktov
a skladovacích potrieb SPP**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bc. Veronika Čolláková, 2011

Optimalizácia nákupných kontraktov a skladovacích potrieb SPP

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bc. Veronika Čolláková

UNIVERZITA KOMENSKÉO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A
INFORMATIKY

KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

9.1.9 Aplikovaná matematika

Ekonomická a finančná matematika



Vedúci diplomovej práce:

Mgr. Martin Valentíny

Kód diplomovej práce

cf495262-91ac-4891-9c91-6c4d8f3bac15

BRATISLAVA, 2011



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Veronika Čolláková
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Optimalizácia nákupných kontraktov a skladovacích potrieb SPP

Cieľ : Nastavenie optimalizačného modelu popisujúceho portfólio predajných, nákupných a skladovacích kontraktov s cieľom nájsť pravidlá pre rozhodovanie o stratégií vzhľadom na vývoj externých parametrov vstupujúcich do cien.

Vedúci : Mgr. Martin Valentíny

Dátum zadania: 08.02.2010

Dátum schválenia: 16.04.2011

.....
prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s využitím vlastných vedomostí a s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 24. 4. 2011

.....

Vlastnoručný podpis

PodĎakovanie

Touto cestou by som sa predovšetkým rada poĎakovala môjmu diplomovému vedúcemu Mgr. Martinovi Valentínymu za cenné rady, pripomienky a ochotu vždy pomôcť. Rovnakou mierou taktiež Ďakujem RNDr. Tomášovi Juríkovi PhD, svojmu bakalárksemu vedúcemu a dlhoročnému kamarátovi, za jeho motiváciu, trpezlivosť, večnú ochotu a cenné podnety z oblasti lineárneho programovania a optimalizácie. Moja veľká vĎaka patrí aj Doc. RNDr. Milanovi Hamalovi Csc. za ochotné konzultovanie problému a cenné podnety na skvalitnenie mojej práce a taktiež môjmu kamarátovi Bc. Marcelovi Kucharíkovi, ktorý mi pomáhal s výpočtovou kapacitou modelu. V neposlednom rade Ďakujem svojim priateľom a rodine za to, že pri mne vždy stáli, verili v moje schopnosti a podporovali ma počas celého štúdia.

Abstrakt

ČOLLÁKOVÁ, Veronika: Optimalizácia nákupných kontraktov a skladovacích potrieb SPP [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky; školiteľ Mgr. Martin Valentíny, Bratislava, 2011, 60 s.

V tejto práci sa zaoberáme navrhnutím vhodného optimalizačného modelu z praxe s cieľom minimalizovať náklady firmy. V prvej časti práce popíšeme reálny problém a zmluvne či technicky stanovené ohraničenia. V druhej časti položíme základný stavebný kameň matematickej teórie hlavne z oblasti lineárneho, celočíselného, zmiešaného a separovateľného programovania. V tretej časti na základe teoretickej stavby prakticky navrhujeme model pre výpočtové prostredie optimalizačného programu LPSolve IDE. Na záver zhrnieme a zanalyzujeme numerické výsledky, ako aj ich prínos pre firmu s cieľom úspory nákladov. V prílohe tejto práce, ako aj v priloženom CD možno nájsť vstupné dáta a excelovské makro na generovanie riešeného modelu.

Kľúčové slová Lineárne programovanie, Celočíselné lineárne programovanie, Zmiešané lineárne programovanie, Separovateľné programovanie, Optimalizácia portfólia plynu

Abstract

ČOLLÁKOVÁ, Veronika: Optimization of the purchase contracts and the gas storage requirements of SPP [Master Thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics; supervisor: Mgr. Martin Valentíny, Bratislava, 2011, 60 p.

This thesis concerns designing an appropriate optimizing real-life model in order to minimize the company's expenses. The first part of the thesis is dedicated to the description of the real-life problem and the boundaries determined either technically or by a contract. In the second part we will introduce a mathematical basis of the theory of Linear Programming, Integer and Mixed Linear Programming and Separable Programming. In the third part we will develop a model for the optimization program LPSolve IDE based on the theoretical foundations. Finally, we will sum up numerical results and analyze their contribution to cutting the company's expenses. Input data and the Excel macro to generate the model solved can be found in the attachment and also on the attached CD.

Keywords: Linear Programming, Integer Linear Programming, Mixed Integer Linear Programming, Separable Programming, Gas Portfolio Optimization

Obsah

Úvod	1
1 Reálny problém	2
1.1 Spotreba	2
1.2 Dodávateľia	4
1.2.1 Take or Pay	4
1.3 Zásoby	5
1.4 Cena plynu	6
2 Teoretické základy	8
2.1 Lineárne programovanie	8
2.1.1 Algoritmy na riešenie úloh LP – Simplexova metóda . .	12
2.2 Celočíselné a zmiešané programovanie	12
2.2.1 Metódy na riešenie úloh ILP a MILP	14
2.3 Transformácia pre ohraničenia s po častiach konštantou skokovitou funkciou	15
2.4 Separovateľné programovanie	17
3 Implementácia a nastavenie optimalizačného modelu	21
3.1 Výpočtové prostredie LPSolve	21
3.2 Pokrytie spotreby a zavedenie premenných modelu	25
3.3 Ohraničenia pre dodávateľov	25
3.4 Ohraničenia pre zásobníky	26
3.4.1 Zásobník Gajary	26
3.4.2 Zásobník Láb	30
3.4.3 Zásobník Pozagas	34
3.4.4 Kapacita zásobníkov	37
3.5 Účelová funkcia	38
3.5.1 Nákup plynu	38
3.5.2 Zmena zásob	39

3.5.3 Pokuta ToP	40
4 Numerické výsledky	42
5 Závěr	48
Príloha	49
Literatúra	55

Úvod

Počiatky lineárneho programovania sú úzko späté s obdobím druhej svetovej vojny. Vojenské aplikácie lineárneho programovania mali za cieľ minimalizovať náklady alebo straty. Obmedzujúce podmienky zahŕňali kapacity prepravných prostriedkov, finančné prostriedky či výkonnosť posádok. Priekopníkmi v oblasti lineárneho programovania boli Leonid Kantorovich, ktorý prvýkrát zaviedol problém lineárneho programovania v roku 1939 a George B. Dantzig, ktorý v roku 1947 zverejnil svoju slávnu simplexovú metódu.

S pokročilejšou dobou sa vyvíja aj výskum v oblasti operačného výskumu a hlavne jeho aplikácia na rôzne problémy. Trhový mechanizmus a s tým spojené maximalizovanie zisku, či minimalizovanie nákladov, je pre každú firmu samozrejmosťou. Práve tu sa dostáva na rad aplikovanie lineárneho programovania a iných odvetví operačnej analýzy.

V posledných rokoch s rastúcou cenou energie sa mnoho strategických energetických podnikov zaoberá optimalizačnými problémami. Príkladom je prípadová štúdia, ktorá rieši dopravný problém siete plynovodov na území celej Číny. Náklady len na dopravu predstavujú okolo 350 mil. dolárov ročne. Táto štúdia je typickým príkladom praktického využitia matematických poznatkov z oblasti operačnej analýzy.

V tejto práci síce nebudeme brať do úvahy dopravný problém, ale budeme optimalizovať nákup a uskladnenie plynu s ohľadom na spotrebu a ďalšie ohraničenia. Teoreticky začneme od lineárneho programovania, odvodíme transformáciu pre nie rýdzo lineárneho ohraničenia a nakoniec zavedieme aproximáciu nelineárneho programovania - separovateľné programovanie.

Kapitola 1

Reálny problém

V nasledujúcej kapitole si priblížime problematiku z praxe, ktorou sa zaoberá Slovenský plynárenský priemysel (SPP). Nahliadneme do pozadia fungovania nadnárodnej energetickej spoločnosti a súčasne sa zameriame na jeden z problémov, ktorým sa zaoberá. SPP ako najväčší dodávateľ zemného plynu na Slovensku, odoberá plyn od dvoch dodávateľov. Na druhej strane však nejakým plynom disponuje aj zo svojich vlastných zásob, ktoré v minulosti nakúpil. Z týchto zdrojov pokrýva dopyt po plyne zo strany domácností a firiem. Cena plynu sa v čase mení a hlavným cieľom problému je minimalizovať náklady spojené s touto zmenou.

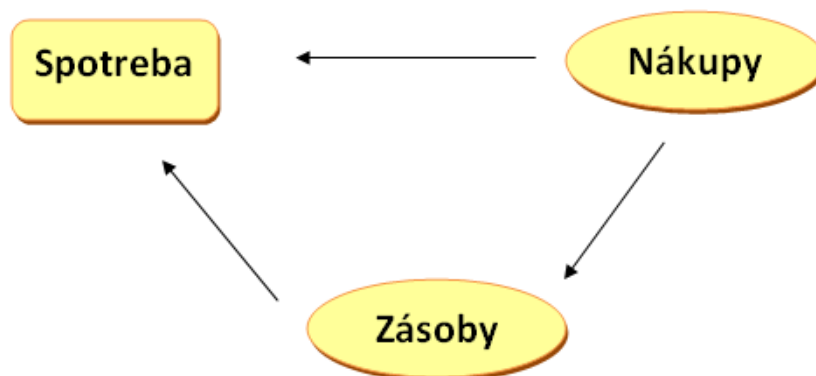
Podloženie teoretickými poznatkami v tomto prípade ponecháme až na ďalšie časti práce. Vysvetlenie celého problému na úvod má motivačný charakter. V jednotlivých častiach tejto kapitoly si vysvetlíme a objasníme čiastkové problémy ako spotreba, dodávatelia, zásoby, cena plynu, zmluvné a technické podmienky, čím zostavíme komplexný pohľad na celý problém.

1.1 Spotreba

Spotreba predstavuje celkový denný dopyt po plyne (firmy, domácnosti, ...), ktorý musí SPP pokryť.

Procesy vo firme umožňujú uspokojiť spotrebu buď priamo od dodávateľov alebo zo zásob. Väčšina plynu z nákupu sa využije na priamu spotrebu, avšak v prípade nadmerného nákupu môže firma tento plyn uskladniť. Schematicky tieto procesy znázorňuje diagram na obrázku (1.1).

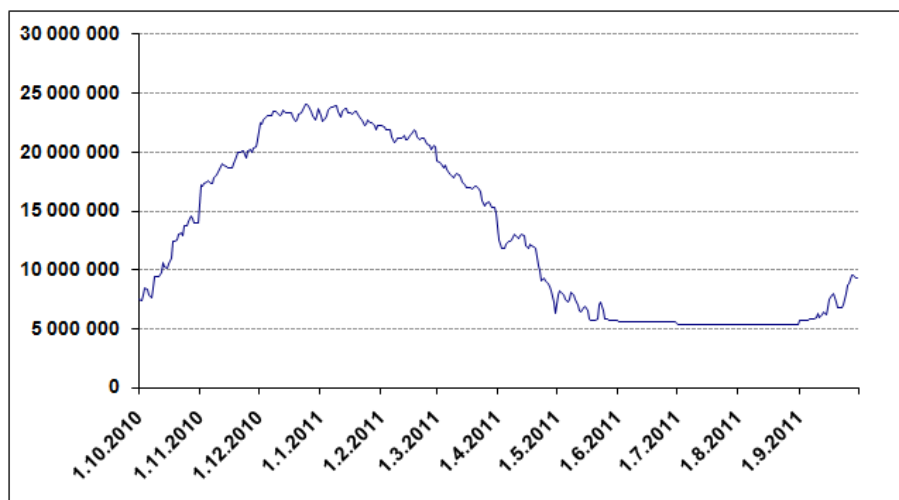
Z empirických pozorovaní vieme dennú spotrebu odhadnúť, preto tento



Obrázok 1.1: Diagram procesov podniku

údaj bude známy a bude vstupom do nášho modelu. Konkrétne dáta s ktorými budeme pracovať možno nájsť v prílohe (tabuľka 5.3).

Dáta spotreby sú v priebehu roka pomerne nevyrovnané. Z časového grafu ročnej spotreby (obr. 1.2) možno vidieť, že v zimnom období je spotreba výrazne vyššia ako v letnom období.



Obrázok 1.2: Graf spotreby plynu na dennej báze od 1.10.2010 - 30.9.2011

Ako sme sa už vyššie zmienili, jedna z možností ako pokryť spotrebu je priamo od dodávateľov. Druhá možnosť pokrytia spotreby je prostredníctvom vytvorených zásob v plynových zásobníkoch. Reálne nastáva situácia, že v letných mesiacoch je množstvo nakúpeného plynu nadbytočné, preto sa vtláča do zásobníkov. Naopak v zimnom období už nakúpené množstvo

nepostačuje pokryť spotrebu, a preto sa využíva aj plyn zo zásob. Dôležitým procesom je aj tvorba zásob počas letných mesiacov na ďalšie obdobie. Plná kapacita všetkých zásobníkov je 1550 mil. m^3 plynu. Od modelu budeme požadovať naplnenie zásobníkov po skončení optimalizovaného obdobia aspoň na hranicu 1100 mil. m^3 . Hlavným dôvodom je vytvorenie plynových zásob na ďalšie vykurovacie obdobie.

1.2 Dodávateľia

SPP odoberá plyn od dvoch veľkých odberateľov. Jedným je slovenská spoločnosť Eustream (PVS). Zvyšnú väčšinovú časť plynu odoberá od ruského Gazpromu (GPE). U oboch odberateľov má SPP zmluvne stanovené hraničné množstvá odberu plynu.

- Gazprom (GPE)
 - denne 0 - 19,5 mil. m^3
 - ročne $< 6,5$ mld. $m^3 = ACQ$
- Eustream (PVS)
 - denne 0 - 3 mil. m^3

Poznamenajme, že ruský Gazprom má stanovenú kvótu na maximálny ročný odber 6,5 mld. m^3 . Túto kvótu označujeme pojmom ACQ a v ďalšej časti práce ju ešte spomenieme.

1.2.1 Take or Pay

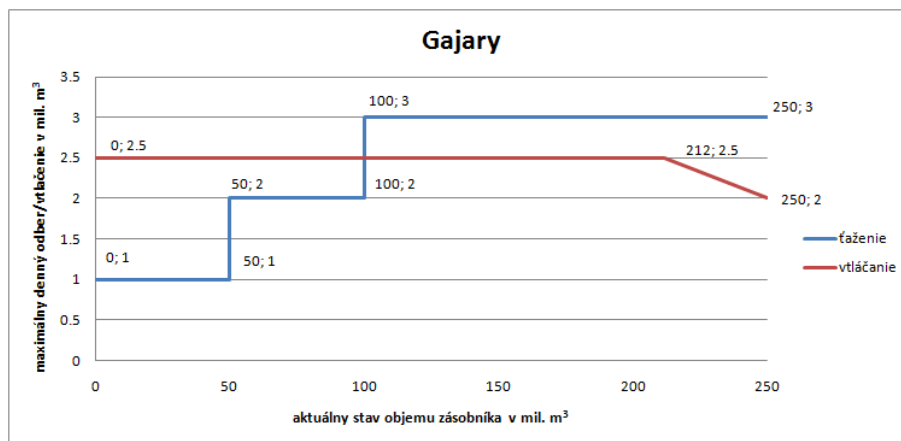
Ako bolo už v predchádzajúcej časti povedané, pod skratkou ACQ označujeme maximálny ročný odber pre ruského odberateľa Gazprom. SPP teda nesmie tento objem plynu presiahnuť, avšak nesmie odobrať ani príliš malé množstvo plynu. Zmluvné podmienky medzi SPP a Gazpromom totiž stanovujú odobrať aspoň 85 % z ACQ . V prípade, že SPP ročne odoberie menej ako 85 % zo 6,5 mld. m^3 (čo činí 5,525 mld. m^3) plynu, zaväzuje sa Gazpromu platiť pokutu. Pokuta je vo výške množstva plynu chýbajúceho do odobratia k 5,525 mld. m^3 vynásobená 75 % priemernej nákupnej ceny plynu počas celého roku. Túto dôležitú zmluvnú podmienku zahrnieme do modelu.

1.3 Zásoby

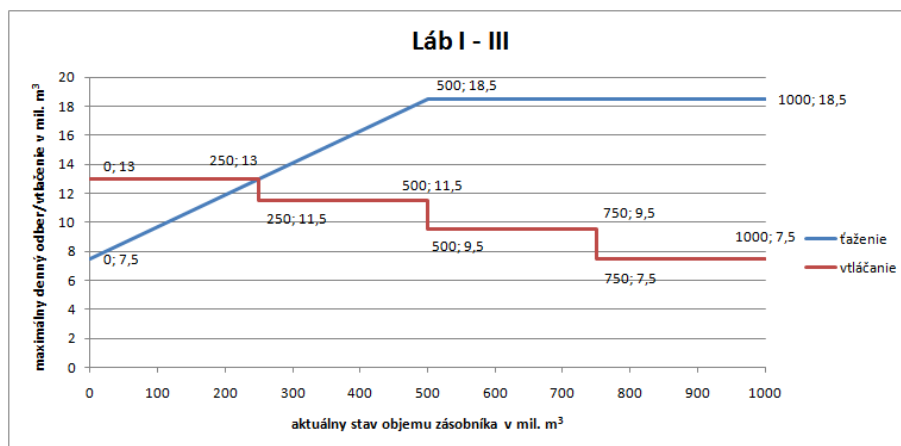
Celkové zásoby plynu SPP predstavujú tri zásobníky, v ktorých je možné plyn uskladniť. Tieto zásobníky majú svoju kapacitu a taktiež aj určité technologické obmedzenia na denný odber, resp. vtlačenie. Spomínané zásobníky sú:

- Gajary - zásobník s kapacitou 250 mil. m^3
- Pozagas - zásobník s kapacitou 300 mil. m^3
- Lab I - III - zásobník s kapacitou 1000 mil. m^3

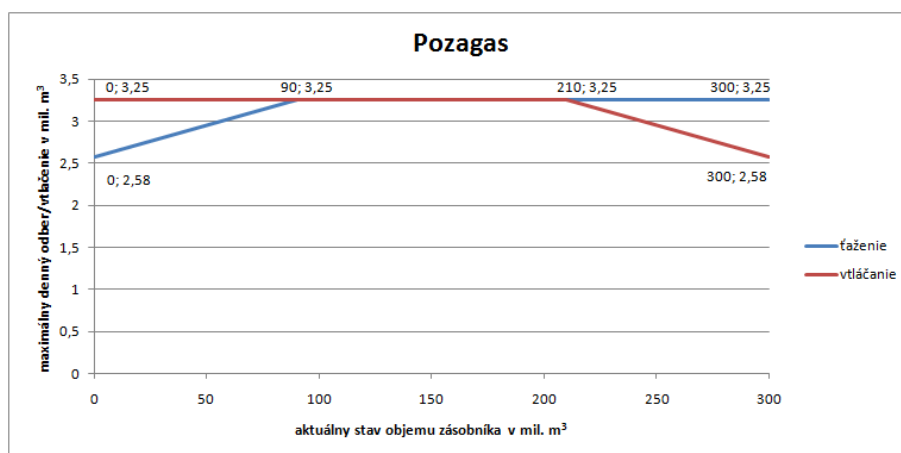
Každý zásobník má svoju ťažobnú a vtlačaciu krivku. Tá vyjadruje, aký môže byť maximálny odber/vtlačenie plynu v daný deň závisiac od aktuálneho množstva plynu v zásobníku. Ťažobné obdobie je v zime od októbra do marca a jedine vtedy je možná ťažba plynu. Od apríla do septembra zase naopak prebieha vtlačanie. Graf vtlačania a ťaženia pre zásobníky Gajary (obr. 1.3), Pozagas (obr. 1.5) a Lab I - III (obr. 1.4) možno zhliadnuť nižšie. Každá krivka vtlačania je nerastúca. So zvyšujúcim sa objemom v zásobníku rastie tlak a teda klesá množstvo plynu, ktoré môžeme denne vtlačiť. Analogicky z fyzikálnych dôvodov platí, že krivka ťaženia je neklesajúca.



Obrázok 1.3: Krivka vtlačania a ťaženia plynu pre zásobník Gajary



Obrázok 1.4: Krivka vtláčania a ťaženia plynu pre zásobník Láb I - III



Obrázok 1.5: Krivka vtláčania a ťaženia plynu pre zásobník Pozagas

1.4 Cena plynu

V tomto odseku si vysvetlíme ako sa bude meniť cena plynu v období pre jednotlivých dodávateľov. Ruský Gazprom, ako aj slovenský Eustream majú zmluvne stanovený vzorec pre výpočet mesačnej nákupnej ceny plynu. Pre ruský Gazprom je cena stanovená nasledovne

$$105,55(4,6 + 0,0025(G0_9 - 910) + 0,0038(F0_9 - 500) - 0,0875) \cdot \frac{1}{F_X}. \quad (1.1)$$

Pre slovenský Eustream zase vyzerá

$$100(4,8 + 0,0025(G0_9 - 980) + 0,0039(F0_9 - 570)) \cdot \frac{1}{F_X}. \quad (1.2)$$

Výsledná cena pre oboch odberateľov je za 1000 m^3 . My budeme pracovať s jednotkovou cenou na 1 m^3 , a preto hodnoty zo vzorcov (1.1) a (1.2) predelíme 1000. Hodnoty $G0_9$ a $F0_9$ predstavujú štandardné mesačné kľzavé priemery ceny ťažkých a ľahkých olejov za posledných 9 mesiacov a Fx je výmenný kurz USD/EUR. Hodnota ťažkého oleja pre jeden mesiac sa vypočíta ako

$$F0 = 7,1961B - 95,402 \quad (1.3)$$

a ľahkého oleja

$$G0 = 6,2236B - 122,69, \quad (1.4)$$

kde B (Brent) označuje priemernú mesačnú cenu ropy na burze (štandardne používaná Rotterdamská burza).

Na príklade si ukážeme, ako by vyzeral výpočet ceny plynu v januári 2011 pre nákup od ruského Gazpromu. Ako úvodné dáta využijeme priemerné ceny Brentu za mesiace apríl - december. Z nich podľa vyššie uvedených vzorcov (1.3) a (1.4) dostaneme ceny ťažkých a ľahkých olejov za mesiace apríl - december. Ich spriemerovaním dostaneme cenu štandardného mesačného kľzavého priemeru ťažkých a ľahkých olejov, ktorú označíme $F0_9^{Jan}$ a $G0_9^{Jan}$. Tie spoločne s priemerným januárovým výmenným kurzom USD/EUR dosadíme do vzorca (1.1). Takýmto postupom dostaneme januárovú cenu plynu, za ktorú SPP nakupuje od ruského Gazpromu. Analogicky vieme vyjadriť ceny pre celé optimalizačné obdobie. Všetky vstupné údaje Brentu a výmenného kurzu USD/EUR možno nájsť v prílohe (tabuľka 5.1).

Kapitola 2

Teoretické základy

Začiatkom 50-tych až 60-tych rokov dôsledkom prudkého rozvoju operačného výskumu začali pribúdať rôzne optimalizačné nástroje a postupy. Veľkou súčasťou tejto aplikácie operačného výskumu sa stalo matematické programovanie. Pod týmto pojmom si predstavujeme optimalizovanie funkcie na množine ohraničení. Medzi najznámejšie špecifické prípady možno zaradiť lineárne programovanie (ďalej len LP). Aj keď sa problém LP obmedzuje len na lineárne funkcie, zároveň nám týmto poskytuje veľmi elegantné možnosti na výpočet. Vhodnými transformáciami a trikmi možno aj nie rýdzo lineárne ohraničenia a účelovú funkciu previesť na problém LP. Aj keď problém LP ako taký bude hrať hlavnú rolu v neskôr zostavenom modeli, pre jeho známosť a široký záber literatúry mu nebudeme venovať toľkú pozornosť. Bližšie sa zameriame na okrajové časti lineárneho programovania ako celočíselné, či zmiešané programovanie. Zavedieme transformáciu pre lineárne funkcie ohraničené po častiach konštantou funkciou. A ako poslednú si ukážeme aproximačnú metódu nelineárneho programovania, tzv. separovateľné programovanie.

2.1 Lineárne programovanie

Ako úlohu lineárneho programovania chápeme extremalizovať lineárnu funkciu zvanú tiež účelová funkcia na množine lineárnych ohraničení. Tie môžu byť vo forme lineárnych rovníc alebo tupých lineárnych nerovníc. Podľa J. Plesníka [8] môžeme úlohu LP formulovať nasledovne.

Definícia 2.1. *Nech a_{ij}, b_i, c_j , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, sú dané reálne čísla a nech $I_1 \subset I = \{1, \dots, m\}$, $J_1 \subset J = \{1, \dots, n\}$. Optimalizačnú úlohu maximalizovať funkciu $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ na množine riešení sústavy lineárnych rovníc a nerovností*

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in I_1 \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i \in I - I_1 \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0, j \in J_1$$

nazveme maximalizačnou úlohou lineárneho programovania v zmiešanom tvare, ak $I_1 \neq \emptyset$, $I_1 \subsetneq I$ alebo $J_1 \subsetneq J$.

Rovanko môžeme zaviesť úlohu lineárneho programovania v rovnícovom tvare, kde na rozdiel od definície 2.1 predpokladáme $I_1 = \emptyset$ a $J_1 = J$ a vynecháme z nej všetky ohraničenia nerovností (2.1). V maticovom tvare by zápis vyzeral: $\max\{c^T x | Ax = b, x \geq 0\}$ Pre úlohu lineárneho programovania v tvare nerovností opäť vychádzame z definície 2.1, kde pridáme podmienku $I_1 = \emptyset$ a $J_1 = J$ a vynecháme ohraničenia rovností (2.2). Formálny zápis úlohy je $\max\{c^T x | Ax \leq b, x \geq 0\}$

Poznámka 2.1. *Pre všetky tieto tvary úloh lineárneho programovania sme predpokladali, že ich účelovú funkciu f maximalizujeme. V prípade minimalizácie účelovej funkcie použijeme ekvivalentný zápis maximalizovať $-f$. Aj z toho hľadiska budeme ďalej hovoriť len o maximalizačných problémoch.*

Všetky doposiaľ spomenuté úlohy mali v sebe nejaké charakteristické vlastnosti, napr. úloha obsahujúca iba lineárne ohraničenia alebo úloha obsahujúca iba nerovnosti. Dokonca v každej z týchto úloh vystupovala vlastnosť nezápornosti premenných. V nasledujúcej vete aj s dôkazom, ktorý spomína J. Plesník [9] si ukážeme, že úloha LP nemusí byť striktne zadaná a existujú jednoduché prechody medzi jednotlivými špeciálnymi tvarmi úloh. Taktiež nezápornosť premenných nemusí byť nutne splnená. V prípade, že premenná nie je ohraničená, hovoríme o *voľnej premennej*. Obmedzenie na nezápornosť je podmienka pridávaná častokrát implementáciou reálnych úloh (napr. množstvo tovaru v dopravnom probléme alebo množstvo výroby vo výrobnom probléme, čo logicky nemôže byť záporné).

Veta 2.1. Každú úlohu LP možno previesť na ľubovoľný tvar z nasledujúcich 3 špeciálnych tvarov:

$$i) \max\{c^T x | Ax \leq b\}$$

$$ii) \max\{c^T x | Ax \leq b, x \geq 0\}$$

$$iii) \max\{c^T x | Ax = b, x \geq 0\}$$

Dôkaz. Nech šípka $\rightarrow$ vyjadruje transformáciu úlohy na úlohu. V prípade prítomnosti obmedzenia v tvare rovnice $a_i^T x = b_i$, stačí ho nahradiť dvoma nerovnicami $a_i^T x \leq b_i$ a $a_i^T x \geq b_i$. Pôvodné alebo vzniknulé nerovnice tvaru $a_i^T x \geq b_i$ stačí prenásobiť číslom -1.

i) $\rightarrow$ ii): Každú voľnú premennú x_j nahradíme všade rozdielom $x_j' - x_j''$ dvoch nových nezáporných premenných.

ii) $\rightarrow$ iii): Nech sústava $Ax \leq b$ pozostáva z m nerovnic $a_i^T x \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$. Každú z nich doplníme na rovnicu $a_i^T x + y_i = b_i$, kde y_i je nová nezáporná premenná, tzv. doplnková premenná (doplňa nerovnosť na rovnosť). $\square$

Ako výstup úloh LP budeme očakávať vektor neznámych x , ktorý nám na množine ohraničení dáva najlepšie možné riešenie. Preto si presne zavedieme pojmy, ako ich definuje J. Plesník v [8]

Definícia 2.2. Množinu

$$M = \{x \in R^n | Ax = b, x \geq 0\}$$

nazveme množinou prípustných riešení, jej prvky následne nazveme prípustnými riešeniami úlohy.

Definícia 2.3. Prípustné riešenie $x^* \in M$ nazveme optimálnym riešením úlohy, ak platí

$$c^T x^* \geq c^T x \quad \forall x \in M$$

Doposiaľ sa javilo, že každá úloha LP nadobúda svoje najlepšie riešenie vo vektore x^* a jeho hodnota je hodnota účelovej funkcie v tomto bode. Čo ak nastane prípad, že pre samotnú množinu M neexistuje žiadne také x , ktoré by vyhovovalo všetkým požadovaným ohraničeniam? Vtedy hovoríme, že nastala *neprípustnosť*. Optimálne riešenie nemusíme vedieť nájsť aj v prípade, a to keď vieme vždy nájsť taký bod x , ktorého hodnota účelovej funkcie je väčšia ako hodnota v predošlom bode. Vtedy hovoríme o *neohraničenosti*. Nasledujúce dohady o možných výstupoch problému LP sformulujeme do vety uvedenej v [9].

Veta 2.2. (*základná veta LP*)

(1) Pre každú úlohu LP $\max\{c^T x | x \in M\}$ nastáva práve jedna z možností:

- (a) *OPTIMALITA*,
- (b) *NEOHRANIČENOSŤ*,
- (c) *NEPRÍPUSTNOSŤ*

(2) Navyše, ak M má vrcholy, tak

- (a) v prípade optimality aj niektorý vrchol je optimálnym riešením.
- (b) v prípade neohraničenosti nastáva neohraničenosť aj na niektorej neohraničenej hrane množiny M .

Množina prípustných riešení problému LP je pomerne špecifická a má svoje charakteristické vlastnosti. Takúto množinu nazývame *polyéder* a definujeme ju ako prienik konečného počtu lineárnych ohraničení. Môže byť ohraničená, alebo aj neohraničená. Špeciálnou vlastnosťou každej takejto množiny je konvexnosť. Ako hovorí veta (2.2), polyéder môže obsahovať vrchol alebo hranu. Pre geometrickú interpretáciu si môžeme vrchol alebo hranu polyédra predstaviť ako normálnu hranu alebo vrchol bežného konvexného útvaru s lineárnymi ohraničeniami v dvojrozmernom, či trojrozmernom priestore. Útvary tvoriace prípustné riešenia problému LP ako aj ich vlastnosti možno rozšíriť do n -rozmerných priestorov, čo sa však vymyká bežnej ľudskej predstavivosti. Podrobnejšia teória ohľadne problému LP, vlastností množín a presnej definície vrcholu, hrany a steny polyédra je dostupná v [9] a [8] od domácich autorov. Prípadne zo známejšej zahraničnej literatúry v [4] a [5].

2.1.1 Algoritmy na riešenie úloh LP – Simplexova metóda

V tejto časti si skutočne len z nadhľadu opíšeme geometrický princíp fungovania najznámejšieho algoritmu pre riešenie úlohy LP – Simplexovej metódy uvedenej v [8].

Bez ujmy na všeobecnosti uvažujme úlohu LP

$$\max\{c^T x | x \in M\} \quad (2.3)$$

kde $c^T x$ je účelová funkcia a $M \subset \mathbb{R}^n$ je polyédrická množina v $\mathbb{R}^n$, ktorá má krajné body, pričom jeden jej krajný bod x^1 poznáme. Hlavná myšlienka je v prechádzaní po hranách polyédrickej množiny M od jedného krajného bodu k druhému tak, aby hodnota účelovej funkcie vzrastala. Štartujúc z bodu x^1 uvedeným spôsobom môžu nastať 2 prípady.

1. Prípád 1: po žiadnej hrane vychádzajúcej z bodu x^1 sa hodnota účelovej funkcie nezväčšuje $\rightarrow$ OPTIMALITA
2. Prípád 2: existuje hrana h vychádzajúca z bodu x^1 , po ktorej sa hodnota účelovej funkcie zväčšuje
 - a) Hrana h je polpriamka $\rightarrow$ NEOHRANIČENOSŤ
 - b) Hrana h je nejaká úsečka $[x^1, x^2]$ $\rightarrow$ postup opakujeme so štartovacím bodom x^2 .

Napriek tomu, že v poslednej dobe simplexovej metóde konkurujú iné výpočtovo efektívnejšie a rýchlejšie algoritmy (ako napríklad metóda vnútorného bodu), stále ostáva popredným nástrojom pre riešenie úloh LP.

2.2 Celočíselné a zmiešané programovanie

Celočíselné lineárne programovanie (z angl. integer linear programming, ďalej len ILP) sa zaoberá problémom lineárneho programovania, v ktorých sú premenné obmedzené len na celé čísla. Zaveďme pojem celočíselného programovania ako ho uvádza A. Schrijver vo svojej knihe [10], ktorá sa podrobnejšie venuje tejto problematike.

Definícia 2.4. *Nech je daná matica A a vektory b a c s racionálnymi zložkami. Optimalizačnú úlohu*

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b; x \in \mathbb{Z}^n\} \quad (2.4)$$

nazveme úlohou celočíselného lineárneho programovania.

Poznámka 2.2. *V prípade, že premenné x nadobúdajú len hodnoty $\{0,1\}$, hovoríme o binárnych premenných. Pokiaľ v úlohe vystupujú iba binárne premenné, hovoríme o Bivalentnom programovaní.*

Množina prípustných bodov sa takýmto obmedzením zúži len na mrežové body celočíselných hodnôt premenných. Graficky si demonštrujeme základné rozdiely medzi úlohou LP a ILP na dvojrozmernom príklade.

Príklad 1. *Uvažujme úlohy LP a ILP s rovnakými ohraničeniami aj účelovou funkciou:*

$$\begin{array}{rcl} \max u : & x_1 & + \quad x_2 \\ 28x_1 - 15x_2 & \geq & 0 \\ 28x_1 - 3x_2 & \leq & 84 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_1, x_2 & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

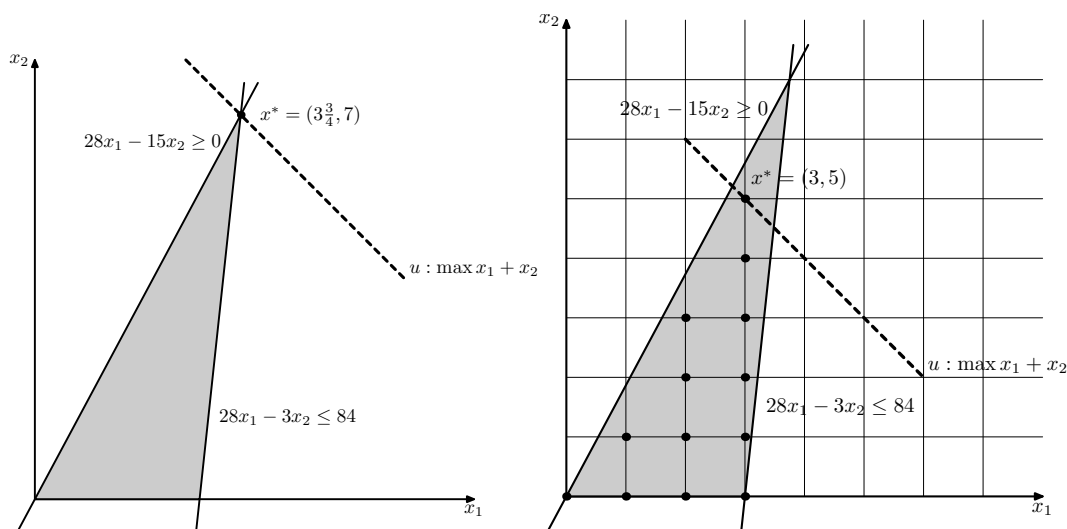
(LP)

$$\begin{array}{rcl} \max u : & x_1 & + \quad x_2 \\ 28x_1 - 15x_2 & \geq & 0 \\ 28x_1 - 3x_2 & \leq & 84 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_1, x_2 & \in & \mathbb{Z} \end{array}$$

(ILP)

Na obrázku 2.1 naľavo je riešenie pre úlohu obyčajného lineárneho programovania. Množina prípustných riešení (vyfarbená časť) tvorí trojuholník a účelová funkcia nadobúda svoje maximum v jednom z jeho vrcholov $x^* = (3\frac{3}{4}, 7)$ s hodnotou účelovej funkcie $u = 10\frac{3}{4}$. V prípade celočíselnej úlohy tvoria množinu prípustných riešení izolované mrežové body ležiace v prípustnej oblasti pôvodnej úlohy LP (viď obr. 2.1 napravo). V tomto prípade leží optimum vo vnútri polyédra $x^* = (3, 5)$, účelová funkcia v ňom nadobúda hodnotu $u = 8$.

Z príkladu vidieť, že zatiaľ čo optimum pre úlohu LP nutne leží na hrane polyédra, pre úlohu ILP to tak byť nemusí, ba častokrát ani nebýva. Môžeme dokonca zostrojiť takú úlohu, kde optimum celočíselného problému je



Obrázok 2.1: Grafické riešenie pre úlohu lineárneho a celočíselného programovania.

ľubovoľne ďaleko od optima jej prislúchajúcej reálnej úlohy. Riešenie ILP teda nemožno dostať zaokrúhľaním príslušného LP problému a stáva sa tak samostatným problémom.

Uvažujme úlohu LP, v ktorej vystupujú celočíselné aj reálne premenné tzv. zmiešané programovanie (ďalej budeme používať MILP z angl. mixed integer linear programming).

Definícia 2.5. *Nech sú dané racionálne matice A, B a taktiež racionálne vektory b, c, d . Optimalizačnú úlohu*

$$\max\{c^T x + d^T y \mid Ax + By \leq b; x \in \mathbb{Z}^n, y \in \mathbb{R}^n\} \quad (2.5)$$

nezveme úlohou zmiešaného celočíselného lineárneho programovania.

2.2.1 Metódy na riešenie úloh ILP a MILP

Metóda sečných nadrovín

Jedna z najčastejšie používaných metód pre riešenie úloh ILP a MILP je *metóda sečných nadrovín* (Cutting Plane method). Tento algoritmus na začiatku zanedbá celočíselnosť a simplexovou metódou vypočíta optimálne riešenie x^* pre prislúchajúcu reálnu úlohu LP. Takejto úlohe hovoríme *relaxovaná*

2.3. TRANSFORMÁCIA PRE OHRANIČENIA S PO ČASTIACH KONŠTANTOU SKOKOVITOU FUNKCIOU

úloha. Ak je optimum celočíselné, tak končí. Pokiaľ celočíselné nie je, pridá do úlohy také ohraničenie, ktoré odreže kus množiny, pričom táto množina obsahuje bod x^* a súčasne neobsahuje žiaden celočíselný bod. Postup sa opakuje, až kým nájdené riešenie nie je celočíselné. Tento algoritmus je pomerne výpočtovo náročný, pretože iteratívne využíva simplexovú metódu a navyše nie je zaručená jeho konvergencia.

Metóda vetvenia a medzí

Ďalší významný prístup je metóda *vetvenia a medzí* (Branch and Bound method). Táto metodológia využíva to, že prípustných úloh je konečný počet a snaží sa ich nejako prebrať. Podstata spočíva v delení množiny prípustných riešení na disjunktné podmnožiny, tzv. vetvenie. Pre každú z nich sa vypočíta horná medza účelovej funkcie (pri maximalizačnom probléme). Ak poznáme prípustné celočíselné riešenie s hodnotou účelovej funkcie väčšou než horná medza niektorej vetvy, túto vetvu vypúšťame, pretože v nej optimum nastať nemôže. Schematicky sa pre túto metódu používa stromový diagram skladajúci sa z uzlov a vetiev. V každom kroku vyčíslime medzu a určíme uzol, ktorý sa ďalej vetví. Tento prístup sa využíva aj v iných optimalizačných problémoch a tiež aj v zmiešané programovaní. Príkladné využitie tejto metódy pre MILP problém možno nájsť v [12].

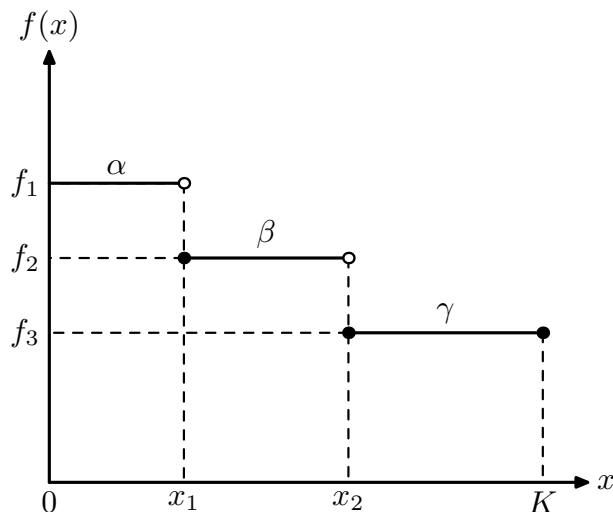
2.3 Transformácia pre ohraničenia s po častiach konštantou skokovitou funkciou

V nasledujúcich riadkoch si popíšeme transformáciu konštantnej skokovitej funkcie na lineárne ohraničenia. Rovnaká idea transformácie je využitá aj v článku [3].

Uvažujme funkciu $f(x)$, ktorá je po častiach konštantná skokovitá funkcia definovaná na intervale $[0, K]$ ako na obrázku 2.2. Jej funkčná hodnota sa láme v bodoch x_1 a x_2 .

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & x \in [0, x_1] \\ f_2 & x \in [x_1, x_2] \\ f_3 & x \in [x_2, K] \end{cases}$$

2.3. TRANSFORMÁCIA PRE OHRANIČENIA S PO ČASTIACH KONŠTANTOU SKOKOVITOU FUNKCIOU



Obrázok 2.2: Graf po častiach konštantnej skokovitej funkcie.

Pripustíme nasledovné ohraničenie

$$x \leq f(x) \quad (2.6)$$

v úlohe LP. Nerovnosť tohto charakteru zapríčiňuje, že úlohu prestávame považovať ako problém LP. Hlavným problémom su body zlomu x_1 a x_2 , v ktorých sa mení hodnota funkcie. Nasledujúcou transformáciou si ukážeme ako úlohu ponechať na báze lineárneho programovania.

Pre každý jeden konštantný úsek funkcie $f(x)$ zavedieme nové binárne premenné α, β, γ . Tie nám budú hodnotami 0 – 1 určovať, v ktorej časti definičného oboru sa premenná x práve nachádza. Pre bod x_1 zavedieme ohraničenia

$$(x - x_1) \leq (1 - \alpha)H \quad (2.7a)$$

$$(x_1 - x) \leq (1 - \beta)H. \quad (2.7b)$$

Analogické ohraničenia aj pre druhý bod zlomu x_2

$$(x - x_2) \leq (1 - \beta)H \quad (2.8a)$$

$$(x_2 - x) \leq (1 - \gamma)H. \quad (2.8b)$$

Konštanta H predstavuje dostatočne veľké kladné celé číslo. Ohraničenia vyjadrujú, či sa neznáma x nachádza napravo, alebo naľavo od bodu zlomu x_1 . V prípade ak $x > x_1$, pre platnosť ohraničenia (2.7a), musí binárna

premenná α nutne nadobúdať hodnotou 0. Binárna premenná β vystupujúca v orahničení (2.7b) môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu. Ak platí opačná nerovnosť $x < x_1$, z ohraničenia (2.7b) vyplýva, že $\beta = 0$.

Aby sme zaručili, že z binárnych premenných je práve jedna aktívna, pridáme do súboru ohraničení rovnosť

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \quad (2.9)$$

Teraz už ohraničenie (2.6) môžeme v spojení s horeuvedenými nerovnosťami prepísať do tvaru:

$$x \leq \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3. \quad (2.10)$$

Takto vieme ohraničenie typu (2.6) transformovať nahradením za ohraničenia typu (2.7a) až (2.10), čím dostaneme úlohu MILP s binárnymi celočíselnými premennými. Úlohu vieme zovšeobecniť s rozšírením pre konečný počet zlomových bodov.

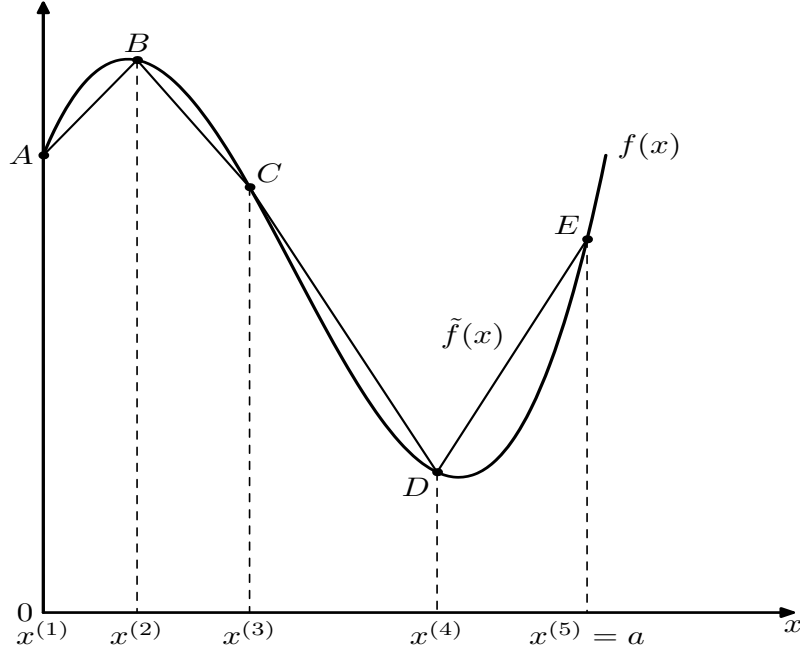
2.4 Separovateľné programovanie

V tejto časti budeme pojednávať o technike nelineárneho programovania, v ktorej nelineárne ohraničenia môžu byť preformulované do ekvivalentného problému obsahujúceho len lineárne funkcie. Metóda sa nazýva *separovateľné programovanie* a spočíva v aproxmovaní nelineárnej funkcie po častiach lineárnou. Priblížme si hlbšie túto problematiku ako uvádza literatúra [2] resp. [11] pre špeciálny prípad funkcie jednej premennej.

Tentokrát uvažujme ľubovoľnú spojitú nelineárnu funkciu $f(x)$ definovanú na intervale $0 \leq x \leq a$. Ďalej zavedieme ľubovoľné delenie intervalu na K bodov, ktoré oznčíme $x^{(k)}$, $k = 1, \dots, K$, pričom platí $x^{(k)} < x^{(k+1)}$. Pre každý deliaci bod $x^{(k)}$ označme funkčnú hodnotu ako $f^k = f(x^{(k)})$. Každú dvojicu susedných deliacich bodov $x^{(k)}, x^{(k+1)}$ spojíme úsečkou ako je vidieť na obrázku 2.3. Takto dostaneme aproximačnú funkciu $\tilde{f}(x)$, ktorá je po častiach lineárna.

Rovnica vyjadrujúca lineárne spojenie bodov $(x^{(k)}, f^{(k)})$ a $(x^{(k+1)}, f^{(k+1)})$ je daná

$$\tilde{f}(x) = f^{(k)} + \frac{f^{(k+1)} - f^{(k)}}{x^{(k+1)} - x^{(k)}}(x - x^{(k)}) \quad (2.11)$$



Obrázok 2.3: Aproximácia funkcie $f(x)$ po častiach lineárnou funkciou $\tilde{f}(x)$.

Takáto rovnica bude prislúchať každému podintervalu $x^{(k)} \leq x \leq x^{(k+1)}$. Následne teda, celá aproximácia funkcie $f(x)$ bude pozostávať z $K-1$ takých lineárnych rovníc. Je vhodné upraviť tento súbor lineárnych rovníc do nejakej všeobecnej formy. Najprv však poznamenajme, že ľubovoľné x z intervalu $x^{(k)} \leq x \leq x^{(k+1)}$ môžeme zapísať ako

$$x = \lambda^{(k)} x^{(k)} + \lambda^{(k+1)} x^{(k+1)}, \quad (2.12)$$

kde $\lambda^{(k)}$ a $\lambda^{(k+1)}$ sú dva nezáporné parametre, pre ktoré platí

$$\lambda^{(k)} + \lambda^{(k+1)} = 1.$$

Substituuje (2.12) vyjadrenie pre x do rovnice (2.11), čím dostaneme

$$\tilde{f}(x) = f(x^{(k)}) + \frac{f^{(k+1)} - f^{(k)}}{x^{(k+1)} - x^{(k)}} [\lambda^{(k+1)} x^{(k+1)} - (1 - \lambda^{(k)}) x^{(k)}]. \quad (2.13)$$

A keďže platí $1 - \lambda^{(k)} = \lambda^{(k+1)}$, platí nasledovné odvodenie

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= f(x^{(k)}) + \lambda^{(k+1)} (f^{(k+1)} - f^{(k)}) \\ &= \lambda^{(k)} f^{(k)} + \lambda^{(k+1)} f^{(k+1)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Takouto formuláciou možno ľubovoľné x z intervalu $x^{(1)} \leq x \leq x^{(K)}$ a jeho aproximačnú hodnotu $\tilde{f}(x)$ generovať priradením vhodnej dvojice za sebou idúcich premenných lámby, ktoré korešpondujú podintervalu, na ktorom dané x leží. Keďže ľubovoľne zvolené x môže ležať len na jednom podintervale, z toho vyplýva, že jedine práve dve lambdy prislúchajúce tomu intervalu môžu byť nenulové. Všetky ostatné lambdy sa nutne musia rovnať nule. Následne súbor $K - 1$ rovníc (2.12) a (2.14) možno spojiť do nasledujúcich dvoch rovností:

$$x = \sum_{k=1}^K \lambda^{(k)} x^{(k)} \quad \tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^K \lambda^{(k)} f^{(k)}, \quad (2.15)$$

kde

(i)

$$\sum_{k=1}^K \lambda^{(k)} = 1$$

(ii)

$$\lambda^{(k)} \geq 0 \quad k = 1, \dots, K$$

(iii)

$$\lambda^{(i)} \lambda^{(j)} = 0 \quad \text{ak } j > i; i = 1, K - 1$$

Podmienka (iii) požaduje už spomínanú vec, aby nie viac ako 2 premenné lambda boli kladné. Označme kladné lambdy ako $\lambda^{(j)}$ a $\lambda^{(i)}$, kde $j > i$, potom musí platiť, že $j = i + 1$, a teda lambdy su za sebou idúce. Takéto obmedzenie nám zaručí, že súčasťou aproximačnej funkcie $\tilde{f}(x)$ sú jedine body ležiace na jej po častiach lineárnych úsekoch.

Táto myšlienka sa dá veľmi ľahko zovšeobecniť aj pre funkcie viacerých premenných. Tu však pre funkciu $f(x)$ musíme predpokladať, že je separovateľná. Ináč povedané, že ju môžeme vyjadriť ako súčet funkcií s jednou premennou. Pre takéto rozšírené prípady vo viacdimeznionálnom priestore môžeme od množiny lámby vyžadovať podmienku, nech nie viac ako r premenných lámby je nenulových, pričom $r \geq 2$. Hodnoty, aké môže nadobúdať r závisia od rozmeru úlohy. Podrobnejšie sa separovateľným programovaním pre funkcie viacerých premenných zaoberajú G. Hadley [6] a M. S. Bazaraa [7].

Na záver ešte uvedieme názorný príklad separovateľného programovania aj s grafickým riešením pre hlbšie pochopenie vyššie odvodennej teórie.

2.4. SEPAROVATEĽNÉ PROGRAMOVANIE

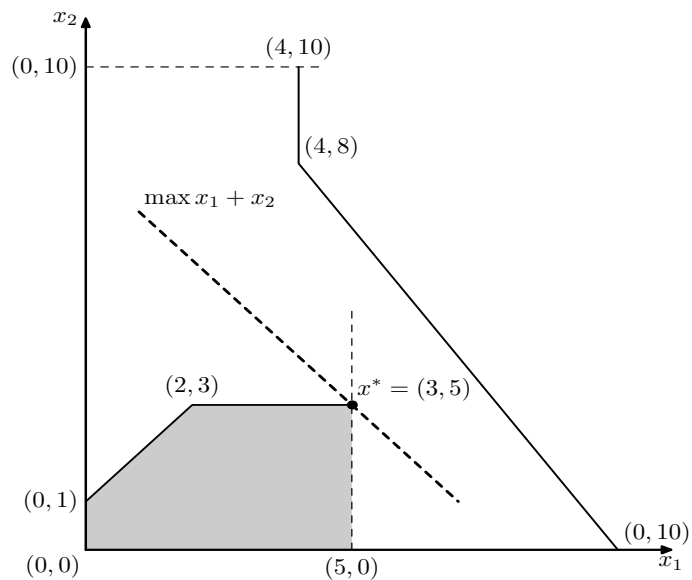
Príklad 2. *Nech sú dané lineárne lomené funkcie $f_1(x)$ a $f_2(x)$ nasledovne:*

$$f_1(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 2 \\ 2 & x \geq 2 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x + 10 & x \leq 4 \\ 4 & x \geq 4 \end{cases}$$

uvažujme nasledovnú optimalizačnú úlohu

$$\begin{aligned} \max x_1 &+ x_2 \\ x_1 &\leq f_1(x_1) \\ x_2 &\leq f_2(x_2) \\ x_1 &\leq 5 \\ x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Jej grafické riešenie vyzerá



Zvýraznená sivá oblasť predstavuje prípustné riešenia. Ako je aj z obrázku vidieť, optimum sa dosahuje v bode $x^ = (3, 5)$.*

Kapitola 3

Implementácia a nastavenie optimalizačného modelu

Prvú kapitolu sme venovali predstaveniu reálneho problému. V druhej kapitole sme si vytvorili základné stavebné kamene matematickej teórie operačného výskumu. V tejto časti skĺbením predošlých dvoch kapitol vytvoríme optimalizačný model, ktorý následne implementujeme do výpočtového prostredia. Ako optimalizačný program budeme používať LPSolve IDE. Vzhľadom na to, že model je pomerne komplikovaný a komplexný, objasníme si postupne myšlienku, ktorá stojí za jednotlivými ohraničeniami.

3.1 Výpočtové prostredie LPSolve

Pre dosiahnutie výpočtových výsledkov budeme používať optimalizačný program LPSolve IDE v5.5.2.0. Ten dokáže riešiť problémy LP, ILP a MILP. Pri úlohe rýdzo lineárneho programovania využíva simplexovú metódu a metódu riedkych matíc. Ak je jedna alebo viac premenných deklarovaných ako celočíselné, resp. binárne, simplexovú metódu iteruje algoritmom Branch and Bound (B&B), až dokým nenájde optimálne riešenie. Keďže program je založený na numerických výpočtoch, obsahuje možnosti nastavenia numerických odchýlok, ktorým sa dá korigovať presnosť a rýchlosť výpočtu. Ukážme si prácu s LPSolverom a formát vstupu na konkrétnych príkladoch z kapitoly 2. Vstup celočíselnej úlohy z príkladu 1 vyzerá nasledovne:

3.1. VÝPOČTOVÉ PROSTREDIE LPSOLVE

```
/* Objective function */  
  
max: x1+x2;  
  
/* Variable bounds */  
  
28 x1 - 15 x2 >= 0;  
28 x1 - 3 x2 <= 84;  
  
/* Integer definitions */  
  
int x1, x2;
```

Štruktúra vstupu je pomerne jednoduchá. Najprv max alebo min účelovú funkciu, potom nasleduje súbor ohraničení s rovnicami, ďalej s nerovnicami a na záver môžeme deklarovať, ktoré premenné sú celočíselné (prípadne aj binárne ako `bin x1, x2;`). Takýto vstup budeme ďalej nazývať lp formát.

Výstupom je

Variables	MILP Feasible	result	Variables	result
	8	8		10.75
x1	3	3	x1	3.75
x2	5	5	x2	7

Tabuľka 3.1: Výstupy z LPSolve IDE pre celočíselnú (vľavo) a klasickú lineárnu úlohu (vpravo).

Poznámka 3.1. *Napriek tomu, že v príklade uvažujeme $x_1, x_2 \geq 0$, nemusíme podmienku nezápornosti explicitne zadávať, pretože ju má program prednastavenú. Na druhej strane však musíme upozorniť, že v prípade nekladného ohraničenia premenných nestačí zadať $x \leq 0$. Program požaduje nejaké záporné dolné ohraničenie. V tom prípade zvolíme dostatočne veľkú zápornú konštantu a nekladnosť zapíšeme napr. ako $-10000000 \leq x \leq 0$*

Riešenie celočíselného problému iteratívne využíva simplexovú metódu, ktorá výsledok postupne vylepšuje, až nakoniec nájde optimálne riešenie. Kompletný výstup obsahuje všetky vylepšenia problému MILP a na konci je jeho optimum. Pre rýdzdo lineárnu úlohu je postup jednoduchší, obsahuje optimálne riešenie 1-krát prejdené simplexovou metódou.

Výhoda tohto výpočtového prostredia spočíva v tom, že umožňuje riešiť aj úlohy separovateľného programovania. V manuáli [1] v sekcii "Special Ordered Sets (SOS)" je vysvetlené použitie a zápis úloh separovateľného programovania. SOS je usporiadaná množina za sebou idúcich premenných.

3.1. VÝPOČTOVÉ PROSTREDIE LPSOLVE

Obsahuje vstupný parameter, ktorý nám navyše hovorí, koľko najviac za sebou idúcich premenných môže byť nenulových. Je to presný prepis podmienky (iii) z časti 2.4, rovnicových vyjadrení (2.15) pre potrebu vstupu programu LPSolve IDE.

Na základe tejto teórie a rovnicových vyjadrení (2.15) si uveďme prepis vyššie spomenutej úlohy separovateľného porgramovania z príkladu 2. Pre funkciu $f_1(x)$ uvažujme tri deliace body $(0, 1), (2, 3), (5, 3)$. Každému bodu bude prislúchať jedna SOS premenná λ . Prepis ohraničení v týchto bodoch podľa (2.15) pre f_1 je nasledovný:

$$x_1 = 0\lambda_1^1 + 2\lambda_1^2 + 5\lambda_1^3 \quad (3.1a)$$

$$x_2 \leq \lambda_1^1 + 3\lambda_1^2 + 3\lambda_1^3 \quad (3.1b)$$

a pre f_2 v bodoch $(10, 0), (4, 8), (4, 10)$

$$x_2 = 0\lambda_2^1 + 8\lambda_2^2 + 10\lambda_2^3 \quad (3.2a)$$

$$x_1 \leq 10\lambda_2^1 + 4\lambda_2^2 + 4\lambda_2^3 \quad (3.2b)$$

a dodatočné podmienky vychádzajúce z bodov (i)-(iii)

$$\lambda_1^1 + \lambda_1^2 + \lambda_1^3 = 1$$

$$\lambda_2^1 + \lambda_2^2 + \lambda_2^3 = 1$$

$$0 \leq \lambda_1^1, \lambda_1^2, \lambda_1^3, \lambda_2^1, \lambda_2^2, \lambda_2^3 \leq 1.$$

Ako poslednú ostáva vyjadriť podmienku, že najviac dve za sebou idúce premenné zo zoradenej množiny λ sú nenulové. Túto podmienku nevieme zapísať vo forme rovnosti, alebo nerovnosti ako takej. Avšak ako vstup pre LPSolve bude vyzeráť

$$\text{SOS1: } \lambda_1^1, \lambda_1^2, \lambda_1^3 \leq 2;$$

$$\text{SOS2: } \lambda_2^1, \lambda_2^2, \lambda_2^3 \leq 2;$$

Vstupný lp formát pre túto úlohu teda vyzerá

```
/* Objective function */
```

```
max: x1 + x2 ;
```

```
/* Constraints */
```

3.1. VÝPOČTOVÉ PROSTREDIE LPSOLVE

```

x1 - 0 lam1_1 - 2 lam2_1 - 5 lam3_1 = 0;
x2 - 0 lam1_2 -8 lam2_2 - 10 lam3_2 = 0;
lam1_1 + lam2_1 + lam3_1 = 1;
lam1_2 + lam2_2 + lam3_2 = 1;

/* Variable bounds */

x1 <= 5;
x2 <= 10;
x1 - 10 lam1_2 - 4 lam2_2 4 lam3_2 <= 0;           1
x2 - lam1_1 -3 lam2_1 - 3 lam3_1 <= 0;
lam1_1 <= 1;
lam2_1 <= 1;
lam3_1 <= 1;
lam1_2 <= 1;
lam2_2 <= 1;
lam3_2 <= 1;

sos
SOS1: lam1_1, lam2_1, lam3_1 <=2;
SOS2: lam1_2, lam2_2, lam3_2 <=2;

```

Výstup je zase zobrazený v tabuľke 3.2. Na porovnanie, optimálne riešenie (5, 3) vyšlo aj v tomto príklade rovnako ako graficky načrtnuté z časti 2.4. Hlavným prínosom týchto ukážkových príkladov nie je samotné riešenie, ale na základe teórie nastaviť ohraničenia a vhodne transformovať matematické zápisy do prostredia pre program LPSolve.

Variables	MILP Feasible	result
	8	8
x1	5	5
x2	3	3
lam1_1	0	0
lam2_1	0	0
lam3_1	1	1
lam1_2	0.625	0.625
lam2_2	0.375	0.375
lam3_2	0	0

Tabuľka 3.2: Výstupy z LPSolve IDE pre úlohu obsahujúcu SOS premenné.

Na záver treba podotknúť, že takéto malé úlohy sa dajú jednoducho a rýchlo prepísať do lp formátu. S modelom obsahujúcim niekoľko stoviek až tisícok premenných a ohraničení to už tak jednoducho nejde. Preto na generovanie vstupu do lp formátu budeme používať skriptovací jazyk VBA bežiaci pod excelom, ktorý bude vytvárať jednotlivé ohraničenia.

3.2 Pokrytie spotreby a zavedenie premenných modelu

Na základe popisu problému z kapitoly 1 zavedieme premenné modelu a nastavíme ich tak, aby pokrývali spotrebu. Tú možno pokrývať buď priamo od dodávateľov, alebo z troch zásobníkov. Pre každú možnosť zavedme samostatnú premennú. Podotýkame, že optimalizujeme na dennej báze počas jedného roka. Množstvo denného obderu plynu pre dodávateľov Gazprom (GPE) a Eustream (PVS) označme premennými d_{gpe_i} a d_{pvs_i} , kde i reprezentuje deň optimalizácie. Poznamenajme, že prvým ($i = 1$) optimalizačným dňom je 1. október 2010 a posledným ($i = 365$) je 30. september 2011. Ekvivalentne ďalej označme premenné pre zásobníky Gajary, Láb a Pozagas ako z_{gaj} , z_{lab_i} a z_{poz_i} . Spotrebu pre jednotlivé dni, uvedenú v prílohe v tabuľke 5.3 pokrývame práve z týchto zdrojov. To nás privádza k súboru ohraničení

$$z_i^{Gaj} + z_i^{Lab} + z_i^{Poz} + d_i^{PVS} + d_i^{GPE} = Spotreba_i \quad i = 1, \dots, 365. \quad (3.3)$$

Dáta spotreby sú dostupné v excelovskom súbore `GenerujModel.xlsm`, v hárku "spotreba", ktorý je na CD súčasťou prílohy tejto práce. Makro `GenerujModel_full()` vygeneruje do hárku "vystup" hotový model v lp formáte. V nasledujúcich častiach si matematicky popíšeme jednotlivé ohraničenia. Prislúchajúci zdrojový kód generovania modelu je dostupný aj v prílohe.

3.3 Ohraničenia pre dodávateľov

Všetky ohraničenia pre oboch dodávateľov sú zmluvne stanovené, ako sme už spomínali v časti 1.2. Pre slovenský Eustream platí maximálny denný odber 3 mil. m^3 a pre ruský Gazprom najviac 19,5 mil. m^3 , čo vyjadrujú nasledovné nerovnosti

$$d_i^{GPE} \leq 19,5 \cdot 10^6 \quad (3.4a)$$

$$d_i^{PVS} \leq 3 \cdot 10^6. \quad (3.4b)$$

Pre ruského dodávateľa platí ešte aj podmienka pre maximálny ročný odber vyjadrená

$$\sum_{i=1}^{365} d_i^{GPE} \leq 6,5 \cdot 10^9. \quad (3.5)$$

3.4 Ohraničenia pre zásobníky

V tejto časti zavedieme ohraničenia pre zásobníky na základe ich ťažiacich a vtláčacích kriviek. Tu je na mieste pripomenúť, že ťažba zo zásobníkov prebieha v zimnom období od októbra do konca marca, čo predstavuje 1. až 182. deň optimalizácie. Od 183. dňa až po 365. deň prebieha v zásobníkoch vtláčanie. Ohraničenia pre obe obdobia budú odlišné, a preto ich budeme musieť generovať separátne.

3.4.1 Zásobník Gajary

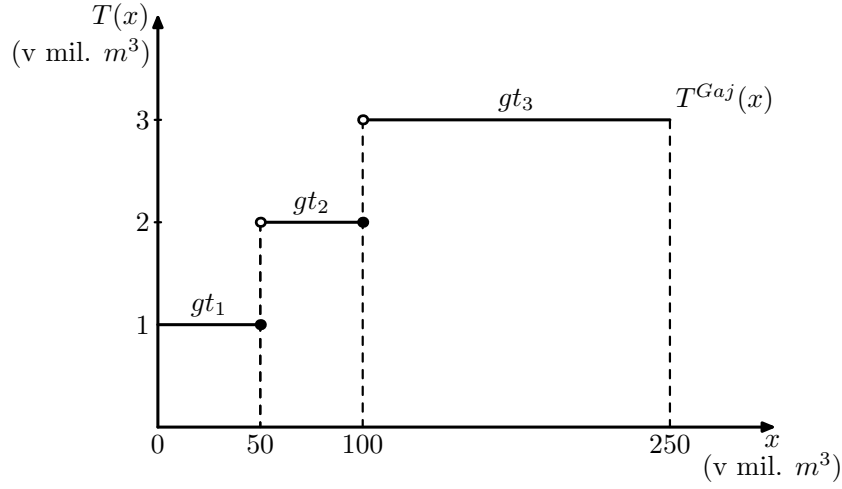
Ťažiacie a vtláčacie krivky pre tento zásobník z kapitoly 1 obrázku 1.3 zapíšme formálnejšie ako funkcie. Keďže sa ohraničenia pre ťažbu zásobníka diametrálne líšia od ohraničení pre vtláčanie a taktiež ich transformácia na lineárne ohraničenia je postavená na odlišnom teoretickom základe, vysvetlíme si ich separátne.

Ťaženie

Označme ťažobnú funkciu $T^{Gaj}(x)$ (obr. 3.1) danú predpisom

$$T^{Gaj}(x) = \begin{cases} 10^6 & x \in [0, 50 \cdot 10^6] \\ 2 \cdot 10^6 & x \in (50 \cdot 10^6, 100 \cdot 10^6] \\ 3 \cdot 10^6 & x \in (100 \cdot 10^6, 250 \cdot 10^6], \end{cases}$$

kde x predstavuje súčasný stav objemu zásobníka v mil. m^3 . Ten sa každý deň v závislosti od ťažby či vtláčania mení. Ďalej budeme používať zápis x_i^{Gaj} pre vyjadrenie stavu zásob v i -ty deň pre zásobník Gajary. Maximálna ťažba v i -ty deň (vyjadruje premenná z_i^{Gaj}) závisí od súčasného stavu zásob x_i^{Gaj} . Súčasný stav zase závisí od zmeny zásob zo všetkých predošlých dní $1, \dots, i-1$. Na začiatku optimalizačného obdobia máme nejaký počiatočný stav zásobníka $x_0^{Gaj} = 250000000$. Ťažba zo zásobníka značí znižovanie zásob, a teda hodnotu premennej z_i^{Gaj} odčítavame od stavu z predošlého dňa. Pri vtláčaní budeme predpokladať záporné znamienko premennej, čo v celkovom



Obrázok 3.1: Funkcia ťaženia pre zásobník Gajary.

meradle bude znamenať kumulovanie zásob. Stav zásobníka v i -ty deň teda v závislosti od premenných zásob a počiatočného stavu zásobníka vyjadríme ako

$$x_i^{Gaj} = x_0^{Gaj} - \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Gaj} \quad i = 1, \dots, 182. \quad (3.6)$$

Aplikovaním teórie z časti 2.3 transformujeme funkciu $T^{Gaj}(x)$ na súbor nerovností. Pred tým však zavedieme nové 0 – 1 premenné gt_i^1 , gt_i^2 a gt_i^3 , kde každá prislúcha práve jednému intervalu. Tieto binárne premenné vyjadrujú, na ktorom intervale sa x_i^{Gaj} práve nachádza. Sústavu ohraničení vytvoríme pre celé vtláčacie obdobie. Pre $i = 1, \dots, 182$ platí

$$\begin{aligned} (x_i^{Gaj} - 50 \cdot 10^6) &\leq H(1 - gt_i^1) \\ (50 \cdot 10^6 - x_i^{Gaj}) &\leq H(1 - gt_i^2) \\ (x_i^{Gaj} - 100 \cdot 10^6) &\leq H(1 - gt_i^2) \\ (100 \cdot 10^6 - x_i^{Gaj}) &\leq H(1 - gt_i^3). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Hodnotu H zavádzame z numerických dôvodov a predstavuje dostatočne veľkú konštantu. Požadujeme ľubovoľnú konštantu väčšiu ako kapacita zásobníka. Dosadením výrazu (3.6) za x_i^{Gaj} do súboru nerovností (3.7) dostaneme ohraničenia s premennými zásob.

$$\begin{aligned}
Hgt_i^1 - \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Gaj} &\leq H - x_0^{Gaj} + 50 \cdot 10^6 \\
Hgt_i^2 + \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Gaj} &\leq H + x_0^{Gaj} - 50 \cdot 10^6 \\
Hgt_i^2 - \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Gaj} &\leq H - x_0^{Gaj} + 100 \cdot 10^6 \\
Hgt_i^3 + \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Gaj} &\leq H + x_0^{Gaj} - 100 \cdot 10^6
\end{aligned} \tag{3.8}$$

pre $i = 1, \dots, 182$.

Pre premenné gt_i^1, gt_i^2 a gt_i^3 okrem deklarácie, že sú binárneho typu predpokladáme tiež

$$gt_i^1 + gt_i^2 + gt_i^3 = 1 \quad i = 1, \dots, 182. \tag{3.9}$$

Táto rovnosť zaručí, že z binárnych premenných gt_i^1, gt_i^2 a gt_i^3 práve jedna nadobúda hodnotou 1 a to tá, ktorá prislúcha intervalu funkcie $T^{Gaj}(x)$, na ktorom sa práve nachádza x_i^{Gaj} . Všetky ostatné su nulové. S pomocou týchto premenných už vieme zaviesť lineárne ohraničenie pre $z_i^{Gaj} \leq T^{Gaj}(x)$ ako

$$z_i^{Gaj} \leq 10^6 gt_i^1 + 2 \cdot 10^6 gt_i^2 + 3 \cdot 10^6 gt_i^3 \quad i = 1, \dots, 365. \tag{3.10}$$

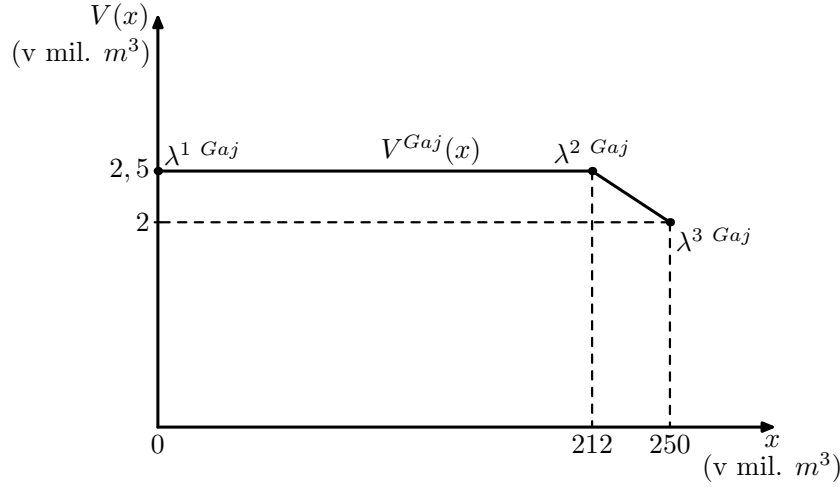
Poznámka 3.2. Ako sme v úvodnej časti vytvárania modelu spomenuli, pre ťažiacie obdobie budeme pre premenné zásobníkov predpokladať, že sú nezáporné, teda $z_i^{Gaj} \geq 0$ pre $i = 1, \dots, 182$. Na základe poznámky 3.1 síce budeme tieto ohraničenia brať do úvahy, ale nie je nutné ich v kóde generovať.

Generovanie ohraničení zapísaných rovnicami, resp. nerovnosťami (3.8) až (3.10) sú súčasťou zdrojového kódu uvedeného v prílohe.

Vtláčanie

Označme tentokrát funkciu vtláčania $V^{Gaj}(x)$ (obr. 3.2) danú predpisom

$$V^{Gaj}(x) = \begin{cases} 2,5 \cdot 10^6 & x \in [0, 212 \cdot 10^6] \\ -\frac{1}{76}x + \frac{201}{38} \cdot 10^6 & x \in [212 \cdot 10^6, 250 \cdot 10^6] \end{cases}$$



Obrázok 3.2: Funkcia vtláčania pre zásobník Gajary.

Funkcia vtláčania pre zásobník Gajary je lineárna lomená. Na základe teórie z časti 2.4 prevedieme ohraňenie lineárnou lomenou funkciou $V^{Gaj}(x)$ na sústavu lineárnych ohraňení. Pre každý krajný alebo zlomový bod funkcie $V^{Gaj}(x)$ zavedieme nové premenné. Menovite pre body $[0; 2,5 \cdot 10^6]$, $[212 \cdot 10^6; 2,5 \cdot 10^6]$, $[250 \cdot 10^6; 2 \cdot 10^6]$ označíme premenné v tomto poradí $\lambda_i^1 Gaj$, $\lambda_i^2 Gaj$, $\lambda_i^3 Gaj$. Ohraňenia pre každý deň vtláčacieho obdobia $i = 183, \dots, 365$ sú

$$\begin{aligned} x_i^{Gaj} &= 0\lambda_i^1 Gaj + 212 \cdot 10^6 \lambda_i^2 Gaj + 250 \cdot 10^6 \lambda_i^3 Gaj \\ x_i^{Gaj} &\leq 2,5 \cdot 10^6 \lambda_i^1 Gaj + 2,5 \cdot 10^6 \lambda_i^2 Gaj + 2 \cdot 10^6 \lambda_i^3 Gaj. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Po dosadení za x_i^{Gaj} rovnosťou (3.6) dostaneme ohraňenia s premennými zásob pre $i = 183, \dots, 365$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Gaj} + 0\lambda_i^1 Gaj + 212 \cdot 10^6 \lambda_i^2 Gaj + 250 \cdot 10^6 \lambda_i^3 Gaj &= x_0^{Gaj} \\ \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Gaj} + 2,5 \cdot 10^6 \lambda_i^1 Gaj + 2,5 \cdot 10^6 \lambda_i^2 Gaj + 2 \cdot 10^6 \lambda_i^3 Gaj &\geq x_0^{Gaj} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pre novozavedené premenné $\lambda_i^1 Gaj$, $\lambda_i^2 Gaj$, $\lambda_i^3 Gaj$ budeme požadovať ešte dodatočné ohraňenia

$$\lambda_i^1 Gaj + \lambda_i^2 Gaj + \lambda_i^3 Gaj = 1 \quad i = 183, \dots, 365 \quad (3.13)$$

$$0 \leq \lambda_i^1 Gaj, \lambda_i^2 Gaj, \lambda_i^3 Gaj \leq 1 \quad i = 183, \dots, 365. \quad (3.14)$$

3.4. OHRANIČENIA PRE ZÁSObNÍKY

Ostáva už len posledná podmienka, ktorú nemožno triviálne zapísať do tvaru lineárneho ohraničenia. Ide o podmienku vychádzajúcu z teórie separovateľného programovania, že nie viac ako dve za sebou idúce lambdy pre danú SOS množinu sú nenulové. Nech množina $\lambda_i^{1\ Gaj}, \lambda_i^{2\ Gaj}, \lambda_i^{3\ Gaj}$ je usporiadaná a každá hodnota i bude predstavovať samostatnú SOS množinu. Zápis tejto podmienky formulujeme bližšie zápisu vstupu pre program LPSolve IDE

$$SOS : \lambda_1^{i\ Gaj}, \lambda_2^{i\ Gaj}, \lambda_3^{i\ Gaj} \leq 2 \quad i = 183, \dots, 365. \quad (3.15)$$

Pri ťažiacom období sme pre premenné zásobníkov predpokladali, že sú kladné. Vtláčanie predstavuje opačnú operáciu ako ťažba, a preto budeme od premenných očakávať, že sú záporné. Na základe poznámky 3.1 musíme pre každú zápornú premennú explicitne vyjadriť jej dolnú hranicu. Tú stanovíme ako mínus kapacitu zásobníka. To nás privádza k zavedeniu ohraničení

$$-250 \cdot 10^6 \leq z_i^{Gaj} \leq 0 \quad i = 183, \dots, 365. \quad (3.16)$$

Generovanie ohraničení (3.12) až (3.16) je rovnako aj pre vtláčacie obdobie zásobníka Gajary súčasťou zdrojového kódu uvedeného v prílohe.

3.4.2 Zásobník Láb

Obdobne budeme zavádzať ohraničenia aj pre ďalší zásobník. Rovnako ako pre zásobník Gajary aj pre Láb bude platiť, že si ohraničenia rozdelíme na ťažiace obdobie $i = 1, \dots, 182$ a obdobie vtláčania $i = 183, \dots, 365$. Taktiež ťažiacu a vtláčaciu krivku z kapitoly 1 (obr. 1.4) preformulujeme ako funkciu.

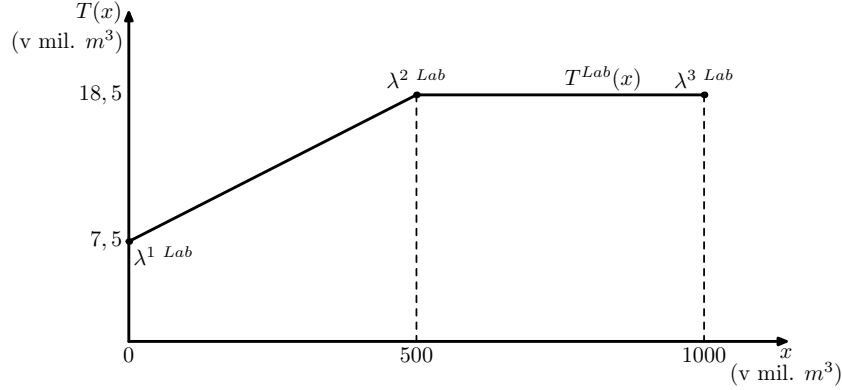
Ťaženie

Funkciu pre ťaženie zo zásobníka Láb (obr. 3.3) definujeme

$$T^{Lab}(x) = \begin{cases} \frac{11}{500}x + 7,5 \cdot 10^6 & x \in [0, 500 \cdot 10^6] \\ 18,5 \cdot 10^6 & x \in [500 \cdot 10^6, 1000 \cdot 10^6] \end{cases}$$

Na x -ovej osi máme neznámu vyjadrujúcu aktuálne množstvo plynu v zásobníku v mil. m^3 . Hodnoty na y -ovej osi vyjadrujú maximálnu dennú ťažbu v závislosti od x (ďalej budeme používať označenie x_i^{Lab}). Počiatočný stav zásobníka Láb ešte pred začiatkom optimalizačného obdobia v čase 0 označíme

3.4. OHRANIČENIA PRE ZÁSObNÍKY



Obrázok 3.3: Funkcia ťaženia pre zásobník Láb.

ako $x_0^{Lab} = 814397336$. Stav plynu v zásobníku v deň i môžeme ekvivalentne vyjadriť ako v prípade zásobníka Gajary (3.6) ako

$$x_i^{Lab} = x_0^{Lab} - \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Lab} \quad i = 1, \dots, 365. \quad (3.17)$$

Vzhľadom na to, že funkcia $T^{Lab}(x)$ je lineárna lomená, využijúc teóriu z časti 2.4, opätovne zavedieme nové premenné v poradí $\lambda_i^{1 Lab}, \lambda_i^{2 Lab}, \lambda_i^{3 Lab}$ pre krajné, resp. zlomové body $[0; 7, 5 \cdot 10^6], [500 \cdot 10^6; 18, 5 \cdot 10^6], [1000 \cdot 10^6; 18, 5 \cdot 10^6]$. Hodnota x_i^{Lab} ako aj ohraničenie pre $T^{Lab}(x)$ potom vyzerá

$$\begin{aligned} x_i^{Lab} &= 0\lambda_i^{1 Lab} + 212 \cdot 10^6 \lambda_i^{2 Lab} + 250 \cdot 10^6 \lambda_i^{3 Lab} \\ x_i^{Lab} &\leq 2, 5 \cdot 10^6 \lambda_i^{1 Lab} + 2, 5 \cdot 10^6 \lambda_i^{2 Lab} + 2 \cdot 10^6 \lambda_i^{3 Lab} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Po dosadení rovnosti (3.17) za x_i^{Lab} do rovníc (3.18) dostaneme vyjadrenie, v ktorom vystupujú premenné zásobníka Láb.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Lab} + 0\lambda_i^{1 Lab} + 500 \cdot 10^6 \lambda_i^{2 Lab} + 1000 \cdot 10^6 \lambda_i^{3 Lab} &= x_0^{Lab} \\ \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Lab} + 7, 5 \cdot 10^6 \lambda_i^{1 Lab} + 18, 5 \cdot 10^6 \lambda_i^{2 Lab} + 18, 5 \cdot 10^6 \lambda_i^{3 Lab} &\geq x_0^{Lab}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Novozavedené SOS premenné $\lambda^{1 Lab}, \lambda^{2 Lab}, \lambda^{3 Lab}$ musia ešte spĺňať ohraničenia

$$\lambda^{1 Lab} + \lambda^{2 Lab} + \lambda^{3 Lab} = 1 \quad i = 1, \dots, 182 \quad (3.20)$$

a taktiež požadujeme, aby boli v intervale

$$0 \leq \lambda_i^1{}^{Lab}, \lambda_i^2{}^{Lab}, \lambda_i^3{}^{Lab} \leq 1 \quad i = 183, \dots, 365. \quad (3.21)$$

Ako poslednú potrebujeme vyjadriť podmienku, že pre každú SOS množinu v i -tom dni nesmú byť viac ako dve za sebou idúce lambdy nenulové. V schematickom zápise:

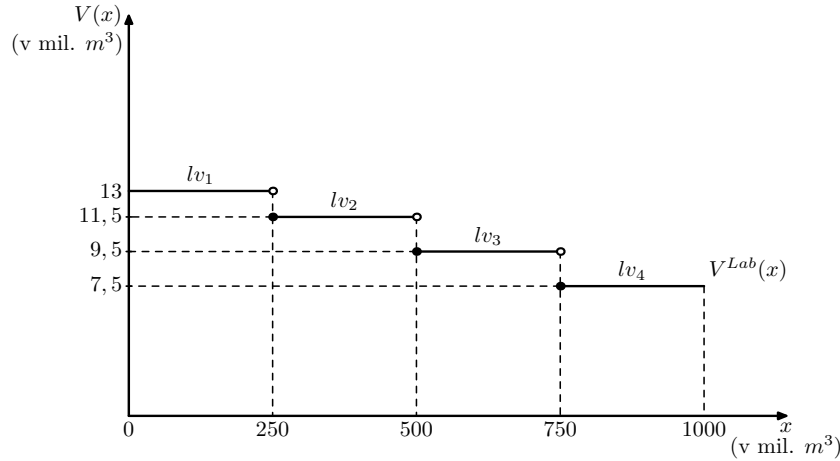
$$SOS : \lambda_i^1{}^{Lab}, \lambda_i^2{}^{Lab}, \lambda_i^3{}^{Lab} \leq 2 \quad i = 1, \dots, 182. \quad (3.22)$$

Ohraničenia (3.30) až (3.35) sú súčasťou zdrojového kódu na generovanie modelu dostupné v prílohe.

Vtláčanie

Rovnako aj pre vtláčacie obdobie zásobník Láb definujeme funkciu (obr. 3.4) $V^{Lab}(x)$ ako

$$V^{Lab}(x) = \begin{cases} 13 \cdot 10^6 & x \in [0, 250 \cdot 10^6] \\ 11,5 \cdot 10^6 & x \in (250 \cdot 10^6, 500 \cdot 10^6] \\ 9,5 \cdot 10^6 & x \in (500 \cdot 10^6, 750 \cdot 10^6] \\ 7,5 \cdot 10^6 & x \in (750 \cdot 10^6, 1000 \cdot 10^6] \end{cases}$$



Obrázok 3.4: Funkcia vtláčania pre zásobník Láb.

Funkcia vtláčania pre zásobník Láb obsahuje tri body nespojitosti a vytvára nimi štyri intervaly s rôznou hodnotou účelovej funkcie. Na základe teórie z druhej kapitoly časti 2.3 zavedieme 0 – 1 premenné, každú prislúchajúcu práve jednému intervalu. Označme ich $lv_i^1, lv_i^2, lv_i^3, lv_i^4$. Vytvoríme tak sústavu ohraničení pre kde $i = 182, \dots, 365$

$$\begin{aligned}
(x_i^{Lab} - 250 \cdot 10^6) &\leq H(1 - lv_i^1) \\
(250 \cdot 10^6 - x_i^{Lab}) &\leq H(1 - lv_i^2) \\
(x_i^{Lab} - 500 \cdot 10^6) &\leq H(1 - lv_i^2) \\
(500 \cdot 10^6 - x_i^{Lab}) &\leq H(1 - lv_i^3) \\
(x_i^{Lab} - 750 \cdot 10^6) &\leq H(1 - lv_i^2) \\
(750 \cdot 10^6 - x_i^{Lab}) &\leq H(1 - lv_i^4).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Dosadením rovnice (3.17) za x_i^{Lab} prepíšeme ohraničenia na tvar

$$\begin{aligned}
Hlv_i^1 - \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Lab} &\leq H - x_0^{Lab} + 250 \cdot 10^6 \\
Hlv_i^2 + \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Lab} &\leq H + x_0^{Lab} - 250 \cdot 10^6 \\
Hlv_i^2 - \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Lab} &\leq H - x_0^{Lab} + 500 \cdot 10^6 \\
Hlv_i^3 + \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Lab} &\leq H + x_0^{Lab} - 500 \cdot 10^6 \\
Hlv_i^3 - \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Lab} &\leq H - x_0^{Lab} + 750 \cdot 10^6 \\
Hlv_i^4 + \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Lab} &\leq H + x_0^{Lab} - 750 \cdot 10^6
\end{aligned} \tag{3.24}$$

pre $i = 183, \dots, 365$.

Keďže požadujeme, aby hodnota pre binárne premenné v i -ty deň bola 1 pre práve jednu premennú, zavádzame doplňujúce ohraničenie

$$lv_i^1 + lv_i^2 + lv_i^3 + lv_i^4 = 1. \tag{3.25}$$

Ohraničenie pre maximálny denný odber funkcie pre z_i^{Lab} pomocou binárnych premenných $lv_i^1, lv_i^2, lv_i^3, lv_i^4$ zapíšeme ako

$$-z_i^{Lab} \leq 13 \cdot 10^6 lv_i^1 + 11,5 \cdot 10^6 lv_i^2 + 9,5 \cdot 10^6 lv_i^3 + 7,5 \cdot 10^6 lv_i^4 \tag{3.26}$$

Poznámka 3.3. Tu je na mieste pripomenúť, že premenné pre každý zásobník v období utláčania sú záporné, preto aj v nerovnosti (3.26) uvádzame $-z_i^{Lab}$, aby výsledné hodnoty boli kladné.

Rovnako ako pre vtláčacie obdobie zásobníka Gajary, aj pre zásobník Láb musíme zdefinovať nekladnosť premenných zásob s ich dolným ohraničením

$$-1000 \cdot 10^6 \leq z_i^{Lab} \leq 0 \quad i = 183, \dots, 365. \quad (3.27)$$

Generovanie ohraničení zavedených v (3.24) až (3.27) je sú súčasťou zdrojového kódu.

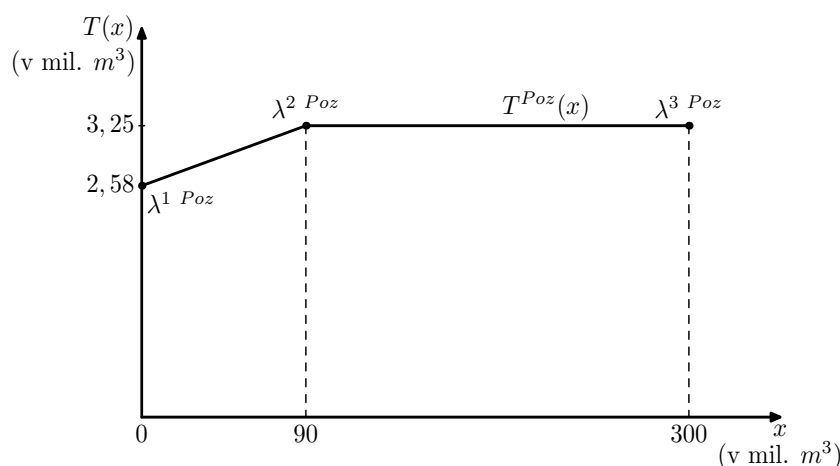
3.4.3 Zásobník Pozagas

S analogickým prístupom ako pri predchádzajúcich dvoch zásobníkoch budeme pristupovať aj k tvorbe ohraničení pre zásobník Pozagas. Ťažobnú a vtláčaciu krivku zásobníka (obr. 1.5) zapíšeme formálne ako funkciu. Vzhľadom na to, že ťažiacia aj vtláčacia krivka Pozagasu sú lineárne lomené funkcie, všetky ohraničenia pre tento zásobník sa budú odvíjať na základe teórie z časti 2.4.

Ťaženie

Ťažiacu funkciu pre Pozagas označíme $T^{Poz}(x)$ (obr.3.5) a definujeme

$$V^{Poz}(x) = \begin{cases} \frac{67}{9000}x + 2,58 \cdot 10^6 & x \in [0, 90 \cdot 10^6] \\ 3,25 \cdot 10^6 & x \in [90 \cdot 10^6, 300 \cdot 10^6], \end{cases}$$



Obrázok 3.5: Funkcia ťaženia pre zásobník Pozagas.

kde neznáma x (ďalej budeme používať x_i^{Poz}) rovnako aj tu predstavuje momentálne množstvo plynu v zásobníku v i -ty deň. Počiatočný stav tohto

3.4. OHRANIČENIA PRE ZÁSObNÍKY

zásobníka je $x_0^{Lab} = 249182993 \text{ m}^3$ plynu. Stav zásobníka v i -ty deň analogicky ako pri predchádzajúcich zásobníkoch vyjadríme

$$x_i^{Poz} = x_0^{Poz} - \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Poz} \quad i = 1, \dots, 365. \quad (3.28)$$

Pre krajné body a bod zlomu $[0; 2,58 \cdot 10^6]$, $[90 \cdot 10^6; 3,25 \cdot 10^6]$, $[300 \cdot 10^6; 3,25 \cdot 10^6]$ zavedieme premenné $\lambda_i^1 \text{ Poz}$, $\lambda_i^2 \text{ Poz}$, $\lambda_i^3 \text{ Poz}$ a vytvoríme nasledujúcu sústavu ohraničení pre $i = 1, \dots, 182$

$$\begin{aligned} x_i^{Poz} &= 0\lambda_i^1 \text{ Poz} + 90 \cdot 10^6 \lambda_i^2 \text{ Poz} + 300 \cdot 10^6 \lambda_i^3 \text{ Poz} \\ x_i^{Poz} &\leq 2,58 \cdot 10^6 \lambda_i^1 \text{ Poz} + 3,25 \cdot 10^6 \lambda_i^2 \text{ Poz} + 3,25 \cdot 10^6 \lambda_i^3 \text{ Poz} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Substitúciou rovnice (3.28) do výrazov (3.29) dostávame

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Poz} + 0\lambda_i^1 \text{ Poz} + 90 \cdot 10^6 \lambda_i^2 \text{ Poz} + 300 \cdot 10^6 \lambda_i^3 \text{ Poz} &= x_0^{Poz} \\ \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Poz} + 2,58 \cdot 10^6 \lambda_i^1 \text{ Poz} + 3,25 \cdot 10^6 \lambda_i^2 \text{ Poz} + 3,25 \cdot 10^6 \lambda_i^3 \text{ Poz} &\geq x_0^{Poz} \end{aligned} \quad (3.30)$$

pre $i = 1, \dots, 182$.

Ostatné doplňujúce ohraničenia vyjadríme až na záver tejto časti, lebo sú spoločné pre ťažbu aj vtláčanie.

Vtláčanie

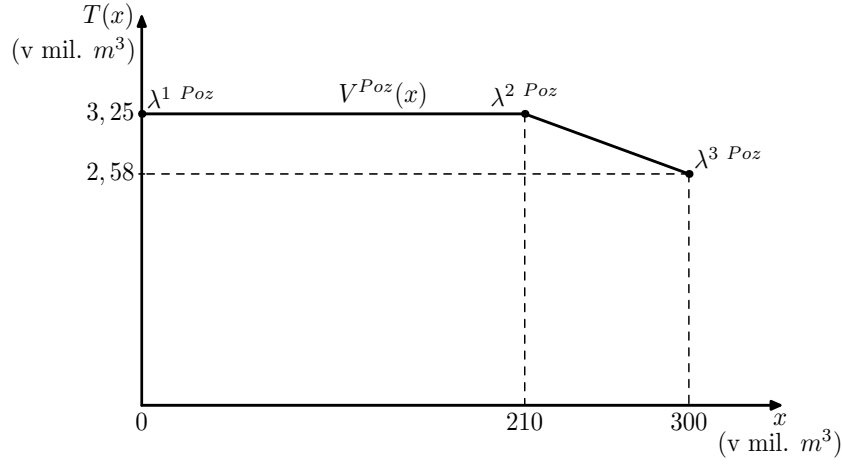
Funkciu vtláčania označíme $V^{Poz}(x)$ (obr.3.6) a definujeme

$$V^{Poz}(x) = \begin{cases} 3,25 \cdot 10^6 & x \in [0, 210 \cdot 10^6] \\ -\frac{67}{9000}x + \frac{361}{75} \cdot 10^6 & x \in [210 \cdot 10^6, 300 \cdot 10^6] \end{cases}$$

Pre funkciu vtláčania uvažujme body $[0; 3,25 \cdot 10^6]$, $[210 \cdot 10^6; 3,25 \cdot 10^6]$, $[300 \cdot 10^6; 2,58 \cdot 10^6]$ na základe ktorých vytvoríme ohraničenia pre $i = 1, \dots, 182$

$$\begin{aligned} x_i^{Poz} &= 0\lambda_i^1 \text{ Poz} + 210 \cdot 10^6 \lambda_i^2 \text{ Poz} + 300 \cdot 10^6 \lambda_i^3 \text{ Poz} \\ x_i^{Poz} &\leq 3,25 \cdot 10^6 \lambda_i^1 \text{ Poz} + 3,25 \cdot 10^6 \lambda_i^2 \text{ Poz} + 2,58 \cdot 10^6 \lambda_i^3 \text{ Poz}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.4. OHRANIČENIA PRE ZÁSObNÍKY



Obrázok 3.6: pre zásobník Pozagas.

Substitúciou za x_i^{Poz} rovnice (3.28) dostaneme

$$\sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Poz} + 0\lambda_i^{1\ Poz} + 210 \cdot 10^6 \lambda_i^{2\ Poz} + 300 \cdot 10^6 \lambda_i^{3\ Poz} = x_0^{Poz}$$

$$\sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Poz} + 3,25 \cdot 10^6 \lambda_i^{1\ Poz} + 3,25 \cdot 10^6 \lambda_i^{2\ Poz} + 2,58 \cdot 10^6 \lambda_i^{3\ Poz} \geq x_0^{Poz} \quad (3.32)$$

pre $i = 183, \dots, 365$.

Pre novozavedené premenné lambdy zavediem dodatočné ohraničenia

$$\lambda_i^{1\ Poz} + \lambda_i^{2\ Poz} + \lambda_i^{3\ Poz} = 1 \quad i = 1, \dots, 365, \quad (3.33)$$

$$0 \leq \lambda_i^{1\ Poz}, \lambda_i^{2\ Poz}, \lambda_i^{3\ Poz} \leq 1 \quad i = 1, \dots, 365 \quad (3.34)$$

platné pre obdobie ťaženia aj vtláčania. Rovnako vyjadríme neštandardný zápis podmienky pre zavedenia SOS premenných

$$SOS : \lambda_i^{1\ Poz}, \lambda_i^{2\ Poz}, \lambda_i^{3\ Poz} \leq 2 \quad i = 1, \dots, 365. \quad (3.35)$$

Zavedenie záporných premenných pre obdobie vtláčania vyzerá

$$-300 \cdot 10^6 \leq z_i^{Poz} \leq 0 \quad i = 1, \dots, 365. \quad (3.36)$$

Súčasťou zdrojového kódu pre ohraničenia zásobníka Pozagas su výrazy (3.30) a (3.32) až (3.36).

Podmienka, pre vytvorenie zásob na nasledujúce obdobie

Pri predstavovaní problému v prvej kapitole sme sa zmienili o tom, že pre SPP je dôležité vytvárať si zásoby plynu na nasledujúce obdobie. Na konci optimalizačného obdobia, teda v 366. deň (uvažujeme akoby x_{366}) budeme požadovať, aby stav celkových zásob vo všetkých troch zásobníkoch bol aspoň 1100 mil. m^3 . Celkový stav nech je rovný súčtu stavu zo všetkých zásobníkov $x_{366} = x_{366}^{Gaj} + x_{366}^{Lab} + x_{366}^{Poz}$. Požadujeme aby

$$x_{366}^{Gaj} + x_{366}^{Lab} + x_{366}^{Poz} \geq 1100 \cdot 10^6. \quad (3.37)$$

Dosadením výrazov (3.6), (3.17) a (3.28) pre $i = 366$ dostaneme ohraničenie pre nakumulovanie zásob

$$\sum_{i=1}^{365} z_i^{Gaj} + \sum_{i=1}^{365} z_i^{Lab} + \sum_{i=1}^{365} z_i^{Poz} \leq x_0^{Gaj} + x_0^{Lab} + x_0^{Poz} - 1100 \cdot 10^6. \quad (3.38)$$

3.4.4 Kapacita zásobníkov

V tejto časti sa zameriame na ohraničenia opisujúce kapacitu všetkých troch zásobníkov. Na jednoduchom príklade si ukážme, prečo musíme počítať aj s týmito ohraničeniami. Uvažujme zásobník Láb v 360. deň optimalizačného obdobia, v ktorom sa zo včera nachádza 995 mil. m^3 plynu. Podľa vtláčacej krivky môžeme vtlačiť maximálne 7,5 mil. m^3 plynu. Nech v rámci vytvárania zásob je pre nás výhodné vtláčať do zásobníka jeho maximálny možný denný objem. Bez porušenia akéhokoľkve doteraz spomenutého ohraničenia môžeme vtlačiť 7,5 mil. m^3 plynu. Stav zásob v 361. deň by mal byť 1002,5 mil. m^3 avšak kapacita zásobníka je len 1000 mil. m^3 . Reálne teda môže nastať situácia, že ak sme dostatočne blízko hornej alebo dolnej kapacity zásobníka, nemôžeme ťažiť resp. vtláčať ani maximálne denné množstvo. Každý zásobník má svoju hornú kapacitu (konkrétne hodnoty sú uvedené v prvej kapitole časti 1.3) a dolnú, ktorá je logicky 0. Pre každý deň optimalizačného obdobia zavedieme dolné a horné ohraničenie pre súčasný stav každého zo zásobníkov.

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_i^{Gaj} \leq 250 \cdot 10^6 \\ 0 &\leq x_i^{Lab} \leq 1000 \cdot 10^6 \\ 0 &\leq x_i^{Poz} \leq 300 \cdot 10^6 \end{aligned} \quad (3.39)$$

pre $i = 1, \dots, 365$.

3.5. ÚČELOVÁ FUNKCIA

Dosadením vyjadrení pre x_i^{Gaj} (3.6), x_i^{Lab} (3.17) a x_i^{Poz} (3.28) do vyššie uvedených nerovností dostaneme ohraničenia pre kapacity jednotlivých zásobníkov.

$$\begin{aligned} x_0^{Gaj} - 250 \cdot 10^6 &\leq \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Gaj} \leq x_0^{Gaj} \\ x_0^{Lab} - 1000 \cdot 10^6 &\leq \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Lab} \leq x_0^{Lab} \\ x_0^{Poz} - 300 \cdot 10^6 &\leq \sum_{k=1}^{i-1} z_k^{Poz} \leq x_0^{Poz} \end{aligned} \quad (3.40)$$

pre $i = 1, \dots, 365$.

Aj tieto ohraničenia sú súčasťou funkcie `GenerujModel_full()` uvedenej v prílohe.

3.5 Účelová funkcia

Náklady zahrnuté v účelovej funkcii môžeme rozdeliť do troch častí. Ako prvé sú náklady spojené s priamym nákupom od oboch dodávateľov za celkové nakúpené množstvo plynu. Ako druhú časť nákladov zahrnieme možnú pokutu ToP pri nedostatočnom nákupe plynu od Gazpromu. Tretí typ nákladov je zmena hodnoty všetkých zásob. To má protichodný charakter voči ToP, pretože nakúpenie plynu navyše môže pôsobiť ako kompenzácia voči pokute. Čím viac plynu nakúpime, tým nižšia je pokuta. Samotnú hodnotu plynu uskladnenú v zásobníkoch nerátame ako náklady. Chápeme ju skôr ako úsporu na pokute a hodnota peňazí za uskladnený plyn sa zmení na hodnotu samotného plynu, ktorý môžeme časom predať. Aj preto budeme kladnú zmenu zásob brať ako záporné náklady. Schematicky bude účelová funkcia vyzeráť ako

$$\min \text{Nákup} - \Delta \text{Zásob} + \text{Pokuta}$$

3.5.1 Nákup plynu

Označme nákupnú cenu v i -ty deň pre Gazprom p_i^{GPE} a pre Eustream p_i^{PVS} . Ceny sú na mesačnej báze, teda cena v i -ty deň bude stanovená prislúchajúcemu mesiacu s tým, že dni inexistujú od začiatku októbra 2010 do konca septembra 2011. Premenné pre dodávateľov sme si označili v skorších častiach tejto práce. Denné množstvo plynu nakúpené od Gazpromu v i -ty

3.5. ÚČELOVÁ FUNKCIA

deň označujeme d_i^{GPE} a pre Eustream d_i^{GPE} . Celkové náklady z priameho nákupu zapíšeme

$$\sum_{i=1}^{365} p_i^{GPE} d_i^{GPE} + \sum_{i=1}^{365} p_i^{PVS} d_i^{PVS} \quad (3.41)$$

3.5.2 Zmena zásob

Označme koncové množstvo plynu v zásobníkoch Gajary, Láb a Pozagas ako $x_K^{Gaj}, x_K^{Lab}, x_K^{Poz}$. Počiatočný stav sme si vyššie označili ako $x_0^{Gaj}, x_0^{Lab}, x_0^{Poz}$. Pre koncový stav zásbo platí

$$\begin{aligned} x_K^{Gaj} &= x_0^{Gaj} - \sum_{i=1}^{365} z_i^{Gaj} \\ x_K^{Lab} &= x_0^{Lab} - \sum_{i=1}^{365} z_i^{Lab} \\ x_K^{Poz} &= x_0^{Poz} - \sum_{i=1}^{365} z_i^{Poz} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Celkové zásoby označme ako Z , pričom jasne platí, že celkové zásoby sa rovnajú súčtu zásob jednotlivých zásobníkov $Z = Z^{Gaj} + Z^{Lab} + Z^{Poz}$. Zápornú zmenu zásob počas celého optimalizačného obdobia zapíšeme

$$\begin{aligned} -\Delta Z &= -(\Delta Z^{Gaj} + \Delta Z^{Lab} + \Delta Z^{Poz}) \\ &= -(x_K^{Gaj} - x_0^{Gaj} + x_K^{Lab} - x_0^{Lab} + x_K^{Poz} - x_0^{Poz}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

z čoho po dosadení (3.43) dostaneme výslednú zápornú zmenu

$$-\Delta Z = \sum_{i=1}^{365} z_i^{Gaj} + \sum_{i=1}^{365} z_i^{Lab} + \sum_{i=1}^{365} z_i^{Poz}. \quad (3.44)$$

Označme celkovú hodnotu plynu v zásobníku ako P_0 . Hodnota plynu za 1 m^3 , ktorý zo zásobníkov ťažíme je rovná

$$p_0 = \frac{P_0}{x_0}.$$

Pre jednotlivé zásobníky označme túto jednotkovú cenu ako p_0^{Gaj}, p_0^{Lab} a p_0^{Poz} . Konkrétne ceny s ktorými budeme v modeli pracovať sú uvedené v tabuľke 3.3. Pre vtláčanie je cena rovná nákupnej za prislúchajúci mesiac, v ktorý nakupujeme. Hodnotu zápornej zmeny zásob teda zapíšeme

3.5. ÚČELOVÁ FUNKCIA

Tabuľka 3.3: Ceny a množstvo plynu v zásobníkoch na začiatku optimalizačného obdobia.

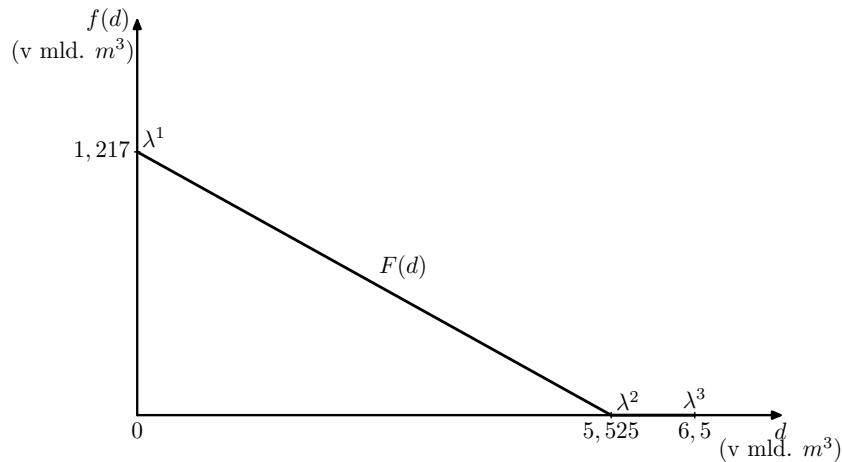
	x_0	P_0	p_0
Gajary	250 000 000	49 703 762	0.19881505
Láb	814 397 336	164 096 512	0.20149441
Pozagas	249 182 993	58 388 430	0.23431948

$$\begin{aligned}
 &= p_0^{Gaj} \sum_{i=1}^{182} z_i^{Gaj} + p_0^{Lab} \sum_{i=1}^{182} z_i^{Lab} + p_0^{Poz} \sum_{i=1}^{182} z_i^{Poz} \\
 &+ \sum_{i=183}^{365} p_i^{Gaj} z_i^{Gaj} + \sum_{i=183}^{365} p_i^{Poz} z_i^{Poz} + \sum_{i=183}^{365} p_i^{Lab} z_i^{Lab}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

3.5.3 Pokuta ToP

Pokutu od ruského Gazpromu vyjadríme funkciou K hodnote v bode o sme

$$F(d) = \begin{cases} -0,220186x + 1216528963 & d \in [0, 5,525 \cdot 10^9] \\ 0 & d \in [5,525 \cdot 10^9, 6,5 \cdot 10^9] \end{cases}$$



Obrázok 3.7: Funkcia vyjadrujúca výšku pokuty ruskému Gazpromu.

sa dostali ako 75% násobku priemernej ročnej ceny neodoberateľného množstva 5,525 mld. m^3 plynu. Premenná d je ročné odobraté množstvo plynu od ruského Gazpromu.

3.5. ÚČELOVÁ FUNKCIA

$$d = \sum_{i=1}^{365} d_i^{GPE}$$

Funkcia $F(d)$ je lineárna lomená funkcia, čo nás opäť navádza k teórii separovateľného programovania. Ohraničenie pre premennú d a jej funkčnú hodnotu $F(d)$

$$d = 0\lambda^1 + 5,525 \cdot 10^9 \lambda^2 + 6,5 \cdot 10^9 \lambda^3 \quad (3.46a)$$

$$F(d) = 1216528963\lambda^1 + 0\lambda^2 + 0\lambda^3 \quad (3.46b)$$

dodatočné ohraničenia

$$\lambda^1 + 0\lambda^2 + 0\lambda^3 = 1 \quad (3.47)$$

$$0 \leq \lambda^1, 0\lambda^2, 0\lambda^3 \leq 1 \quad (3.48)$$

s podmienkou pre SOS množinu

$$SOS : \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3 \leq 2. \quad (3.49)$$

Výslednú účelovú funkciu dostaneme minimalizovaním súčtu výrazov (3.41), (3.45) a (3.46b). Vyjadrenia (3.46a), (3.47) až (3.49) sú súčasťou ohraničení modelu

Kapitola 4

Numerické výsledky

V tejto časti opíšeme prístup k riešeniu vytvoreného modelu a okomentujeme dosiahnuté výsledky. Riešeniu kompletného modelu predchádzalo spúšťanie programu na niekoľkých menších problémoch. Na tie sa postupom času pridávala nadstavba a ohraničenia spolu s počtom premenných sa zväčšovali. Už pri probléme s dvoma odberateľmi a jedným zásobníkom sa čas výpočtu javil ako problém. Navyše aj pri najefektívnejšej metóde, ktorú si LPSolve zvolil, je rýchlosť konverencie ťažko odhadnuteľná. Pre rýchlejší výpočet sme prednastavené hodnoty numerického zaokrúhľovania a tolerancií povolili a nastavili menej prísne hodnoty. Nastavenia sme zmenili pre (presné popisy zmenených premenných je v manuáli [1])

$$EPSB = 1E - 5$$

$$EPSD = 1E - 5$$

$$EPSEL = 1E - 5$$

$$EPS \text{ Int} = 1E - 4$$

$$EPS \text{ Pivot} = 1E - 6$$

Riešenie uvedené na konci tejto kapitoly síce nie je optimálne, ale je najlepšie možné v dosiahnuteľnom čase. Hodnota účelovej funkcie je 1 403 680 316 eur. O tomto medzivýsledku vieme z výstupových hláskových súborov, že sa líši od optimálneho najviac o 0,6%. Relatívna úspora síce nie je veľká, ale pri výslednej hodnote účelovej funkcie môže byť absolútna úspora stále aj niečo okolo 8,4 mil. eur. Pri bližšom pohľade na výsledok si môžeme všimnúť, že celý nákup je výhradne od ruského dodávateľa, čo je logické, lebo model sa snaží znížiť pokutu. Od modelu očakávame, že sa bude snažiť čo najviac vyhnúť pokute a natlačiť plyn do svojich zásob. Na druhej strane napriek tomu, že zásobníky nie sú maximálne naplnené, ročné nákupné

množstvo od Gazpromu je stále v intervale pokuty. Táto nezrovnalosť môže byť zapríčinená tým, že výsledok nie je optimálny.

Ako problémový údaj z výstupu sa ukázala hodnota pre `z_poz_1` s hodnotou -30 554 906. Tento údaj jednak nie je v ohraničení pre dennú ťažbu/vtláčanie, ale hlavne LPSolver pre všetky premenné predpokladá nezápornosť, pokiaľ im nie je stanovené dolné ohraničenie. Keďže `z_poz_1` nemá pridané žiadne ohraničenie vyjadrujúce jeho zápornosť, považujeme túto chybu za numerické zlyhanie. Plyn, ktorý je podľa výstupu v prvý deň vtláčaný do zásobníka Pozagas, je pokrytý nákupom od Gazpromu. Pri praktickom využití tohto výstupu by sme údaje v prvý deň upravili zmenou hodnoty pre premenné `z_poz_1` a `d_gpe_1` na 0. Spotreba by bola pokrytá výhradne zo zásobníka Láb ako je to v ďalšie dni. Keďže náklady za nákup a následné uskladnenie sa nulujú, hodnota účelovej funkcie by bola nezmenená. Celkový model je pomerne komplexný. Obsahuje 7295 ohraničení a 5296 premenných. Pri takýchto veľkých problémoch nie je numerické zlyhanie niečím netradičným.

Tabuľka 4.1: Výstupné dáta

1.10.2010	d_gpe_1	19 500 000	d_pvs_1	0	z_gaj_1	0	z_lab_1	18 500 000	z_poz_1	-30 554 906
2.10.2010	d_gpe_2	0	d_pvs_2	0	z_gaj_2	0	z_lab_2	7 395 072	z_poz_2	0
3.10.2010	d_gpe_3	0	d_pvs_3	0	z_gaj_3	0	z_lab_3	7 910 230	z_poz_3	0
4.10.2010	d_gpe_4	0	d_pvs_4	0	z_gaj_4	0	z_lab_4	8 508 769	z_poz_4	0
5.10.2010	d_gpe_5	0	d_pvs_5	0	z_gaj_5	0	z_lab_5	8 392 065	z_poz_5	0
6.10.2010	d_gpe_6	0	d_pvs_6	0	z_gaj_6	0	z_lab_6	7 829 421	z_poz_6	0
7.10.2010	d_gpe_7	0	d_pvs_7	0	z_gaj_7	0	z_lab_7	7 573 165	z_poz_7	0
8.10.2010	d_gpe_8	0	d_pvs_8	0	z_gaj_8	0	z_lab_8	8 406 602	z_poz_8	0
9.10.2010	d_gpe_9	0	d_pvs_9	0	z_gaj_9	0	z_lab_9	9 376 199	z_poz_9	0
10.10.2010	d_gpe_10	0	d_pvs_10	0	z_gaj_10	0	z_lab_10	9 476 651	z_poz_10	0
11.10.2010	d_gpe_11	0	d_pvs_11	0	z_gaj_11	0	z_lab_11	9 396 699	z_poz_11	0
12.10.2010	d_gpe_12	0	d_pvs_12	0	z_gaj_12	0	z_lab_12	9 729 366	z_poz_12	0
13.10.2010	d_gpe_13	0	d_pvs_13	0	z_gaj_13	0	z_lab_13	10 572 345	z_poz_13	0
14.10.2010	d_gpe_14	0	d_pvs_14	0	z_gaj_14	0	z_lab_14	10 208 406	z_poz_14	0
15.10.2010	d_gpe_15	0	d_pvs_15	0	z_gaj_15	0	z_lab_15	10 118 166	z_poz_15	0
16.10.2010	d_gpe_16	0	d_pvs_16	0	z_gaj_16	0	z_lab_16	10 487 584	z_poz_16	0
17.10.2010	d_gpe_17	0	d_pvs_17	0	z_gaj_17	0	z_lab_17	10 958 834	z_poz_17	0
18.10.2010	d_gpe_18	0	d_pvs_18	0	z_gaj_18	0	z_lab_18	12 389 470	z_poz_18	0
19.10.2010	d_gpe_19	0	d_pvs_19	0	z_gaj_19	0	z_lab_19	12 448 955	z_poz_19	0
20.10.2010	d_gpe_20	0	d_pvs_20	0	z_gaj_20	0	z_lab_20	12 574 184	z_poz_20	0
21.10.2010	d_gpe_21	0	d_pvs_21	0	z_gaj_21	0	z_lab_21	13 031 249	z_poz_21	0
22.10.2010	d_gpe_22	0	d_pvs_22	0	z_gaj_22	0	z_lab_22	13 121 229	z_poz_22	0
23.10.2010	d_gpe_23	0	d_pvs_23	0	z_gaj_23	0	z_lab_23	12 959 247	z_poz_23	0
24.10.2010	d_gpe_24	0	d_pvs_24	0	z_gaj_24	0	z_lab_24	13 741 469	z_poz_24	0
25.10.2010	d_gpe_25	0	d_pvs_25	0	z_gaj_25	0	z_lab_25	13 798 367	z_poz_25	0
26.10.2010	d_gpe_26	0	d_pvs_26	0	z_gaj_26	0	z_lab_26	14 156 296	z_poz_26	0
27.10.2010	d_gpe_27	0	d_pvs_27	0	z_gaj_27	0	z_lab_27	14 595 139	z_poz_27	0
28.10.2010	d_gpe_28	0	d_pvs_28	0	z_gaj_28	0	z_lab_28	14 333 934	z_poz_28	0
29.10.2010	d_gpe_29	11 558 055	d_pvs_29	0	z_gaj_29	0	z_lab_29	2 408 220	z_poz_29	0
30.10.2010	d_gpe_30	13 944 869	d_pvs_30	0	z_gaj_30	0	z_lab_30	0	z_poz_30	0
31.10.2010	d_gpe_31	14 028 458	d_pvs_31	0	z_gaj_31	0	z_lab_31	0	z_poz_31	0
1.11.2010	d_gpe_32	15 927 691	d_pvs_32	0	z_gaj_32	0	z_lab_32	0	z_poz_32	1 237 899
2.11.2010	d_gpe_33	13 846 574	d_pvs_33	0	z_gaj_33	0	z_lab_33	0	z_poz_33	3 250 000
3.11.2010	d_gpe_34	14 104 484	d_pvs_34	0	z_gaj_34	0	z_lab_34	0	z_poz_34	3 250 000
4.11.2010	d_gpe_35	14 254 192	d_pvs_35	0	z_gaj_35	0	z_lab_35	0	z_poz_35	3 250 000
5.11.2010	d_gpe_36	14 341 910	d_pvs_36	0	z_gaj_36	0	z_lab_36	0	z_poz_36	3 250 000
6.11.2010	d_gpe_37	14 135 022	d_pvs_37	0	z_gaj_37	0	z_lab_37	0	z_poz_37	3 250 000
7.11.2010	d_gpe_38	11 064 281	d_pvs_38	0	z_gaj_38	3 000 000	z_lab_38	0	z_poz_38	3 250 000
8.11.2010	d_gpe_39	11 523 749	d_pvs_39	0	z_gaj_39	3 000 000	z_lab_39	0	z_poz_39	3 250 000
9.11.2010	d_gpe_40	11 754 113	d_pvs_40	0	z_gaj_40	3 000 000	z_lab_40	0	z_poz_40	3 250 000
10.11.2010	d_gpe_41	12 014 566	d_pvs_41	0	z_gaj_41	3 000 000	z_lab_41	0	z_poz_41	3 250 000
11.11.2010	d_gpe_42	12 580 097	d_pvs_42	0	z_gaj_42	3 000 000	z_lab_42	0	z_poz_42	3 250 000
12.11.2010	d_gpe_43	12 767 752	d_pvs_43	0	z_gaj_43	3 000 000	z_lab_43	0	z_poz_43	3 250 000
13.11.2010	d_gpe_44	12 676 025	d_pvs_44	0	z_gaj_44	3 000 000	z_lab_44	0	z_poz_44	3 250 000
14.11.2010	d_gpe_45	12 543 742	d_pvs_45	0	z_gaj_45	3 000 000	z_lab_45	0	z_poz_45	3 250 000
15.11.2010	d_gpe_46	12 407 014	d_pvs_46	0	z_gaj_46	3 000 000	z_lab_46	0	z_poz_46	3 250 000
16.11.2010	d_gpe_47	12 388 771	d_pvs_47	0	z_gaj_47	3 000 000	z_lab_47	0	z_poz_47	3 250 000
17.11.2010	d_gpe_48	12 412 454	d_pvs_48	0	z_gaj_48	3 000 000	z_lab_48	0	z_poz_48	3 250 000
18.11.2010	d_gpe_49	12 824 805	d_pvs_49	0	z_gaj_49	3 000 000	z_lab_49	0	z_poz_49	3 250 000
19.11.2010	d_gpe_50	13 409 310	d_pvs_50	0	z_gaj_50	3 000 000	z_lab_50	0	z_poz_50	3 250 000
20.11.2010	d_gpe_51	13 730 376	d_pvs_51	0	z_gaj_51	3 000 000	z_lab_51	0	z_poz_51	3 250 000
21.11.2010	d_gpe_52	13 713 570	d_pvs_52	0	z_gaj_52	3 000 000	z_lab_52	0	z_poz_52	3 250 000
22.11.2010	d_gpe_53	13 883 733	d_pvs_53	0	z_gaj_53	3 000 000	z_lab_53	0	z_poz_53	3 250 000
23.11.2010	d_gpe_54	13 854 057	d_pvs_54	0	z_gaj_54	3 000 000	z_lab_54	0	z_poz_54	3 250 000
24.11.2010	d_gpe_55	13 233 987	d_pvs_55	0	z_gaj_55	3 000 000	z_lab_55	0	z_poz_55	3 250 000
25.11.2010	d_gpe_56	13 790 989	d_pvs_56	0	z_gaj_56	3 000 000	z_lab_56	0	z_poz_56	3 250 000
26.11.2010	d_gpe_57	13 915 643	d_pvs_57	0	z_gaj_57	3 000 000	z_lab_57	0	z_poz_57	3 250 000
27.11.2010	d_gpe_58	13 722 061	d_pvs_58	0	z_gaj_58	3 000 000	z_lab_58	0	z_poz_58	3 250 000
28.11.2010	d_gpe_59	14 037 312	d_pvs_59	0	z_gaj_59	3 000 000	z_lab_59	0	z_poz_59	3 250 000
29.11.2010	d_gpe_60	14 206 060	d_pvs_60	0	z_gaj_60	3 000 000	z_lab_60	0	z_poz_60	3 250 000
30.11.2010	d_gpe_61	14 789 636	d_pvs_61	0	z_gaj_61	3 000 000	z_lab_61	0	z_poz_61	3 250 000
1.12.2010	d_gpe_62	0	d_pvs_62	0	z_gaj_62	3 000 000	z_lab_62	16 204 414	z_poz_62	3 250 000
2.12.2010	d_gpe_63	0	d_pvs_63	0	z_gaj_63	3 000 000	z_lab_63	16 155 947	z_poz_63	3 250 000
3.12.2010	d_gpe_64	0	d_pvs_64	0	z_gaj_64	3 000 000	z_lab_64	16 503 373	z_poz_64	3 250 000
4.12.2010	d_gpe_65	0	d_pvs_65	0	z_gaj_65	3 000 000	z_lab_65	16 768 735	z_poz_65	3 250 000
5.12.2010	d_gpe_66	0	d_pvs_66	0	z_gaj_66	3 000 000	z_lab_66	16 794 608	z_poz_66	3 250 000
6.12.2010	d_gpe_67	200 770	d_pvs_67	0	z_gaj_67	3 000 000	z_lab_67	16 686 604	z_poz_67	3 250 000
7.12.2010	d_gpe_68	531 410	d_pvs_68	0	z_gaj_68	3 000 000	z_lab_68	16 319 499	z_poz_68	3 250 000
8.12.2010	d_gpe_69	1 281 552	d_pvs_69	0	z_gaj_69	3 000 000	z_lab_69	15 960 470	z_poz_69	3 250 000
9.12.2010	d_gpe_70	1 604 496	d_pvs_70	0	z_gaj_70	3 000 000	z_lab_70	15 609 340	z_poz_70	3 250 000
10.12.2010	d_gpe_71	1 883 441	d_pvs_71	0	z_gaj_71	3 000 000	z_lab_71	15 265 934	z_poz_71	3 250 000
11.12.2010	d_gpe_72	1 916 867	d_pvs_72	0	z_gaj_72	3 000 000	z_lab_72	14 930 084	z_poz_72	3 250 000
12.12.2010	d_gpe_73	2 346 144	d_pvs_73	0	z_gaj_73	3 000 000	z_lab_73	14 601 622	z_poz_73	3 250 000
13.12.2010	d_gpe_74	3 083 159	d_pvs_74	0	z_gaj_74	3 000 000	z_lab_74	14 280 386	z_poz_74	3 250 000
14.12.2010	d_gpe_75	3 127 586	d_pvs_75	0	z_gaj_75	3 000 000	z_lab_75	13 966 218	z_poz_75	3 250 000
15.12.2010	d_gpe_76	3 490 790	d_pvs_76	0	z_gaj_76	3 000 000	z_lab_76	13 658 961	z_poz_76	3 250 000
16.12.2010	d_gpe_77	3 680 764	d_pvs_77	0	z_gaj_77	3 000 000	z_lab_77	13 358 464	z_poz_77	3 250 000
17.12.2010	d_gpe_78	4 039 708	d_pvs_78	0	z_gaj_78	3 000 000	z_lab_78	13 064 578	z_poz_78	3 250 000
18.12.2010	d_gpe_79	3 981 384	d_pvs_79	0	z_gaj_79	3 000 000	z_lab_79	12 777 157	z_poz_79	3 250 000
19.12.2010	d_gpe_80	3 829 653	d_pvs_80	0	z_gaj_80	3 000 000	z_lab_80	12 496 059	z_poz_80	3 250 000
20.12.2010	d_gpe_81	4 265 310	d_pvs_81	0	z_gaj_81	3 000 000	z_lab_81	12 221 146	z_poz_81	3 250 000
21.12.2010	d_gpe_82	4 967 335	d_pvs_82	0	z_gaj_82	3 000 000	z_lab_82	11 952 281	z_poz_82	3 250 000
22.12.2010	d_gpe_83	5 392 178	d_pvs_83	0	z_gaj_83	3 000 000	z_lab_83	11 689 331	z_poz_83	3 250 000
23.12.2010	d_gpe_84	5 887 904	d_pvs_84	0	z_gaj_84	3 000 000	z_lab_84	11 432 165	z_poz_84	3 250 000
24.12.2010	d_gpe_85	6 580 842	d_pvs_85	0	z_gaj_85	3 000 000	z_lab_85	11 180 658	z_poz_85	3 250 000
25.12.2010	d_gpe_86	6 862 729	d_pvs_86	0	z_gaj_86	3 000 000	z_lab_86	10 934 683	z_poz_86	3 250 000
26.12.2010	d_gpe_87	6 991 442	d_pvs_87	0	z_gaj_87	3 000 000	z_lab_87	10 694 120	z_poz_87	3 250 000
27.12.2010	d_gpe_88	6 750 918	d_pvs_88	0	z_gaj_88	3 000 000	z_lab_88	10 458 850	z_poz_88	3 250 000
28.12.2010	d_gpe_89	7 670 229	d_pvs_89	0	z_gaj_89	2 000 000	z_lab_89	10 228 755	z_poz_89	3 250 000
29.12.2010	d_gpe_90	7 485 056	d_pvs_90	0	z_gaj_90	2 000 000	z_lab_90	10 003 722	z_poz_90	3 250 000
30.12.2010	d_gpe_91	8 030 096	d_pvs_91	0	z_gaj_91	2 000 000	z_lab_91	9 783 640	z_poz_91	3 250 000

31.12.2010	d_gpe_92	8 959 494	d_pvs_92	0	z_gaj_92	2 000 000	z_lab_92	9 568 400	z_poz_92	3 225 806
1.1.2011	d_gpe_93	19 500 000	d_pvs_93	0	z_gaj_93	2 000 000	z_lab_93	0	z_poz_93	1 641 697
2.1.2011	d_gpe_94	19 500 000	d_pvs_94	0	z_gaj_94	2 000 000	z_lab_94	0	z_poz_94	1 158 140
3.1.2011	d_gpe_95	19 500 000	d_pvs_95	0	z_gaj_95	2 000 000	z_lab_95	0	z_poz_95	1 407 028
4.1.2011	d_gpe_96	19 500 000	d_pvs_96	0	z_gaj_96	2 000 000	z_lab_96	0	z_poz_96	1 635 881
5.1.2011	d_gpe_97	19 500 000	d_pvs_97	0	z_gaj_97	2 000 000	z_lab_97	0	z_poz_97	2 126 504
6.1.2011	d_gpe_98	19 500 000	d_pvs_98	0	z_gaj_98	2 000 000	z_lab_98	0	z_poz_98	2 368 214
7.1.2011	d_gpe_99	19 500 000	d_pvs_99	0	z_gaj_99	2 000 000	z_lab_99	0	z_poz_99	2 291 569
8.1.2011	d_gpe_100	19 500 000	d_pvs_100	0	z_gaj_100	2 000 000	z_lab_100	0	z_poz_100	2 453 617
9.1.2011	d_gpe_101	19 500 000	d_pvs_101	0	z_gaj_101	2 000 000	z_lab_101	0	z_poz_101	2 394 529
10.1.2011	d_gpe_102	19 500 000	d_pvs_102	0	z_gaj_102	2 000 000	z_lab_102	0	z_poz_102	1 970 215
11.1.2011	d_gpe_103	19 500 000	d_pvs_103	0	z_gaj_103	2 000 000	z_lab_103	0	z_poz_103	1 494 863
12.1.2011	d_gpe_104	19 500 000	d_pvs_104	0	z_gaj_104	2 000 000	z_lab_104	0	z_poz_104	1 914 025
13.1.2011	d_gpe_105	19 500 000	d_pvs_105	0	z_gaj_105	2 000 000	z_lab_105	0	z_poz_105	2 195 950
14.1.2011	d_gpe_106	19 500 000	d_pvs_106	0	z_gaj_106	2 000 000	z_lab_106	0	z_poz_106	2 213 243
15.1.2011	d_gpe_107	19 500 000	d_pvs_107	0	z_gaj_107	2 000 000	z_lab_107	1 800 649	z_poz_107	0
16.1.2011	d_gpe_108	19 500 000	d_pvs_108	0	z_gaj_108	2 000 000	z_lab_108	0	z_poz_108	1 794 523
17.1.2011	d_gpe_109	19 500 000	d_pvs_109	0	z_gaj_109	2 000 000	z_lab_109	0	z_poz_109	1 743 795
18.1.2011	d_gpe_110	19 500 000	d_pvs_110	0	z_gaj_110	2 000 000	z_lab_110	0	z_poz_110	1 932 335
19.1.2011	d_gpe_111	19 500 000	d_pvs_111	0	z_gaj_111	2 000 000	z_lab_111	0	z_poz_111	1 959 490
20.1.2011	d_gpe_112	19 500 000	d_pvs_112	0	z_gaj_112	2 000 000	z_lab_112	1 718 475	z_poz_112	0
21.1.2011	d_gpe_113	19 500 000	d_pvs_113	0	z_gaj_113	0	z_lab_113	3 365 344	z_poz_113	0
22.1.2011	d_gpe_114	19 500 000	d_pvs_114	0	z_gaj_114	0	z_lab_114	3 274 789	z_poz_114	0
23.1.2011	d_gpe_115	19 500 000	d_pvs_115	0	z_gaj_115	0	z_lab_115	0	z_poz_115	2 743 888
24.1.2011	d_gpe_116	19 500 000	d_pvs_116	0	z_gaj_116	0	z_lab_116	0	z_poz_116	2 843 398
25.1.2011	d_gpe_117	19 500 000	d_pvs_117	0	z_gaj_117	0	z_lab_117	3 190 492	z_poz_117	0
26.1.2011	d_gpe_118	19 500 000	d_pvs_118	0	z_gaj_118	0	z_lab_118	2 943 064	z_poz_118	0
27.1.2011	d_gpe_119	19 500 000	d_pvs_119	0	z_gaj_119	0	z_lab_119	3 045 494	z_poz_119	0
28.1.2011	d_gpe_120	19 500 000	d_pvs_120	0	z_gaj_120	0	z_lab_120	2 784 377	z_poz_120	0
29.1.2011	d_gpe_121	19 500 000	d_pvs_121	0	z_gaj_121	0	z_lab_121	2 390 226	z_poz_121	0
30.1.2011	d_gpe_122	19 500 000	d_pvs_122	0	z_gaj_122	0	z_lab_122	2 734 401	z_poz_122	0
31.1.2011	d_gpe_123	19 500 000	d_pvs_123	0	z_gaj_123	0	z_lab_123	2 797 137	z_poz_123	0
1.2.2011	d_gpe_124	19 500 000	d_pvs_124	0	z_gaj_124	0	z_lab_124	2 797 860	z_poz_124	0
2.2.2011	d_gpe_125	19 500 000	d_pvs_125	0	z_gaj_125	0	z_lab_125	2 636 299	z_poz_125	0
3.2.2011	d_gpe_126	19 500 000	d_pvs_126	0	z_gaj_126	0	z_lab_126	2 366 426	z_poz_126	0
4.2.2011	d_gpe_127	19 500 000	d_pvs_127	0	z_gaj_127	0	z_lab_127	2 414 699	z_poz_127	0
5.2.2011	d_gpe_128	19 500 000	d_pvs_128	0	z_gaj_128	0	z_lab_128	2 356 607	z_poz_128	0
6.2.2011	d_gpe_129	19 500 000	d_pvs_129	0	z_gaj_129	0	z_lab_129	1 815 290	z_poz_129	0
7.2.2011	d_gpe_130	19 500 000	d_pvs_130	0	z_gaj_130	0	z_lab_130	1 276 671	z_poz_130	0
8.2.2011	d_gpe_131	19 500 000	d_pvs_131	0	z_gaj_131	0	z_lab_131	1 440 245	z_poz_131	0
9.2.2011	d_gpe_132	19 500 000	d_pvs_132	0	z_gaj_132	1 000 000	z_lab_132	664 697	z_poz_132	0
10.2.2011	d_gpe_133	19 500 000	d_pvs_133	0	z_gaj_133	1 000 000	z_lab_133	663 850	z_poz_133	0
11.2.2011	d_gpe_134	19 500 000	d_pvs_134	0	z_gaj_134	1 000 000	z_lab_134	672 547	z_poz_134	0
12.2.2011	d_gpe_135	19 500 000	d_pvs_135	0	z_gaj_135	1 000 000	z_lab_135	924 885	z_poz_135	0
13.2.2011	d_gpe_136	19 500 000	d_pvs_136	0	z_gaj_136	1 000 000	z_lab_136	580 710	z_poz_136	0
14.2.2011	d_gpe_137	19 500 000	d_pvs_137	0	z_gaj_137	1 000 000	z_lab_137	597 870	z_poz_137	0
15.2.2011	d_gpe_138	19 500 000	d_pvs_138	0	z_gaj_138	1 000 000	z_lab_138	929 197	z_poz_138	0
16.2.2011	d_gpe_139	19 500 000	d_pvs_139	0	z_gaj_139	1 000 000	z_lab_139	1 076 031	z_poz_139	0
17.2.2011	d_gpe_140	19 500 000	d_pvs_140	0	z_gaj_140	1 000 000	z_lab_140	1 362 954	z_poz_140	0
18.2.2011	d_gpe_141	19 500 000	d_pvs_141	0	z_gaj_141	1 000 000	z_lab_141	1 245 929	z_poz_141	0
19.2.2011	d_gpe_142	19 500 000	d_pvs_142	0	z_gaj_142	1 000 000	z_lab_142	751 028	z_poz_142	0
20.2.2011	d_gpe_143	19 500 000	d_pvs_143	0	z_gaj_143	1 000 000	z_lab_143	562 201	z_poz_143	0
21.2.2011	d_gpe_144	19 500 000	d_pvs_144	0	z_gaj_144	1 000 000	z_lab_144	653 669	z_poz_144	0
22.2.2011	d_gpe_145	19 500 000	d_pvs_145	0	z_gaj_145	1 000 000	z_lab_145	659 410	z_poz_145	0
23.2.2011	d_gpe_146	19 500 000	d_pvs_146	0	z_gaj_146	1 000 000	z_lab_146	446 481	z_poz_146	0
24.2.2011	d_gpe_147	19 500 000	d_pvs_147	0	z_gaj_147	1 000 000	z_lab_147	170 239	z_poz_147	0
25.2.2011	d_gpe_148	19 500 000	d_pvs_148	0	z_gaj_148	1 000 000	z_lab_148	31 830	z_poz_148	0
26.2.2011	d_gpe_149	19 500 000	d_pvs_149	0	z_gaj_149	0	z_lab_149	767 883	z_poz_149	0
27.2.2011	d_gpe_150	19 500 000	d_pvs_150	0	z_gaj_150	1 000 000	z_lab_150	107 193	z_poz_150	0
28.2.2011	d_gpe_151	19 500 000	d_pvs_151	0	z_gaj_151	1 000 000	z_lab_151	14 670	z_poz_151	0
1.3.2011	d_gpe_152	10 253 221	d_pvs_152	0	z_gaj_152	1 000 000	z_lab_152	8 037 195	z_poz_152	0
2.3.2011	d_gpe_153	10 313 612	d_pvs_153	0	z_gaj_153	1 000 000	z_lab_153	7 860 377	z_poz_153	0
3.3.2011	d_gpe_154	17 969 903	d_pvs_154	0	z_gaj_154	1 000 000	z_lab_154	0	z_poz_154	0
4.3.2011	d_gpe_155	9 985 846	d_pvs_155	0	z_gaj_155	1 000 000	z_lab_155	7 687 449	z_poz_155	0
5.3.2011	d_gpe_156	17 047 154	d_pvs_156	0	z_gaj_156	1 000 000	z_lab_156	832 953	z_poz_156	0
6.3.2011	d_gpe_157	17 502 799	d_pvs_157	0	z_gaj_157	1 000 000	z_lab_157	0	z_poz_157	0
7.3.2011	d_gpe_158	17 237 083	d_pvs_158	0	z_gaj_158	1 000 000	z_lab_158	0	z_poz_158	0
8.3.2011	d_gpe_159	17 033 705	d_pvs_159	0	z_gaj_159	1 000 000	z_lab_159	0	z_poz_159	0
9.3.2011	d_gpe_160	16 815 843	d_pvs_160	0	z_gaj_160	1 000 000	z_lab_160	0	z_poz_160	0
10.3.2011	d_gpe_161	14 130 449	d_pvs_161	0	z_gaj_161	1 000 000	z_lab_161	0	z_poz_161	2 901 907
11.3.2011	d_gpe_162	17 207 716	d_pvs_162	0	z_gaj_162	1 000 000	z_lab_162	0	z_poz_162	0
12.3.2011	d_gpe_163	17 113 314	d_pvs_163	0	z_gaj_163	1 000 000	z_lab_163	0	z_poz_163	0
13.3.2011	d_gpe_164	16 836 209	d_pvs_164	0	z_gaj_164	1 000 000	z_lab_164	0	z_poz_164	0
14.3.2011	d_gpe_165	16 508 266	d_pvs_165	0	z_gaj_165	1 000 000	z_lab_165	0	z_poz_165	0
15.3.2011	d_gpe_166	16 162 432	d_pvs_166	0	z_gaj_166	1 000 000	z_lab_166	0	z_poz_166	0
16.3.2011	d_gpe_167	13 106 370	d_pvs_167	0	z_gaj_167	1 000 000	z_lab_167	0	z_poz_167	2 880 304
17.3.2011	d_gpe_168	13 070 870	d_pvs_168	0	z_gaj_168	1 000 000	z_lab_168	0	z_poz_168	2 858 862
18.3.2011	d_gpe_169	13 099 980	d_pvs_169	0	z_gaj_169	1 000 000	z_lab_169	0	z_poz_169	2 837 579
19.3.2011	d_gpe_170	12 998 463	d_pvs_170	0	z_gaj_170	1 000 000	z_lab_170	0	z_poz_170	2 816 455
20.3.2011	d_gpe_171	13 355 755	d_pvs_171	0	z_gaj_171	1 000 000	z_lab_171	0	z_poz_171	2 795 488
21.3.2011	d_gpe_172	13 320 707	d_pvs_172	0	z_gaj_172	1 000 000	z_lab_172	0	z_poz_172	2 774 677
22.3.2011	d_gpe_173	13 142 849	d_pvs_173	0	z_gaj_173	1 000 000	z_lab_173	0	z_poz_173	2 754 021
23.3.2011	d_gpe_174	12 864 598	d_pvs_174	0	z_gaj_174	1 000 000	z_lab_174	0	z_poz_174	2 733 519
24.3.2011	d_gpe_175	12 186 934	d_pvs_175	0	z_gaj_175	1 000 000	z_lab_175	0	z_poz_175	2 713 170
25.3.2011	d_gpe_176	11 734 876	d_pvs_176	0	z_gaj_176	1 000 000	z_lab_176	0	z_poz_176	2 692 972
26.3.2011	d_gpe_177	12 044 736	d_pvs_177	0	z_gaj_177	1 000 000	z_lab_177	0	z_poz_177	2 672 924
27.3.2011	d_gpe_178	12 108 935	d_pvs_178	0	z_gaj_178	1 000 000	z_lab_178	0	z_poz_178	2 653 026
28.3.2011	d_gpe_179	11 877 409	d_pvs_179	0	z_gaj_179	1 000 000	z_lab_179	0	z_poz_179	2 633 275
29.3.2011	d_gpe_180	11 731 515	d_pvs_180	0	z_gaj_180	1 000 000	z_lab_180	0	z_poz_180	2 613 672
30.3.2011	d_gpe_181	13 389 310	d_pvs_181	0	z_gaj_181	0	z_lab_181	0	z_poz_181	1 909 439
31.3.2011	d_gpe_182	13 798 917	d_pvs_182	0	z_gaj_182	1 000 000	z_lab_182	0	z_poz_182	0

1.4.2011	d_gpe	183	19 500 000	d_pvs	183	0	z_gaj	183	-2 000 000	z_lab	183	-4 920 802	z_poz	183	0
2.4.2011	d_gpe	184	19 500 000	d_pvs	184	0	z_gaj	184	-2 500 000	z_lab	184	-4 865 303	z_poz	184	0
3.4.2011	d_gpe	185	19 500 000	d_pvs	185	0	z_gaj	185	-2 500 000	z_lab	185	-5 233 503	z_poz	185	0
4.4.2011	d_gpe	186	19 500 000	d_pvs	186	0	z_gaj	186	-2 500 000	z_lab	186	-5 135 623	z_poz	186	0
5.4.2011	d_gpe	187	19 500 000	d_pvs	187	0	z_gaj	187	-2 500 000	z_lab	187	-4 773 955	z_poz	187	0
6.4.2011	d_gpe	188	19 500 000	d_pvs	188	0	z_gaj	188	-2 500 000	z_lab	188	-4 571 439	z_poz	188	0
7.4.2011	d_gpe	189	19 500 000	d_pvs	189	0	z_gaj	189	-2 500 000	z_lab	189	-4 639 018	z_poz	189	0
8.4.2011	d_gpe	190	19 500 000	d_pvs	190	0	z_gaj	190	-2 500 000	z_lab	190	-4 427 060	z_poz	190	0
9.4.2011	d_gpe	191	19 500 000	d_pvs	191	0	z_gaj	191	-2 500 000	z_lab	191	-4 004 625	z_poz	191	0
10.4.2011	d_gpe	192	19 500 000	d_pvs	192	0	z_gaj	192	-2 500 000	z_lab	192	-4 042 992	z_poz	192	0
11.4.2011	d_gpe	193	19 500 000	d_pvs	193	0	z_gaj	193	-2 500 000	z_lab	193	-4 389 533	z_poz	193	0
12.4.2011	d_gpe	194	19 500 000	d_pvs	194	0	z_gaj	194	-2 500 000	z_lab	194	-4 082 995	z_poz	194	0
13.4.2011	d_gpe	195	19 500 000	d_pvs	195	0	z_gaj	195	-2 500 000	z_lab	195	-4 035 075	z_poz	195	0
14.4.2011	d_gpe	196	19 500 000	d_pvs	196	0	z_gaj	196	-2 500 000	z_lab	196	-4 078 352	z_poz	196	0
15.4.2011	d_gpe	197	19 500 000	d_pvs	197	0	z_gaj	197	-2 500 000	z_lab	197	-4 980 379	z_poz	197	0
16.4.2011	d_gpe	198	19 500 000	d_pvs	198	0	z_gaj	198	-2 500 000	z_lab	198	-5 161 715	z_poz	198	0
17.4.2011	d_gpe	199	19 500 000	d_pvs	199	0	z_gaj	199	-2 500 000	z_lab	199	-4 841 162	z_poz	199	0
18.4.2011	d_gpe	200	19 500 000	d_pvs	200	0	z_gaj	200	-2 500 000	z_lab	200	-4 913 286	z_poz	200	0
19.4.2011	d_gpe	201	19 500 000	d_pvs	201	0	z_gaj	201	-2 500 000	z_lab	201	-5 012 620	z_poz	201	0
20.4.2011	d_gpe	202	19 500 000	d_pvs	202	0	z_gaj	202	-2 500 000	z_lab	202	-5 235 218	z_poz	202	0
21.4.2011	d_gpe	203	19 500 000	d_pvs	203	0	z_gaj	203	-2 500 000	z_lab	203	-6 646 544	z_poz	203	0
22.4.2011	d_gpe	204	19 500 000	d_pvs	204	0	z_gaj	204	-2 500 000	z_lab	204	-7 089 316	z_poz	204	0
23.4.2011	d_gpe	205	19 500 000	d_pvs	205	0	z_gaj	205	-2 500 000	z_lab	205	-7 899 159	z_poz	205	0
24.4.2011	d_gpe	206	19 500 000	d_pvs	206	0	z_gaj	206	-2 500 000	z_lab	206	-7 694 005	z_poz	206	0
25.4.2011	d_gpe	207	19 500 000	d_pvs	207	0	z_gaj	207	-2 500 000	z_lab	207	-7 963 754	z_poz	207	0
26.4.2011	d_gpe	208	19 500 000	d_pvs	208	0	z_gaj	208	-2 500 000	z_lab	208	-8 227 241	z_poz	208	0
27.4.2011	d_gpe	209	19 500 000	d_pvs	209	0	z_gaj	209	-2 500 000	z_lab	209	-8 440 818	z_poz	209	0
28.4.2011	d_gpe	210	19 500 000	d_pvs	210	0	z_gaj	210	-2 500 000	z_lab	210	-8 726 967	z_poz	210	0
29.4.2011	d_gpe	211	19 500 000	d_pvs	211	0	z_gaj	211	-2 500 000	z_lab	211	-9 745 802	z_poz	211	0
30.4.2011	d_gpe	212	19 500 000	d_pvs	212	0	z_gaj	212	-2 500 000	z_lab	212	-10 681 331	z_poz	212	0
1.5.2011	d_gpe	213	19 500 000	d_pvs	213	0	z_gaj	213	-2 500 000	z_lab	213	-9 090 746	z_poz	213	0
2.5.2011	d_gpe	214	19 500 000	d_pvs	214	0	z_gaj	214	-2 500 000	z_lab	214	-8 830 033	z_poz	214	0
3.5.2011	d_gpe	215	19 500 000	d_pvs	215	0	z_gaj	215	-2 500 000	z_lab	215	-8 880 052	z_poz	215	0
4.5.2011	d_gpe	216	19 500 000	d_pvs	216	0	z_gaj	216	-2 500 000	z_lab	216	-9 106 906	z_poz	216	0
5.5.2011	d_gpe	217	19 500 000	d_pvs	217	0	z_gaj	217	-2 500 000	z_lab	217	-9 532 296	z_poz	217	0
6.5.2011	d_gpe	218	19 500 000	d_pvs	218	0	z_gaj	218	-2 500 000	z_lab	218	-9 771 039	z_poz	218	0
7.5.2011	d_gpe	219	19 500 000	d_pvs	219	0	z_gaj	219	-2 500 000	z_lab	219	-9 462 808	z_poz	219	0
8.5.2011	d_gpe	220	19 500 000	d_pvs	220	0	z_gaj	220	-2 500 000	z_lab	220	-8 912 256	z_poz	220	0
9.5.2011	d_gpe	221	19 500 000	d_pvs	221	0	z_gaj	221	-2 500 000	z_lab	221	-9 161 888	z_poz	221	0
10.5.2011	d_gpe	222	19 500 000	d_pvs	222	0	z_gaj	222	-2 500 000	z_lab	222	-9 489 357	z_poz	222	0
11.5.2011	d_gpe	223	19 500 000	d_pvs	223	0	z_gaj	223	-2 500 000	z_lab	223	-9 922 557	z_poz	223	0
12.5.2011	d_gpe	224	19 500 000	d_pvs	224	0	z_gaj	224	-2 500 000	z_lab	224	-10 413 741	z_poz	224	0
13.5.2011	d_gpe	225	19 500 000	d_pvs	225	0	z_gaj	225	-2 500 000	z_lab	225	-10 524 821	z_poz	225	0
14.5.2011	d_gpe	226	19 500 000	d_pvs	226	0	z_gaj	226	-2 500 000	z_lab	226	-10 218 014	z_poz	226	0
15.5.2011	d_gpe	227	19 500 000	d_pvs	227	0	z_gaj	227	-2 500 000	z_lab	227	-10 142 254	z_poz	227	0
16.5.2011	d_gpe	228	19 500 000	d_pvs	228	0	z_gaj	228	-2 500 000	z_lab	228	-10 497 464	z_poz	228	0
17.5.2011	d_gpe	229	19 500 000	d_pvs	229	0	z_gaj	229	-2 500 000	z_lab	229	-11 181 925	z_poz	229	0
18.5.2011	d_gpe	230	19 500 000	d_pvs	230	0	z_gaj	230	-2 500 000	z_lab	230	-8 781 110	z_poz	230	-2 467 935
19.5.2011	d_gpe	231	19 500 000	d_pvs	231	0	z_gaj	231	-2 500 000	z_lab	231	-8 047 429	z_poz	231	-3 250 000
20.5.2011	d_gpe	232	19 500 000	d_pvs	232	0	z_gaj	232	-2 500 000	z_lab	232	-8 071 601	z_poz	232	-3 250 000
21.5.2011	d_gpe	233	19 500 000	d_pvs	233	0	z_gaj	233	-2 500 000	z_lab	233	-7 955 344	z_poz	233	-3 250 000
22.5.2011	d_gpe	234	19 500 000	d_pvs	234	0	z_gaj	234	-2 500 000	z_lab	234	-6 780 290	z_poz	234	-3 250 000
23.5.2011	d_gpe	235	19 500 000	d_pvs	235	0	z_gaj	235	-2 500 000	z_lab	235	-6 500 839	z_poz	235	-3 250 000
24.5.2011	d_gpe	236	19 500 000	d_pvs	236	0	z_gaj	236	-2 500 000	z_lab	236	-7 213 413	z_poz	236	-3 250 000
25.5.2011	d_gpe	237	19 500 000	d_pvs	237	0	z_gaj	237	-2 500 000	z_lab	237	-7 922 840	z_poz	237	-3 250 000
26.5.2011	d_gpe	238	19 500 000	d_pvs	238	0	z_gaj	238	-2 500 000	z_lab	238	-7 988 376	z_poz	238	-3 250 000
27.5.2011	d_gpe	239	19 500 000	d_pvs	239	0	z_gaj	239	-2 500 000	z_lab	239	-8 093 004	z_poz	239	-3 250 000
28.5.2011	d_gpe	240	19 500 000	d_pvs	240	0	z_gaj	240	-2 500 000	z_lab	240	-8 030 740	z_poz	240	-3 250 000
29.5.2011	d_gpe	241	19 500 000	d_pvs	241	0	z_gaj	241	-2 500 000	z_lab	241	-8 000 530	z_poz	241	-3 250 000
30.5.2011	d_gpe	242	19 500 000	d_pvs	242	0	z_gaj	242	-2 500 000	z_lab	242	-8 024 815	z_poz	242	-3 250 000
31.5.2011	d_gpe	243	19 500 000	d_pvs	243	0	z_gaj	243	-2 500 000	z_lab	243	-8 057 842	z_poz	243	-3 250 000
1.6.2011	d_gpe	244	19 500 000	d_pvs	244	0	z_gaj	244	-2 500 000	z_lab	244	-8 155 680	z_poz	244	-3 250 000
2.6.2011	d_gpe	245	19 500 000	d_pvs	245	0	z_gaj	245	-2 500 000	z_lab	245	-8 155 680	z_poz	245	-3 250 000
3.6.2011	d_gpe	246	19 500 000	d_pvs	246	0	z_gaj	246	-2 500 000	z_lab	246	-8 155 680	z_poz	246	-3 250 000
4.6.2011	d_gpe	247	19 500 000	d_pvs	247	0	z_gaj	247	-2 500 000	z_lab	247	-8 155 680	z_poz	247	-3 250 000
5.6.2011	d_gpe	248	19 500 000	d_pvs	248	0	z_gaj	248	-2 500 000	z_lab	248	-8 155 680	z_poz	248	-3 250 000
6.6.2011	d_gpe	249	19 500 000	d_pvs	249	0	z_gaj	249	-2 500 000	z_lab	249	-8 155 680	z_poz	249	-3 250 000
7.6.2011	d_gpe	250	11 344 320	d_pvs	250	0	z_gaj	250	-2 500 000	z_lab	250	0	z_poz	250	-3 250 000
8.6.2011	d_gpe	251	11 344 320	d_pvs	251	0	z_gaj	251	-2 500 000	z_lab	251	0	z_poz	251	-3 250 000
9.6.2011	d_gpe	252	11 344 320	d_pvs	252	0	z_gaj	252	-2 500 000	z_lab	252	0	z_poz	252	-3 250 000
10.6.2011	d_gpe	253	11 344 320	d_pvs	253	0	z_gaj	253	-2 500 000	z_lab	253	0	z_poz	253	-3 250 000
11.6.2011	d_gpe	254	11 344 320	d_pvs	254	0	z_gaj	254	-2 500 000	z_lab	254	0	z_poz	254	-3 250 000
12.6.2011	d_gpe	255	11 344 320	d_pvs	255	0	z_gaj	255	-2 500 000	z_lab	255	0	z_poz	255	-3 250 000
13.6.2011	d_gpe	256	12 631 838	d_pvs	256	0	z_gaj	256	-2 500 000	z_lab	256	-1 287 518	z_poz	256	-3 250 000
14.6.2011	d_gpe	257	19 500 000	d_pvs	257	0	z_gaj	257	-2 500 000	z_lab	257	-8 155 680	z_poz	257	-3 250 000
15.6.2011	d_gpe	258	19 500 000	d_pvs	258	0	z_gaj	258	-2 500 000	z_lab	258	-8 155 680	z_poz	258	-3 250 000
16.6.2011	d_gpe	259	19 500 000	d_pvs	259	0	z_gaj	259	-2 500 000	z_lab	259	-8 155 680	z_poz	259	-3 250 000
17.6.2011	d_gpe	260	19 500 000	d_pvs	260	0	z_gaj	260	-2 500 000	z_lab	260	-8 155 680	z_poz	260	-3 250 000
18.6.2011	d_gpe	261	19 500 000	d_pvs	261	0	z_gaj	261	-2 500 000	z_lab	261	-8 155 680	z_poz	261	-3 250 000
19.6.2011	d_gpe	262	19 500 000	d_pvs	262	0	z_gaj	262	-2 500 000	z_lab	262	-8 155 680	z_poz	262	-3 250 000
20.6.2011	d_gpe	263	19 500 000	d_pvs	263	0	z_gaj								

1.7.2011	d_gpe	274	18 098 086	d_pvs	274	0	z_gaj	274	0	z_lab	274	-9 500 000	z_poz	274	-3 250 000
2.7.2011	d_gpe	275	18 098 086	d_pvs	275	0	z_gaj	275	0	z_lab	275	-9 500 000	z_poz	275	-3 250 000
3.7.2011	d_gpe	276	18 098 086	d_pvs	276	0	z_gaj	276	0	z_lab	276	-9 500 000	z_poz	276	-3 250 000
4.7.2011	d_gpe	277	18 098 086	d_pvs	277	0	z_gaj	277	0	z_lab	277	-9 500 000	z_poz	277	-3 250 000
5.7.2011	d_gpe	278	18 098 086	d_pvs	278	0	z_gaj	278	0	z_lab	278	-9 500 000	z_poz	278	-3 250 000
6.7.2011	d_gpe	279	18 098 086	d_pvs	279	0	z_gaj	279	0	z_lab	279	-9 500 000	z_poz	279	-3 250 000
7.7.2011	d_gpe	280	18 098 086	d_pvs	280	0	z_gaj	280	0	z_lab	280	-9 500 000	z_poz	280	-3 250 000
8.7.2011	d_gpe	281	18 098 086	d_pvs	281	0	z_gaj	281	0	z_lab	281	-9 500 000	z_poz	281	-3 250 000
9.7.2011	d_gpe	282	18 098 086	d_pvs	282	0	z_gaj	282	0	z_lab	282	-9 500 000	z_poz	282	-3 250 000
10.7.2011	d_gpe	283	18 098 086	d_pvs	283	0	z_gaj	283	0	z_lab	283	-9 500 000	z_poz	283	-3 250 000
11.7.2011	d_gpe	284	18 098 086	d_pvs	284	0	z_gaj	284	0	z_lab	284	-9 500 000	z_poz	284	-3 250 000
12.7.2011	d_gpe	285	18 098 086	d_pvs	285	0	z_gaj	285	0	z_lab	285	-9 500 000	z_poz	285	-3 250 000
13.7.2011	d_gpe	286	8 598 086	d_pvs	286	0	z_gaj	286	0	z_lab	286	0	z_poz	286	-3 250 000
14.7.2011	d_gpe	287	8 598 086	d_pvs	287	0	z_gaj	287	0	z_lab	287	0	z_poz	287	-3 250 000
15.7.2011	d_gpe	288	8 598 086	d_pvs	288	0	z_gaj	288	0	z_lab	288	0	z_poz	288	-3 250 000
16.7.2011	d_gpe	289	8 598 086	d_pvs	289	0	z_gaj	289	0	z_lab	289	0	z_poz	289	-3 250 000
17.7.2011	d_gpe	290	8 598 086	d_pvs	290	0	z_gaj	290	0	z_lab	290	0	z_poz	290	-3 250 000
18.7.2011	d_gpe	291	8 598 086	d_pvs	291	0	z_gaj	291	0	z_lab	291	0	z_poz	291	-3 250 000
19.7.2011	d_gpe	292	8 598 086	d_pvs	292	0	z_gaj	292	0	z_lab	292	0	z_poz	292	-3 250 000
20.7.2011	d_gpe	293	8 598 086	d_pvs	293	0	z_gaj	293	0	z_lab	293	0	z_poz	293	-3 250 000
21.7.2011	d_gpe	294	8 598 086	d_pvs	294	0	z_gaj	294	0	z_lab	294	0	z_poz	294	-3 250 000
22.7.2011	d_gpe	295	8 598 086	d_pvs	295	0	z_gaj	295	0	z_lab	295	0	z_poz	295	-3 250 000
23.7.2011	d_gpe	296	8 598 086	d_pvs	296	0	z_gaj	296	0	z_lab	296	0	z_poz	296	-3 250 000
24.7.2011	d_gpe	297	8 573 892	d_pvs	297	0	z_gaj	297	0	z_lab	297	0	z_poz	297	-3 225 806
25.7.2011	d_gpe	298	8 549 877	d_pvs	298	0	z_gaj	298	0	z_lab	298	0	z_poz	298	-3 201 791
26.7.2011	d_gpe	299	8 526 042	d_pvs	299	0	z_gaj	299	0	z_lab	299	0	z_poz	299	-3 177 956
27.7.2011	d_gpe	300	8 502 384	d_pvs	300	0	z_gaj	300	0	z_lab	300	0	z_poz	300	-3 154 298
28.7.2011	d_gpe	301	8 478 902	d_pvs	301	0	z_gaj	301	0	z_lab	301	0	z_poz	301	-3 130 816
29.7.2011	d_gpe	302	8 455 594	d_pvs	302	0	z_gaj	302	0	z_lab	302	0	z_poz	302	-3 107 508
30.7.2011	d_gpe	303	15 932 461	d_pvs	303	0	z_gaj	303	0	z_lab	303	-7 500 000	z_poz	303	-3 084 375
31.7.2011	d_gpe	304	8 409 499	d_pvs	304	0	z_gaj	304	0	z_lab	304	0	z_poz	304	-3 061 413
1.8.2011	d_gpe	305	15 893 545	d_pvs	305	0	z_gaj	305	0	z_lab	305	-7 500 000	z_poz	305	-3 038 623
2.8.2011	d_gpe	306	15 870 924	d_pvs	306	0	z_gaj	306	0	z_lab	306	-7 500 000	z_poz	306	-3 016 002
3.8.2011	d_gpe	307	15 848 472	d_pvs	307	0	z_gaj	307	0	z_lab	307	-7 500 000	z_poz	307	-2 993 549
4.8.2011	d_gpe	308	15 826 186	d_pvs	308	0	z_gaj	308	0	z_lab	308	-7 500 000	z_poz	308	-2 971 264
5.8.2011	d_gpe	309	15 804 067	d_pvs	309	0	z_gaj	309	0	z_lab	309	-7 500 000	z_poz	309	-2 949 145
6.8.2011	d_gpe	310	15 782 112	d_pvs	310	0	z_gaj	310	0	z_lab	310	-7 500 000	z_poz	310	-2 927 190
7.8.2011	d_gpe	311	15 760 321	d_pvs	311	0	z_gaj	311	0	z_lab	311	-7 500 000	z_poz	311	-2 905 399
8.8.2011	d_gpe	312	15 738 692	d_pvs	312	0	z_gaj	312	0	z_lab	312	-7 500 000	z_poz	312	-2 883 770
9.8.2011	d_gpe	313	15 717 224	d_pvs	313	0	z_gaj	313	0	z_lab	313	-7 500 000	z_poz	313	-2 862 302
10.8.2011	d_gpe	314	15 695 915	d_pvs	314	0	z_gaj	314	0	z_lab	314	-7 500 000	z_poz	314	-2 840 993
11.8.2011	d_gpe	315	15 674 766	d_pvs	315	0	z_gaj	315	0	z_lab	315	-7 500 000	z_poz	315	-2 819 844
12.8.2011	d_gpe	316	15 653 774	d_pvs	316	0	z_gaj	316	0	z_lab	316	-7 500 000	z_poz	316	-2 798 851
13.8.2011	d_gpe	317	8 132 938	d_pvs	317	0	z_gaj	317	0	z_lab	317	0	z_poz	317	-2 778 016
14.8.2011	d_gpe	318	8 112 257	d_pvs	318	0	z_gaj	318	0	z_lab	318	0	z_poz	318	-2 757 335
15.8.2011	d_gpe	319	15 591 730	d_pvs	319	0	z_gaj	319	0	z_lab	319	-7 500 000	z_poz	319	-2 736 808
16.8.2011	d_gpe	320	8 071 135	d_pvs	320	0	z_gaj	320	0	z_lab	320	0	z_poz	320	-2 716 434
17.8.2011	d_gpe	321	8 051 134	d_pvs	321	0	z_gaj	321	0	z_lab	321	0	z_poz	321	-2 696 212
18.8.2011	d_gpe	322	15 531 062	d_pvs	322	0	z_gaj	322	0	z_lab	322	-7 500 000	z_poz	322	-2 676 140
19.8.2011	d_gpe	323	7 736 400	d_pvs	323	0	z_gaj	323	0	z_lab	323	0	z_poz	323	-2 381 478
20.8.2011	d_gpe	324	5 354 922	d_pvs	324	0	z_gaj	324	0	z_lab	324	0	z_poz	324	0
21.8.2011	d_gpe	325	12 854 922	d_pvs	325	0	z_gaj	325	0	z_lab	325	-7 500 000	z_poz	325	0
22.8.2011	d_gpe	326	5 354 922	d_pvs	326	0	z_gaj	326	0	z_lab	326	0	z_poz	326	0
23.8.2011	d_gpe	327	5 354 922	d_pvs	327	0	z_gaj	327	0	z_lab	327	0	z_poz	327	0
24.8.2011	d_gpe	328	12 854 922	d_pvs	328	0	z_gaj	328	0	z_lab	328	-7 500 000	z_poz	328	0
25.8.2011	d_gpe	329	5 354 922	d_pvs	329	0	z_gaj	329	0	z_lab	329	0	z_poz	329	0
26.8.2011	d_gpe	330	5 354 922	d_pvs	330	0	z_gaj	330	0	z_lab	330	0	z_poz	330	0
27.8.2011	d_gpe	331	12 854 922	d_pvs	331	0	z_gaj	331	0	z_lab	331	-7 500 000	z_poz	331	0
28.8.2011	d_gpe	332	5 354 922	d_pvs	332	0	z_gaj	332	0	z_lab	332	0	z_poz	332	0
29.8.2011	d_gpe	333	5 354 922	d_pvs	333	0	z_gaj	333	0	z_lab	333	0	z_poz	333	0
30.8.2011	d_gpe	334	12 854 922	d_pvs	334	0	z_gaj	334	0	z_lab	334	-7 500 000	z_poz	334	0
31.8.2011	d_gpe	335	5 354 922	d_pvs	335	0	z_gaj	335	0	z_lab	335	0	z_poz	335	0
1.9.2011	d_gpe	336	5 689 000	d_pvs	336	0	z_gaj	336	0	z_lab	336	0	z_poz	336	0
2.9.2011	d_gpe	337	13 180 996	d_pvs	337	0	z_gaj	337	0	z_lab	337	-7 500 000	z_poz	337	0
3.9.2011	d_gpe	338	5 650 937	d_pvs	338	0	z_gaj	338	0	z_lab	338	0	z_poz	338	0
4.9.2011	d_gpe	339	13 217 532	d_pvs	339	0	z_gaj	339	0	z_lab	339	-7 500 000	z_poz	339	0
5.9.2011	d_gpe	340	5 735 574	d_pvs	340	0	z_gaj	340	0	z_lab	340	0	z_poz	340	0
6.9.2011	d_gpe	341	13 272 345	d_pvs	341	0	z_gaj	341	0	z_lab	341	-7 500 000	z_poz	341	0
7.9.2011	d_gpe	342	5 819 045	d_pvs	342	0	z_gaj	342	0	z_lab	342	0	z_poz	342	0
8.9.2011	d_gpe	343	13 297 293	d_pvs	343	0	z_gaj	343	0	z_lab	343	-7 500 000	z_poz	343	0
9.9.2011	d_gpe	344	5 968 352	d_pvs	344	0	z_gaj	344	0	z_lab	344	0	z_poz	344	0
10.9.2011	d_gpe	345	13 759 991	d_pvs	345	0	z_gaj	345	0	z_lab	345	-7 500 000	z_poz	345	0
11.9.2011	d_gpe	346	5 963 257	d_pvs	346	0	z_gaj	346	0	z_lab	346	0	z_poz	346	0
12.9.2011	d_gpe	347	13 658 980	d_pvs	347	0	z_gaj	347	0	z_lab	347	-7 500 000	z_poz	347	0
13.9.2011	d_gpe	348	6 377 999	d_pvs	348	0	z_gaj	348	0	z_lab	348	0	z_poz	348	0
14.9.2011	d_gpe	349	13 647 872	d_pvs	349	0	z_gaj	349	0	z_lab	349	-7 500 000	z_poz	349	0
15.9.2011	d_gpe	350	6 778 280	d_pvs	350	0	z_gaj	350	0	z_lab	350	0	z_poz	350	0
16.9.2011	d_gpe	351	15 035 604	d_pvs	351	0	z_gaj	351	0	z_lab	351	-7 500 000	z_poz	351	0
17.9.2011	d_gpe	352	7 905 954	d_pvs	352	0	z_gaj	352	0	z_lab	352	0	z_poz	352	0
18.9.2011	d_gpe	353	15 469 990	d_pvs	353	0	z_gaj	353	0	z_lab	353	-7 500 000	z_poz	353	0
19.9.2011	d_gpe	354	7 228 768	d_pvs	354	0	z_gaj	354	0	z_lab	354	0	z_poz	354	0
20.9.2011	d_gpe	355	14 322 337	d_pvs	355	0	z_gaj	355	0	z_lab	355	-7 500 000	z_poz	355	0
21.9.2011	d_gpe	356	6 790 841	d_pvs	356	0	z_gaj	356	0	z_lab	356	0	z_poz	356	0
22.9.2011	d_gpe	357	14 260 676	d_pvs	357	0	z_gaj	357	0	z_lab	357	-7 500 000	z_poz	357	0
23.9.2011	d_gpe	358	7 023 726	d_pvs	358	0	z_gaj	358	0	z_lab	358	0	z_poz	358	0
24.9.2011	d_gpe	359	15 434 245	d_pvs	359	0	z_gaj	359	0	z_lab	359	-7 500 000	z_poz	359	0
25.9.2011	d_gpe	360	8 689 929	d_pvs	360	0									

Kapitola 5

Záver

Dôležitosť využitia operačnej analýzy v posledných rokoch vzrastá. Uvedomujú si to aj subjekty na trhu, a preto vynakladajú nemalé úsilie na skvalitnenie a zefektívnenie ich fungovania. Množstvo firiem rieši veľké problémy aplikovateľné do matematického programovania za účelom minimalizovania nákladov, či maximalizovania zisku.

V tejto práci sme v prvej kapitole predstavili jeden z takýchto problémov. Následne na to, sme vystavali matematickú teóriu a prepojením teórie s praxou sme zostavili optimalizačný model. Prioritným cieľom tejto práce nebolo nájsť optimálne riešenie, ale navrhnúť model, ktorý čo najreálnejšie pristupuje k celému problému. SPP totiž má svoje metódy na optimalizovanie tohto problému, avšak miestami s medzerami vzhľadom na reálne skutočnosti. Hlavným prínosom tejto práce je modelovanie ohraničení ťažiacich a vtláčacích kriviek na základe teórie separovateľného programovania a lineárnych transformácií. Tento prístup omnoho reálnejšie vystihuje skutočnosť než model používaný doposiaľ.

Počas spúšťania praktických výpočtov sa ako kľúčová ukázala teória z oblasti numeriky. Podnetom pre lepší výstup, prípadne dosiahnutie optima, môže byť ďalší výskum s ohľadom na rôzne numerické metódy obsiahnuté v algoritmoch na riešenie MILP.

Príloha

```
Option Base 1
Sub GenerujModel_full()

Dim line As Integer
Dim x0_gaj, x0_lab As Double
Dim c1, c2, c3, c4, c5, c6, H As Double
Dim month As Variant
Dim poc As Integer
Dim p0_gaj, p0_lab As Double
Dim p_gaj, p_lab As Double
Dim p_avg, f_lam1, f_lam2, f_lam3 As Double

month = Array(31, 30, 31, 31, 28, 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30) '' mesiace su od oktobra
x0_gaj = ThisWorkbook.Sheets("spotreba").Cells(1, 9)
p0_gaj = ThisWorkbook.Sheets("spotreba").Cells(2, 9)
x0_lab = ThisWorkbook.Sheets("spotreba").Cells(3, 9)
p0_lab = ThisWorkbook.Sheets("spotreba").Cells(4, 9)
x0_poz = ThisWorkbook.Sheets("spotreba").Cells(5, 9)
p0_poz = ThisWorkbook.Sheets("spotreba").Cells(6, 9)
p_gaj = p0_gaj / x0_gaj ''jednotkova cena za kubik plynu v zasobniku Gajary
p_lab = p0_lab / x0_lab ''jednotkova cena za kubik plynu v zasobniku Lab
p_poz = p0_poz / x0_poz ''jednotkova cena za kubik plynu v zasobniku Pozagas
p_avg = ThisWorkbook.Sheets("Fx, Brent").Range("P53")
Sheets("vystup").Activate

'' ucelova funkcia + koment
line = 2
Cells(1, 1) = "/* Objective function */"
Cells(line, 1) = "min:"

poc = 0 ''najprv cena za nakupovanie u ruskeho GPE
For i = 1 To 12
    For j = 1 To month(i)
        poc = poc + 1
        Cells(2, 1) = Cells(2, 1) & " + " & Sheets("Fx, Brent").Cells(49 + i, 15).Value & " d_gpe_" & poc
    Next j
Next i
poc = 0
For i = 1 To 12 ''cena za nakupovanie u slovenskeho PVS
    For j = 1 To month(i)
        poc = poc + 1
        Cells(2, 1) = Cells(2, 1) & " + " & Sheets("Fx, Brent").Cells(49 + i, 18).Value & " d_pvs_" & poc
    Next j
Next i
line = line + 1
poc = 0 '' ucelovka zmena zasob
For i = 1 To 12
    For j = 1 To month(i)
        If i <= 6 Then
            poc = poc + 1
            Cells(line, 1) = Cells(line, 1) & " + " & p_gaj & " z_gaj_" & poc & " + " & p_lab & " _" & p_poz & " z_lab_" & poc
        Else
            poc = poc + 1
```

```

Cells(line, 1) = Cells(line, 1) & " + " & Sheets("Fx, Brent").Cells(49 + i, 15).Value & _
" z_gaj_" & poc & " + " & Sheets("Fx, Brent").Cells(49 + i, 15).Value & " z_lab_" & poc
End If
Next j
Next i
line = line + 1
poc = 0
For i = 1 To 12
    For j = 1 To month(i)
        If i <= 6 Then
            poc = poc + 1
            Cells(line, 1) = Cells(line, 1) & " + " & p_poz & " z_poz_" & poc
        Else
            poc = poc + 1
            Cells(line, 1) = Cells(line, 1) & " + " & Sheets("Fx, Brent").Cells(49 + i, 15).Value & _
            " z_poz_" & poc
        End If
    Next j
Next i
f_lam1 = 0.75 * p_avg * 5525000000# '' ucelovka pokuta ToP
Cells(line, 1) = Cells(line, 1) & " + " & f_lam1 & " lam1 + 0 lam2 + 0 lam3;"
line = line + 2

Cells(line, 1) = "/* Constraints */" ''ohranicenia s rovnostami
For i = 1 To 182 ''suma bin gajary
    Cells(line + i, 1) = "gt1_" & i & " + gt2_" & i & " + gt3_" & i & " = 1;"
Next i
line = line + 182
For i = 183 To 365
    Cells(line + i - 182, 1) = "lam1_gaj_" & i & " + lam2_gaj_" & i & " + lam3_gaj_" & i & " = 1;"
Next i
line = line + 183
For i = 1 To 182 ''Lab tazenie sum lam
    Cells(line + i, 1) = "lam1_lab_" & i & " + lam2_lab_" & i & " + lam3_lab_" & i & " = 1;"
Next i
line = line + 182
For i = 183 To 365 ''suma bin lab
    Cells(line + i - 182, 1) = "lv1_" & i & " + lv2_" & i & " + lv3_" & i & " + lv4_" & i & " = 1;"
Next i
line = line + 183

For i = 1 To 182 ''Pozagas tazenie sum sos
    Cells(line + i, 1) = "lam1_poz_" & i & " + lam2_poz_" & i & " + lam3_poz_" & i & " = 1;"
Next i
line = line + 182
For i = 183 To 365 ''Pozagas vtlacanie sum sos
    Cells(line + i - 182, 1) = "lam1_poz_" & i & " + lam2_poz_" & i & " + lam3_poz_" & i & " = 1;"
Next i
line = line + 183
For i = 1 To 365 ''spotreba
    Cells(line + i, 1) = "z_gaj_" & i & " + z_lab_" & i & " + z_poz_" & i & _
    " + d_gpe_" & i & " + d_pvs_" & i & " = " & Sheets("spotreba").Cells(i, 3).Value & ";";
Next i
line = line + 366
Cells(line, 1) = "lam1 + lam2 + lam3 = 1;" ''ucel sum sos
For i = 1 To 365 ''ucel sos rovnost pre premennu d
    Cells(line + i, 1) = Cells(line + i, 1) & " + d_gpe_" & i
Next i
Cells(line + 1, 1) = Cells(line + 1, 1) & " - 0 lam1 - 5525000000 lam2 - 6500000000 lam3 = 0;"
H_min = x0_lab + x0_poz + x0_lab - 1100000000 'kumulovanie zasob
For i = 1 To 365
    Cells(line + 2, 1) = Cells(line, 1) & " + z_lab_" & i & " + z_gaj_" & i & " + z_poz_" & i
Next i
Cells(line + 2, 1) = Cells(line, 1) & " <= " & H_min & ";";
line = line + 4

Cells(line, 1) = "/* Variable bounds */" ''ohranicenia s nerovnostami

```

```

For i = 1 To 365
    Cells(line + i, 1) = "d_gpe_" & i & " <= 19500000;"
Next i
line = line + 365

For i = 1 To 365
    Cells(line + i, 1) = "d_pvs_" & i & " <= 3000000;"
Next i
line = line + 366

For i = 1 To 365    ''podmienka pre rocne maximalne dodacie mnozstvo --> ACQ
    Cells(line, 1) = Cells(line, 1) & " + d_gpe_" & i
Next i
Cells(line, 1) = Cells(line, 1) & " <= 65000000000;"

For i = 183 To 365    ''vtlacanie Gajary zaporne zasoby
    Cells(line + i - 182, 1) = "-2500000000 <= z_gaj_" & i & " <= 0;"
Next i
line = line + 183
For i = 183 To 365    ''vtlacanie Lab
    Cells(line + i - 182, 1) = "-10000000000 <= z_lab_" & i & " <= 0;"
Next i
line = line + 183
For i = 183 To 365    ''vtlacanie Pozagas
    Cells(line + i - 182, 1) = "-3000000000 <= z_poz_" & i & " <= 0;"
Next i
line = line + 183

For i = 1 To 182    ''ohranic Gaj taz denne max tazba
    Cells(line + i, 1) = "1000000 gt1_" & i & " + 2000000 gt2_" & i & " + 3000000 gt3_" _
        & i & " - z_gaj_" & i & " >= 0;"
Next i
line = line + 182

For i = 183 To 365    '' gaj vtlac denne max vtlacanie
    Cells(line + i - 182, 1) = "z_gaj_" & i & " + 2500000 lam1_gaj_" & i & " + 2500000 lam2_gaj_" _
        & i & " + 2000000 lam3_gaj_" & i & " >= 0;"
Next i
line = line + 183

For i = 1 To 182    ''lab denne max tazba
    Cells(line + i, 1) = "-z_lab_" & i & " + 7500000 lam1_lab_" & i & " + 18500000 lam2_lab_" & _
        i & " + 18500000 lam3_lab_" & i & " >= 0;"
Next i
line = line + 182

For i = 183 To 365    ''lab denne max vtlac
    Cells(line + i - 182, 1) = "13000000 lv1_" & i & " + 11500000 lv2_" & i & " + 9500000 lv3_" _
        & i & " + 7500000 lv4_" & i & " + z_lab_" & i & " >=0;"
Next i
line = line + 183

For i = 1 To 182    ''pozagas denne max tazba
    Cells(line + i, 1) = "-z_poz_" & i & " + 2580000 lam1_poz_" & i & " + 3250000 lam2_poz_" & _
        i & " + 3250000 lam3_poz_" & i & " >= 0;"
Next i
line = line + 182

For i = 183 To 365    ''pozagas denne max vtlac
    Cells(line + i - 182, 1) = "z_poz_" & i & " + 3250000 lam1_poz_" & i & " + 3250000 lam2_poz_" _
        & i & " + 2580000 lam3_poz_" & i & " >= 0;"
Next i
line = line + 183

H = 25000000000#    ''konstanta o vela vacsia ako kapacita zasobnika
c1 = H + 50000000 - x0_gaj
c2 = H - 50000000 + x0_gaj

```

```

c3 = H + 100000000 - x0_gaj
c4 = H - 100000000 + x0_gaj

'' ohranicenia pre tazenie Gajary
For i = 1 To 182
    '' ohranicenia pre prvý usek taziacej funkcie Gajary
    Cells(line + i, 1) = H & " gt1_" & i

    For j = 1 To i - 1
        Cells(line + i, 1) = Cells(line + i, 1) & "-z_gaj_" & j
    Next j
    Cells(line + i, 1) = Cells(line + i, 1) & " <= " & c1 & ";"

    '' ohranicenia pre druhý usek taziacej funkcie Gajary
    Cells(line + i + 182, 1) = H & " gt2_" & i
    For j = 1 To i - 1
        Cells(line + i + 182, 1) = Cells(line + i + 182, 1) & "+z_gaj_" & j
    Next j
    Cells(line + i + 182, 1) = Cells(line + i + 182, 1) & " <= " & c2 & ";"

    Cells(line + i + 364, 1) = H & " gt2_" & i
    For j = 1 To i - 1
        Cells(line + i + 364, 1) = Cells(line + i + 364, 1) & "-z_gaj_" & j
    Next j
    Cells(line + i + 364, 1) = Cells(line + i + 364, 1) & " <= " & c3 & ";"

    '' ohranicenia pre tretí usek taziacej funkcie Gajary
    Cells(line + i + 546, 1) = H & " gt3_" & i
    For j = 1 To i - 1
        Cells(line + i + 546, 1) = Cells(line + i + 546, 1) & " + z_gaj_" & j
    Next j
    Cells(line + i + 546, 1) = Cells(line + i + 546, 1) & " <= " & c4 & ";"

Next i
line = line + 728

'' ohranic Gaj pre vtlač obdobi od 183 - 365 metódou SOS premenne
For i = 183 To 365
    For j = 1 To i - 1
        Cells(line - 182 + i, 1) = Cells(line - 182 + i, 1) & " + z_gaj_" & j
    Next j
    Cells(line - 182 + i, 1) = Cells(line - 182 + i, 1) & " + 0 lam1_gaj_" & _
    i & " + 212000000 lam2_gaj_" & i & " + 250000000 lam3_gaj_" & i & " = " & x0_gaj & ";"
Next i
line = line + 183

'' ohranicenia Lab pre taz v období od 1 - 182 metódou SOS premenných
For i = 1 To 182
    For j = 1 To i - 1
        Cells(line + i, 1) = Cells(line + i, 1) & " + z_lab_" & j
    Next j
    Cells(line + i, 1) = Cells(line + i, 1) & " + 0 lam1_lab_" & i & " + 500000000 lam2_lab_" & _
    i & " + 1000000000 lam3_lab_" & i & " = " & x0_lab & ";"
Next i
line = line + 182

'' ohranicenia pre vtlačanie Lab
H = 100000000000# ''konstanta o veľkosti ako kapacita zásobníka
c1 = H + 250000000 - x0_lab
c2 = H - 250000000 + x0_lab
c3 = H + 500000000 - x0_lab
c4 = H - 500000000 + x0_lab
c5 = H + 750000000 - x0_lab
c6 = H - 750000000 + x0_lab

'' ohranicenia pre tlačenie Lab
For i = 183 To 365

```

```

'' ohranicenia pre prvý usek vtlacacej funkcie Lab
Cells(line + i - 182, 1) = H & " lv1_" & i
For j = 1 To i - 1
    Cells(line + i - 182, 1) = Cells(line + i - 182, 1) & "-z_lab_" & j
Next j
Cells(line + i - 182, 1) = Cells(line + i - 182, 1) & "<= " & c1 & ";"

'' ohranicenia pre druhý usek taziacej funkcie Lab
Cells(line + i + 1, 1) = H & " lv2_" & i
For j = 1 To i - 1
    Cells(line + i + 1, 1) = Cells(line + i + 1, 1) & " + z_lab_" & j
Next j
Cells(line + i + 1, 1) = Cells(line + i + 1, 1) & "<= " & c2 & ";"

Cells(line + i + 184, 1) = H & " lv2_" & i
For j = 1 To i - 1
    Cells(line + i + 184, 1) = Cells(line + i + 184, 1) & " - z_lab_" & j
Next j
Cells(line + i + 184, 1) = Cells(line + i + 184, 1) & "<= " & c3 & ";"

'' ohranicenia pre tretí usek taziacej funkcie Lab
Cells(line + i + 367, 1) = H & " lv3_" & i
For j = 1 To i - 1
    Cells(line + i + 367, 1) = Cells(line + i + 367, 1) & " + z_lab_" & j
Next j
Cells(line + i + 367, 1) = Cells(line + i + 367, 1) & "<= " & c4 & ";"

Cells(line + i + 550, 1) = H & " lv3_" & i
For j = 1 To i - 1
    Cells(line + i + 550, 1) = Cells(line + i + 550, 1) & " - z_lab_" & j
Next j
Cells(line + i + 550, 1) = Cells(line + i + 550, 1) & "<= " & c5 & ";"

'' ohranicenia pre štvrtý usek taziacej funkcie Lab
Cells(line + i + 733, 1) = H & " lv4_" & i
For j = 1 To i - 1
    Cells(line + i + 733, 1) = Cells(line + i + 733, 1) & " + z_lab_" & j
Next j
Cells(line + i + 733, 1) = Cells(line + i + 733, 1) & "<= " & c6 & ";"
Next i
line = line + 1098

'' ohranicenia pre taziáciu krivku v období od 1 - 182 metódou SOS premenných
For i = 1 To 182
    For j = 1 To i - 1
        Cells(line + i, 1) = Cells(line + i, 1) & " + z_poz_" & j
    Next j
    Cells(line + i, 1) = Cells(line + i, 1) & " + 0 lam1_poz_" & i & " + 90000000 lam2_poz_" & i & " + 300000000 lam3_poz_" & i & " = " & x0_poz & ";"
Next i
line = line + 182

'' ohranicenia pre vtlaciáciu krivku v období od 183 - 365 metódou SOS premenných
For i = 183 To 365
    For j = 1 To i - 1
        Cells(line - 182 + i, 1) = Cells(line - 182 + i, 1) & " + z_poz_" & j
    Next j
    Cells(line - 182 + i, 1) = Cells(line - 182 + i, 1) & " + 0 lam1_poz_" & i & " + 210000000 lam2_poz_" & i & " + 300000000 lam3_poz_" & i & " = " & x0_poz & ";"
Next i
line = line + 183

'' ohranicenia pre kapacitu zásobníka
kapacita = x0_gaj - 250000000 ''Gajary
For i = 1 To 365

```

```

    For j = 1 To i
        Cells(line + i, 1) = Cells(line + i, 1) & "+z_gaj_" & j
    Next j
    Cells(line + i, 1) = Cells(line + i, 1) & " <= " & x0_gaj & ";"
    For j = 1 To i
        Cells(line + 365 + i, 1) = Cells(line + 365 + i, 1) & "+z_gaj_" & j
    Next j
    Cells(line + 365 + i, 1) = Cells(line + 365 + i, 1) & " >= " & kapacita & ";"
Next i
line = line + 2 * 365

kapacita = x0_lab - 1000000000 ''Lab
For i = 1 To 365
    For j = 1 To i
        Cells(line + i, 1) = Cells(line + i, 1) & "+z_lab_" & j
    Next j
    Cells(line + i, 1) = Cells(line + i, 1) & " <= " & x0_lab & ";"
    For j = 1 To i
        Cells(line + 365 + i, 1) = Cells(line + 365 + i, 1) & "+z_lab_" & j
    Next j
    Cells(line + 365 + i, 1) = Cells(line + 365 + i, 1) & " >= " & kapacita & ";"
Next i
line = line + 2 * 365

kapacita = x0_poz - 300000000 ''Pozagas
For i = 1 To 365
    For j = 1 To i
        Cells(line + i, 1) = Cells(line + i, 1) & "+z_poz_" & j
    Next j
    Cells(line + i, 1) = Cells(line + i, 1) & " <= " & x0_poz & ";"
    For j = 1 To i
        Cells(line + 365 + i, 1) = Cells(line + 365 + i, 1) & "+z_poz_" & j
    Next j
    Cells(line + 365 + i, 1) = Cells(line + 365 + i, 1) & " >= " & kapacita & ";"
Next i
line = line + 2 * 365

'''ohranicenia k SOS2 pre ucelovku
For i = 1 To 3
    Cells(line + i, 1) = "lam" & i & " <= 1;"
    Cells(line + i + 3, 1) = "lam" & i & " >= 0;"
Next i
line = line + 6

'''ohranicenia pre vsetky SOS premenne, ze su mensie ako jedna
''Gajary
For i = 183 To 365
    Cells(line - 182 + i, 1) = "lam1_gaj_" & i & " <= 1;"
    Cells(line + i + 1, 1) = "lam2_gaj_" & i & " <= 1;"
    Cells(line + i + 184, 1) = "lam3_gaj_" & i & " <= 1;"
Next i
line = line + 183 * 3

''Lab
For i = 1 To 182
    Cells(line + i, 1) = "lam1_lab_" & i & " <= 1;"
    Cells(line + i + 182, 1) = "lam2_lab_" & i & " <= 1;"
    Cells(line + i + 182 * 2, 1) = "lam3_lab_" & i & " <= 1;"
Next i
line = line + 3 * 182

''Pozagas
For i = 1 To 365
    Cells(line + i, 1) = "lam1_poz_" & i & " <= 1;"
    Cells(line + i + 365, 1) = "lam2_poz_" & i & " <= 1;"
    Cells(line + i + 2 * 365, 1) = "lam3_poz_" & i & " <= 1;"
Next i

```

```

line = line + 3 * 365 + 2

Cells(line, 1) = "/* Integer definitions */"  ''deklaracia bin premennych
line = line + 1
Cells(line, 1) = "bin gt1_1, gt2_1, gt3_1"
For i = 2 To 365
    If i <= 182 Then
        Cells(line, 1) = Cells(line, 1) & ", gt1_" & i & ", gt2_" & i & ", gt3_" & i
    Else
        Cells(line, 1) = Cells(line, 1) & ", lv1_" & i & ", lv2_" & i & ", lv3_" & i & ", lv4_" & i
    End If
Next i
Cells(line, 1) = Cells(line, 1) & ";"
line = line + 1

Cells(line, 1) = "sos"
Cells(line + 1, 1) = "SOS: lam1,lam2,lam3 <= 2;"
line = line + 2
    '' sos pre Gajary vthalcanie
p_sos = 1
For i = 183 To 365
    p_sos = p_sos + 1
    Cells(line - 182 + i, 1) = "SOS" & p_sos & ": lam1_gaj_" & i & ", lam2_gaj_" & i & ",lam3_gaj_" & i & " <= 2;"
Next i
line = line + 183

    '' sos pre Lab tazenie
For i = 1 To 182
    p_sos = p_sos + 1
    Cells(line + i, 1) = "SOS" & p_sos & ": lam1_lab_" & i & ", lam2_lab_" & i & ",lam3_lab_" & i & " <= 2;"
Next i
line = line + 182

    '' sos pre Pozagas tazenie
For i = 1 To 182
    p_sos = p_sos + 1
    Cells(line + i, 1) = "SOS" & p_sos & ": lam1_poz_" & i & ", lam2_poz_" & i & ",lam3_poz_" & i & " <= 2;"
Next i
line = line + 182

    '' sos pre Pozagas vtlacanie
For i = 183 To 365
    p_sos = p_sos + 1
    Cells(line - 182 + i, 1) = "SOS" & p_sos & ": lam1_poz_" & i & ", lam2_poz_" & i & ",lam3_poz_" & i & " <= 2;"
Next i

line = line + 184
End Sub

```

Tabuľka 5.1: Mesačné hodnoty Brentu a kurzu USD/EUR.

Mesiac	Brent	USD/EUR
január 10	77.013	1.427
február 10	74.790	1.369
marec 10	78.550	1.360
apríl 10	79.890	1.360
máj 10	80.170	1.360
jún 10	80.610	1.360
júl 10	81.070	1.350
august 10	81.510	1.350
september 10	81.910	1.350
október 10	82.290	1.340
november 10	82.630	1.340
december 10	82.970	1.340
január 11	82.230	1.370
február 11	82.430	1.370
marec 11	82.620	1.370
apríl 11	82.830	1.370
máj 11	83.020	1.370
jún 11	83.200	1.370
júl 11	83.330	1.370
august 11	83.470	1.370

Tabuľka 5.2: Mesačné nákupné ceny pre odberateľov Gazprom a Eustream

Mesiac	Cena GPE	Cena PVS
október 10	0,29086114	0,26341791
november 10	0,29284611	0,26532836
december 10	0,29579206	0,26816418
január 11	0,29093278	0,26385401
február 11	0,29179567	0,26468613
marec 11	0,29262774	0,26548175
apríl 11	0,29336736	0,26619708
máj 11	0,29400683	0,26681752
jún 11	0,29456154	0,26735036
júl 11	0,29503922	0,26781022
august 11	0,29541673	0,26817518
september 11	0,29573261	0,26847445

Tabuľka 5.3: Vstupné dáta spotreby v m^3 pre obdobie 1.10.2010 - 30.9.2011

Dátum	Spotreba	Dátum	Spotreba	Dátum	Spotreba
1.10.2011	7 445 094	1.11.2011	17 165 590	1.12.2011	22 454 414
2.10.2011	7 395 072	2.11.2011	17 096 574	2.12.2011	22 405 947
3.10.2011	7 910 230	3.11.2011	17 354 484	3.12.2011	22 753 373
4.10.2011	8 508 769	4.11.2011	17 504 192	4.12.2011	23 018 735
5.10.2011	8 392 065	5.11.2011	17 591 910	5.12.2011	23 044 608
6.10.2011	7 829 421	6.11.2011	17 385 022	6.12.2011	23 137 374
7.10.2011	7 573 165	7.11.2011	17 314 281	7.12.2011	23 100 909
8.10.2011	8 406 602	8.11.2011	17 773 749	8.12.2011	23 492 022
9.10.2011	9 376 199	9.11.2011	18 004 113	9.12.2011	23 463 836
10.10.2011	9 476 651	10.11.2011	18 264 566	10.12.2011	23 399 375
11.10.2011	9 396 699	11.11.2011	18 830 097	11.12.2011	23 096 951
12.10.2011	9 729 366	12.11.2011	19 017 752	12.12.2011	23 197 766
13.10.2011	10 572 345	13.11.2011	18 926 025	13.12.2011	23 613 545
14.10.2011	10 208 406	14.11.2011	18 793 742	14.12.2011	23 343 804
15.10.2011	10 118 166	15.11.2011	18 657 014	15.12.2011	23 399 751
16.10.2011	10 487 584	16.11.2011	18 638 771	16.12.2011	23 289 228
17.10.2011	10 958 834	17.11.2011	18 662 454	17.12.2011	23 354 286
18.10.2011	12 389 470	18.11.2011	19 074 805	18.12.2011	23 008 541
19.10.2011	12 448 955	19.11.2011	19 659 310	19.12.2011	22 575 713
20.10.2011	12 574 184	20.11.2011	19 980 376	20.12.2011	22 736 456
21.10.2011	13 031 249	21.11.2011	19 963 570	21.12.2011	23 169 616
22.10.2011	13 121 229	22.11.2011	20 133 733	22.12.2011	23 331 509
23.10.2011	12 959 247	23.11.2011	20 104 057	23.12.2011	23 570 069
24.10.2011	13 741 469	24.11.2011	19 483 987	24.12.2011	24 011 500
25.10.2011	13 798 367	25.11.2011	20 040 989	25.12.2011	24 047 412
26.10.2011	14 156 296	26.11.2011	20 165 643	26.12.2011	23 935 562
27.10.2011	14 595 139	27.11.2011	19 972 061	27.12.2011	23 459 767
28.10.2011	14 333 934	28.11.2011	20 287 312	28.12.2011	23 148 984
29.10.2011	13 966 275	29.11.2011	20 456 060	29.12.2011	22 738 778
30.10.2011	13 944 869	30.11.2011	21 039 636	30.12.2011	23 063 736
31.10.2011	14 028 458			31.12.2011	23 753 700
1.1.2010	23 141 697	1.2.2010	22 297 860	1.3.2010	19 290 417
2.1.2010	22 658 140	2.2.2010	22 136 299	2.3.2010	19 173 989
3.1.2010	22 907 028	3.2.2010	21 866 426	3.3.2010	18 969 903
4.1.2010	23 135 881	4.2.2010	21 914 699	4.3.2010	18 673 294
5.1.2010	23 626 504	5.2.2010	21 856 607	5.3.2010	18 880 107
6.1.2010	23 868 214	6.2.2010	21 315 290	6.3.2010	18 502 799
7.1.2010	23 791 569	7.2.2010	20 776 671	7.3.2010	18 237 083
8.1.2010	23 953 617	8.2.2010	20 940 245	8.3.2010	18 033 705
9.1.2010	23 894 529	9.2.2010	21 164 697	9.3.2010	17 815 843
10.1.2010	23 470 215	10.2.2010	21 163 850	10.3.2010	18 032 356
11.1.2010	22 994 863	11.2.2010	21 172 547	11.3.2010	18 207 716
12.1.2010	23 414 025	12.2.2010	21 424 885	12.3.2010	18 113 314
13.1.2010	23 695 950	13.2.2010	21 080 710	13.3.2010	17 836 209
14.1.2010	23 713 243	14.2.2010	21 097 870	14.3.2010	17 508 266
15.1.2010	23 300 649	15.2.2010	21 429 197	15.3.2010	17 162 432
16.1.2010	23 294 523	16.2.2010	21 576 031	16.3.2010	16 986 674
17.1.2010	23 243 795	17.2.2010	21 862 954	17.3.2010	16 929 732
18.1.2010	23 432 335	18.2.2010	21 745 929	18.3.2010	16 937 560
19.1.2010	23 459 490	19.2.2010	21 251 028	19.3.2010	16 814 918
20.1.2010	23 218 475	20.2.2010	21 062 201	20.3.2010	17 151 243
21.1.2010	22 865 344	21.2.2010	21 153 669	21.3.2010	17 095 384
22.1.2010	22 774 789	22.2.2010	21 159 410	22.3.2010	16 896 871
23.1.2010	22 243 888	23.2.2010	20 946 481	23.3.2010	16 598 117
24.1.2010	22 343 398	24.2.2010	20 670 239	24.3.2010	15 900 104
25.1.2010	22 690 492	25.2.2010	20 531 830	25.3.2010	15 427 847
26.1.2010	22 443 064	26.2.2010	20 267 883	26.3.2010	15 717 660
27.1.2010	22 545 494	27.2.2010	20 607 193	27.3.2010	15 761 961
28.1.2010	22 284 377	28.2.2010	20 514 670	28.3.2010	15 510 685
29.1.2010	21 890 226			29.3.2010	15 345 187
30.1.2010	22 234 401			30.3.2010	15 298 749
31.1.2010	22 297 137			31.3.2010	14 798 917

Dátum	Spotreba	Dátum	Spotreba	Dátum	Spotreba
1.4.2010	12 579 198	1.5.2010	7 909 254	1.6.2010	5 594 320
2.4.2010	12 134 697	2.5.2010	8 169 967	2.6.2010	5 594 320
3.4.2010	11 766 497	3.5.2010	8 119 948	3.6.2010	5 594 320
4.4.2010	11 864 377	4.5.2010	7 893 094	4.6.2010	5 594 320
5.4.2010	12 226 045	5.5.2010	7 467 704	5.6.2010	5 594 320
6.4.2010	12 428 561	6.5.2010	7 228 961	6.6.2010	5 594 320
7.4.2010	12 360 982	7.5.2010	7 537 192	7.6.2010	5 594 320
8.4.2010	12 572 940	8.5.2010	8 087 744	8.6.2010	5 594 320
9.4.2010	12 995 375	9.5.2010	7 838 112	9.6.2010	5 594 320
10.4.2010	12 957 008	10.5.2010	7 510 643	10.6.2010	5 594 320
11.4.2010	12 610 467	11.5.2010	7 077 443	11.6.2010	5 594 320
12.4.2010	12 917 005	12.5.2010	6 586 259	12.6.2010	5 594 320
13.4.2010	12 964 925	13.5.2010	6 475 179	13.6.2010	5 594 320
14.4.2010	12 921 648	14.5.2010	6 781 986	14.6.2010	5 594 320
15.4.2010	12 019 621	15.5.2010	6 857 746	15.6.2010	5 594 320
16.4.2010	11 838 285	16.5.2010	6 502 536	16.6.2010	5 594 320
17.4.2010	12 158 838	17.5.2010	5 818 075	17.6.2010	5 594 320
18.4.2010	12 086 714	18.5.2010	5 750 955	18.6.2010	5 594 320
19.4.2010	11 987 380	19.5.2010	5 702 571	19.6.2010	5 594 320
20.4.2010	11 764 782	20.5.2010	5 678 399	20.6.2010	5 594 320
21.4.2010	10 353 456	21.5.2010	5 794 656	21.6.2010	5 594 320
22.4.2010	9 910 684	22.5.2010	6 969 710	22.6.2010	5 594 320
23.4.2010	9 100 841	23.5.2010	7 249 161	23.6.2010	5 594 320
24.4.2010	9 305 995	24.5.2010	6 536 587	24.6.2010	5 594 320
25.4.2010	9 036 246	25.5.2010	5 827 160	25.6.2010	5 594 320
26.4.2010	8 772 759	26.5.2010	5 761 624	26.6.2010	5 594 320
27.4.2010	8 559 182	27.5.2010	5 656 996	27.6.2010	5 594 320
28.4.2010	8 273 033	28.5.2010	5 719 260	28.6.2010	5 594 320
29.4.2010	7 254 198	29.5.2010	5 749 470	29.6.2010	5 594 320
30.4.2010	6 318 669	30.5.2010	5 725 185	30.6.2010	5 594 320
		31.5.2010	5 692 158		
1.7.2010	5 348 086	1.8.2010	5 354 922	1.9.2010	5 689 000
2.7.2010	5 348 086	2.8.2010	5 354 922	2.9.2010	5 680 996
3.7.2010	5 348 086	3.8.2010	5 354 922	3.9.2010	5 650 937
4.7.2010	5 348 086	4.8.2010	5 354 922	4.9.2010	5 717 532
5.7.2010	5 348 086	5.8.2010	5 354 922	5.9.2010	5 735 574
6.7.2010	5 348 086	6.8.2010	5 354 922	6.9.2010	5 772 345
7.7.2010	5 348 086	7.8.2010	5 354 922	7.9.2010	5 819 045
8.7.2010	5 348 086	8.8.2010	5 354 922	8.9.2010	5 797 293
9.7.2010	5 348 086	9.8.2010	5 354 922	9.9.2010	5 968 352
10.7.2010	5 348 086	10.8.2010	5 354 922	10.9.2010	6 259 991
11.7.2010	5 348 086	11.8.2010	5 354 922	11.9.2010	5 963 257
12.7.2010	5 348 086	12.8.2010	5 354 922	12.9.2010	6 158 980
13.7.2010	5 348 086	13.8.2010	5 354 922	13.9.2010	6 377 999
14.7.2010	5 348 086	14.8.2010	5 354 922	14.9.2010	6 147 872
15.7.2010	5 348 086	15.8.2010	5 354 922	15.9.2010	6 778 280
16.7.2010	5 348 086	16.8.2010	5 354 922	16.9.2010	7 535 604
17.7.2010	5 348 086	17.8.2010	5 354 922	17.9.2010	7 905 954
18.7.2010	5 348 086	18.8.2010	5 354 922	18.9.2010	7 969 990
19.7.2010	5 348 086	19.8.2010	5 354 922	19.9.2010	7 228 768
20.7.2010	5 348 086	20.8.2010	5 354 922	20.9.2010	6 822 337
21.7.2010	5 348 086	21.8.2010	5 354 922	21.9.2010	6 790 841
22.7.2010	5 348 086	22.8.2010	5 354 922	22.9.2010	6 760 676
23.7.2010	5 348 086	23.8.2010	5 354 922	23.9.2010	7 023 726
24.7.2010	5 348 086	24.8.2010	5 354 922	24.9.2010	7 934 245
25.7.2010	5 348 086	25.8.2010	5 354 922	25.9.2010	8 689 929
26.7.2010	5 348 086	26.8.2010	5 354 922	26.9.2010	8 857 958
27.7.2010	5 348 086	27.8.2010	5 354 922	27.9.2010	9 561 422
28.7.2010	5 348 086	28.8.2010	5 354 922	28.9.2010	9 527 838
29.7.2010	5 348 086	29.8.2010	5 354 922	29.9.2010	9 347 099
30.7.2010	5 348 086	30.8.2010	5 354 922	30.9.2010	9 308 073
31.7.2010	5 348 086	31.8.2010	5 354 922		

Literatúra

- [1] *Introduction to lp_solve 5.5.2.0.* (<http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/>).
- [2] G. V. Reklaitis A. Ravidran, K. M. Ragsdell. *Engineering Optimization - Methods and Applications*, volume 2nd Edition, pages 359-368, Chapter 8. Wiley & Sons, 2006.
- [3] Timothy M. Burks and Karem A. Sakallah. Min-max linear programming and the timing analysis of digital circuits.
- [4] G.B. Dantzig and M.N. Thapa. *Linear Programming: 1: Introduction*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering Series. Springer London, 1997.
- [5] G.B. Dantzig and M.N. Thapa. *Linear Programming: 2: Theory and Extensions*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering Series. Springer London, Limited, 2010.
- [6] G. Hadley. *Nonlinear and Dynamic Programming*, pages 104–123, Chapter 4. Addison-Wesley, 1964.
- [7] C. M. Shetty M. S. Bazaraa, H. D. Sherali. *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms*, volume 3rd Edition, pages 684–711, Chapter 11. Wiley – Interscience, 2006.
- [8] J. Plesník, J. Dupačová, M. Vlach, and B. Musil. *Lineárne programovanie*. Edícia matematicko-fyzikálnej literatúry. Alfa, 1990.
- [9] J. Plesník. *poznámky k predmetu Lineárne programovanie*. 2007.
- [10] Alexander Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley & Sons, 1999.
- [11] S. M. Sinha. *Mathematical Programming - Theory and Methods*, pages 684–711, Chapter 25. 2006.
- [12] Hahn Timothy and Chad Bohannan. A parallel implementation of branch and bound to solve mixed integer linear programs (MILP). Technical report, Montana State University Computer Science Department Bozeman, Montana, 2007.