

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



ANALÝZA TOBINOVHO MODELU
S COBBOVOU–DOUGLASOVOU PRODUKČNOU
FUNKCIOU

Diplomová práca

Bc. Miroslav Foltin

9.1.9 Aplikovaná matematika
Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce:
doc. RNDr. Peter Guba, PhD.

Bratislava 2011

7f8aef7c-ffc6-4b21-803b-fe77bdb6abdd



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Miroslav Foltin
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Analýza Tobinovho modelu s Cobbovou--Douglasovou produkčnou funkciou

Cieľ : Cieľom diplomovej práce bude analýza dynamiky Tobinovho modelu v monetárnej teórii s Cobbovou--Douglasovou produkčnou funkciou.

Vedúci : doc. RNDr. Peter Guba, PhD.

Dátum zadania: 28.01.2010

Dátum schválenia: 07.04.2011

.....
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

.....
vedúci práce

Abstrakt

Práca sa zaoberá analýzou makroekonomického dynamického modelu – zovšeobecného Tobinovho modelu. Ide o neoklasický rastový model s rozšírením o peniaze, v ktorom bohatstvo môže byť reprezentované formou kapitálu alebo peňazí. Model je určený tromi parametrizovanými diferenciálnymi rovnicami, ktoré popisujú dynamiku vývoja premenných kapitálu, peňazí a inflácie. Analýza zahŕňa hľadanie pevných bodov, ich lokálnych stabilitných vlastností a hľadanie bodov lokálnych bifurkácií. V modeli je použitá špecifická forma produkčnej funkcie, tzv. Cobb-Douglasova produkčná funkcia, a špecifická forma funkcie dopytu po peniazoch. V krátkodobom horizonte, kedy je kapitál a veľkosť populácie konštantá, sa pôvodný trojrozmerný model redukuje na dvojrozmerný. Podstatná časť práce sa venuje práve tomuto limitnému prípadu, pričom je prevedený dôkaz, že za vhodných podmienok systém podlieha Andronovovej–Hopfovej bifurkácii. Explicitným výpočtom je určený aj typ Andronovovej–Hopfovej bifurkácie. Ďalším cenným výsledkom je asymptotická forma pre periódu oscilačných riešení, ktorá indikuje, že v kontexte krátkodobého modelu perióda oscilácií nezávisí od rýchlosti, ktorou sa ľudia vedia prispôsobiť očakávaniam.

Kľúčové slová: Tobinov model • makroekonomický model • dynamické systémy • bifurkačná analýza • Andronovova–Hopfova bifurkácia

Abstract

This thesis deals with the analysis of macroeconomic dynamical model – the generalized Tobin model. It is a neoclassical growth model with the presence of paper currency, in which wealth may be held in either of the two forms: money or capital good. The model consists of three parametrized differential equations that describe the behavior of variables capital, money and inflation. The aim of the analysis is to find the critical points and their local stability properties and local bifurcation points. In the model we assume a specific Cobb–Douglas form of the production function and a specific form of the demand function for money. In the short run, with capital and population fixed the original three–dimensional model is reduced to two–dimensional model. A significant proportion of the thesis deals with this limit case furthermore; it is demonstrated that under certain conditions the Andronov–Hopf bifurcation arises. An explicit computation type of Andronov–Hopf bifurcation is set. Another result is the asymptotical form of the period of oscillation solutions, which shows that the period doesn't depend on the speed of adjustment of expectations.

Keywords: Tobin model • macroeconomic model • dynamical systems • bifurcation analysis • Andronov–Hopf bifurcation

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 26. 4. 2011

.....

Vlastnoručný podpis

PodĎakovanie

Ďakujem svojmu školiteľovi doc. RNDr. Petrovi Gubovi, PhD. za odborné rady, poskytnutú literatúru a starostlivé vedenie pri vypracovaní diplomovej práce. Takisto Ďakujem svojim rodičom za všestrannú podporu počas celého štúdia.

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 7 |
| 1 Prehľad literatúry | 10 |
| 2 Ciele diplomovej práce | 11 |
| 3 Formulácia problému | 12 |
| 4 Metódy analýzy | 14 |
| 4.1 Linearizácia a stabilita pevných bodov | 14 |
| 4.2 Klasifikácia pevných bodov v planárnych systémoch | 16 |
| 4.3 Andronovova–Hopfova bifurkácia v planárnych systémoch | 16 |
| 5 Analýza zovšeobecneného Tobinovho modelu: 2D redukcia pre krátkodobú limitu | 21 |
| 5.1 Pevné body krátkodobého modelu | 21 |
| 5.2 Linearizácia na okolí pevného bodu, stabilita pevného bodu | 22 |
| 5.3 Dôkaz existencie limitného cyklu v krátkodobom modeli | 27 |
| 5.4 Transformácia krátkodobého modelu na kánonický tvar, určenie typu Andronovovej–Hopfovej bifurkácie | 28 |
| 5.5 Perióda cyklického riešenia | 35 |
| 6 Analýza zovšeobecneného Tobinovho modelu: úplný (3D) prípad | 37 |
| 6.1 Pevné body modelu | 37 |
| 6.2 Linearizácia na okolí pevného bodu, stabilita pevného bodu | 39 |
| Záver | 43 |
| Literatúra | 44 |

Úvod

V posledných rokoch sa v ekonomickom modelovaní zvyšuje záujem o využitie modelov so spojitou variáciou času. Pri popisovaní správania sa ekonomických procesov sa využívajú parametrizované systémy diferenciálnych rovníc. Napriek ich zložitosti je často možné preskúmať štruktúrne a kvalitatívne vlastnosti daných ekonomických modelov.

Pri analýze dynamického modelu ako prvé hľadáme ekvilibrium-pevný bod a zaoberáme sa otázkou jeho stability. Voľne povedané, pevný bod považujeme za stabilný, ak ľubovoľné riešenie začínajúce v jeho blízkosti konverguje k pevnému bodu pre čas idúci do nekonečna. Naopak, pevný bod je nestabilný, ak ľubovoľné riešenie začínajúce v jeho blízkosti k nemu nekonverguje. Skúmanie stability je dôležité pre pochopenie vlastností dynamiky ekonomického systému a zistenie vplyvu parametrov na tieto vlastnosti.

Ďalším krokom v analýze dynamického modelu je skúmanie bifurkácií (vetvenia riešení). Pod bifurkáciou rozumieme kvalitatívnu zmenu systému pri prekročení určitej kritickej hodnoty parametra. Bifurkačná analýza poskytuje informácie, ako sa môže napríklad stabilný systém zmeniť na nestabilný alebo chaotický pri spojitom zmene parametra systému.

Ak je dynamický model popísaný troj alebo viac-rozmerným systémom nelineárnych diferenciálnych rovníc systém môže vykazovať tzv. chaotické správanie. Hoci je systém deterministický- bez náhodných faktorov, časové rady (riešenia) majú stochastický charakter (výzor). V takom prípade je model veľmi citlivý na zmenu počiatočných podmienok (malá zmena na počiatku vedie k veľkým zmenám v neskoršom čase) a ani deterministickosť modelu nám negarantuje schopnosť predpovede správania sa riešení.

V diplomovej práci je analyzovaný zovšeobecnený Tobinov model - neoklasický rastový model s rozšírením o peniaze, v ktorom bohatstvo môže byť reprezentované vo forme peňazí alebo kapitálu.

Pri odvodzovaní zovšeobeného Tobinovho modelu (rovnice (3.1) (3.4)) sa predpokladá, že na produkčnej strane je použitá neoklasická produkčná funkcia

$$Y = F(K, N),$$

kde Y predstavuje reprezentatívny homogénny produkt, ktorý je produkováný kapitálom K a prácou N . Funkcia F je dvakrát diferencovateľná, lineárne homogénna, má

kladnú a klesajúcu marginálnu produktivitu oboch faktorov a faktory nie sú navzájom substituovateľné. Ak označíme $y \equiv Y/N$, $k \equiv K/N$, za predošlých predpokladov môžeme produkčnú funkciu transformovať na tvar:

$$y = f(k),$$

pričom: $f(k) > 0$, $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$, $\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$.

Ďalej sa v modeli predpokladá, že ľudia šetria časť s čistého príjmu $Y + (M/\dot{p})$, kde M je nominálne množstvo peňazí a p cenová úroveň. Bodka nad premennou značí časovú deriváciu. Aktuálna akumulácia kapitálu sa rovná miere úspor spoločnosti:

$$\dot{K} = s[Y + (M/\dot{p})] - (M/\dot{p}), \quad (1)$$

pričom výraz $s[Y + (M/\dot{p})]$ predstavuje privátne úspory a výraz $s[Y + (M/\dot{p})] - (M/\dot{p})$ úspory spoločnosti. Vláda vytvára peniaze z rozpočtového deficitu, a tak (M/\dot{p}) vyjadruje čerpanie úspor vládou. Navyše vláda kontroluje iba mieru zmeny nominálneho množstva peňazí $\dot{M}/M \equiv \theta$. Za predpokladu, že populácia (pracovná sila) rastie exponenciálne, mierou $n = \dot{N}/N$, dá sa rovnica (1) vyjadriť v tvare per capita:

$$\dot{k} = sf(k) - (1-s)(\theta - q)m - nk, \quad (2)$$

kde $m \equiv \frac{M}{pN}$ je reálny objem peňazí per capita a q je očakávaná miera inflácie. Rovnica (2) sa nazýva Tobinova fundamentálna rovnica.

Diferencovaním rovnice $m \equiv \frac{M}{pN}$ podľa času dostávame:

$$\dot{m} = m(\theta - \dot{p}/p - n). \quad (3)$$

Očakávaná miera inflácie q sa mení proporčne s rozdielom medzi aktuálne realizovanou mierou inflácie \dot{p}/p a očakávanou mierou inflácie q :

$$\dot{q} = \gamma(\dot{p}/p - q). \quad (4)$$

Ak je aktuálna miera inflácie vyššia ako očakávaná, očakávaná miera inflácie vzrastá a naopak. Koeficient γ -rýchlosť prispôsobenia sa očakávaniam sa nazýva aj koeficientom očakávania. $1/\gamma$ vyjadruje čas potrebný na vyrovnanie rozdielu medzi aktuálnou a očakávanou mierou inflácie. Pre $\gamma \rightarrow \infty$ máme dokonalú schopnosť predpovede, kedy sa aktuálna miera inflácie rovná očakávanej $\dot{p}/p = q$.

Ďalej sa v modeli predpokladá, že zmena cien môže byť vyvolaná prebytkom dopytu peňazí, alebo prebytkom ponuky peňazí na peňažnom trhu. Zmenu cien môže vyvolať aj očakávanie inflácie. Mechanizmus zmeny cien popisuje nasledovná rovnica:

$$\dot{p}/p = \varepsilon[m - L(\cdot)] + q, \quad (5)$$

kde ε je rýchlosť prispôsobenia sa cenovej úrovni. $1/\varepsilon$ vyjadruje čas potrebný na vyrovnanie rozdielu medzi ponukou a dopytom zásoby hotovosti. Pre okamžité vyrovnanie rozdielu máme $\varepsilon \rightarrow \infty$. $L(\cdot)$ je funkciou dopytu po peniazoch.

Dopyt po peniazoch môže byť vyvolaný za účelom transakcie a za účelom vlatnenia aktíva a je špecifikovaný nasledovne: $L = \mathcal{L}(f(k), f'(k) + q)$. Argument $f(k)$ je zástupca pre dopyt po transakciách, argument $f'(k) + q$ predstavuje náklady vyplývajúce z vlatnenia peňazí. Dopyt po peniazoch je teda funkciou kapitálu per capita a očakávanej miere inflácie: $L = L(k, q)$. Sumárne je teda zovšeobecnený Tobinov model popísaný diferenciálnymi rovnicami (2), (3), (4), (5):

$$\begin{aligned}\dot{k} &= sf(k) - (1-s)(\theta - q)m - nk, \\ \dot{m} &= m(\theta - \dot{p}/p - n), \\ \dot{q} &= \gamma(\dot{p}/p - q), \\ \dot{p}/p &= \varepsilon[m - L(k, q)] + q.\end{aligned}$$

Po formálnej stránke je práca rozdelená do piatich kapitol. Prvá kapitola obsahuje prehľad literatúry zaoberajúcou sa analýzou zovšeobecneného Tobinového modelu. V druhej kapitole sú uvedené ciele diplomovej práce. V tretej kapitole uvádzame stručné zhrnutie základných výsledkov teórie dynamických systémov, ktoré sme aplikovali pri analýze modelu. Štvrtá kapitola sa zaoberá analýzou krátkodobého (dvojrozmerného) modelu. Sú v nej uvedené parametrické závislosti pevných bodov a ich stabilitné vlastnosti. Ďalej je v nej uvedený centrálny výsledok tejto práce, konkrétne dôkaz existencie Andronovovej–Hopfovej bifurkácie v modeli. Transformáciou modelu na kánonický tvar a explicitným výpočtom prvého Liapunovho exponentu je určený typ Andronovovej–Hopfovej bifurkácie. Piata kapitola sa venuje analýze úplného (trojrozmerného) modelu. Sú v nej vypočítané pevné body a uvedené nutné a postačujúce podmienky pre stabilný pevný bod pomocou Routhovho–Hurwitzovho kritéria. Tieto stabilitné podmienky porovnávame s výsledkami uvedených v článku Benhabib & Miyao (1981).

Kapitola 1

Prehľad literatúry

Tobin (1965) rozšíril základný model ekonomického rastu o peniaze a skúmal vplyv miery monetárnej expanzie na kapitálovú intenzitu v ekonomike. Čoskoro sa však ukázalo, že model je nestabilný, a preto nevhodný pre aplikáciu do reálnej ekonomiky. V roku 1971 Hadjimichalakis (1971a, 1971b) zovšeobecnil Tobinov model za účelom odstránenia nestability. V článkoch Hadjimichalakis (1971a, 1971b), Hadjimichalakis & Okuguchi (1978) autori odvodzujú postačujúce podmienky pre stabilitu ekvilibria, a nutné a postačujúce podmienky pre stabilitu ekvilibria v krátkodobom modeli¹. V týchto článkoch sa predpokladá aktuálna miera inflácie v tvare $\hat{q} = \varepsilon[m - L(k, q)]$, resp., že dopyt po peniazoch je vyvolaný iba za účelom vlastníctva aktíva. V práci Benhabib & Miyao (1981) autori odvodili postačujúcu podmienku pre lokálnu stabilitu ekvilibria zovšeobecneneho Tobinovho modelu. Navyše ukázali, že za vhodných podmienok systém podlieha Andronovovej–Hopfovej bifurkácii, a teda v systéme existujú pravidelné oscilácie. Udrište & Ciancio (2004) vo svojej práci študovali vplyv Euklidovsko–Lagrangeovej štruktúry stavového priestoru na dynamiku zovšeobecneneho Tobinovho modelu, pričom dokázali existenciu optimálnych ekonomických fluktuácií.

¹V tomto modeli sa predpokladá, že kapitál $k = \bar{k}$ je konštantný a miera rastu populácie $n = 0$. Pôvodný trojrozmerný model sa vtedy redukuje na dvojrozmerný.

Kapitola 2

Ciele diplomovej práce

Cieľom tejto práce je analýza dynamiky zovšeobecneného Tobinovho modelu v monetárnej teórii. V predchádzajúcej práci Benhabib & Miyao (1981) bol študovaný zovšeobecnený Tobinov model pre relatívne širokú triedu produkčných funkcií f a triedu funkcií dopytu po peniazoch L . Naša počiatočná snaha o zreprodukovanie týchto výsledkov však ukázala, že tieto výsledky nie sú konzistentné s Routhovým–Hurwitzovým stabilitným polynomiálnym kritériom, a teda nesprávne. Z toho dôvodu sme sa rozhodli pre analýzu zovšeobecneného Tobinovho modelu pre (i) konkrétnu triedu produkčných funkcií Cobb–Douglasovho typu (pozri rovnicu (3.5)) a (ii) triedu konkrétnych funkcií dopytu po peniazoch (pozri rovnicu (3.6)). Analýza spočíva v určení parametrických závislostí pevných bodov modelu, určení ich lokálnej stability v závislosti od hodnoty parametrov a hľadani podmienok pre vznik lokálnych bifurkácií. Objektom analýzy je úplný (trojrozmerný) Tobinov model a jeho krátkodobá (dvojrozmerná) limita.

Kapitola 3

Formulácia problému

V práci je analyzovaný zovšeobecnený Tobinov model, ako ho formuloval Benhabib & Miyao (1981):

$$\dot{k} = sf(k) - (1-s)(\theta - q)m - nk, \quad (3.1)$$

$$\dot{m} = m(\theta - \hat{p} - n), \quad (3.2)$$

$$\dot{q} = \gamma(\hat{p} - q), \quad (3.3)$$

$$\hat{p} = \varepsilon[m - L(k, q)] + q, \quad (3.4)$$

kde nasledujúce endogénne premenné vyjadrujú:

- $k \in \mathbb{R}^+$ - pomer kapitál-práca
- $m \in \mathbb{R}^+$ - objem reálnych peňazí per capita
- $q \in \mathbb{R}$ - očakávaná miera inflácie
- $\hat{p} = \dot{p}/p \in \mathbb{R}$ - aktuálna miera inflácie

a parametre:

- $s \in (0, 1)$ - sklon k úspore
- $\theta \in \mathbb{R}$ - miera peňažného rozširovania
- $n \in \mathbb{R}$ - miera rastu populácie
- $\gamma > 0$ - rýchlosť prispôsobenia sa očakávaniam,
- $\varepsilon > 0$ - rýchlosť prispôsobenia sa cenovej úrovni

Produkčná funkcia $f(k)$ má nasledujúce vlastnosti: $f(k) > 0$, $f'(k) > 0$, $f''(k) < 0$, $\lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$. V práci je použitá Cobbova-Douglasová funkcia

$$f(k) := k^\rho, \quad (3.5)$$

kde $\rho \in (0, 1)$.

L je funkciou dopytu po peniazoch. $L = \mathcal{L}(f(k), f'(k) + q)$, resp. $L = L(k, q)$, s vlastnosťami: $L_k = \frac{\partial L}{\partial k} > 0$ a $L_q = \frac{\partial L}{\partial q} < 0$.

V práci sa uvažuje funkcia dopytu po peniazoch v tvare

$$L(k, q) := L_0 k^\alpha (q + q_D)^{-\beta}, \quad (3.6)$$

kde $\alpha, \beta \in (0, 1)$, $\alpha + \beta = 1$, $L_0 = \text{const} > 0$, $q_D > 0$ dostatočne veľké. Takto definovaná funkcia spĺňa predpoklady funkcie po peniazoch: $L_k = \alpha L_0 k^{\alpha-1} (q + q_D)^{-\beta} = \alpha L/k > 0$, $L_q = -\beta L_0 k^\alpha (q + q_D)^{-\beta-1} = -\beta L/(q + q_D) < 0$. Parameter q_D zaručuje, že funkcia L je definovaná aj pre malé záporné hodnoty očakávanej inflácie q , teda pri očakávaní deflácie. Parameter α vyjadruje zmenu rýchlosti nárastu dopytu po peniazoch L pri náraste množstva kapitálu k . β vyjadruje zmenu rýchlosti poklesu dopytu po peniazoch L pri náraste inflácie q .

Kapitola 4

Metódy analýzy

V tejto kapitole uvádzame stručné zhrnutie základných výsledkov teórie dynamických systémov, ktoré budeme aplikovať pri analýze úplného Tobinovho modelu a jeho krátkodobej limity. V tejto limite sa Tobinov model redukuje na planárny dynamický systém. Uvádzame tu metódu linearizácie a Routh–Hurwitzove podmienky stability ekvilibria (Veta 4.1.2), ako aj klasifikáciu pevných bodoch v dvojrozmerných dynamických systémoch. V podkapitole 5.3, 5.4 budeme analyzovať periodické riešenia krátkodobého modelu, generované prostredníctvom tzv. Andronovovej–Hopfovej bifurkácie. Podmienky pre existenciu a lineárnu stabilitu periodických riešení dvojrozmerného dynamického systému sú zhrnuté vo vete 4.3.1.

4.1 Linearizácia a stabilita pevných bodov

Uvažujme n -rozmerný systém obyčajných diferenciálnych rovníc:

$$\dot{x} = f(x) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

Bod x^* , pre ktorý platí $f(x^*) = 0$ nazývame pevným bodom, resp. kritickým bodom alebo ekvilibríom. Taylorovým rozvojom funkcie f okolo pevného bodu x^* (uvažujme pre zjednodušenie $x^* = 0$) dostávame nasledovný systém:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \varphi(x),$$

kde

$$\mathbf{A} \equiv Df(x^*) \equiv Df(x)|_{x=x^*} \equiv \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_n/\partial x_1 & \cdots & \partial f_n/\partial x_n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sa nazýva Jacobiho matica a pre $\varphi(x)$ platí: $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\|x\|} = 0$.

Systém $\dot{x} = \mathbf{A}x$ sa nazýva linearizovaný systém, resp. linearizácia systému (4.1).

Riešenie \bar{x} dynamického systému nazývame stabilné, ak iné riešenie štartujúce v jeho blízkosti zostáva v jeho blízkosti aj pre nasledujúce časy. Riešenie je asymptoticky stabilné, ak iné riešenie začínajúce v jeho blízkosti k nemu konverguje pre čas idúci do nekonečna. Formálnejšie v nasledujúcej definícii.

Definícia 1. Riešenie \bar{x} dynamického systému (4.1) je stabilné (Liapunovsky stabilné), ak pre dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon) > 0$ také, že pre ľubovoľné iné riešenie $y(t)$ platí, ak $|\bar{x}(0) - y(0)| < \delta$, potom $|\bar{x}(t) - y(t)| < \varepsilon \forall t > 0$. Riešenie sa nazýva asymptoticky stabilné, ak je Liapunovsky stabilné a navyše platí, ak $|\bar{x}(0) - y(0)| < \delta$, potom $\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - y(t)| = 0$. Riešenie je nestabilné, ak nie je stabilné.

Nasledujúce vety, citované z knihy Zhang(2005), resp. Tu(1994), nám dávajú nutné a postačujúce podmienky stability pevného bodu.

Veta 4.1.1. Ak majú všetky vlastné hodnoty Jakobioho matice \mathbf{A} zápornú reálnu časť, potom je ekvilibrium x^* diferenciálnej rovnice $\dot{x} = f(x)$ asymptoticky stabilné. Ak má aspoň jedna vlastná hodnota matice \mathbf{A} kladnú reálnu časť, ekvilibrium je nestabilné.

Veta 4.1.2 (Roughtovo-Hurwitzovo kritérium). Uvažujme charakteristickú rovnicu Jakobioho matice:

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0,$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Nutnou a postačujúcou podmienkou pre kladnú reálnu časť všetných vlastných čísel λ je:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0,$$

$$\text{kde } \Delta_1 = c_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ c_5 & c_4 & c_3 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} c_1 & 1 & \dots & 0 \\ c_3 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2n-1} & c_{2n-2} & \dots & c_n \end{vmatrix},$$

$$c_i = 0 \forall i > n.$$

V prípade, že $n = 2$,

$$c_1 = -(a_{11} + a_{22}) = -\text{tr}(\mathbf{A}),$$

$$c_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \det(\mathbf{A}).$$

Vlastné čísla λ majú zápornú reálnu časť práve vtedy, keď platia nasledovné podmienky:

$$c_1 > 0, c_2 > 0.$$

V prípade, že $n = 3$,

$$c_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = -\text{tr}(\mathbf{A}),$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$c_3 = -\det(\mathbf{A}).$$

Vlastné čísla λ majú zápornú reálnu časť a pevný bod x^* je asymptoticky stabilný práve vtedy, keď platia nasledovné podmienky:

$$c_1 > 0, c_3 > 0, c_1 c_2 - c_3 > 0.$$

4.2 Klasifikácia pevných bodov v planárnych systémoch

Uvažujme dvojrozmerný nelineárny systém $\dot{x} = f(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Vlastné čísla λ Jacobiho matice \mathbf{A} majú tvar:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\tau \pm D^{1/2}),$$

kde $\tau = \text{tr}(\mathbf{A})$, $\Delta = \det(\mathbf{A})$, $D = \tau^2 - 4\Delta$. Pomocou parametrov τ , Δ , D dostávame klasifikáciu pevných bodov linearizácie (pozri tabuľku 4.1). Ak $\tau \neq 0 \wedge \Delta \neq 0 \wedge$

| | | | |
|------------------------------|------------|--------------|-----------|
| sedlo | | $\Delta < 0$ | $D > 0$; |
| stabilný uzol | $\tau < 0$ | $\Delta > 0$ | $D > 0$ |
| stabilná špirála | $\tau < 0$ | $\Delta > 0$ | $D < 0$ |
| nestabilný uzol | $\tau > 0$ | $\Delta > 0$ | $D > 0$ |
| nestabilná špirála | $\tau > 0$ | $\Delta > 0$ | $D < 0$ |
| centrum | $\tau = 0$ | $\Delta > 0$ | $D < 0$ |
| degenerovaný stabilný uzol | $\tau < 0$ | $\Delta > 0$ | $D = 0$ |
| degenerovaný nestabilný uzol | $\tau > 0$ | $\Delta > 0$ | $D = 0$ |
| neizolované pevné body | | $\Delta = 0$ | |

Tabuľka 4.1: Klasifikácia pevných bodov linearizácie pre dvojrozmerný model

$D \neq 0$ hovoríme o tzv. nedegenerovaných prípadoch dynamických systémoch. Inak o degenerovaných. V prípade, že linearizácia nelineárneho systému je nedegenerovaná, potom fázový portrét na okolí pevného bodu je zachovaný aj v nelineárnom režime. Ak je linearizácia degenerovaná, potom linearizovaný fázový portrét nie je štrukturálne stabilný a na základe linearizácie nevieme rozhodnúť o type pevného bodu (Jordan & Smith (2007)).

4.3 Andronovova–Hopfova bifurkácia v planárnych systémoch

Andronovova–Hopfova bifurkácia vzniká, keď pár komplexných vlastných čísel pretne imaginárnu os nenulovou rýchlosťou. Uvažujme dynamický systém závislý od parametra μ :

$$\dot{x} = f(x, \mu) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Ďalej uvažujme, že existuje izolované ekvilibrium $x^* = x^*(\mu)$ závislé od parametra μ . Linearizovaný systém má Jacobiho maticu $\mathbf{A}(\mu) = D_x f(x, \mu)$ závislú od μ a vyčíslenú

v pevnom bode x^* . Uvažujme, že vlastné čísla λ matice \mathbf{A} sú diferencovateľné v μ a komplexné :

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$$

a pretínajú imaginárnu os v bode $\mu = \mu_0$ nenulovou rýchlosťou: $\alpha(\mu_0) = 0 \neq \frac{d\alpha(\mu_0)}{d\mu}$ a $\beta \neq 0$. Potom v blízkosti bodu μ_0 ekvilibrium bifurkuje do limitného cyklu.

Majme systém vyjadrený v Jordanovej normálovej forme:

$$\dot{x} = \mathbf{J}(\mu)x,$$

kde $\mathbf{J}(\mu) \equiv \begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\beta(\mu) \\ \beta(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix}$; $\mathbf{J}(\mu_0) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\beta(\mu_0) \\ \beta(\mu_0) & 0 \end{pmatrix}$. Pre doplnenie, ekvilibrium je typu stabilná špirála pre $\alpha(\mu_1) < 0$, typu nestabilná špirála pre $\alpha(\mu_2) > 0$ a centrum pre $\alpha(\mu_0) = 0$, $\mu_1 < \mu_0 < \mu_2$.

V normálovej forme môže byť Andronovova–Hopfova bifurkácia vyjadrená v tvare:

$$\dot{x} = \mathbf{J}(\mu_0)x + h(x), \quad (4.2)$$

kde funkcia $h(x)$ predstavuje členy vyššieho rádu. Alebo môžeme Andronovovu–Hopfovú bifurkáciu vyjadriť v plnom tvare:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^1(x_1, x_2) \\ k^2(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

kde $\beta = \sqrt{\det \mathbf{J}(\mu_0)}$, $a, b \in \mathbb{R}$ sa týkajú členov tretieho rádu v Taylorovom rozvoji, funkcie k^1, k^2 obsahujú členy štvrtého a vyšších rádo. Rovnicu (4.3) môžeme v polárnych súradniciach vyjadriť nasledovne:

$$\dot{r} = \alpha(\mu)r + a(\mu)r^3 + O(r^5), \quad (4.4)$$

$$\dot{\theta} = \beta(\mu) + b(\mu)r^2 + O(r^4), \quad (4.5)$$

čo pri rozvnutí do Taylorovho rozvoja v okolí $\mu = \mu_0$ (pre zjednodušenie sa uvažuje $\mu_0 = 0$) dáva:

$$\dot{r} = \alpha'(0)\mu r + a(0)r^3 + O(\mu^2 r, \mu r^3, r^5), \quad (4.6)$$

$$\dot{\theta} = \beta(0) + \beta'(0)\mu + b(0)r^2 + O(\mu^2, \mu r^2, r^4), \quad (4.7)$$

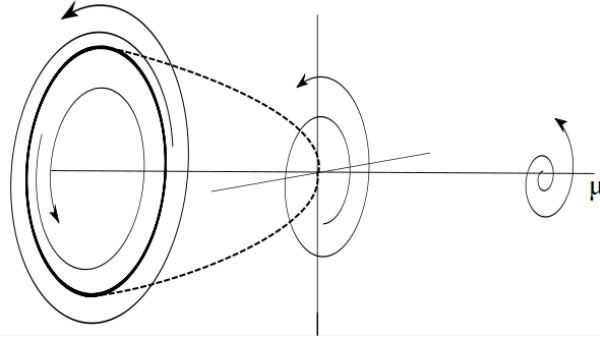
kde $\alpha'(0) \equiv \frac{d\alpha}{d\mu}|_{\mu_0=0}$, $\beta'(0) \equiv \frac{d\beta}{d\mu}|_{\mu_0=0}$. Zanedbaním členov vyššieho rádu a zjednodušením zápisu $a(0) = a$, $\beta(0) = \beta$, $b(0) = b$, $\beta'(0) \equiv c$, $\alpha'(0) \equiv d$ môžeme písať:

$$\dot{r} = d\mu r + ar^3, \quad (4.8)$$

$$\dot{\theta} = \beta + c\mu + br^2. \quad (4.9)$$

A tak pre periodické riešenie systému rovníc (4.8)(4.9), pre $-\infty < \frac{\mu d}{a} < 0$ a μ dostatočne malé dostávame:

$$[r(t), \theta(t)] = \left[\left(-\frac{\mu d}{a} \right)^{1/2}, \left(\beta + \left(c - \frac{bd}{a} \right) \mu \right) t + \theta_0 \right]. \quad (4.10)$$



Obrázok 4.1: Bifurkačný diagram v priestore (μ, r, θ) pre prípad $a > 0, d > 0$.

Periodické orbita je stabilná (príťahuje k sebe krivky riešení zvonka aj zvnútra) pre $a < 0$ a nestabilná (odpuďzujúca krivky od seba) pre $a > 0$, nezávisle od toho, či vlastné číslo pretne imaginárnu os zľava doprava ($\alpha'(0) \equiv d > 0$) alebo zprava doľava ($d < 0$). Môžu tak vzniknúť nasledovné prípady.

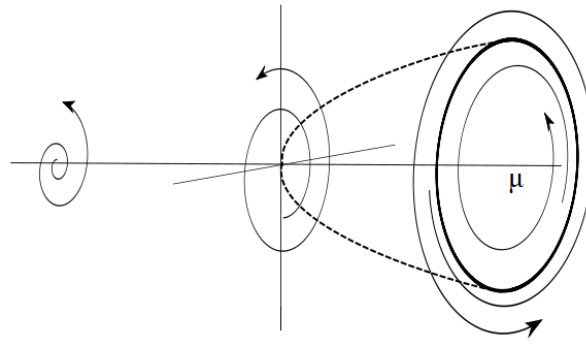
- Ak $a > 0, d > 0$ (Obrázok 4.1), pevný bod je typu nestabilná špirála pre $\mu > 0$ a typu stabilná špirála pre $\mu < 0$, pričom vzniká nestabilný limitný cyklus pre $\mu < 0$. Ide o subkritický typ bifurkácie.
- Ak $a > 0, d < 0$ (Obrázok 4.2), pevný bod je typu nestabilná špirála pre $\mu < 0$ a typu stabilná špirála pre $\mu > 0$ s nestabilným limitným cyklom pre $\mu > 0$. Ide o subkritický typ bifurkácie.
- Ak $a < 0, d > 0$ (Obrázok 4.3), v tomto prípade je pevný bod typu stabilná špirála pre $\mu < 0$ a typu nestabilná špirála pre $\mu > 0$, pričom vzniká stabilný limitný cyklus pre $\mu > 0$. Ide o superkritický typ bifurkácie.
- Ak $a < 0, d < 0$ (Obrázok 4.4), v tomto prípade je pevný bod typu stabilná špirála pre $\mu > 0$ a typu nestabilná špirála pre $\mu < 0$ so stabilným limitným cyklom pre $\mu < 0$. Ide o superkritický typ bifurkácie.

Symbol a sa nazýva aj prvým Liapunovým exponentom. Guckenheimer a Holmes (Tu (1994)) odvodili explicitnú formulu na jeho výpočet, s nasledovným tvarom:

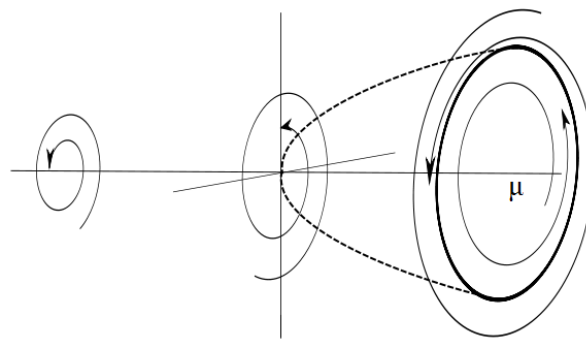
$$a \equiv \frac{1}{16}(h_{xxx}^1 + h_{xyy}^1 + h_{xxy}^2 + h_{yyy}^2) + \frac{1}{16\omega_0} [h_{xy}^1(h_{xx}^1 + h_{yy}^1) - h_{xy}^2(h_{xx}^2 + h_{yy}^2) - h_{xx}^1 h_{xx}^2 + h_{yy}^1 h_{yy}^2], \quad (4.11)$$

kde funkcia h pochádza z rovnice (4.2) a vyjadruje členy vyšších rádov normálnej formy Andronovovej–Hopfovej bifurkácie. Dolný index reprezentuje parciálnu deriváciu podľa príslušnej nezávislej premennej, napr. $h_{12}^1 = \frac{\partial^2 h^1}{\partial x_1 \partial x_2}$.

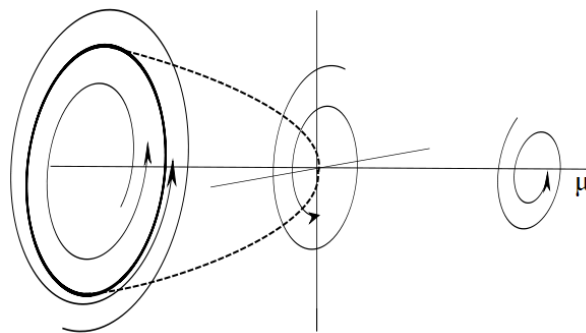
Predošlé úvahy môžeme zhrnúť v nasledovnej vete (Tu (1994)).



Obrázok 4.2: Bifurkačný diagram v priestore (μ, r, θ) pre prípad $a > 0, d < 0$.



Obrázok 4.3: Bifurkačný diagram v priestore (μ, r, θ) pre prípad $a < 0, d > 0$.



Obrázok 4.4: Bifurkačný diagram v priestore (μ, r, θ) pre prípad $a < 0, d < 0$.

Veta 4.3.1 (Veta o Andronovovej–Hopfovej bifurkácii). *Nech systém $\dot{x} = f(x, \mu) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má pevný bod $(x^*, \mu_0) = (0, 0)$ a Jakobihu matica $\mathbf{A}(\mu) \equiv D_x f(x^*, \mu_0)$ má rýdzo-imaginárne vlastné čísla $\lambda(\mu_0) = \pm i\beta(\mu_0)$ také, že $\alpha(\mu_0) = 0 \neq \beta(\mu_0)$ a pár vlastných čísel pretína imaginárnu os nenulovou rýchlosťou: $d \equiv d\alpha(\mu_0)/d\mu \neq 0$. Potom*

1. $\mu = \mu_0$ je bodom bifurkácie.
2. Pri prechode bodom bifurkácie existuje paraboloid s polomerom $r = \sqrt{-\mu d/a}$ umiestnený v počiatku $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$. Periodické orbity sú stabilné (prítahujúce) pre $a < 0$ a nestabilné (odpuďujúce) pre $a > 0$, nezávisle od toho, či pár rýdzo-imaginárnych vlastných čísel pretína imaginárnu os zľava ($d > 0$), alebo zprava ($d < 0$).

Kapitola 5

Analýza zovšeobecneného Tobinovho modelu: 2D redukcia pre krátkodobú limitu

Za predpokladu, že kapitál je konštatný $k = \bar{k}$ a veľkosť populácie je konštantná, resp. miera rastu populácie $n = 0$, sa pôvodný trojrozmerný systém redukuje na dvojrozmerný systém, ktorý budeme nazývať *krátkodobým* modelom. Krátkodobý model je teda reprezentovaný rovnicami (3.2),(3.3) a rovnicou (3.4). Elimináciou \hat{p} z rovníc (3.2) a (3.3) pomocou rovnice (3.4) máme

$$\dot{m} = m\{\theta - \varepsilon[m - L(\bar{k}, q)] - q\}, \quad (5.1)$$

$$\dot{q} = \gamma\varepsilon[m - L(\bar{k}, q)]. \quad (5.2)$$

Fixovaný kapitál \bar{k} je v krátkodobom modeli parametrom.

5.1 Pevné body krátkodobého modelu

Pre pevný bod platí $\dot{q} = 0$, $\dot{m} = 0$ a teda:

$$\begin{aligned} \dot{q} = 0 &\Leftrightarrow m = L(\bar{k}, q) \\ \dot{m} = 0 &\Leftrightarrow m = 0 \vee (\theta - \varepsilon[m - L(\bar{k}, q)] - q) = 0 \\ &\Leftrightarrow m = 0 \vee \theta - q = 0 \end{aligned}$$

Za predpokladu, že $m \in \mathbb{R}^+$ dostávame jeden netriviálny pevný bod dvojrozmerného dynamického systému:

$$[m^*, q^*] = [L(\bar{k}, \theta), \theta] = [L_0\bar{k}^\alpha(\theta + q_D)^{-\beta}, \theta].$$

V ekvilibriu sa očakávaná miera inflácie rovná aktuálnej miere inflácie (priamo z rovnice (3.4)) a dosahuje hodnoty miery peňažného rozširovania. Objem peňazí per capita sa v ekvilibriu vyrovná s dopytom po peniazoch.

Ak označíme $\mathbf{x}^* = [m^*, q^*]$, potom $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\theta, \bar{k}, \alpha, \beta, L_0, q_D)$. Pozícia pevného bodu je závislá od veľkosti kapitálu, miery peňažného rozširovania a parametrov vyskytujúcich sa vo funkcií dopytu po peniazoch. Naopak, rýchlosť prispôsobenia sa cenovej úrovni (parameter ε), rýchlosť prispôsobenia sa očakávaniam (parameter γ) neovplyvňujú pozíciu pevného bodu v dvojrozmernom fázovom priestore (m, q) .

5.2 Linearizácia na okolí pevného bodu, stabilita pevného bodu

Jakobiho matica dynamického systému má nasledovný tvar:

$$\mathbf{A}(m, q) = \begin{pmatrix} \theta - 2\varepsilon m + \varepsilon L(\bar{k}, q) - q & m[\varepsilon L_q(\bar{k}, q) - 1] \\ \gamma\varepsilon & -\gamma\varepsilon L_q(\bar{k}, q) \end{pmatrix}.$$

Vyčíslením matice v pevnom bode $[m^*, q^*]$ dostávame:

$$\mathbf{A}(m^*, q^*) = \begin{pmatrix} -\varepsilon L(\bar{k}, \theta) & L(\bar{k}, \theta)[\varepsilon L_q(\bar{k}, \theta) - 1] \\ \gamma\varepsilon & -\gamma\varepsilon L_q(\bar{k}, \theta) \end{pmatrix}.$$

Kvôli prehľadnosti ďalej označíme $L^* \equiv L(\bar{k}, \theta)$, $L_q^* \equiv L_q(\bar{k}, \theta)$. Vypočítame si nasledujúce charakteristiky:

$$\begin{aligned} \tau = \text{tr}(\mathbf{A}) &= -\varepsilon L^* - \gamma\varepsilon L_q^* \\ &= -\varepsilon[L^* + \gamma(-\beta)L^*/(\theta + q_D)] \\ &= -\varepsilon L^*[1 - \gamma\beta/(\theta + q_D)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta = \det(\mathbf{A}) &= \varepsilon\gamma L^*(\gamma L_q^* - \gamma L_q^* + 1) \\ &= \varepsilon\gamma L^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = \tau^2 - 4\Delta &= \varepsilon^2 L^{*2} (1 - \gamma\beta/(\theta + q_D))^2 - 4\varepsilon\gamma L^* \\ &= \varepsilon^2 L^{*2} \left[\left(1 - \frac{\gamma\beta}{\theta + q_D}\right)^2 - \frac{4\gamma}{\varepsilon L^*} \right]. \end{aligned}$$

$\Delta > 0$ determinant Jakobiho matice je kladný, čo nám zaručuje, že pevný bod nemôže byť typu sedlo. Pre stopu $\tau < 0$ pôjde o stabilný pevný bod, $\tau > 0$ spôsobuje nestabilitu. $\tau = 0$ je degenerovaný prípad, v ktorom linearizácia nie je dostatočná na určenie typu a stability pevného bodu pôvodného nelineárneho systému. Analýzou parametrickej závislosti τ zistujeme, že

$$\tau < 0 \Leftrightarrow [1 - \gamma\beta/(\theta + q_D)] > 0 \Leftrightarrow (\theta + q_D)/\beta > \gamma.$$

Ak označíme kritickú hodnotu

$$\gamma_c = \gamma_c(\theta, \beta, q_D) \equiv (\theta + q_D)/\beta,$$

potom pre $0 < \gamma < \gamma_c$ máme stabilný pevný bod, pre $\gamma > \gamma_c$ nestabilný. Je vidieť, že pri vyšších hodnotách parametrov β, γ resp. nízkych hodnotách parametrov θ, q_D je pevný bod nestabilný. Naopak pevný bod je stabilný pri nižších hodnotách parametrov β, γ resp. pri vyšších hodnotách parametrov θ, q_D . To, či pôjde o stabilný (nastabilný) uzol, alebo stabilnú (nastabilnú) špirálu rozhodne kladnosť (zápornosť) diskriminantu D . Analýzou parametrickej závislosti D zisťujeme, že:

$$\begin{aligned}
D = 0 &\Leftrightarrow \left[\left(1 - \frac{\gamma\beta}{\theta + q_D} \right)^2 - \frac{4\gamma}{\varepsilon L^*} \right] = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2\gamma\beta}{\theta + q_D} + \frac{\gamma^2\beta^2}{(\theta + q_D)^2} - \frac{4\gamma}{\varepsilon L^*} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\beta^2}{(\theta + q_D)^2} \gamma^2 - \left(\frac{2\beta}{\theta + q_D} + \frac{4}{\varepsilon L^*} \right) \gamma + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \gamma_c^+, \gamma_c^- = \frac{\left(\frac{2\beta}{\theta + q_D} + \frac{4}{\varepsilon L^*} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{2\beta}{\theta + q_D} + \frac{4}{\varepsilon L^*} \right)^2 - 4 \frac{\beta^2}{(\theta + q_D)^2}}}{2 \frac{\beta^2}{(\theta + q_D)^2}} \\
&\Leftrightarrow \gamma_c^+, \gamma_c^- = \frac{\theta + q_D}{\beta} + \frac{2(\theta + q_D)^2}{\beta^2 \varepsilon L^*} \pm \frac{(\theta + q_D)^2}{2\beta^2} \sqrt{\frac{16}{\varepsilon^2 L^{*2}} \left(\frac{\beta \varepsilon L^*}{\theta + q_D} + 1 \right)} \\
&\Leftrightarrow \gamma_c^+, \gamma_c^- = \frac{\theta + q_D}{\beta} + \frac{2(\theta + q_D)^2}{\beta^2 \varepsilon L^*} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\beta \varepsilon L^*}{\theta + q_D} + 1} \right) \\
&\Leftrightarrow \gamma_c^+, \gamma_c^- = \gamma_c + \frac{2\gamma_c^2}{\varepsilon L(\bar{k}, \theta)} \left(1 \pm \sqrt{\frac{\varepsilon L(\bar{k}, \theta)}{\gamma_c} + 1} \right)
\end{aligned}$$

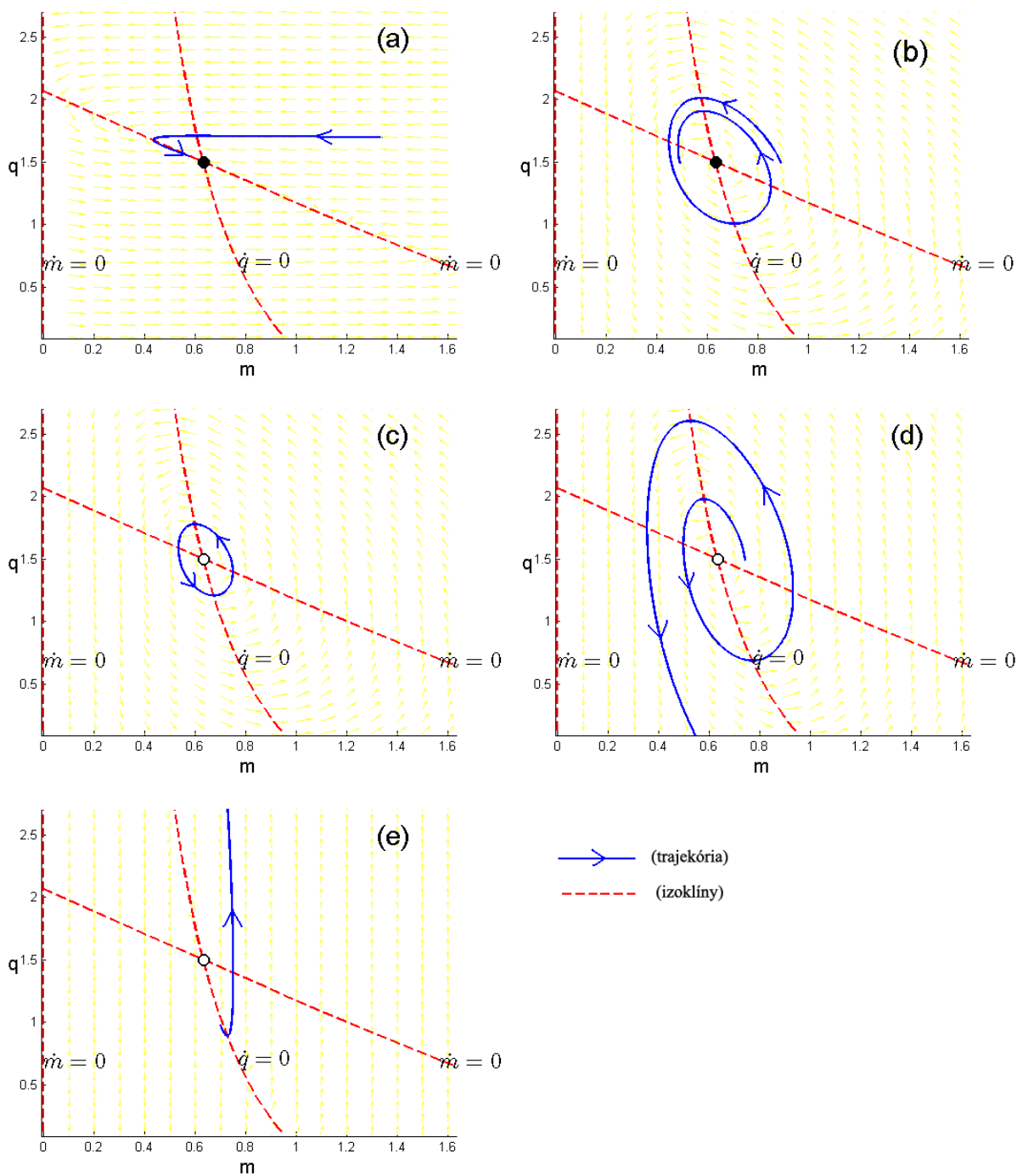
Výraz $\varepsilon L(\bar{k}, \theta)/\gamma_c > 0$, a teda $\sqrt{\varepsilon L(\bar{k}, \theta)/\gamma_c + 1} > 1$. Ďalej platí, že $0 < \gamma_c^- < \gamma_c$ a $\gamma_c < \gamma_c^+$.

Dostávame tak nasledovnú klasifikáciu pevných bodov pre linearizovaný systém a pôvodný nelineárny systém (pozri Tabuľku 5.1 a Obrázok 5.1).

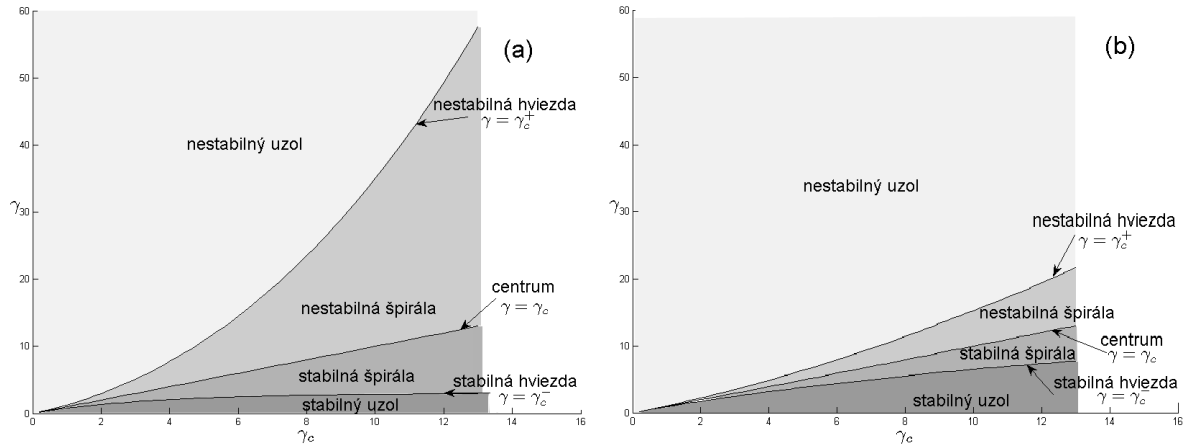
Treba si uvedomiť, že pre v prípade okamžitého prispôsobenia sa cenovej úrovni, teda pre $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\gamma_c^+, \gamma_c^- \rightarrow \gamma_c$, môžu nastať iba dva nedegenerované prípady:

| | Linearizovaný systém | Nelineárny systém |
|-------------------------------------|----------------------|--------------------|
| $\gamma \in (0, \gamma_c^-)$ | stabilný uzol | stabilný uzol |
| $\gamma = \gamma_c^-$ | stabilná hviezda | |
| $\gamma \in (\gamma_c^-, \gamma_c)$ | stabilná špirála | stabilná špirála |
| $\gamma = \gamma_c$ | centrum | |
| $\gamma \in (\gamma_c, \gamma_c^+)$ | nestabilná špirála | nestabilná špirála |
| $\gamma = \gamma_c^+$ | nestabilná hviezda | |
| $\gamma \in (\gamma_c^+, \infty)$ | nestabilný uzol | nestabilný uzol |

Tabuľka 5.1: Klasifikácia pevných bodov pre dvojrozmerný model



Obrázok 5.1: Simulácia trajektórií dvojrozmerného modelu s parametrami: $\bar{k} = 1$, $\theta = 1.5$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\varepsilon = 1$, $L_0 = 1$, $q_D = 1$. Pre špecifickú voľbu parametra γ dostávame nasledovné typy pevných bodov: (a) stabilný uzol pre $\gamma = 0.05$, (b) stabilná špirála pre $\gamma = 4$, (c) centrum (v lin. prípade) pre $\gamma = \gamma_c = 5$, (d) nestabilná špirála pre $\gamma = 10$, (e) nestabilný uzol pre $\gamma = 170$.

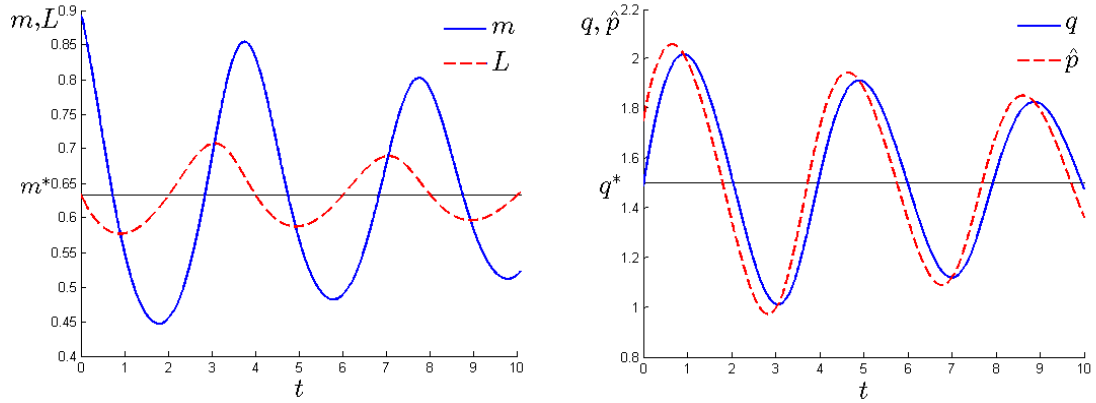


Obrázok 5.2: Stabilitný diagram linearizovného systému. Znázornenie typu pevného bodu v rovine (γ_c, γ) pri hodnote parametrov $\bar{k} = 1$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $L_0 = 1$, $q_D = 5$ a parametra $\varepsilon_1 = 50$ (a), $\varepsilon_2 = 500$ (b).

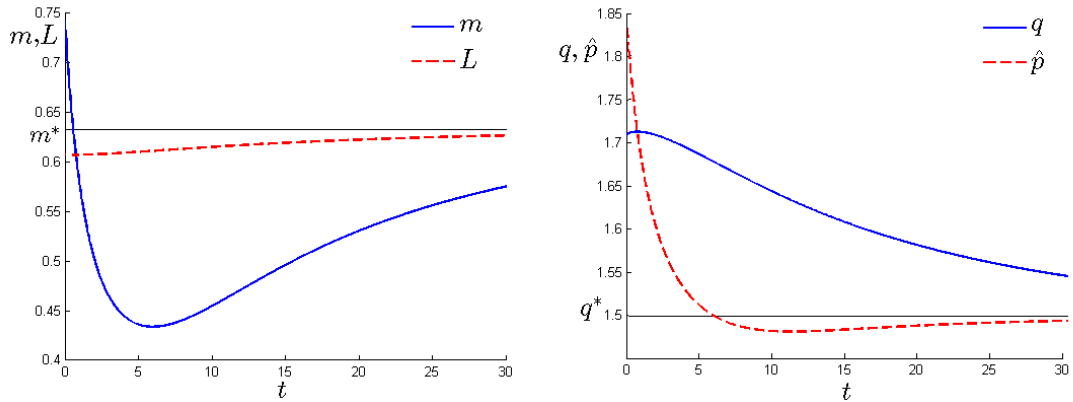
- stabilný uzol pre $\gamma < \gamma_c$
- nestabilný uzol pre $\gamma > \gamma_c$

Na Obrázku 5.2 krivky $\gamma = \gamma_c$, $\gamma = \gamma_c^+$, $\gamma = \gamma_c^-$ rozdeľujú rovinu (γ_c, γ) na štyri oblasti s rôznymi typmi pevného bodu. Krivky sú vykreslené pri fixovanej hodnote parametrov $\bar{k}, \alpha, \beta, L_0, q_D, \varepsilon$, pre dve rôzne hodnoty ε . Pre vyššiu hodnotu ε (Obrázok 5.2b) je vidieť konvergencia kriviek $\gamma = \gamma_c^+$, $\gamma = \gamma_c^-$ k priamke $\gamma = \gamma_c$.

Na obrázku 5.3 môžeme sledovať časový vývoj premenných $m, q, \bar{p}, L(\bar{k}, q)$ pre takú voľbu parametrov, pri ktorých je pevný bod typu stabilná špirála. Ak začíname z východzieho bodu $[m_0, q_0]$ očakávaná inflácia q , ako aj reálna inflácia \bar{p} narastá, čo má za následok vytesňovanie peňazí z ekonomiky - znižuje sa dopyt po peniazoch $L(\bar{k}, q)$ a m klesá. Ak sa množstvo peňazí vyrovná s dopytom po peniazoch, rast očakávanej inflácie sa zastaví. Nasleduje obdobie, kedy ešte vysoká inflácia vytláča peniaze z obehu, avšak inflácia klesá. Klesajúca inflácia obnovuje v ekonomike záujem o držanie hotovosti - dopyt po peniazoch narastá. Pri znížení inflácie pod istú úroveň sa množstvo peňazí v ekonomike začne znova zvyšovať. Zvyšuje sa, kým sa nevyrovná s dopytom po peniazoch. Vtedy sa klesanie očakávanej inflácie zastaví. Nasleduje obdobie prosperity ekonomiky, kedy peniaze na trhu preyšujú dopyt po peniazoch, čo zvyšuje inflačné tlaky. Zvyšovanie inflácie znižuje záujem o držanie hotovosti - dopyt po peniazoch klesá. Ekonomika je naďalej presýtená peniazmi, až kým vysoká inflácia nezačne znova vytesňovať peniaze. V ekonomike sú teda prítomné oscilácie okolo rovnovážneho stavu, pričom amplitúda všetkých spomínaných premenných $m, L(\bar{k}, q), q, \bar{p}$ je utlmovaná. Oscilačný charakter je zachovaný aj pri pevnom bode typu nestabilná špirála a centrum



Obrázok 5.3: Časový priebeh premenných m , $L(\bar{k}, q)$, q , \bar{p} pre hodnoty parametrov: $\bar{k} = 1$, $\theta = 1.5$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\varepsilon = 1$, $L_0 = 1$, $q_D = 1$, $\gamma = 4$ a počiatočný stav $[m_0, q_0] = [0.9, 1.5]$.



Obrázok 5.4: Časový priebeh premenných m , $L(\bar{k}, q)$, q , \bar{p} pre hodnoty parametrov: $\bar{k} = 1$, $\theta = 1.5$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$, $\varepsilon = 1$, $L_0 = 1$, $q_D = 1$, $\gamma = 0.05$ a počiatočný stav $[m_0, q_0] = [0.74, 1.7]$.

(v linearizovanom prípade), iba s tým rozdielom, že pri nestabilnej špirále amplitúdy premenných narastajú s časom.

Na obrázku 5.4 je vývoj premenných v čase v prípade, keď je pevný bod typu stabilný uzol. Po prvotnom „šoku“ spôsobenom nadmerným množstvom peňazí a vysokou infláciou majú riešenia tendenciu konvergovať k pevnému bodu. V prípade nestabilného uzla riešenia divergujú od pevného bodu.

Pre $\gamma \in \{\gamma_c^+, \gamma_c^-, \gamma_c\}$ je linearizácia degenerovaná a fázový portrét na okolí pevného bodu nie je vo všeobecnosti štruktúrne stabilný. V linearizovanom systéme pri hodnote parametra $\gamma = \gamma_c$ je pevný bod typu centrum. Vzniká preto otázka, či aj v nelineárnom režime existujú uzavreté orbity. Odpoveď môže poskytnúť Veta o Andronovovej–Hopfovej bifurkácii (Veta 4.3.1), ktorej aplikáciu na dvojrozmerný model uvádzame v nasledovnej podkapitole.

5.3 Dôkaz existencie limitného cyklu v krátkodobom modeli

Existenciu limitného cyklu dokážeme tak, že ukážeme, že pri kritickej hodnote parametra $\gamma = \gamma_c$ pár komplexne združených vlastných čísel Jakobiho matice pretína imaginárnu os nenulovou rýchlosťou. Pri aplikácii Vety o Andronovovej–Hopfovej bifurkácii (Veta 4.3.1) je vhodné, aby bol uvažovaný pevný bod dynamického systému umiestnený v počiatku súradnicovej sústavy. To dosiahneme posunutím $\tilde{m} = m - m^*$, $\tilde{q} = q - q^*$, resp. $\tilde{m} = m - L(\bar{k}, \theta)$, $\tilde{q} = q - \theta$. Potom systém rovníc (5.1), (5.2) nadobúda tvar:

$$\dot{\tilde{m}} = [\tilde{m} + L(\bar{k}, \theta)]\{\theta - \varepsilon[\tilde{m} + L(\bar{k}, \theta) - L(\bar{k}, \tilde{q} + \theta)] - \tilde{q} - \theta\}, \quad (5.3)$$

$$\dot{\tilde{q}} = \gamma\varepsilon[\tilde{m} + L(\bar{k}, \theta) - L(\bar{k}, \tilde{q} + \theta)]. \quad (5.4)$$

Kvôli prehľadnosti definujme $\mathcal{L}(\tilde{q}) \equiv L(\bar{k}, \tilde{q} + \theta) = L_0\bar{k}^\alpha(\tilde{q} + \theta + q_D)^{-\beta}$, $\mathcal{L}_{\tilde{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{q}}$. Potom dostávame nasledovný systém:

$$\dot{\tilde{m}} = f^1(\tilde{m}, \tilde{q}) = [\tilde{m} + \mathcal{L}(0)]\{-\varepsilon[\tilde{m} + \mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(\tilde{q})] - \tilde{q}\}, \quad (5.5)$$

$$\dot{\tilde{q}} = f^2(\tilde{m}, \tilde{q}) = \varepsilon\gamma[\tilde{m} + \mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(\tilde{q})]. \quad (5.6)$$

Pevný bod je teda $[\tilde{m}^*, \tilde{q}^*] = [0, 0]$. Uvažujme teraz, že všetky parametre okrem parametra γ sú fixované. Potom môžeme Jakobiho maticu systému rovníc (5.5), (5.6) vyčíslenú v pevnom bode $[\tilde{m}^*, \tilde{q}^*]$ vyjadriť ako funkciu parametra γ :

$$\mathbf{A}(\gamma) = \begin{pmatrix} -\varepsilon\mathcal{L}(0) & \mathcal{L}(0)[\varepsilon\mathcal{L}_{\tilde{q}}(0) - 1] \\ \gamma\varepsilon & -\gamma\varepsilon\mathcal{L}_{\tilde{q}}(0) \end{pmatrix}.$$

Stopa matice $\tau = -\varepsilon\mathcal{L}(0) \left(1 - \frac{\gamma\beta}{\theta + q_D}\right) = -\varepsilon\mathcal{L}(0) \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_c}\right)$ a determinat $\Delta = \varepsilon\gamma\mathcal{L}(0)$. Vlastné čísla Jakobiho matice $\lambda = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta})$ môžeme vyjadriť v závislosti od parametra γ nasledovne:

$$\lambda(\gamma) = \frac{1}{2} \left[-\varepsilon\mathcal{L}(0) \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_c}\right) \pm \varepsilon\mathcal{L}(0) \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_c}\right)^2 - \frac{4\gamma}{\varepsilon\mathcal{L}(0)}} \right].$$

Bifurkácia nastáva pri kritickej hodnote parametra $\gamma = \gamma_c$, kedy má Jakobiho matica rýdzo imaginárne vlastné čísla ($\text{Re}\lambda = 0$):

$$\lambda(\gamma_c) = \pm i\varepsilon\mathcal{L}(0) \sqrt{\frac{\gamma_c}{\varepsilon\mathcal{L}(0)}} = \pm i\sqrt{\gamma_c\varepsilon\mathcal{L}(0)}.$$

Navyše vidíme, že

$$\frac{d}{d\gamma} \text{Re}\lambda = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\mathcal{L}(0)}{\gamma_c} > 0, \quad (5.7)$$

takže pár komplexne združených vlastných čísel pretína imaginárnu os pri raste γ v kritickej hodnote $\gamma = \gamma_c$ nenulovou rýchlosťou, a preto v malom okolí parametra γ_c ekvilibrium bifurkuje do limitného cyklu.

To, či pôjde o superkritický, alebo subkritický prípad Andronovovej–Hopfovej bifurkácie, resp. či limitný cyklus je stabilný alebo nestabilný, je determinované znamienkom prvého Liapunovho koeficientu dynamického systému blízko ekvilíbria.

5.4 Transformácia krátkodobého modelu na kánonický tvar, určenie typu Andronovovej–Hopfovej bifurkácie

O type Andronovovej–Hopfovej bifurkácie rozhodujú členy druhého a tretieho rádu v Taylorovom rozvoji dynamického systému, vyčíslené v kritickej hodnote parametra $\gamma = \gamma_c$. Avšak Veta o Andronovovej–Hopfovej bifurkácii (Veta 4.3.1) predpokladá, že Jakobiho matica dynamického systému je v Jordanovej kánonickej forme $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$. To si vyžaduje úpravu matice \mathbf{A} na Jordanov kánonický tvar, resp. nájdenie takej matice \mathbf{P} , pre ktorú platí: $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}(\gamma_c)\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$.

Pri kritickej hodnote parametra $\gamma = \gamma_c$ má Jakobiho matica dynamického systému nasledujúci tvar:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\gamma_c} \equiv \mathbf{A}(\gamma_c) &= \begin{pmatrix} -\varepsilon\mathcal{L}(0) & \mathcal{L}(0)[\varepsilon\mathcal{L}_{\tilde{q}}(0) - 1] \\ \gamma_c\varepsilon & -\gamma_c\varepsilon\mathcal{L}_{\tilde{q}}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon\mathcal{L}(0) & \mathcal{L}(0)\left[-\frac{\varepsilon\beta}{\theta+q_D}\mathcal{L}(0) - 1\right] \\ \gamma_c\varepsilon & \frac{\gamma_c\varepsilon\beta}{\theta+q_D}\mathcal{L}(0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\varepsilon\mathcal{L}(0) & -\mathcal{L}(0)\left[\frac{\varepsilon}{\gamma_c}\mathcal{L}(0) + 1\right] \\ \gamma_c\varepsilon & \varepsilon\mathcal{L}(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

K vlastnému číslu $\lambda = -i\sqrt{\gamma_c\varepsilon\mathcal{L}(0)}$ môžeme vypočítať prislúchajúci vlastný vektor \mathbf{v} . Pre zjednodušenie definujeme $a \equiv \varepsilon\mathcal{L}(0)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\gamma_c} - \lambda\mathbf{I} &= \begin{pmatrix} -a + i\sqrt{\gamma_c a} & -\mathcal{L}(0)\left[\frac{a}{\gamma_c} + 1\right] \\ \gamma_c\varepsilon & a + i\sqrt{\gamma_c a} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -a + i\sqrt{\gamma_c a} & -\mathcal{L}(0)\left[\frac{a}{\gamma_c} + 1\right] \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} -a\gamma_c + i\gamma_c\sqrt{\gamma_c a} & -\mathcal{L}(0)[a + \gamma_c] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dostávame tak vlastný vektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(0)[a + \gamma_c] \\ -a\gamma_c + i\gamma_c\sqrt{\gamma_c a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(0)[a + \gamma_c] \\ -a\gamma_c \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_c\sqrt{\gamma_c a} \end{pmatrix}$$

a maticu $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(0)[a + \gamma_c] & 0 \\ -a\gamma_c & \gamma_c\sqrt{\gamma_c a} \end{pmatrix}$, pričom platí: $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_{\gamma_c}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\gamma_c a} \\ \sqrt{\gamma_c a} & 0 \end{pmatrix}$.

Ďalej si vypočítame inverznú maticu \mathbf{P}^{-1} :

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{P})} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{22} & -\mathbf{P}_{21} \\ -\mathbf{P}_{12} & \mathbf{P}_{11} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\mathcal{L}(0)[a + \gamma_c]\gamma_c\sqrt{\gamma_c a}} \begin{pmatrix} \gamma_c\sqrt{\gamma_c a} & 0 \\ a\gamma_c & \mathcal{L}(0)[a + \gamma_c] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\mathcal{L}(0)[a + \gamma_c]}{\sqrt{\gamma_c a}} & \frac{\sqrt{\gamma_c a}}{\gamma_c^2 a} \\ \frac{\gamma_c \mathcal{L}(0)[a + \gamma_c]}{\gamma_c^2 a} & \frac{\sqrt{\gamma_c a}}{\gamma_c^2 a} \end{pmatrix}.$$

Ak rozvinieme funkcie $f^1(\tilde{m}, \tilde{q})$, $f^2(\tilde{m}, \tilde{q})$ do Taylorového radu, môžeme dynamický systém popísaný rovnicami (5.5), (5.6) vyjadriť v blízkosti pevného bodu $[\tilde{m}^*, \tilde{q}^*] = [0, 0]$ nasledovne:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{m}} \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\gamma_c} \begin{pmatrix} \tilde{m} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g^1(\tilde{m}, \tilde{q}) \\ g^2(\tilde{m}, \tilde{q}) \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Funkcie $g^1(\tilde{m}, \tilde{q})$, $g^2(\tilde{m}, \tilde{q})$ predstavujú členy druhého, tretieho a vyššieho rádu Taylorového rozvoja:

$$g^l(\tilde{m}, \tilde{q}) = \frac{1}{2!} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 2 \\ i+j=2}} \frac{\partial^2 f^l(\tilde{m}, \tilde{q})}{\partial \tilde{m}^i \partial \tilde{q}^j} \Big|_{\substack{\tilde{m}=0 \\ \tilde{q}=0}} + \frac{1}{3!} \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq 3 \\ i+j=3}} \frac{\partial^3 f^l(\tilde{m}, \tilde{q})}{\partial \tilde{m}^i \partial \tilde{q}^j} \Big|_{\substack{\tilde{m}=0 \\ \tilde{q}=0}} + o(\|\tilde{m}, \tilde{q}\|^4) \quad , \text{ pre } l = 1, 2. \quad (5.9)$$

Zaveďme teraz substitúciu $\begin{pmatrix} \tilde{m} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Rovnica (5.8) sa tak transformuje na tvar:

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{\gamma_c} \mathbf{P} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g^1(x, y) \\ g^2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Prenásobením rovnice inverznou maticou \mathbf{P}^{-1} zľava dostaneme:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_{\gamma_c} \mathbf{P} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} g^1(x, y) \\ g^2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\gamma_c a} \\ \sqrt{\gamma_c a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(x, y) \\ k(x, y) \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

Dynamický systém máme teda vyjadrený v normálnej forme. Prvý Liapunov exponent vyrátame podľa teórie (rovnica 4.11) nasledovne:

$$l_1 = \frac{1}{16} (h_{xxx} + h_{xyy} + k_{xxy} + k_{yyy}) + \frac{1}{16\omega_0} [h_{xy}(h_{xx} + h_{yy}) - k_{xy}(k_{xx} + k_{yy}) - h_{xx}k_{xx} + h_{yy}k_{yy}],$$

pričom v našom prípade $\omega_0 = \sqrt{\gamma_c a}$. Preto je potrebné vypočítať príslušné parciálne derivácie funkcií h , k , vyčíslené v bode $[\tilde{m}^*, \tilde{q}^*] = [0, 0]$.

Keďže $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, vypočítajme najprv členy druhého a tretieho rádu Taylorového rozvoja dynamického systému popísaného rovnicou (5.8). Už pri výpočte Jakobiho matice sme využili:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^1}{\partial \tilde{m}} &= -2\varepsilon \tilde{m} + 2\varepsilon \mathcal{L}(0) + \varepsilon \mathcal{L}(\tilde{q}) - \tilde{q}, & \frac{\partial f^1}{\partial \tilde{q}} &= [\tilde{m} - \mathcal{L}(0)][\varepsilon \mathcal{L}_{\tilde{q}}(\tilde{q}) - 1], \\ \frac{\partial f^2}{\partial \tilde{m}} &= \varepsilon \gamma, & \frac{\partial f^2}{\partial \tilde{q}} &= -\varepsilon \gamma_c \mathcal{L}_{\tilde{q}}(\tilde{q}). \end{aligned}$$

Ďalej počítame:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f^1}{\partial \tilde{m}^2} &= -2\varepsilon, & \frac{\partial^2 f^1}{\partial \tilde{m} \partial \tilde{q}} &= \frac{\partial^2 f^1}{\partial \tilde{q} \partial \tilde{m}} = \varepsilon \mathcal{L}_{\tilde{q}}(\tilde{q}) - 1, & \frac{\partial^2 f^1}{\partial \tilde{q}^2} &= \varepsilon \mathcal{L}_{\tilde{q}\tilde{q}}(\tilde{q})[\tilde{m} + \mathcal{L}(0)], \\ \frac{\partial^2 f^2}{\partial \tilde{m}^2} &= 0, & \frac{\partial^2 f^2}{\partial \tilde{m} \partial \tilde{q}} &= \frac{\partial^2 f^2}{\partial \tilde{q} \partial \tilde{m}} = 0, & \frac{\partial^2 f^2}{\partial \tilde{q}^2} &= -\varepsilon \gamma_c \mathcal{L}_{\tilde{q}\tilde{q}}(\tilde{q}).\end{aligned}$$

Derivácie tretieho rádu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f^1}{\partial \tilde{m}^3} &= 0, & \frac{\partial^3 f^1}{\partial \tilde{m}^2 \partial \tilde{q}} &= \frac{\partial^3 f^1}{\partial \tilde{m} \partial \tilde{q} \partial \tilde{m}} = \frac{\partial^3 f^1}{\partial \tilde{q} \partial \tilde{m}^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 f^1}{\partial \tilde{m} \partial \tilde{q}^2} &= \frac{\partial^3 f^1}{\partial \tilde{q} \partial \tilde{m} \partial \tilde{q}} = \frac{\partial^3 f^1}{\partial \tilde{q}^2 \partial \tilde{m}} = \varepsilon \mathcal{L}_{\tilde{q}\tilde{q}}(\tilde{q}), & \frac{\partial^3 f^1}{\partial \tilde{q}^3} &= \varepsilon \mathcal{L}_{\tilde{q}\tilde{q}\tilde{q}}(\tilde{q})[\tilde{m} + \mathcal{L}(0)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f^2}{\partial \tilde{m}^3} &= 0, & \frac{\partial^3 f^2}{\partial \tilde{m}^2 \partial \tilde{q}} &= \frac{\partial^3 f^2}{\partial \tilde{m} \partial \tilde{q} \partial \tilde{m}} = \frac{\partial^3 f^2}{\partial \tilde{q} \partial \tilde{m}^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 f^2}{\partial \tilde{m} \partial \tilde{q}^2} &= \frac{\partial^3 f^2}{\partial \tilde{q} \partial \tilde{m} \partial \tilde{q}} = \frac{\partial^3 f^2}{\partial \tilde{q}^2 \partial \tilde{m}} = 0, & \frac{\partial^3 f^2}{\partial \tilde{q}^3} &= -\varepsilon \gamma_c \mathcal{L}_{\tilde{q}\tilde{q}\tilde{q}}(\tilde{q}).\end{aligned}$$

A tak môžeme funkcie $g^1(\tilde{m}, \tilde{q})$, $g^2(\tilde{m}, \tilde{q})$ z rovnice (5.9) pri zanedbaní štvrtého a vyššieho rádu (vyčíslené v pevnom bode $[\tilde{m}^*, \tilde{q}^*] = [0, 0]$) vyjadriť nasledovne:

$$g^1(\tilde{m}, \tilde{q}) = -\varepsilon \tilde{m}^2 + [\varepsilon \mathcal{L}_{\tilde{q}}(0) - 1] \tilde{m} \tilde{q} + \frac{1}{2} \varepsilon \mathcal{L}_{\tilde{q}\tilde{q}}(0) \mathcal{L}(0) \tilde{q}^2 + \frac{1}{6} 3\varepsilon \mathcal{L}_{\tilde{q}\tilde{q}}(0) \tilde{m} \tilde{q}^2 + \frac{1}{6} \varepsilon \mathcal{L}_{\tilde{q}\tilde{q}\tilde{q}}(0) \mathcal{L}(0) \tilde{q}^3, \quad (5.12)$$

$$g^2(\tilde{m}, \tilde{q}) = -\frac{1}{2} \varepsilon \gamma_c \mathcal{L}_{\tilde{q}\tilde{q}}(0) \tilde{q}^2 - \frac{1}{6} \varepsilon \gamma_c \mathcal{L}_{\tilde{q}\tilde{q}\tilde{q}}(0) \tilde{q}^3. \quad (5.13)$$

Platí: $\mathcal{L}_{\tilde{q}}(0) = -\frac{\mathcal{L}(0)}{\gamma_c}$, $\mathcal{L}_{\tilde{q}\tilde{q}}(0) = \frac{\mathcal{L}^2(0)}{\gamma_c^2}$, $\mathcal{L}_{\tilde{q}\tilde{q}\tilde{q}}(0) = -\frac{\mathcal{L}^3(0)}{\gamma_c^3}$. Pre zjednodušenie budeme v nasledujúcom texte písať \mathcal{L} namiesto $\mathcal{L}(0)$. Rovnice (5.12), (5.13) môžeme teda vyjadriť v nasledujúcom tvare:

$$g^1(\tilde{m}, \tilde{q}) = -\varepsilon \tilde{m}^2 - \varepsilon \frac{\mathcal{L}}{\gamma_c} \tilde{m} \tilde{q} - \tilde{m} \tilde{q} + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\mathcal{L}^3}{\gamma_c^2} \tilde{q}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\mathcal{L}^2}{\gamma_c^2} \tilde{m} \tilde{q}^2 - \frac{1}{6} \varepsilon \frac{\mathcal{L}^4}{\gamma_c^3} \tilde{q}^3, \quad (5.14)$$

$$g^2(\tilde{m}, \tilde{q}) = -\frac{1}{2} \varepsilon \frac{\mathcal{L}^2}{\gamma_c} \tilde{q}^2 + \frac{1}{6} \varepsilon \frac{\mathcal{L}^3}{\gamma_c^2} \tilde{q}^3. \quad (5.15)$$

Zavedieme teraz substitúciu:

$$\begin{pmatrix} \tilde{m} \\ \tilde{q} \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}(a + \gamma_c)x \\ -a\gamma_c x + \gamma_c \sqrt{\gamma_c a y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ \gamma_c(-ax + \sqrt{\gamma_c a y}) \end{pmatrix},$$

kde $a \equiv \varepsilon \mathcal{L}$, $c \equiv \mathcal{L}(a + \gamma_c)$. Rovnice (5.14), (5.15) sa zmenia na tvar:

$$\begin{aligned}g^1(x, y) &= -\varepsilon c^2 x^2 - cax(-ax + \sqrt{\gamma_c a y}) - \gamma_c cx(-ax + \sqrt{\gamma_c a y}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} a \mathcal{L}^2 (-ax + \sqrt{\gamma_c a y})^2 + \frac{1}{2} ac \mathcal{L} x (-ax + \sqrt{\gamma_c a y})^2 - \frac{1}{6} a \mathcal{L}^3 (-ax + \sqrt{\gamma_c a y})^3, \\ g^2(x, y) &= -\frac{1}{2} a \mathcal{L} \gamma_c (-ax + \sqrt{\gamma_c a y})^2 + \frac{1}{6} a \mathcal{L}^2 \gamma_c (-ax + \sqrt{\gamma_c a y})^3.\end{aligned}$$

A keďže platí $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, zo znalosti tvaru matice \mathbf{P}^{-1} vyjadríme funkcie h , k nasledovne:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \frac{1}{\mathcal{L}[a + \gamma_c]} g^1(x, y) = \frac{1}{c} g^1(x, y), \\ k(x, y) &= \frac{\sqrt{\gamma_c a}}{\gamma_c \mathcal{L}[a + \gamma_c]} g^1(x, y) + \frac{\sqrt{\gamma_c a}}{\gamma_c^2 a} g^2(x, y) = \frac{\sqrt{\gamma_c a}}{\gamma_c} \left(\frac{1}{c} g^1(x, y) + \frac{1}{\gamma_c a} g^2(x, y) \right). \end{aligned}$$

Znalosť presného tvaru funkcií h , k nám už umožňuje priamo vypočítať prvý Liapunov exponent. Počítaním príslušných parciálnych derivácií (vyčíslených v pevnom bode $[\tilde{m}^*, \tilde{q}^*] = [0, 0]$) vyskytujúcich sa v Liapunovom exponente postupne dostávame:

$$\begin{aligned} h_{xx} &= -2\varepsilon c + 2a^2 + 2\gamma_c a^2 + \frac{1}{c} a^3 \mathcal{L}^2 = \frac{a^3 \mathcal{L}^2}{c}, \\ h_{xy} &= -a\sqrt{\gamma_c a} - \gamma_c \sqrt{\gamma_c a} - \frac{1}{c} a^2 \mathcal{L}^2 \sqrt{\gamma_c a} = -\sqrt{\gamma_c a} \left(a + \gamma_c + \frac{a^2 \mathcal{L}^2}{c} \right), \\ h_{yy} &= \frac{\gamma_c a^2 \mathcal{L}^2}{c}, \\ k_{xx} &= \frac{\sqrt{\gamma_c a}}{\gamma_c} \left(-2\varepsilon c + 2a^2 + 2\gamma_c a + \frac{1}{c} a^3 \mathcal{L}^2 - a^2 \mathcal{L} \right) = \frac{\sqrt{\gamma_c a}}{\gamma_c} a^2 \mathcal{L} \left(\frac{a \mathcal{L}}{c} - 1 \right) = -\frac{a^2 \mathcal{L}^2 \sqrt{\gamma_c a}}{c}, \\ k_{xy} &= \frac{\sqrt{\gamma_c a}}{\gamma_c} \left(-a\sqrt{\gamma_c a} - \gamma_c \sqrt{\gamma_c a} - \frac{1}{c} a^2 \mathcal{L}^2 \sqrt{\gamma_c a} + a \mathcal{L} \sqrt{\gamma_c a} \right) = -a^2 - \gamma_c a + \frac{\gamma_c a^2 \mathcal{L}^2}{c}, \\ k_{yy} &= \frac{\sqrt{\gamma_c a}}{\gamma_c} \left(\frac{1}{c} \gamma_c a^2 \mathcal{L}^2 - \gamma_c a \mathcal{L} \right) = -\frac{\gamma_c a \mathcal{L}^2 \sqrt{\gamma_c a}}{c}, \\ h_{xxx} &= 3a^3 \mathcal{L} + \frac{a^4 \mathcal{L}^3}{c}, \\ h_{xyy} &= \gamma_c a^2 \mathcal{L} + \frac{\gamma_c a^3 \mathcal{L}^3}{c}, \\ k_{xxy} &= \frac{\sqrt{\gamma_c a}}{\gamma_c} \left[-2a^2 \mathcal{L} \sqrt{\gamma_c a} - \frac{6a}{6c} \mathcal{L}^3 (a^2 \sqrt{\gamma_c a}) + \frac{6}{6} a \mathcal{L}^2 (a^2 \sqrt{\gamma_c a}) \right] = -2a^3 \mathcal{L} - \frac{a^4 \mathcal{L}^3}{c} + a^3 \mathcal{L}^2, \\ k_{yyy} &= \frac{\sqrt{\gamma_c a}}{\gamma_c} \left[-\frac{1}{c} \gamma_c a^2 \mathcal{L}^3 \sqrt{\gamma_c a} + \frac{6}{6a} \gamma_c a^2 \mathcal{L}^3 \sqrt{\gamma_c a} \right] = -\frac{\gamma_c a^3 \mathcal{L}^3}{c} + \gamma_c a^2 \mathcal{L}^2. \end{aligned}$$

Ďalej počítame:

$$\begin{aligned} h_{xxx} + h_{xyy} + k_{xxy} + k_{yyy} &= 3a^3 \mathcal{L} + \frac{a^4 \mathcal{L}^3}{c} + \gamma_c a^2 \mathcal{L} + \frac{\gamma_c a^3 \mathcal{L}^3}{c} - 2a^3 \mathcal{L} - \frac{a^4 \mathcal{L}^3}{c} + a^3 \mathcal{L}^2 - \\ &\quad - \frac{\gamma_c a^3 \mathcal{L}^3}{c} + \gamma_c a^2 \mathcal{L}^2 = \\ &= a^3 \mathcal{L} + \gamma_c a^2 \mathcal{L} + a^3 \mathcal{L}^2 + \gamma_c a^2 \mathcal{L}^2 = a^2 \mathcal{L} (a + \gamma_c) + a^2 \mathcal{L}^2 (a + \gamma_c) = \\ &= ca^2 (1 + \mathcal{L}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\gamma_c a}} h_{xy}(h_{xx} + h_{yy}) &= -\frac{\sqrt{\gamma_c a}}{\sqrt{\gamma_c a}} \left(a + \gamma_c + \frac{a^2 \mathcal{L}}{c} \right) \left(\frac{a^3 \mathcal{L}^2}{c} + \frac{\gamma_c a^2 \mathcal{L}^2}{c} \right) = \\
&= -a^2 \mathcal{L} \left(a + \gamma_c + \frac{a^2 \mathcal{L}^2}{c} \right), \\
\frac{1}{\sqrt{\gamma_c a}} k_{xy}(k_{xx} + k_{yy}) &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_c a}} \left(-a^2 - \gamma_c a + \frac{\gamma_c a^2 \mathcal{L}^2}{c} \right) \left(-\frac{a^2 \mathcal{L}^2 \sqrt{\gamma_c a}}{c} - \frac{\gamma_c a \mathcal{L}^2 \sqrt{\gamma_c a}}{c} \right) = \\
&= -a^2 \mathcal{L} \left(-a - \gamma_c + \frac{\gamma_c a \mathcal{L}^2}{c} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\gamma_c a}} h_{xx} k_{xx} &= -\frac{a^5 \mathcal{L}^4}{c^2}, \\
\frac{1}{\sqrt{\gamma_c a}} h_{yy} k_{yy} &= -\frac{\gamma_c^2 a^3 \mathcal{L}^4}{c^2}.
\end{aligned}$$

A teda prvý Liapunov exponent je rovný:

$$\begin{aligned}
l_1 &= \frac{1}{16} (h_{xxx} + h_{xyy} + k_{xxy} + k_{yyy}) + \\
&\quad + \frac{1}{16 \sqrt{\gamma_c a}} [h_{xy}(h_{xx} + h_{yy}) - k_{xy}(k_{xx} + k_{yy}) - h_{xx} k_{xx} + h_{yy} k_{yy}] = \\
&= \frac{1}{16} ca^2 (1 + \mathcal{L}) + \frac{1}{16} \left[-a^3 \mathcal{L} - \gamma_c a^2 \mathcal{L} - \frac{a^4 \mathcal{L}^3}{c} - a^3 \mathcal{L} - \gamma_c a^2 \mathcal{L} + \frac{\gamma_c a^3 \mathcal{L}^3}{c} + \frac{a^5 \mathcal{L}^4}{c^2} - \frac{\gamma_c^2 a^3 \mathcal{L}^4}{c^2} \right] = \\
&= \frac{1}{16} ca^2 (1 + \mathcal{L}) + \\
&\quad + \frac{1}{16} \left[-2a^3 \mathcal{L} - 2\gamma_c a^2 \mathcal{L} - \frac{a^5 \mathcal{L}^4}{c^2} - \frac{\gamma_c a^4 \mathcal{L}^4}{c^2} + \frac{\gamma_c a^4 \mathcal{L}^4}{c^2} + \frac{\gamma_c^2 a^3 \mathcal{L}^4}{c^2} + \frac{a^5 \mathcal{L}^4}{c^2} - \frac{\gamma_c^2 a^3 \mathcal{L}^4}{c^2} \right] = \\
&= \frac{1}{16} ca^2 (1 + \mathcal{L}) + \frac{1}{16} [-2ca^2] = \\
&= \frac{1}{16} ca^2 (\mathcal{L} - 1).
\end{aligned}$$

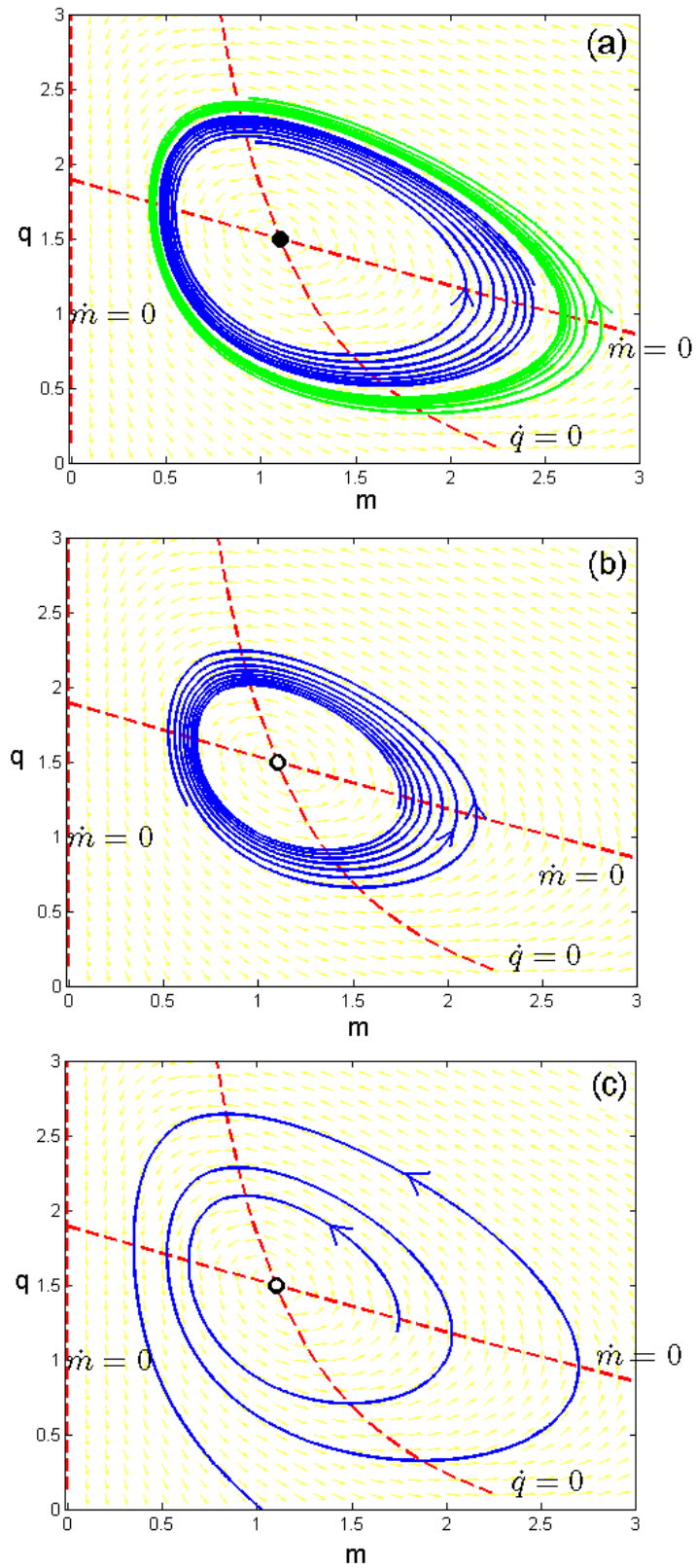
Keďže $a = \varepsilon \mathcal{L} > 0$, $c = \mathcal{L}(a + \gamma_c) > 0$, kladnosť/ zápornosť Liapunovho exponentu závisí od znamienka výrazu $\mathcal{L} - 1 = L(\bar{k}, \theta) - 1$. Teda závisí od toho, či dopyt po peniazoch v ekvilibriu je väčší, alebo menší ako hodnota jedna, resp. či objem peňazí v ekvilibriu m^* je väčší, alebo menší ako jedna.

Z výrazu (5.7) vidíme, že pár združených vlastných čísel pretína imaginárnu os pri raste γ v kritickej hodnote $\gamma = \gamma_c$ kladnou rýchlosťou. V prípade, že Liapunov exponent je kladný, a teda $L(\bar{k}, \theta) > 1$, ekvilibrium je typu nestabilná špirála pre parameter $\gamma > \gamma_c$ a typu stabilná špirála, pre $\gamma < \gamma_c$, pričom vzniká nestabilný limitný cyklus pre $\gamma < \gamma_c$. V tomto prípade ide o subkritický typ Andronovej–Hopfovej bifurkácie (pozri Obrázok 5.5).

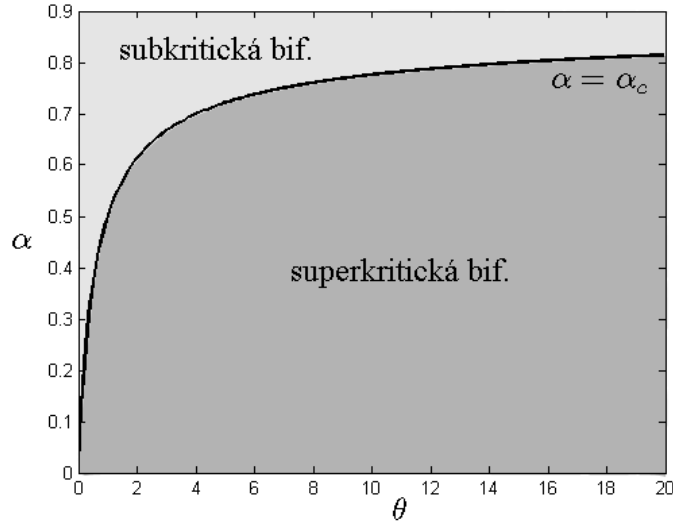
V prípade, že Liapunov exponent je záporný, a teda $L(\bar{k}, \theta) < 1$, ekvilibrium je typu stabilná špirála pre parameter $\gamma < \gamma_c$ a typu nestabilná špirála, pre $\gamma > \gamma_c$, pričom vzniká stabilný limitný cyklus pre $\gamma > \gamma_c$. V tomto prípade ide o superkritický typ Andronovovej–Hopfovej bifurkácie.

Uvažujme teraz, že dopyt po peniazoch v ekvilibriu je rovný jednej:

$$L(\bar{k}, \theta) = L_0 \bar{k}^\alpha (\theta + q_D)^{-\beta} = L_0 \bar{k}^\alpha (\theta + q_D)^{\alpha-1} = 1.$$



Obrázok 5.5: Subkritický prípad Andronovej-Hopfovej bifurkácie. Pre voľbu parametrov $\bar{k} = 1$, $\theta = 1.5$, $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.6$, $\varepsilon = 0.4$, $L_0 = 1.67$, $q_D = 0.5$. Pre špecifickú voľbu parametra γ dostávame: (a) nestabilná periodická orbita pre $\gamma = 3 < \gamma_c$. Modrá a zelená trajektória sa odvíja od nestabilnej orbity. (b) nestabilná špirála pre $\gamma_c = 3.33$, (c) nestabilná špirála pre $\gamma = 4 > \gamma_c$.



Obrázok 5.6: Graf závislosti kritickej hodnoty parametra α od parametra θ . Hodnoty parametrov $L_0 = 1$, $q_D = 1$, $\bar{k} = 2$ sú fixované.

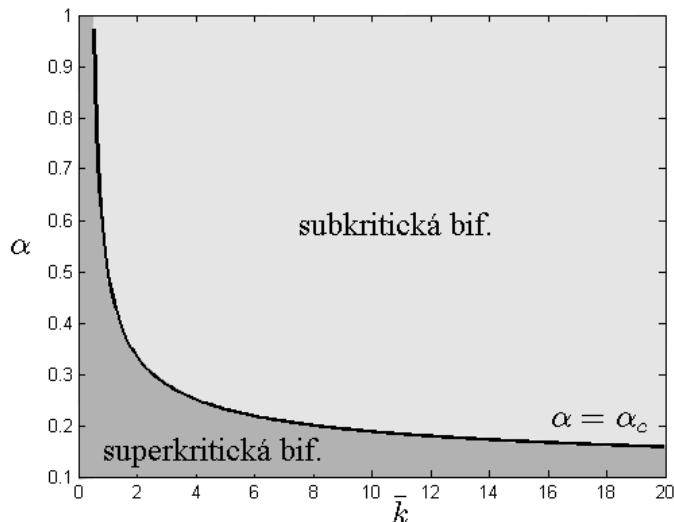
Pričom sme využili, že $\alpha + \beta = 1$. Z predošlej rovnice teraz môžeme vyjadriť parameter α ako funkciu závislú od ostatných parametrov L_0 , \bar{k} , θ , q_D nasledovne:

$$\alpha_c = \alpha_c(L_0, \bar{k}, \theta, q_D) = \frac{\ln(\theta + q_D) - \ln L_0}{\ln(\theta + q_D) + \ln \bar{k}}.$$

Takto vyjadrené kritické hodnoty parametra α_c nám definujú krivku, na ktorej je dopyt po peniazoch rovný jednej.

Na obrázku 5.6 je vyjadrená závislosť α_c od parametra θ , pričom zvyšné parametre L_0 , q_D , \bar{k} sú fixované. Krivka α_c je rastúca. Vyššie hodnoty α a nižšie hodnoty parametra θ vytvárajú v modeli pri vhodnej hodnote γ subkritický typ Andronovovej–Hopfovej bifurkácie, resp. vzniká nestabilný limitný cyklus. Naopak, menšie hodnoty α a väčšie hodnoty θ dávajú možnosť pre vznik stabilného limitného cykla v modeli.

Obrázok 5.7 vyjadruje závislosť α_c od parametra \bar{k} , pričom zvyšné parametre L_0 , q_D , θ sú fixované. Krivka α_c je klesajúca. Vyššie hodnoty \bar{k} spolu s vyššími hodnotami parametra α nám v modeli pri vhodnej voľbe γ vytvárajú nestabilný limitný cyklus. Naopak nižšie hodnoty kapitálu s menšou zmenou rýchlosti nárastu dopytu po peniazoch L pri náraste množstva kapitálu k (s nižšími hodnotami α) nám stabilizujú model a formuje sa stabilná limitná periodická orbita.



Obrázok 5.7: Graf závislosti kritickej hodnoty parametra α od parametra \bar{k} . Hodnoty parametrov $L_0 = 2$, $q_D = 1$, $\theta = 3$ sú fixované.

5.5 Perióda cyklického riešenia

Krátkodobý model nadobúda v Jordanovej kánonickej forme nasledujúci tvar (pozri rovnicu (5.11)):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\gamma_c \varepsilon L(\bar{k}, \theta)} \\ \sqrt{\gamma_c \varepsilon L(\bar{k}, \theta)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h(x, y) \\ k(x, y) \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Pri zanedbaní členov vyšších rádov možno vyjadriť rovnicu v linearizovanej forme nasledovne:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\gamma_c \varepsilon L(\bar{k}, \theta)} \\ \sqrt{\gamma_c \varepsilon L(\bar{k}, \theta)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

To nám umožňuje vyjadriť explicitné riešenia premenných $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \text{Re}[(a + ib)\mathbf{v}e^{\lambda t}(\cos(bt) + i\sin(bt))],$$

kde $\lambda = a + ib$ je vlastné číslo a \mathbf{v} vlastný vektor Jordanovej matice. V našom prípade $a = 0$, $b = \sqrt{\gamma_c \varepsilon L(\bar{k}, \theta)}$. Explicitná forma periodických riešení sa teda dá vyjadriť ako lineárna kombinácia $\cos(\beta t)$, $\sin(\beta t)$, pričom perióda T oscilácií má tvar:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma_c \varepsilon L(\bar{k}, \theta)}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\theta + q_D}{\beta} \varepsilon L_0 \bar{k}^\alpha (\theta + q_D)^{-\beta}}} = \frac{2\pi \sqrt{1 - \alpha}}{\sqrt{\varepsilon L_0 [\bar{k}(\theta + q_D)]^\alpha}}.$$

Perióda závisí nepriamoúmerne od rýchlosti prispôsobenia sa cenovej úrovni - parameter ε . Zväčšovanie ε - zvýšenie prispôsobivosti na cenovú úroveň znižuje dobu hospodárskeho cyklu. Podobný vplyv na dĺžku hospodárskeho cyklu má kapitál \bar{k} , miera peňažného

rozširovania θ a zmena rýchlosti nárastu dopytu po peniazoch L pri náraste množstva kapitálu k (parameter α). Zvýšenie \bar{k} , θ , α vedie k zrýchleniu oscilácií v ekonomike. Rýchlosť prispôbenia sa očakávaniám - parameter γ však nemá vplyv na veľkosť periódy T . Teda perióda T je nezávislá od toho, ako rýchlo sa vedia ľudia prispôbiť očakávaniu inflácie.

Kapitola 6

Analýza zovšeobecneného Tobinovho modelu: úplný (3D) prípad

V tejto kapitole budeme analyzovať model, ako bol definovaný v Kapitole 3. Elimináciou \hat{p} z rovníc (3.2) a (3.3) pomocou rovnice (3.4) máme:

$$\dot{k} = sf(k) - (1-s)(\theta - q)m - nk, \quad (6.1)$$

$$\dot{m} = m\{\theta - \varepsilon[m - L(\bar{k}, q)] - q - n\}, \quad (6.2)$$

$$\dot{q} = \gamma\varepsilon[m - L(\bar{k}, q)]. \quad (6.3)$$

6.1 Pevné body modelu

Pre pevný bod platí $\dot{k} = 0$, $\dot{m} = 0$, $\dot{q} = 0$, a teda z rovníc (6.2), (6.3) priamo vyplýva:

$$q^* = \theta - n,$$

$$m^* = L(k^*, q^*) = L(k^*, \theta - n).$$

V ekvilibriu sa očakávaná miera inflácie rovná aktuálnej miere inflácie (z rovnice (3.4)) a dosahuje hodnoty miery peňažného rozširovania zníženého o mieru rastu obyvateľstva. Kým v krátkodobom modeli sa očakávaná miera inflácie rovnala miere zmeny nominálneho množstva peňazí, v dlhodobom horizonte rast obyvateľstva potláča efekt inflácie spôsobenej rozširovaním peňazí. Objem peňazí per capita sa v ekvilibriu vyrovná s dopytom po peniazoch.

Ďalej z rovnice (6.1) má platiť:

$$sf(k^*) - (1-s)(\theta - q^*)m^* - nk^* = 0. \quad (6.4)$$

Pri uvažovaní konkrétnych funkcií $f(k)$, $L(k, q)$ dostávame algebraickú rovnicu s neznámy k :

$$sk^p - (1-s)nL_0k^\alpha(\theta - n + q_D)^{-\beta} - nk = 0.$$

Predelíme rovnicu kapitálom $k > 0$ a mierou úspor $s > 0$:

$$k^{\rho-1} = \frac{n}{s}(1-s)L_0(\theta - n + q_D)^{-\beta}k^{\alpha-1} + \frac{n}{s}.$$

Po transformácií $x = k^{\rho-1}$ môžeme predošlú rovnicu vyjadriť v tvare:

$$\underbrace{x}_{f_1(x)} = \underbrace{bx^a + c}_{f_2(x;a,b,c)}, \quad (6.5)$$

kde $a \equiv \frac{\alpha-1}{\rho-1} > 0$, $b \equiv \frac{n}{s}(1-s)L_0(\theta - n + q_D)^{-\beta} > 0$ a $c = \frac{n}{s} > 0$. A teda pri hľadaní pevného bodu k^* , resp. x^* môžu nastať nasledovné situácie:

1. Pre $a < 1$ ($\alpha > \rho$) dostávame jeden pevný bod x^* pre ľubovoľné b, c . Vo všeobecnosti ho možno nájsť iba numericky (pozri Obrázok 6.1).
2. Pre $a = 1$ ($\alpha = \rho$) sú dve možnosti (pozri Obrázok 6.2):

(a) Pre $b < 1$ máme jeden pevný bod:

$$x^* = \frac{c}{1-b},$$

vyjadrený v pôvodnej premennej a parametroch:

$$k^* = \left[\frac{\frac{n}{s}}{1 - \frac{n}{s}(1-s)L_0(\theta - n + q_D)^{-\beta}} \right]^{\frac{1}{\rho-1}} = \left[\frac{n(\theta - n + q_D)^\beta}{s + n(s-1)L_0} \right]^{\frac{1}{\rho-1}} \quad (6.6)$$

(b) $b \geq 1$ neexistuje pevný bod.

3. Pre $a > 1$ ($\alpha < \rho$) máme tri možnosti (pozri Obrázok 6.3):

(a) $c > c_k$, kedy priamka f_1 leží pod krivkou f_2 a neexistuje pevný bod.

(b) $c = c_k$, kedy sa priamka f_1 dotýka s krivkou f_2 v pevnom bode, pričom platí podmienka transverzality:

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{df_2}{dx} \Rightarrow 1 = abx^{a-1} \Rightarrow x^* = (ab)^{\frac{1}{1-a}}.$$

Kapitál v ekvilibriu má teda nasledovný tvar:

$$k^* = \left[\frac{(\alpha-1)n(1-s)L_0}{(\rho-1)s(\theta - n + q_D)^\beta} \right]^{\frac{1}{\rho-\alpha}}. \quad (6.7)$$

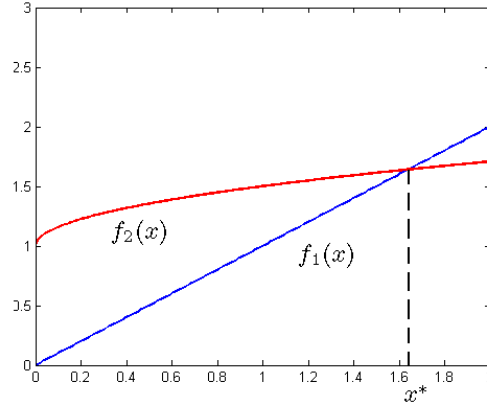
Kritickú hodnotu c_k pritom môžeme tiež explicitne vyjadriť:

$$c_k = x^* - bx^{*a} = (ab)^{\frac{1}{1-a}} - b(ab)^{\frac{a}{1-a}},$$

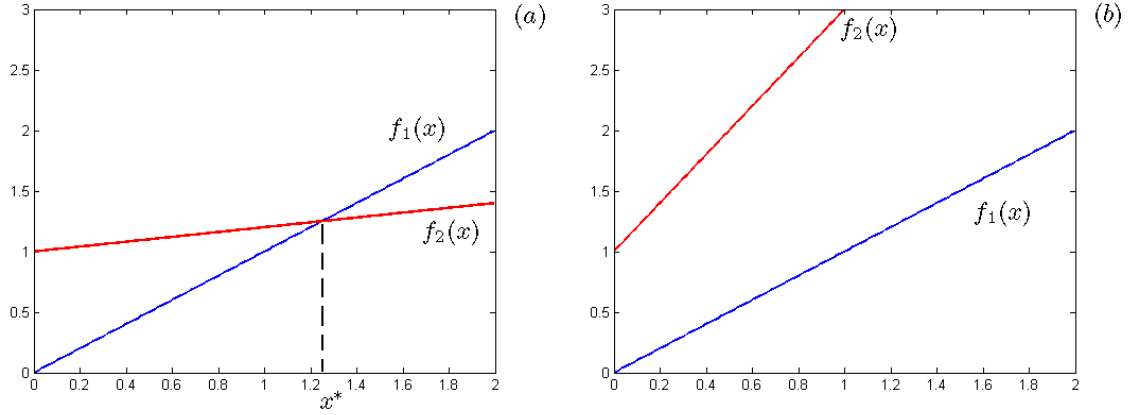
a teda v tomto prípade platí podmienka:

$$\frac{n}{s} = \left[\frac{(\alpha-1)n(1-s)L_0}{(\rho-1)s(\theta - n + q_D)^\beta} \right]^{\frac{\rho-1}{\rho-\alpha}} + \frac{n(1-s)L_0}{s(\theta - n + q_D)^\beta} \left[\frac{(\alpha-1)n(1-s)L_0}{(\rho-1)s(\theta - n + q_D)^\beta} \right]^{\frac{\alpha-1}{\rho-\alpha}}.$$

(c) $c < c_k$, priamka f_1 pretína krivku f_2 v dvoch pevných bodoch x_1^*, x_2^* , ktoré možno nájsť numericky.



Obrázok 6.1: Vzájomná pozícia grafov $f_1(x) = x$, $f_2(x) = bx^a + c$, pričom $a < 1$, b, c sú ľubovoľné.



Obrázok 6.2: Vzájomná pozícia grafov $f_1(x) = x$, $f_2(x) = bx^a + c$, pričom $a = 1$, c je ľubovoľné, (a) $b < 1$, (b) $b \geq 1$.

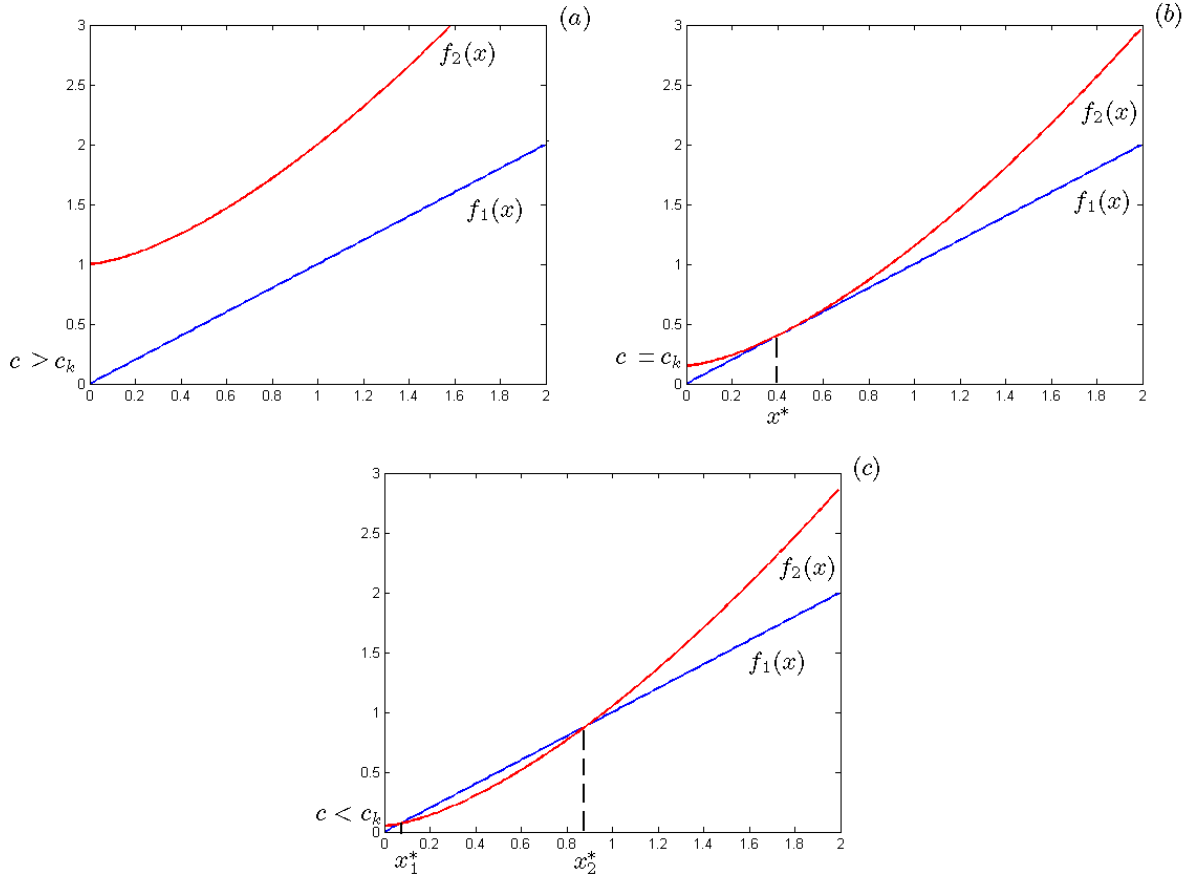
6.2 Linearizácia na okolí pevného bodu, stabilita pevného bodu

Jakobiho matica dynamického systému má nasledovný tvar:

$$\mathbf{A}(k, m, q) = \begin{pmatrix} sf_k(k) - n & -[1 - s][\theta - q] & [1 - s]m \\ \varepsilon mL_k(k, q) & \theta - 2\varepsilon m + \varepsilon L(k, q) - q - n & m[\varepsilon L_q(k, q) - 1] \\ -\gamma\varepsilon L_k(k, q) & \gamma\varepsilon & -\gamma\varepsilon L_q(k, q) \end{pmatrix}.$$

Kvôli prehľadnosti ďalej označíme $f^* \equiv f(k^*)$, $f_k^* \equiv f_k(k^*)$, $L^* \equiv L(k^*, \theta - n)$, $L_k^* \equiv L_k(k^*, \theta - n)$, $L_q^* \equiv L_q(k^*, \theta - n)$. Vyčíslením matice v pevnom bode $[k^*, m^*, q^*]$ dostávame:

$$\mathbf{A}(k, m, q) = \begin{pmatrix} sf_k^* - n & -[1 - s]n & [1 - s]L^* \\ \varepsilon L^* L_k^* & -\varepsilon L^* & L^*[\varepsilon L_q^* - 1] \\ -\gamma\varepsilon L_k^* & \gamma\varepsilon & -\gamma\varepsilon L_q^* \end{pmatrix}.$$



Obrázok 6.3: Vzájomná pozícia grafov $f_1(x) = x$, $f_2(x) = bx^a + c$, pričom $a > 1$, b je ľubovoľné, (a) $c > c_k$, (b) $c = c_k$, (c) $c < c_k$.

Vypočítame si nasledujúce charakteristiky:

$$\begin{aligned}
 c_1 = -\text{tr}\mathbf{A} &= -(sf_k^* - n - \varepsilon L^* - \gamma \varepsilon L_q^*) \\
 &= -\left(sf_k^* - s\frac{f^*}{k} + (1-s)n\frac{L^*}{k} - \varepsilon L^* - \gamma \varepsilon L_q^* \right) \\
 &= s\frac{f^*}{k}(1-\rho) - (1-s)n\frac{L^*}{k} + \varepsilon L^* - \gamma \varepsilon \frac{\beta L^*}{\theta - n + q_D},
 \end{aligned}$$

pričom sme využili, že $n = \frac{f^*}{k} - (1-s)n\frac{L^*}{k}$ (z rovnice 6.4).

$$\begin{aligned}
c_2 &= \begin{vmatrix} sf_k^* - n & -(1-s)n \\ \varepsilon L^* L_k^* & -\varepsilon L^* \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\varepsilon L^* & L^*(\varepsilon L_q^* - 1) \\ \gamma \varepsilon & -\gamma \varepsilon L_q^* \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} sf_k^* - n & (1-s)L^* \\ -\gamma \varepsilon L_k^* & -\gamma \varepsilon L_q^* \end{vmatrix} \\
&= -(sf_k^* - n)\varepsilon L^* + (1-s)n\varepsilon L^* L_k^* + \varepsilon L^* \gamma \varepsilon L_q^* - \gamma \varepsilon L^*(\varepsilon L_q^* - 1) - \\
&\quad - (sf_k^* - n)\gamma \varepsilon L_q^* + (1-s)L^* \gamma \varepsilon L_k^* \\
&= -(sf_k^* - n)(\varepsilon L^* + \gamma \varepsilon L_q^*) + (1-s)\varepsilon L^* L_k^*(n + \gamma) + \gamma \varepsilon L^* \\
&= -\left(sf_k^* - s\frac{f^*}{k} + (1-s)n\frac{L^*}{k}\right)(\varepsilon L^* + \gamma \varepsilon L_q^*) + \\
&\quad + (1-s)\varepsilon L^* L_k^*(n + \gamma) + \gamma \varepsilon L^* \\
&= s\frac{f^*}{k}(1 - \rho)(\varepsilon L^* + \gamma \varepsilon L_q^*) + (1-s)n\varepsilon \frac{L^*}{k} \left(\frac{n + \gamma}{n} L_k^* k - L^* - \gamma L_q^*\right) + \gamma \varepsilon L^* \\
&= s\frac{f^*}{k}(1 - \rho)\varepsilon L^* \left(1 - \frac{\beta\gamma}{\theta - n + q_D}\right) + (1-s)n\varepsilon \frac{L^{*2}}{k} \left(\frac{n + \gamma}{n}\alpha - 1 + \frac{\beta\gamma}{\theta - n + q_D}\right) + \gamma \varepsilon L^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3 = -\det(\mathbf{A}) &= -[(sf_k^* - n)\varepsilon L^* \gamma \varepsilon L_q^* + (1-s)nL^*(\varepsilon L_q^* - 1)\gamma \varepsilon L_k^* + (1-s)L^* \varepsilon L^* L_k^* \gamma \varepsilon - \\
&\quad - (1-s)L^* \varepsilon L^* \gamma \varepsilon L_k^* - (sf_k^* - n)L^*(\varepsilon L_q^* - 1)\gamma \varepsilon - (1-s)n\varepsilon L^* L_k^* \gamma \varepsilon L_q^*] \\
&= -(1-s)nL^*(\varepsilon L_q^* - 1)\gamma \varepsilon L_k^* + (1-s)n\varepsilon L^* L_k^* \gamma \varepsilon L_q^* - \\
&\quad - \left[sf_k^* - s\frac{f^*}{k} + (1-s)n\frac{L^*}{k}\right] L^* \gamma \varepsilon \\
&= s\left(\frac{f^*}{k} - f_k^*\right) L^* \gamma \varepsilon + (1-s)n\gamma \varepsilon \frac{L^*}{k} (L_k^* k - L^*) \\
&= s\frac{f^*}{k}(1 - \rho)L^* \gamma \varepsilon - (1-s)n\gamma \varepsilon \frac{L^{*2}}{k} (1 - \alpha).
\end{aligned}$$

Podľa Routhovho–Hurwitzovho kritéria nutnou a postačujúcou podmienkou pre lokálnu stabilitu linearizovaného systému je:

$$c_1 > 0, \quad c_3 > 0, \quad c_1 c_2 - c_3 > 0.$$

Teda, ekvilibrium $[k^*, m^*, q^*]$ je stabilné, práve vtedy, keď platia nasledovné podmienky:

$$s\frac{f^*}{k^*}(1 - \rho) - (1-s)n\frac{L^*}{k^*} + \varepsilon L^* - \gamma \varepsilon \frac{\beta L^*}{\theta - n + q_D} > 0, \quad (6.8)$$

$$sf^*(1 - \rho) - (1-s)nL^*(1 - \alpha) > 0, \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}
&\left[s\frac{f^*}{k^*}(1 - \rho) - (1-s)n\frac{L^*}{k^*} + \varepsilon L^* - \gamma \varepsilon \frac{\beta L^*}{\theta - n + q_D}\right] \cdot \\
&\cdot \left[sf^*(1 - \rho) \left(1 - \frac{\beta\gamma}{\theta - n + q_D}\right) + (1-s)nL^* \left(\frac{n + \gamma}{n}\alpha - 1 + \frac{\beta\gamma}{\theta - n + q_D}\right) + \gamma k^*\right] - \\
&\quad - [sf^*(1 - \rho)\gamma - (1-s)n\gamma L^*(1 - \alpha)] > 0.
\end{aligned} \quad (6.10)$$

Tieto výsledky možno porovnať s výsledkami práce Benhabib & Miyao (1981), kde autori uvažovali trojrozmerný Tobinov model pre relatívne širokú triedu funkcií f a L . Autori pritom uvádzajú nasledovnú nutnú a postačujúcu podmienku stability pevného bodu:

$$c_1 > 0, c_2 > 0, c_1 c_2 - c_3 > 0,$$

Poznamenanajme, že tieto podmienky nie sú v súlade s Routhovým–Hurwitzovým kritériom pre lokálnu stabilitu linearizovaného systému, a teda nesprávne.

Záver

V práci sme analyzovali zovšeobecnený Tobinov model pre konkrétnu triedu produkčných funkcií a konkrétnu triedu funkcií dopytu po peniazoch. Pre krátkodobý model sme našli izolované pevné body. Identifikovali sme podmienky, pri ktorých dochádza k primárnej bifurkácii linearizovaných riešení. Pomocou ďalších dvoch kritických parametrov γ_c^- , γ_c^+ môžeme klasifikovať, či je pevný bod typu stabilná/nestabilná špirála, alebo stabilný/nestabilný uzol. Ďalej sme ukázali, že pri kritickej hodnote $\gamma = \gamma_c$ pár komplexne združených vlastných čísel pretína imaginárnu os pri raste γ nenulovou rýchlosťou, a teda na malom okolí parametra γ_c ekvilibrium bifurkuje do limitného cyklu, resp. v dynamickom systéme dochádza ku Andronovovej–Hopfovej bifurkácii. Po transformácii krátkodobého modelu na kánonický tvar a výpočte prvého Liapunovho exponentu sa nám podarilo určiť typ Andronovovej–Hopfovej bifurkácie. Typ bifurkácie závisí od toho, či dopyt po peniazoch v ekvilíbriu $L(\bar{k}, \theta)$, resp. objem peňazí v ekvilíbriu m^* , je väčší alebo menší ako hodnota jedna. V prípade, že dopyt po peniazoch je menší, v modeli vzniká stabilný limitný cyklus (superkritický typ bifurkácie). Naopak, ak hodnota dopytu po peniazoch v ekvilíbriu je väčšia vzniká nestabilná limitná periodická orbita (subkritický typ bifurkácie). Ďalším výsledkom je asymptotická forma pre periódu oscilačných riešení. Pre úplný trojrozmerný model sme odvodili vzťahy medzi parametrami, pri ktorých v modeli existuje jeden alebo dva izolované pevné body, resp. žiaden pevný bod. Ďalej sme odvodili nutné a postačujúce podmienky pre stabilitu pevného bodu.

Literatúra

- [1] BENHABIB, J. AND MIYAO, T. 1981 Some New Results on the Dynamics of the Generalized Tobin Model. *International Economic Review* **22**, 589–596.
- [2] HADJIMICHALAKIS, M. AND OKUGUCHI, K. 1978 The Stability of a Generalized Tobin Model. *The Review of Economics Studies* **46**, 175–178.
- [3] HADJIMICHALAKIS, M. 1971a Money, Expectations, and Dynamics: an Alternative View. *International Economic Review* **12**, 381–402.
- [4] HADJIMICHALAKIS, M. 1971b Equilibrium and Disequilibrium Growth with Money. *Review of Economic Studies* **38**, 457–479.
- [5] JORDAN, D.W. AND SMITH, P. 2007 *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press.
- [6] MIKOVÍNYIOVÁ, K. 2010 *On the Existence of Business Cycles in Economy Models (Ph.D. Dissertation)*, University of Žilina.
- [7] TOBIN, J. 1965 Money and Economic Growth. *Econometrica* **33**, 671–684.
- [8] TU, P.N. 1994 *Dynamical Systems*, Springer-Verlag.
- [9] UDRISŤE, C. AND CIANCIO, A. 2004 Linearized geometric dynamics of Tobin-Benhabib-Miyao economic flow. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications* **9**, 115–120.
- [10] VERHULST, F. 1996 *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer.
- [11] ZHANG, W.B. 2005 *Differential Equations, Bifurcations, and Chaos in Economics*, Springer-Verlag.