UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ÚLOHY OPTIMÁLNEHO RIADENIA S OHRANIČENIAMI NA STAVOVÉ PREMENNÉ

Diplomová práca

2011 Bc.Mária Gyurianová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

Úlohy optimamálneho riadenia s ohraničeniami na stavové premenné

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika
Študijný program: Ekonomická a finančná matematika
Evidenčné číslo práce: 214ffa26-eb76-4fd9-9948-98655e7dce0e

Vedúci diplomovej práce: doc.RNDr.Margaréta Halická CSc.

Bratislava 2011 Bc. Mária Gyurianová

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Mária Gyurianová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Úlohy optimálneho riadenia s ohraničeniami na stavové premenné

Cieľ : Cieľom je popísať teóriu úloh optimálneho riadenia so zmiešanými ohraničeniami na stavové a riadiace premenné. Objasniť súvislosť dvoch možných formulácií nutných podmienok optimality. Použitie teórie ilustrovať na matemitcky korektnom riešení niekoľkých úloh podľa vlastného výberu s ekonomickou tématikou.

Vedúci : doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Dátum zadania: 28.01.2010

Dátum schválenia: 04.04.2011

....
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

....
študent vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracovala samostatne, iba s použitím uvedenej odbornej literatúry, konzultácií s vedúcou diplomovej práce a vedomostí získaných počas štúdia.

Bratislava 20. apríla 2011 ....

Mária Gyurianová

Poďakovanie

Ďakujem vedúcej mojej diplomovej práce, doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc., za jej odborné vedenie a cenné rady a za pomoc, trpezlivosť a čas, ktorý mi venovala pri vzniku tejto diplomovej práce. Tiež ďakujem svojim rodičom za ich trpezlivosť a podporu počas štúdia.

Abstrakt

Gyurianová, Mária: Úlohy optimamálneho riadenia s ohraničeniami na stavové premenné. [Diplomová práca]. Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúca diplomovej práce: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc. Bratislava: FMFI UK, 2011., 50s.

V diplomovej práci sa venujeme úlohám optimálneho riadenia so zmiešanými ohraničeniami na riadiace a stavové premenné. V stručnosti uvádzame teóriu optimálneho riadenia pre úlohy so zmiešanými ohraničeniami. Objasníme súvislosť medzi dvoma verziami podmienky maxima pre úlohu zo zmiešanými ohraničeniami. Použitie teórie ilustrujeme na troch úlohách z oblasti ekonómie. Sú to rastový model s existenčným minimom, lineárny Ramseyho model a dvojrozmerný rastový model.

Kľúčové slová: zmiešané ohraniečenia na riadiace a stavové premenné, Pontrjaginov princíp maxima

Abstract

Gyurianová, Mária: Problems of optimal control with mixed constraints. [Master thesis]. Comenius University, Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics; Department of Applied Mathematics and Statistics. Supervisor: doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc. Bratislava: FMFI UK, 2011., 50s.

Diploma thesis deals with optimal control problems with mixed constraints on control and state variables. Shortly, we introduce the optimal control theory for problems with mixed constraints. We explain connection between two versions of maximum principle for problems with mixed constraints. We illustrate the use of the theory on three problems with economic motivation. These are model of economic growth with subsistence, linear Ramsey model and two dimensional model of economic growth.

Key words: mixed constraints on control and state variables, Pontryagin's maximum principle

Obsah

Úvod

Optimálne riadenie je matematická disciplína s aplikáciami v rozličných oblastiach. Optimálnemu riadeniu predchádzal variačný počet, ktorý sa rozvíjal od 17.storočia. Za zakladateľov variačného počtu sú považovaný Euler a Lagrange. Prvou úlohou variačného počtu je problém brachistochróny, ktorý bol sformulovaný v roku 1696 J.Bernoullim. Cieľom bolo nájsť takú krivku spájajúcu dva body A a B v rovine, po ktorej sa pohyblivý bod M dostane z bodu A do bodu B len vplyvom gravitačnej sily, čo najrýchlejšie.

Optimálne riadenia sa začalo rozvíjať v polovici 20. storočia. Jeho vznik podnietila najmä automatizácia a vesmírne lety. Za počiatok modernej teórie optimálneho riadenia sa považuje vydanie knihy *The mathematical theory of optimal processes.* Jedným z jej autorov bol L.Pontrjagin. Toto dielo vyšlo v roku 1958 v ruštine a o štyri roky neskôr v angličtine. Jeho význam spočíva v tom, že tu bol dokázaný princíp maxima pre úlohy optimálneho riadenia. Ďaľším významným výsledkom v oblasti optimálneho riadenia z tohto obdobia je Bellmanova rovnica dynamického programovania, ktorá slúži na riešenie diskrétnych úloh optimálneho riadenia.

V súčasnosti sa optimálne riadenie využíva na riešenie úloh z rôznych oblastí vrátane ekonómie a financií. Jenou z mnohých aplikácií optimálneho riadenia v ekonómii je napríklad riešenie Ramseyho modelu ekonomického rastu. V tejto úlohe sa jedná o určenie optimálneho časové rozloženia spotreby s prihliadnutím na obmedzenosť ekonomických zdrojov. Tento model sformuloval v roku 1928 ako úlohu variačného počtu. Ako úloha optimálneho riadenia bol model sformulovaný až v 60. rokoch 20. storočia.

V tejto diplomovej práci sa budeme zaoberať úlohami optimálneho riadenia, ktoré obsahujú zmiešané ohraničenia na riadiace a stavové premenné. V prvej kapitole sa najprv oboznámime so základnými poznatkami s teórie optimálneho riadenia. Povieme si, ako vyzerá úloha optimálneho riadenia, aké sú to zmiešané ohraničenia na riadiace a stavové a tiež ako vyzerajú nutné a postačujúce podmienky pre úlohu optimálneho riadenia zo zmiešanými ohraničeniami na riadiace a stavové premenné. Uvedieme tu dve verzie podmienky maxima a pokúsime sa ukázať, že sú ekvivalentné.

Teóriu z prvej kapitoly využijeme v nasledujúcich kapitolách pri riešení konkrétnych úloh optimálneho riadenia so zmiešanými ohraničeniami. V druhej kapitole budeme riešiť úlohu, ktorá jednoduchý rastový model s hranicou existenčného minima. V tretej kapitole sa budeme venovať lineárnej verzii Ramseyho modelu, t.j. Ramseyho modelu, v ktorom produkčná funkcia a funkcia spotreby sú lineárne. V poslednej kapitole budeme riešiť dvojrozmernú úlohu. Bude to rastový model rozšírený o možnosť predaja a nákupu dlhopisov.

Kapitola 1

Zmiešané ohraničenia

V tejto kapitole sa oboznámime s teóriou optimálneho riadenia pre úlohy zo zmiešanými ohraničeniami na riadiace a stavové premenné. Túto teóriu preberieme z [1]. Oboznámime sa s tým, čo je úloha optimálneho riadenia so zmiešanými ohraničeniami na riadiace a stavové premenné a ako vyzerajú podmienky Pontrjaginovho princípu maxima pre takúto úlohu. Uvedieme tu dve verzie podmienky maxima pre takúto úlohu, tak ako sú uvedené v [1]. Prvá z nich je pre úlohy, ktoré obsahujú zmiešané ohraničenia bez ohľadu na to, či obsahujú aj čisté ohraničenia na riadiace premenné. Druhá je špeciálne pre úlohy, ktoré obsahujú aj čisté ohraničenia na riadiace premenné. Poznamenajme, že v [1] je konštatované, že z prvej podmienky sa dá druhá jednoducho vyvodiť, ale nie je to ukázané.

Najprv predstavíme typ problémov, ktoré môžu byť formulované ako úlohy optimálneho riadenia a povieme ako vyzerá úloha optimálneho riadenia. Majme systém, ktorý sa vyvíja v čase. V každom časovom okamihu t je tento systém v nejakom stave, ktorý može byť charakterizovaný n-ticou reálnych čísel

$$x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t), \tag{1.1}$$

ktoré nazývame stavové premenné. Stavové premenné možeme tiež zapísať vektorovo ako $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t))^T$, kde $x \in R^n$.

Ďalej predpokladajme, že procesy prebiehajúce v tomto systéme môžu byť do istej miery ovplyvnené tzv. riadiacimi premennými

$$u_1(t), u_2(t), \dots u_r(t). \tag{1.2}$$

Zapísané vektorovo $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots u_r(t))^T$, kde $u \in R^r$.

Procesy prebiehajúce v systéme sú dané diferenciálnymi rovnicami

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \tag{1.3}$$

kde $\dot{x}(t) = \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt}\right)$ a $f = (f_1, \dots, f_n)^T$. Od funkcie $f : R^n \times R^r \times R \to R^n$ požadujeme, aby bola spojitá a aby jej parciálne derivácie $\frac{\partial f}{\partial x}$ existovali a boli spojité.

Ďalej predpokladáme, že poznáme stav systému na začiatku v čase t_0. Vieme teda, že $x(t_0) = x^0$, kde x^0 je daný vektor z R^n. Voľbou konkrétnych hodnôt riadiacich premenných u v každom čase t, t.j. voľbou funkcie $u(t)$ a ich dosadením do (1.3) dostaneme systém n diferenciálnych rovníc s n neznámimi $x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)$ a s danou počiatočnou podmienkou. Riešením tohoto systému dostaneme vektorovú funkciu $x(t)$, ktorú nazývame odozva na riadenie $u(t)$.

Rozličné voľby riadenia $u(t)$ nám dajú rozličné odozvy $x(t)$. Nie každý vývoj systému je rovnako želateľný. Rozličný vývoj systému dáva rozličnú užitočnosť. Každému riadeniu $u(t)$ a jeho odozve $x(t)$ preto priradíme číslo

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt, \tag{1.4}$$

kde f_0 je daná funkcia, $f_0 : R^n \times R^r \times R \to R$. Od funkcie f_0 požadujeme, aby bola spojitá a aby jej parciálne derivácie $\frac{\partial f_0}{\partial x}$ existovali a boli spojité. Potom hľadáme také riadenie $u(t)$, pre ktoré je číslo J maximálne možné. Číslo t_1 nemusí byť vo všeobecnosti pevne dané, ale v tejto práci sa budeme zaoberať úlohami, kde t_1 je dané. Na hodnotu systému v čase t_1 môžu byť dané podmieky typu rovnosti

$$x(t_1) = x^1,\ x^1 \in R^n \text{ dané} \tag{1.5}$$

alebo podmienky typu nerovnosti

$$x(t_1) \geq x^1,\ x^1 \in R^n \text{ dané.} \tag{1.6}$$

Ak na $x(t_1)$ nie sú dané žiadne podmienky, hovoríme, že úloha má voľný koniec.

Úloha optimálneho riadenia môže ďalej obsahovať čisté ohraničenia na riadiace premenné, čisté ohraničenia na stavové premenné a zmiešané ohraničenia na riadiace a stavové premenné. V tejto práci sa budeme zaoberať úlohami, ktoré obsahujú zmiešané ohraničenia na riadiace a stavové premenné, t.j. ohraničenia typu

$$h_k(x(t), u(t), t) \geq 0, \text{ pre } k = 1, 2, \ldots, s, \tag{1.7}$$

kde $h = (h_1, \ldots, h_s)$ je spojitá funkcia (x, u, t) a $\frac{\partial h_k}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial h_k}{\partial u_j}$ existujú a sú spojité funkcie (x, u, t). Pripúšťame, že úloha môže obsahovať aj čisté ohraničenia na riadiace premenné, ale zahrnieme ich do ohraničení (1.7).

Uvažujme teda nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia

$$\max \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t), \tag{1.8}$$

kde t_0, t_1 sú dané. Stavová premenná $x(t)$ sa riadi nasledujúcou diferenciálnou rovnicou s počiatočnou podmienkou

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{1.9}$$

a koncové podmienky sú

$$x_i(t_1) = x_i^1 \quad \text{pre } i = 1, \ldots, l, \tag{1.10}$$

$$x_i(t_1) \geq x_i^1 \quad \text{pre } i = l+1, \ldots, m, \tag{1.11}$$

$$x_i(t_1) \quad \text{voľné} \quad \text{pre } i = m+1, \ldots, n, \tag{1.12}$$

kde x_i^1 sú dané. Ďalej máme zmiešané ohraničenia na riadiace a stavové premenné

$$h_k(x(t), u(t), t) \geq 0, \text{ pre } k = 1, 2, \ldots, s. \tag{1.13}$$

Funkcie f_0, f a h a ich derivácie spĺňajú už uvedené podmienky.

Funkciu $\hat{u}(t)$ nazývame optimálnym riadením a $\hat{x}(t)$ jeho odozvou, ak spĺňajú podmienky (1.8)-(1.13), ak $\hat{u}(t)$ je po častiach spojitá funkcia a ak $\hat{x}(t)$ je spojitá a po častiach spojito diferencovateľná. Naším cieľom je sformulovať nutné podmieky optimality v tvare Pontrjaginovho princípu maxima.

Definujme Hamiltonovu funkciu pre takúto úlohu nasledovne

$$H(\psi^0, \psi, x, u, t) = \psi^0 f_0(x(t), u(t), t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x(t), u(t), t), \tag{1.14}$$

a Lagrangeovu funkciu definujeme ako

$$
\begin{aligned}
L(\psi^0, \psi, x, u, t) &= \psi^0 f_0(x(t), u(t), t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(x(t), u(t), t) + \sum_{k=1}^{s} \mu_k h_k(x, u, t) = \\
&= H(\psi^0, \psi, x, u, t) + \sum_{k=1}^{s} \mu_k h_k(x, u, t).
\end{aligned}
\tag{1.15}
$$

Predtým ako si povieme ako vyzerajú Pontrjaginove podmienky maxima (PPM) pre takúto úlohu musíme definovať podmienky regularity. Tieto podmienky musí úloha obsahujúca zmiešané ohraničenia spĺňať, aby sme mohli použiť PPM.

Podmienka regularity (PR):

Definujeme najprv množiny I_t^- a I_t^+ v optimálnom riadení $\hat{u}(t)$ a jeho odozve $\hat{x}(t)$:

$$I_t^- = \{k : h_k(\hat{x}(t), \hat{u}(t^-), t) = 0, k = 1 \ldots, s\}, \tag{1.16}$$

$$I_t^+ = \{k : h_k(\hat{x}(t), \hat{u}(t^+), t) = 0, k = 1 \ldots, s\}. \tag{1.17}$$

Potom podmienky regularity majú nasledovný tvar:

Pre všetky $t \in [t_0, t_1]$ platí, že

- ak $I_t^- \neq \emptyset$, tak hodnosť matice $\{\partial h_k(\hat{x}(t), \hat{u}(t^-), t)/\partial u_i\}, k \in I_t^-, i = 1, \ldots r$ je rovná počtu prvkov množiny I_t^-,
- ak $I_t^+ \neq \emptyset$, tak hodnosť matice $\{\partial h_k(\hat{x}(t), \hat{u}(t^+), t)/\partial u_i\}, k \in I_t^+, i = 1, \ldots r$ je rovná počtu prvkov množiny I_t^+.

Úloha (1.8)-(1.13) je neautonómna úloha s pevným časom a zo zmiešanými ohraničeniami na riadiace a stavové premenné. Pre takúto úlohu je v [1] uvedená nasledujúca veta, ktorá uvádza podmienky Pontrjaginovho princípu maxima.

Veta 1. *Nech $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ je optimálne riešenie úlohy (1.8)-(1.13). Predpokladajme, že podmienky regularity (PR) sú splnené. Potom existuje konštanta ψ^0, vektor funkcií $\psi(t) = (\psi^1(t), \psi^2(t), \ldots, \psi^n(t))^T$ a vektor multiplikátorov $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_s(t))^T$, kde $\psi(t)$ sú spojité a po častiach spojito diferencovateľné a $\mu(t)$ je po častiach spojitá a pre všetky $t \in [t_0, t_1]$ platia nasledujúce podmienky:*

$$(\psi^0, \psi^1(t), \psi^2(t), \ldots, \psi^n(t)) \neq (0, 0, \ldots, 0), \tag{1.18}$$

$$\psi^0 = 0 \text{ alebo } \psi^0 = 1, \tag{1.19}$$

podmienka maxima

$$\begin{aligned} &H(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), t) \geq H(\hat{x}(t), u(t), \psi(t), t) \\ &\text{pre všetky } h_k(\hat{x}(t), u, t) > 0 \text{ pre } k = 1, \dots, s, \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial u_j} = 0 \text{ pre } j = 1, \dots, r, \tag{1.21}$$

kde $\frac{\partial \hat{L}}{\partial u_j}$ *je* $\frac{\partial L}{\partial u_j}$ *v bode* $(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \mu(t), t)$ *(L definované v (1.15)),*

adjungovaná rovnica

$$\dot{\psi}^i(t) = \frac{\partial \hat{L}}{\partial x_i} \text{ pre } i = 1, \dots, n, \tag{1.22}$$

kde $\partial \hat{L}/\partial x_j$ *je* $\partial L/\partial x_j$ *v bode* $(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \mu(t), t)$*,*

podmienka tranzverzality

$$\begin{array}{lll} \psi^i(t_1) & \text{voľné} & \text{pre } i = 1, \dots, l, \\ \psi^i(t_1) & \geq 0 \;\; \psi^i(t_1)(\hat{x}_i(t_1) - x_i^1) = 0 & \text{pre } i = l+1, \dots, m, \\ \psi^i(t_1) & = 0 & \text{pre } i = m+1, \dots, n, \end{array} \tag{1.23}$$

podmienka pre multiplikátor μ

$$\mu^k(t) \geq 0 \;\; \mu^k(t) h_k(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) = 0 \text{ pre } k = 1, \dots, s. \tag{1.24}$$

Pretože úloha (1.8)-(1.13) je neautonómna úloha s pevným časom neexistuje pre ňu podmienka stacionarity. Keby sme mali úlohu autonómnu alebo úlohu s pevným časom k podmiekam uvedeným vo Vete 1. by sa pridala ešte podmieka stacionarity, ktorá by mala jeden z nasledovných tvarov:

1. neautonómna úloha s voľným časom
   $L(\psi^0, \psi(T), \hat{x}(T), \hat{u}(T), T) = 0$

2. autonómna úloha s pevným časom
   $L(\psi^0, \psi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t), t) = c$, pre všetky $t \in [0, T]$, c je konštanta

3. autonómna úloha s voľným časom
   $L(\psi^0, \psi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t), t) = 0$, pre všetky $t \in [0, T]$

Veta [1] môže byť použitá aj pri riešení úloh, ktoré okrem zmiešaných ohraničení na riadiace a stavové premenné obsahujú aj čisté ohraničenia na riadiace premenné. Tieto ohraničenia ale musia byť zahrnuté do ohraničení (1.13). V [1] je preto okrem Vety 1. uvedená aj nasledujúca veta, pre úlohy obsahujúce okrem zmiešaných ohraničení aj čisté ohraničenia na riadiace premenné typu

$$\tilde{h}_i(u,t) \geq 0, \text{ pre } i = s+1,\ldots,\hat{s}. \tag{1.25}$$

Veta 2. *Uvažujme úlohu (1.8)-(1.13), (1.25). Veta 1 zostáva platiť ak v rovnici (1.20) zameníme $k = 1,\ldots,s$ za $k = 1,\ldots,\hat{s}$ a rovnicu (1.21) nahradíme podmienkou*

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \hat{L}}{\partial u_j}(u_j - \hat{u}_j(t)) \leq 0 \textit{ pre všetky } u = (u_1, u_2, \ldots, u_r)^T \in \hat{U}(t), \tag{1.26}$$

kde

$$\hat{U}(t) = \{u : \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \hat{\tilde{h}}_k}{\partial u_j}(u_j - \hat{u}_j) \geq 0 \,\forall\, k > s, \tilde{h}_k(\hat{u}(t),t) = 0\}. \tag{1.27}$$

($\frac{\partial \hat{L}}{\partial u_j}$ je $\frac{\partial L}{\partial u_j}$ v bode $(\hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t), \mu(t), t)$ a $\frac{\partial \hat{\tilde{h}}_k}{\partial u_j}$ je $\frac{\partial \tilde{h}_k}{\partial u_j}$ v bode $(\hat{u}, t)$)

V [1] je uvedené, že z Vety 1. sa dá Veta 2. jednoducho vyvodiť. Toto odvodenie v [1] nie je uvedené a preto sa to teraz pokúsime ukázať. Budeme pri tom potrebovať Farkašovu lemu, ktorú tu teraz bez dôkazu uvedieme.

Lema 1. *(Farkašova lema)*
Nech $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$. Potom $\exists\, x \geq 0$: $Ax = b \Leftrightarrow \forall\, y$: $A^T y \geq 0 \Rightarrow b^T y \geq 0$.

Chceme ukázať, že ak platí Veta 1. pre úlohu so zmiešanými ohraničeniami na stavové a riadiace premenné a aj s čistými ohraničeniami na riadiace premenné, tak potom platí aj Veta 2.. Konkrétne potrebujeme ukázať, že ak platí podmieka (1.21) z Vety 1., tak platí aj (1.26) z Vety 2.. Majme teda úlohu optimálneho riadenia, ktorá obsahuje okrem zmiešaných ohraničení na stavové a riadiace premenné aj čisté ohraničenia na riadiace premenné. To je úloha (1.8)-(1.13), (1.25). Pre väčšiu prehľadnosť označme

$$\tilde{h}_i(u,t) = g_i(u,t) \text{ pre } i = s+1,\ldots,\hat{s}. \tag{1.28}$$

Lagrangeova funkcia pre túto úlohu vyzerá nasledovne

$$\tilde{L} = \psi^0 f_0(x(t), u(t), t) + \sum_{i=1}^{n} \psi^i f_i(x(t), u(t), t) + \sum_{i=1}^{s} \mu^i h_i(x(t), u(t), t) + \sum_{i=s+1}^{\hat{s}} \nu^i g_i(u(t), t), \tag{1.29}$$

kde μ_i sú multiplikátory pre zmiešané ohraničenia a ν_i sú multiplikátory pre ohraničenia na riadiace premenné a podľa podmienky (1.24) platí $\mu_i \geq 0$ a $\nu_i \geq 0$. Túto Lagrangeovu funkciu môžeme prepísať ako

$$\tilde{L} = L + \sum_{i=s+1}^{\hat{s}} \nu^i g_i(u(t), t) \quad \nu_i \geq 0, \tag{1.30}$$

kde L je Lagrangeova funkcia pre úlohu iba zo zmiešanými ohraničeniami. Zapísané vektorovo

$$\tilde{L} = L + \nu^T g \quad \nu \geq 0. \tag{1.31}$$

Podmienka (1.21) podľa vety (1) má tvar:

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial u} = \frac{\partial L}{\partial u} + \nu^T \frac{\partial g}{\partial u} = 0. \tag{1.32}$$

Pre ohraničenia $g_i(u(t), t)$, ktoré nie sú aktívne, t.j. $g_i(u(t), t) > 0$ platí, že $\nu_i = 0$. Preto stačí ak budeme uvažovať aktívne ohraničenia, t.j. také kde $g_i(u(t), t) = 0$. Keď označíme $\tilde{g}$ vektor aktívnych ohraničení a $\tilde{\nu}$ vektor k nim prislúchajúcich multiplikátorov potom rovnosť (1.32) môžeme prepísať nasledovne

$$\frac{\partial L}{\partial u} + \tilde{\nu}^T \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u} = 0 \quad \tilde{\nu} \geq 0 \tag{1.33}$$

respektíve

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial u}^T \tilde{\nu} = -(\frac{\partial L}{\partial u})^T \quad \tilde{\nu} \geq 0. \tag{1.34}$$

Ak označíme $\frac{\partial \tilde{g}}{\partial u}^T = A$ a $-(\frac{\partial L}{\partial u})^T = b$ a na rovnosť (1.34) aplikujeme Farkašovu lemu dostaneme, že platí

$$\forall\, y: \quad \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u}^T y \geq 0 \Rightarrow -(\frac{\partial L}{\partial u}) y \geq 0, \tag{1.35}$$

čo je to isté ako, keď napíšeme, že

$$\frac{\partial L}{\partial u} y \leq 0 \text{ pre všetky } y \text{ také, že } \frac{\partial \tilde{g}}{\partial u} y \geq 0. \tag{1.36}$$

Zoberme u z množiny $\hat{U}(t)$, ktorá je definovaná ako (1.27). Chceme ukázať, že pre takéto u platí nerovnosť

$$\frac{\partial L}{\partial u}(u - \hat{u}) \leq 0. \tag{1.37}$$

Keďže $u \in \hat{U}(t)$, tak z definície $\hat{U}(t)$ platí

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial u}(u - \hat{u}) \geq 0. \tag{1.38}$$

Pretože v $\tilde{g}$ sú len také ohraničenia g_i, ktoré sú aktívne, t.j. $g_i(\hat{u}, t) = 0$, tak podľa (1.36), je teda $\frac{\partial L}{\partial u}(u - \hat{u}) \leq 0$. Ukázali sme, že z Vety 1. možno vyvodiť Vetu 2.. Keďže Farkašova lema je ekvivalencia, tak je zrejmé, že z Vety 2. vyplýva Veta 1..

Veta 1. a Veta 2. hovoria o nutných podmienkach optimality. Ak pri riešení úlohy optimálneho riadenia nájdeme riadenie $u(t)$ a jeho odozvu $x(t)$, ktoré spĺňajú podmienky uvedné v týchto vetách neznamená to, že sme našli optimálne riadenie, ale len že sme našli kandidáta na optimálne riadenie. Aby tento kanditát na optimálne riadenie aj skutočne bol optimálnym riadením musí spĺňať aj postačujúce podmienky. V [1] sú uvedené dva typy postačujúcich podmienok. Tu uvedieme jedny z nich, tzv. podmienky Mangasarianovho typu, ktoré budeme využívať v ďaľších kapitolách tejto práce. Ich znenie je nasledovné:

Veta 3. *Nech dvojica $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ je prípustné riešenie (1.8)-(1.13). Predpokladajme, že táto dvojica spolu so spojitou a po častiach spojito diferencovateľnou funkciou $\psi(t)$ a po častiach spojitou funkciou $\mu(t)$, spĺňajú podmienky (1.20)-(1.24) a $\psi^0 = 1$. Navyše predpokladajme, že pre všetky $t \in [t_0, t_1]$ platí, že*

$$H(x(t), u(t), \psi(t), t) \text{ je konkávna v } (x, u) \tag{1.39}$$

a

$$h_k(x, u, t), k = 1, \ldots, s \text{ sú kvázikonkávne funkcie v } (x, u). \tag{1.40}$$

Potom $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ je optimálne riešenie úlohy (1.8)-(1.13). Ak $H(x(t), u(t), \psi(t), t)$ je rýdzokonkávna v (x, u), potom dvojica $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$ je jediné optimálne riešenie.

Teoretické poznatky uvedené v tejto kapitole využijeme v nasledujúcich kapitolách pri riešení konkrétnych príkladov.

Kapitola 2

Model rastu s existenčným minimom

V tejto kapitole budeme riešiť úlohu optimálneho riadenia, ktorá predstavuje rastový model s existenčným minimom. Formulácia tejto úlohy bola prebratá z [1]. V [1] bola úloha uvedená medzi úlohami na precvičenie a nebola tam riešená.

Uvažujme teda nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia so zmiešaným ohraničením na stavové a riadiace premmenné:

$$\max_u \int_0^T u(t)dt, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) - u(t), & (2.2)\\ x(0) &= x_0, & (2.3)\\ x(T) &\geq x_T, & (2.4)\\ u(t) &\geq c, & (2.5)\\ u(t) &\leq ax(t), & (2.6) \end{aligned}$$

kde a, c, x_0, x_T a T sú dané kladné konštanty a požadujeme od nich splnenie nasledovných obmedzení:

$$T > \frac{1}{a}, \tag{2.7}$$

$$ax_0 > c, \tag{2.8}$$

$$x_0 \leq x_T < (x_0 - \frac{c}{a})e^{aT} + \frac{c}{a}. \tag{2.9}$$

Táto úloha predstavuje jednoduchý rastový model. Stavová premenná $x(t)$ je množstvo kapitálu v čase t, riadiaca premenná $u(t)$ je spotreba v čase t. Hodnota spotreby $u(t)$ je zdola ohraničená konštantou c, ktorá predstavuje hodnotu existenčného minima, a zhora ohraničená produkciou $ax(t)$. Cieľom je maximalizovať hodnotu spotreby na pevnom časovom intervale $[0, T]$. Hodnota kapitálu v čase 0 je x_0 a v čase T musí byť jeho hodnota väčšia ako x_T. V prípade, že $u(t)$ by bolo stále minimálne možné, t.j. rovné c pre všetky $t \in [0, T]$ hodnota $x(T)$ by bola $(x_0 - \frac{c}{a})e^{aT} + \frac{c}{a}$. Ak by $u(t)$ bolo stále maximálne možné, t.j. rovné $ax(t)$ pre všetky $t \in [0, T]$, tak $x(T)$ by bolo rovné x_0. Hodnotu x_T máme preto obmedzenú podmienkou (2.9). Podmienka (2.8) hovorí, že v čase $t = 0$ je hodnota produkcie vyššia ako hodnota existenčného minima.

Úloha je jednorozmerná, autonómna, s pevným časom a s ohraničením typu nerovnosti na koncový stav (2.4). Obsahuje jedno čisté ohraničenie na riadiacu premennú (2.5) a jedno zmiešané ohraničenie na riadiacu a stavovú premennú (2.6).

Najprv ukážeme, že pre túto úlohu sú splnené podmienky regularity. Ohraničenia (2.5), (2.6) prepíšme do tvaru

$$h_1(u) = u - c \geq 0, \tag{2.10}$$

$$h_2(u, x) = ax(t) - u \geq 0. \tag{2.11}$$

Podmienky regularity budú splnené ak derivácie $\frac{\partial h_1}{\partial u}$ a $\frac{\partial h_2}{\partial u}$ budú pre aktívne ohraničenia lineárne nezávislé. Ak je aktívne iba jedno z ohraničení (2.5), (2.6), je to v poriadku. Problém nastáva, ak by obe ohraničenia boli aktívne súčasne, t.j. ak by v nejakom čase $t' \in [0, T]$ platilo $ax(t') = c$. V takom prípade by podmienky regularity neboli splnené. Musíme preto ukázať, že $ax(t) > c$ pre všetky $t \in [0, T]$. V podmienke (2.8) na dáta úlohy máme uvedené, že $ax_0 > c$. Vieme teda, že pre $t = 0$ ohraničenia nie sú aktívne súčasne. Teraz musíme ukázať, že nebudú súčasne aktívne ani pre $t > 0$. Na to nám stačí ukázať, že $x(t) \geq x_0$ pre všetky $t > 0$. Zo vzťahov (2.10) a (2.11) vieme, že

$$0 \leq ax(t) - u \leq ax(t) - c. \tag{2.12}$$

Na základe toho pre prípustné riešenia $x(t)$ platí, že

$$x_0 \leq x(t) \leq \left(x_0 - \frac{c}{a}\right) e^{at} + \frac{c}{a}. \tag{2.13}$$

Ukázali sme, že $x_0 \le x(t)$ (ľavá strana poslednej nerovnosti). Z toho vyplýva, že $c < ax(t)$ pre všetky $t \in [0,T]$. Dokázali sme, že ohraničnia (2.5) a (2.6) nemôžu byť aktívne súčasne. Podmienka regularity je splnená. Zároveň pravá strana (2.13) ukazuje interpretáciu podmienky (2.9) na dáta úlohy.

Úlohu budeme riešiť pomocou podmienok Pontrjaginovho princípu maxima (PPM), tak ako sú uvedené vo Vete 1. Hamiltonova funkcia pre túto úlohu má tvar

$$H(\psi^0, \psi(t), x(t), u(t)) = \psi^0 u(t) + \psi(t)(ax(t) - u(t)) \tag{2.14}$$

a Lagrangeova funkcia má tvar

$$\begin{aligned} L(\psi^0, \psi(t), x(t), u(t), \mu_1(t), \mu_2(t)) =& H(\psi^0, \psi(t), x(t), u(t)) + \\ &+ \mu_1(t)(u(t) - c) + \mu_2(t)(ax(t) - u(t)). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Formulácia podmienok PPM:

podmienka maxima (PM)

$$\max_{u \in (c, a\hat{x})} H(\psi^0, \psi(t), \hat{x}(t), u(t)) = H(\psi^0, \psi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial u} = \psi^0 - \psi(t) + \mu_1(t) - \mu_2(t) = 0, \tag{2.17}$$

adjungovaná rovnica (AR)

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \hat{L}}{\partial x} = -a(\psi(t) + \mu_2(t)), \tag{2.18}$$

podmienka tranzverzality (PT)

$$\psi(T) \ge 0, \qquad \psi(T)(\hat{x}(T) - x_T) = 0, \tag{2.19}$$

podmienky pre multiplikátory $\mu_1(t)$ a $\mu_2(t)$

$$\mu_1(t) \ \ge\ 0, \qquad \mu_1(t)(\hat{u}(t) - c) = 0, \tag{2.20}$$

$$\mu_2(t) \ \ge\ 0, \qquad \mu_2(t)(a\hat{x}(t) - \hat{u}(t)) = 0. \tag{2.21}$$

Najprv nájdeme riadenie u, ktoré je riešením podmienky maxima (2.16). Pre riadiacu premennú u môžu nastať tri možnosti. Buď nadobúda hodnotu c alebo hodnotu $a\hat{x}$ alebo môže byť z intervalu $(c, a\hat{x})$. Možnosť, že by boli obidve ohraničenia aktívne súčasne sme už vylúčili. Ak $u \in (c, a\hat{x})$ potom podľa vzťahov (2.20) a (2.21) platí, že $\mu_1 = 0$ a $\mu_2 = 0$. Z rovnice (2.17) potom vyplýva $\psi^0 - \psi = 0$. Ak $u = c$ potom podľa vzťahu (2.21) platí, že $\mu_2 = 0$. Z rovnice (2.17) potom vyplýva $\psi^0 - \psi + \mu_1 = 0$, t.j. $\psi^0 - \psi = -\mu_1 \leq 0$. Ak $u = a\hat{x}$ potom podľa vzťahu (2.20) platí, že $\mu_1 = 0$. Z rovnice (2.17) potom vyplýva $\psi^0 - \psi - \mu_2 = 0$, t.j. $\psi^0 - \psi = \mu_2 \geq 0$. Pre riadiacu premennú u dostávame nasledujúci vzťah:

$$\hat{u}(t) \begin{cases} = c, & \text{pre } \psi^0 - \psi(t) \leq 0, \\ \in (c, a\hat{x}(t)), & \text{pre } \psi^0 - \psi(t) = 0, \\ = a\hat{x}(t), & \text{pre } \psi^0 - \psi(t) \geq 0. \end{cases} \tag{2.22}$$

Konštanta ψ^0 môže nadobúdať buď hodnotu 0 alebo hodnotu 1. Najprv sa budeme zaoberať prípadom $\psi^0 = 0$. Ak $\psi^0 = 0$ potom ψ musí byť rôzne od 0, pretože ak $\psi = 0$ je to spor s $(\psi^0, \psi) \neq (0, 0)$. Z $\psi \neq 0$ vyplýva, že ψ nemôže zmeniť znamienko, a teda $\hat{u} = c$ pre všetky $t \in [0, T]$ alebo $\hat{u} = a\hat{x}$ pre všetky $t \in [0, T]$. Ak $\hat{u} = c$ potom $x(T) = (x_0 - \frac{c}{a})e^{aT} + \frac{c}{a} > x_T$ z čoho podľa (2.19) vyplýva $\psi(T) = 0$. Potom by platilo $(\psi^0, \psi(T)) = (0, 0)$, čo je spor s tým, že $(\psi^0, \psi(t))$ musí byť rôzne od nuly pre všetky $t \in [0, T]$. Druhá možnosť je, že $\hat{u} = a\hat{x}$ a $\psi(t) < 0$. V tomto prípade $-\psi = \mu_2$ a adjungovaná rovnica má teda tvar $\dot{\psi} = 0$. Keďže $\psi(t) < 0$, tak $\psi(t)$ je rovná zápornej konštante a preto nemôže byť splnená podmienka $\psi(T) \geq 0$ z (2.19). Pre $\psi^0 = 0$ teda nie je prípustné žiadne riadenie.

Ak $\psi^0 = 1$ pre u dostávame nasledovný vzťah

$$\hat{u}(t) \begin{cases} = c, & \text{pre } \psi(t) \geq 1, \\ \in (c, a\hat{x}(t)), & \text{pre } \psi(t) = 1, \\ = a\hat{x}(t), & \text{pre } \psi(t) \leq 1. \end{cases} \tag{2.23}$$

Musíme ešte určiť hodnotu u pre $\psi = 1$. Nech $\psi(t) = 1$ pre všetky $t \in I = [t_1, t_2]$. Z toho vyplýva, že $\dot{\psi}(t) = 0 = -a(\psi + \mu_2) = -a(1 + \mu_2)$. Potom platí $\mu_2(t) = -1$ pre všetky $t \in I$ a to je spor s tým, že $\mu_2(t) \geq 0$. Z toho vyplýva, že u môže nadobúdať len hodnoty

$$\hat{u}(t) \begin{cases} = c, & \text{ak } \psi(t) > 1, \\ = a, \hat{x}(t) & \text{ak } \psi(t) < 1. \end{cases} \tag{2.24}$$

Riadiaca premenná $\hat{u}$ môže nadobúdať iba dve hodnoty c alebo $a\hat{x}(t)$. Potrebujeme ešte určiť koľko prepnutí riadenie má a aké je poradie úsekov s danými hodnotami. Zistíme to analyzovaním priebehu adjungovanej premennej. Využijeme tiež, že v bode prepnutia musí platiť $\psi = 1$.

V prípade, že $\hat{u} = c$ a $\psi > 1$ má adjungovaná rovnica tvar

$$\dot{\psi} = -a\psi \tag{2.25}$$

a jej riešenie je

$$\psi(t) = e^{-at}K, \tag{2.26}$$

kde K je kladná konštanta. Adjungovaná premenná $\psi(t)$ klesá a $\psi(t) > 1$ z čoho vyplýva, že môže klesnúť do hodnoty $\psi = 1$.

V prípade, že $\hat{u} = a\hat{x}(t)$ a $\psi < 1$ má adjungovaná rovnica tvar

$$\dot{\psi} = -a(\psi + 1 - \psi) = -a \tag{2.27}$$

a jej riešenie je

$$\psi(t) = -at + K, \tag{2.28}$$

kde $K \leq 1$. Adjungovaná premenná $\psi(t)$ stále klesá a $\psi(t) < 1$, preto ψ môže byť rovné 1 iba na začiatku úseku a potom už nikdy nemôže dosiahnuť hodnotu 1 a teda nemôže dôjsť k prepnutiu.

Môžu teda teoreticky nastať tri možnosti:

1. $\hat{u} = a\hat{x}(t)$ pre všetky $t \in [0, T]$,

2. $\hat{u} = c$ pre všetky $t \in [0, T]$,

3. $\hat{u} = c$ pre $t \in [0, t_1]$ a $\hat{u} = a\hat{x}(t)$ pre $t \in (t_1, T]$.

Ak $\hat{u} = a\hat{x}(t)$ pre všetky $t \in [0, T]$ tak stavová rovnica má tvar $\dot{x} = ax - u = ax - ax = 0$. Odozva na riadenie je $x(t) = x_0$. Potom aj $x(T) = x_0$. Podľa podmienky (2.4) $x(T) \geq x_T$ a podľa podmienky (2.9) $x_0 \leq x_T$. Z toho vyplýva, že $\hat{u} = a\hat{x}(t)$ pre všetky $t \in [0, T]$ môže nastať iba v prípade, že $x_0 = x_T$. Naviac musí byť splnená podmienka $\psi(T) \geq 0$, t.j. $\psi(T) = -aT + K \geq 0$. Úpravou tejto podmienky dostaneme

$T \leq \frac{1}{a}$ čo je spor s podmienkou (2.7), ktorá hovorí, že $T > \frac{1}{a}$. Ukázali sme teda, že $\hat{u}$ nemôže byť rovné $a\hat{x}(t)$ pre všetky $t \in [0, T]$.

Ak $\hat{u} = c$ pre všetky $t \in [0, T]$ a $\psi(t) > 1$, potom $x(T) = \left(x_0 - \frac{c}{a}\right) e^{aT} + \frac{c}{a} > x_T$ a teda podľa (2.19) platí $\psi(T) = 0$. To je ale spor s tým, že $\psi(t) > 1$ pre všetky $t \in [0, T]$.

Tretia možnosť je, že existuje bod prepnutia $t_1 \in (0, T)$, taký že

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} c, & t \in [0, t_1], \\ a\hat{x}(t), & t \in (t_1, T]. \end{cases} \tag{2.29}$$

Adjungovaná premenná sa potom riadi predpisom

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi(0)e^{-at}, & t \in [0, t_1], \\ -at + K, & t \in [t_1, T], \end{cases} \tag{2.30}$$

kde $\psi(0) > 1$. Podľa predpokladov adjungovaná premenná musí byť spojitá a v bode prepnutia musí platiť $\psi(t_1) = 1$. Musia teda platiť nasledujúce rovnosti

$$\psi(0)e^{-at_1} = 1, \tag{2.31}$$

$$-at_1 + K = 1. \tag{2.32}$$

Z týchto rovníc dostávame, že $\psi(0) = e^{at_1}$ a $K = 1 + at_1$. Dosadením do vzťahu (2.30) dostávame, že adjungovaná premenná má nasledovný tvar

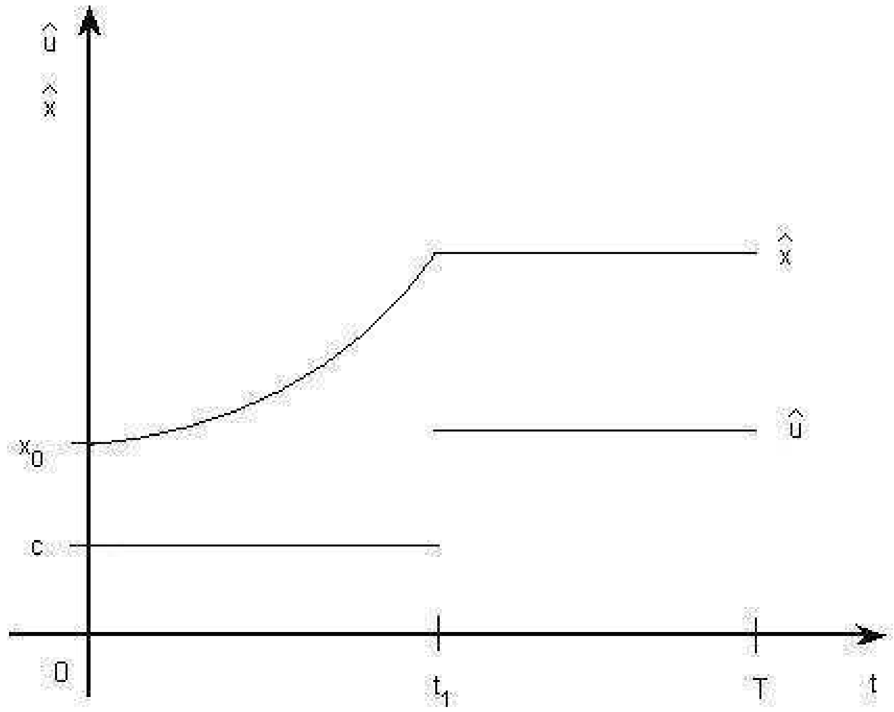
$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-a(t-t_1)}, & t \in [0, t_1], \\ -a(t - t_1) + 1, & t \in [t_1, T]. \end{cases} \tag{2.33}$$

Podľa (2.19) musí platiť $\psi(T) \geq 0$, t.j. $-a(T - t_1) + 1 \geq 0$. Po úprave dostaneme pre t_1 podmienku

$$t_1 \geq T - \frac{1}{a}. \tag{2.34}$$

Pre $t \in [0, t_1]$ sa stavová premenná riadi diferenciálnou rovnicou $\dot{x} = ax - c$ a pre $t \in [t_1, T]$ difernciálnou rovnicou $\dot{x} = 0$. Odozva má teda tvar

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} (x_0 - \frac{c}{a})e^{at} + \frac{c}{a}, & t \in [0, t_1], \\ (x_0 - \frac{c}{a})e^{at_1} + \frac{c}{a}, & t \in [t_1, T]. \end{cases} \tag{2.35}$$



Obrázok 2.1: Optimálne riadenie a jeho odozva

Odozva má spĺňať podmienku (2.4) $x(T) \geq x_T$. Označme t_2 hodnotu, pre ktorú platí

$$\left(x_0 - \frac{c}{a}\right) e^{at_2} + \frac{c}{a} = x_T. \tag{2.36}$$

Z tejto rovnice je možné t_2 explicitne vyjadriť ako

$$t_2 = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{x_T - \frac{c}{a}}{x_0 - \frac{c}{a}} \right). \tag{2.37}$$

Potom $x(T) \geq x_T$ práve vtedy keď $t_1 \geq t_2$. Okrem podmienky $x(T) \geq x_T$ musí byť splnená aj podmienka $\psi(T) \geq 0$. Keďže táto je splnená ak $t_1 \geq T - \frac{1}{a}$ z toho vyplýva, že t_1 je určené nasledovným predpisom

$$t_1 = \max \left\{ t_2, T - \frac{1}{a} \right\}. \tag{2.38}$$

V prípade, že $t_2 \geq T - \frac{1}{a}$, tak $t_1 = t_2$. Potom platí $x(T) = x_T$ a keďže $t_1 \geq T - \frac{1}{a}$

je splnená aj podmienka $\psi(T) \geq 0$. Ak $t_2 \leq T - \frac{1}{a}$, tak $t_1 = T - \frac{1}{a}$. Potom platí $\psi(T) = 0$, a keďže $t_1 \geq t_2$ tak $x(T) \geq x_T$.

Ukázali sme, že podmienky Pontrjaginovho princípu maxima nám dávajú jediného kandidáta na optimálne riadenie $\hat{u}$ určené vzťahom (2.29), kde t_1 je dané vzťahom (2.38) a odozva je daná vzťahom (2.35). Toto je znázornené na obrázku 2.1. Aby tento kandidát na optimálne riadenie skutočne bol optimálnym riadením musí spĺňať postačujúce podmienky. Podľa Vety 3 nami nájdené $\hat{u}(t)$ a $\hat{x}(t)$ bude optimálne ak $H(x(t), u(t), \psi(t))$ je konkávna v (x, u) a $h_1(u)$ a $h_2(x, u)$ sú kvázikonkávne funkcie v (x, u). Keďže $H(x(t), u(t), \psi(t))$ je lineárna v (x, u), tak je konkávna v (x, u). Funkcie $h_1(u)$ a $h_2(x, u)$ sú lineárne v (x, u) a teda sú kvázikonkávne v (x, u).

Pozrime sa teraz na výsledok, ktorý sme dostali, z ekonomického hľadiska. Vyšlo nám, že najprv má byť spotreba minimálna môžná, teda rovná hodnote existenčného minima, a zvyšok produkcie sa má investovať. Keď kapitál dosiahne určitú hodnotu, spotreba sa zvýši na hodnotu produkcie, čo je maximálna možná hodnota. Čas, kedy dôjde k prepnutiu riadenia, závisí od konkrétnych dát úlohy.

Kapitola 3

Lineárna verzia Ramseyho modelu

V tejto kapitole budeme riešiť lineárnu verziu Ramseyho modelu. Jeho autorom je Frank P. Ramsey. Pôvodne bol tento model formulovaný ako úloha variačného počtu a v 60. rokoch 20. storočia bol formulovaný ako úloha optimálneho riadenia. Tento model je formulovaný napríklad v [2] a [3]. Tento model charakterizuje ekonomický rast na makroekonomickej úrovni v agregovanej a uzavretej ekonomike. Cieľom je nájsť optimálne časové rozloženie spotreby s prihliadnutím na obmedzenosť ekonomických zdrojov. Použijeme tu formuláciu modelu z [2] s tým rozdielom, že zmeníme nekonečný časový horizont na konečný a za funkciu užitočnostii a produkčnú funkciu dosadíme lineárne funkcie.

Majme teda nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia

$$\max \int_0^T e^{-rt} u dt, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (\pi - \delta)x - u, & (3.2) \\ x(0) &= x_0, & (3.3) \\ u(t) &\geq 0, & (3.4) \\ u(t) &\leq \pi x, & (3.5) \end{aligned}$$

kde T, x_0, δ, π a r sú dané kladné konštanty. Navyše požadujeme splnenie podmienky

$$\pi > \delta + r. \tag{3.6}$$

Stavová premenná $x(t)$ predstavuje hodnotu fyzického kapitálu v čase t. Riadiaca premenná $u(t)$ je hodnota spotreby v čase t. Spotreba $u(t)$ je zdola ohraničená nulou a zhora hodnotou produkcie $\pi x(t)$. Konštanta δ je miera amortizácie kapitálu a r je diskontná miera. Cieľom je maximalizovať diskontovanú hodnotu spotreby na danom časovom intervale.

Úloha je jednorozmerná, autonómna s diskontným faktorom, s pevným časom a bez ohraničenia na koncový stav. Obsahuje jedno čisté ohraničenie na riadiacu premennú (3.4) a jedno zmiešané ohraničenie na riadiacu a stavovú premennú (3.5).

Najprv potrebujeme ukázať, že sú splnené podmienky regularity (PR). Ohraničenia prepíšeme do tvaru:

$$h_1(u) = u \geq 0, \tag{3.7}$$

$$h_2(u, x) = \pi x(t) - u \geq 0. \tag{3.8}$$

Podmienky regularity budú splnené, ak pre aktívne ohraničenia budú $\frac{\partial h_1}{\partial u}$ a $\frac{\partial h_2}{\partial u}$ lineárne nezávislé. Ak je aktívne len jedno z ohraničení (3.4) a (3.5), je zrejmé, že podmienky regularity sú splnené. Ak by boli v nejakom čase t' aktívne obe ohraničenia (3.4), (3.5) podmienky regularity by splnené neboli. Potrebujeme preto ukázať, že $0 < \pi x(t)$ pre všetky $t \in [0, T]$. Kedže π je kladná konštanta chceme ukázať, že $x(t) > 0$ pre všetky $t \in [0, T]$. Zo vzťahov (3.7) a (3.8) vyplýva, že

$$0 \leq \pi x - u \leq \pi x. \tag{3.9}$$

Odpočítaním δx dostávame

$$-\delta x \leq (\pi - \delta)x - u \leq (\pi - \delta)x. \tag{3.10}$$

Potom pre prípustné riešenie $x(t)$ platí

$$x_0 e^{-\delta t} \leq x(t) \leq x_0 e^{(\pi - \delta)t}. \tag{3.11}$$

Keďže $x_0 e^{-\delta t}$ je kladné pre všetky $t \in [0, T]$, z toho vyplýva, že aj $x(t)$ je kladné pre všetky $t \in [0, T]$. Ukázali sme, že ohraničenia (2.5) a (2.6) nie sú nikdy aktívne súčasne a podmienky regularity sú teda splnené.

Úlohu budeme riešiť pomocou podmienok Pontrjaginovho princípu maxima, tak ako sú uvedené vo Vete 1. Hamiltonova funkcia pre túto úlohu má tvar

$$H(\psi^0, \psi(t), x(t), u(t)) = \psi^0 e^{-rt} u(t) + \psi(t)[(\pi - \delta)x(t) - u(t)] \tag{3.12}$$

a Lagrangeova funkcia má tvar

$$L(\psi^0, \psi(t), x(t), u(t), \mu_1(t), \mu_2(t)) = H(\psi^0, \psi(t), x(t), u(t)) + \mu_1(t)u(t) + \mu_2(t)(\pi x(t) - u(t)). \tag{3.13}$$

Formulácia podmienok PPM:

podmienka maxima (PM)

$$\max_{u \in (0, \pi\hat{x})} H(\psi^0, \psi(t), \hat{x}(t), u(t)) = H(\psi^0, \psi(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial u} = \psi^0 e^{-rt} - \psi(t) - \mu_1(t) + \mu_2(t) = 0, \tag{3.15}$$

adjungovaná rovnica (AR)

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \hat{L}}{\partial x} = -\psi(t)(\pi - \delta) - \pi\mu_1(t), \tag{3.16}$$

podmienka tranzverzality (PT)

$$\psi(T) = 0, \tag{3.17}$$

podmienky pre multiplikátory $\mu_1(t)$ a $\mu_2(t)$

$$\mu_1(t) \geq 0, \qquad \mu_1(t)(\hat{u}(t)) = 0, \tag{3.18}$$

$$\mu_2(t) \geq 0, \qquad \mu_2(t)(\pi\hat{x}(t) - \hat{u}(t)) = 0. \tag{3.19}$$

Teraz nájdeme riadenie $\hat{u}$, ktoré je riešením podmienky maxima (3.14). Riadiaca premenná $\hat{u}$ môže na dobúdať buď jednnu z okrajových hodnôt 0 a $\pi\hat{x}$ alebo môže byť z intervalu $(0, \pi\hat{x})$. Ak $\hat{u}$ je z intervalu $(0, \pi\hat{x})$ potom z podmienok (3.18) a (3.19) vyplýva, že $\mu_1 = 0$ a $\mu_2 = 0$. Dosadením do rovnosti (3.15) potom dostávame $\psi^0 e^{-rt} - \psi = 0$, t.j. $\psi = \psi^0 e^{-rt}$. Ak $\hat{u} = 0$ potom z podmienky (3.18) vyplýva, že $\mu_1 = 0$. Dosadením do rovnosti (3.15) potom dostávame $\psi^0 e^{-rt} - \psi = -\mu_2 \leq 0$, t.j. $\psi > \psi^0 e^{-rt}$. Ak $\hat{u} = \pi\hat{x}$ potom z podmienky (3.19) vyplýva, že $\mu_2 = 0$. Dosadením do rovnosti (3.15) potom dostávame $\psi^0 e^{-rt} - \psi = \mu_1 \geq 0$, t.j. $\psi < \psi^0 e^{-rt}$. Riadiaca premenná u nadobúda nasledujúce hodnoty

$$\hat{u}(t) \begin{cases} = 0, & \text{ak } \psi(t) \geq \psi_0 e^{-rt}, \\ \in (0, \pi\hat{x}(t)), & \text{ak } \psi(t) = \psi_0 e^{-rt}, \\ = \pi\hat{x}(t), & \text{ak } \psi(t) \leq \psi_0 e^{-rt}. \end{cases} \tag{3.20}$$

Konštanta ψ_0 môže nadobúdať buď hodnotu 0 alebo hodnotu 1. Najprv ukážeme, že prípad $\psi_0 = 0$ nemôže nastať. Ak $\psi_0 = 0$ potom pre $t = T$ by platilo $(\psi_0, \psi(T)) = (0, 0)$, pretože podľa podmienky tranzverzality (2.19) platí $\psi(T) = 0$. Ale to je spor s $(\psi_0, \psi(t)) \neq (0, 0)$ pre všetky $t \in [0, T]$. Pre $\psi^0 = 0$ teda nie je prípustné žiadne riadenie. Teraz sa budeme zaoberať prípadom $\psi_0 = 1$. Vzťah (3.20) môžeme prepísať ako

$$\hat{u}(t) \begin{cases} = 0, & \text{ak } \psi(t) \geq e^{-rt}, \\ \in (0, \pi\hat{x}(t)), & \text{ak } \psi(t) = e^{-rt}, \\ = \pi\hat{x}(t), & \text{ak } \psi(t) \leq e^{-rt}. \end{cases} \tag{3.21}$$

Potrebujeme ešte určiť akú hodnotu nadobúda $\hat{u}(t)$ pre prípad $\psi(t) = e^{-rt}$. Nech $\psi(t) = e^{-rt}$ potom $\dot{\psi} = -re^{-rt}$. Dosadením do adjungovanej rovnice dostávame $-re^{-rt} = -(\pi - \delta)e^{-rt}$. Po úprave dostaneme $\pi = \delta + r$, čo je v spore s podmienkou (3.6), podľa ktorej $\pi > \delta + r$. Ukázali sme, že riadiaca premnná u môže nadobúdať iba extremálne hodnoty 0 a $\pi\hat{x}$.

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0, & \text{ak } \psi(t) > e^{-rt}, \\ \pi\hat{x}(t), & \text{ak } \psi(t) < e^{-rt}. \end{cases} \tag{3.22}$$

Vieme aké hodnoty môže riadiaca premenná $\hat{u}$ nadobúdať, ale nevieme koľkokrát nastáva prepnutie medzi týmito hodnotani a nepoznáme ani poradie úsekov. Toto zistíme analyzovaním priebehu adjungovanej premennej. Vieme tiež, že v bode prepnutia platí $\psi(t) = e^{-rt}$.

Ak $\hat{u} = 0$ a $\psi(t) > e^{-rt}$ adjungovaná premenná sa riadi rovnicou

$$\dot{\psi} = -(\pi - \delta)\psi. \tag{3.23}$$

Riešenie tejto rovnice má tvar

$$\psi(t) = K_1 e^{-(\pi-\delta)t}, \tag{3.24}$$

kde K_1 je kladná konštanta, taká že $\psi(t) > e^{-rt}$. Keď $\hat{u} = 0$ potom adjungovaná premenná $\psi(t)$ je klesajúca funkcia. Podľa (3.6) $\pi > \delta + r$ a teda $\pi - \delta > r$ z čoho vyplýva, že $\psi(t)$ klesá rýchlejšie ako e^{-rt}, t.j. $\psi(t)$ môže klesnúť do hodnoty $\psi(t) = e^{-rt}$, v ktorej nastáva prepnutie riadiacej premenej u.

Ak $\hat{u} = \pi\hat{x}$ a $\psi(t) < e^{-rt}$ adjungovaná premenná sa riadi rovnicou

$$\dot{\psi} = \delta\psi - \pi e^{-rt}. \tag{3.25}$$

Riešenie tejto rovnice má tvar

$$\psi(t) = K_2 e^{\delta t} + \frac{\pi}{\delta + r}(e^{-rt} - e^{\delta t}), \tag{3.26}$$

kde K_2 je konštanta. Z podmienky tranzverzality (3.17) vieme, že $\psi(T) = 0$. Ak $\hat{u} = 0$ premenná $\psi(t) > e^{-rt}$ a nikdy nemôže dosiahnuť hodnotu 0. Hodnotu nula môže adjungovaná premenná dosiahnuť iba v prípade, že $\hat{u} = \pi\hat{x}$. Na základe toho vieme existuje $t_1 \in [0, T)$, také že na intervale $[t_1, T]$ je $\hat{u} = \pi\hat{x}$. Na určenie hodnoty konštanty K_2 využijeme, že $\psi(T) = 0$ a určíme ju z rovnice

$$K_2 e^{\delta T} + \frac{\pi}{\delta + r}(e^{-rT} - e^{\delta T}) = 0. \tag{3.27}$$

Hodnota konštanty K_2 je

$$K_2 = \frac{\pi}{\delta + r}(-e^{-(\delta + r)T}). \tag{3.28}$$

Dosadením K_2 do vzťahu (3.26) dostaneme pre adjungovanú premennú na $[t_1, T]$ predpis

$$\psi(t) = \frac{\pi}{\delta + r}(e^{-rt} - e^{-(\delta + r)T + \delta t}). \tag{3.29}$$

Ak sa adjungovaná premenná správa podľa prepisu (3.29), tak $\dot{\psi}(t) = \frac{\pi}{\delta + r}(-re^{-rt} - \delta e^{-(\delta + r)T + \delta t})$. Táto derivácia je záporná, z čoho vyplýva, že $\psi(t)$ je klesajúca funkcia. V prípade, že $\hat{u} = \pi\hat{x}$ je teda $\psi(t)$ stále klesajúca, $\psi(t)$ klesá rýchlejšie ako e^{-rt} a preto $\psi(t)$ nikdy nedosiahne hodnotu e^{-rt} a teda nemôže dôjsť k prepnutiu. Môžu teda nastať iba dve možnosti, buď $\hat{u} = \pi\hat{x}$ pre všetky $t \in [0, T]$ alebo najprv $\hat{u} = 0$ a v nejakom bode t_1 dôjde k prepnutiu do hodnoty $\hat{u} = \pi\hat{x}$.

Budeme sa teraz zaoberať bližšie jednotlivými prípadmi. Ak

$$\hat{u} = \pi\hat{x} \text{ pre všetky } t \in [0, T], \tag{3.30}$$

stavová rovnica má tvar $\dot{x} = -\delta x$. Stavová premenná sa teda riadi predpisom

$$\hat{x}(t) = x_0 e^{-\delta t}. \tag{3.31}$$

Adjungovaná premenná má tvar $\psi(t) = \frac{\pi}{\delta+r}(e^{-rt} - e^{-(\delta+r)T+\delta t})$. Pre $\hat{u} = \pi\hat{x}$ platí $\psi(t) < e^{-rt}$. Tento vzťah platí pre všetky $t \in [0, T]$, t.j. aj pre $t = 0$. Táto nerovnosť má tvar

$$\begin{aligned} \psi(0) &< e^{-r.0}, & (3.32)\\ \frac{\pi}{\delta+r}(1 - e^{-(\delta+r)T}) &< 1. & (3.33) \end{aligned}$$

Úpravou tejto nerovnosti dostaneme pre T podmienku

$$T < \frac{1}{\delta+r} \ln\left(\frac{\pi}{\pi-(\delta+r)}\right). \tag{3.34}$$

Z toho vyplýva, že $\hat{u} = \pi\hat{x}$ pre všetky $t \in [0, T]$, iba ak T spĺňa podmienku (3.34).

Druhá možnosť je, že existuje bod prepnutia $t_1 \in (0, T)$, taký že

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} 0, & \text{ak } t \in [0, t_1], \\ \pi\hat{x}(t), & \text{ak } t \in (t_1, T]. \end{cases} \tag{3.35}$$

V tomto prípade sa adjungovaná premenná riadi predpisom

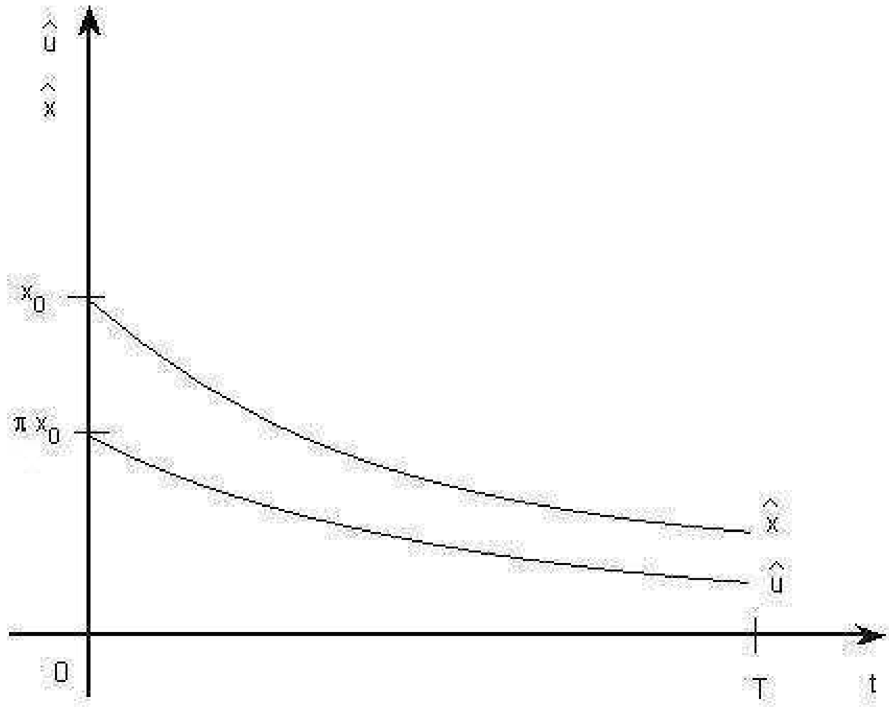
$$\psi(t) = \begin{cases} K_1 e^{-(\pi-\delta)t}, & \text{ak } t \in [0, t_1], \\ \frac{\pi}{\delta+r}(e^{-rt} - e^{-(\delta+r)T+\delta t}), & \text{ak } t \in [t_1, T], \end{cases} \tag{3.36}$$

kde K_1 je kladná konštanta. V bode prepnutia t_1 mus platiť $\psi(t_1) = e^{-rt_1}$. Na základe toho dostávame nasledujúce rovnice

$$\begin{aligned} K_1 e^{-(\pi-\delta)t_1} &= e^{-rt_1}, & (3.37)\\ \frac{\pi}{\delta+r}(e^{-rt_1} - e^{-(\delta+r)T} + \delta t_1) &= e^{-rt_1}. & (3.38) \end{aligned}$$

Z rovnice (3.37) vieme dopočítať hodnotu konštanty K_1 a z rovnice (3.38) čas t_1. Dostaneme

$$\begin{aligned} K_1 &= e^{(\pi-\delta-r)t_1}, & (3.39)\\ t_1 &= T - \frac{1}{\delta+r} \ln\left(\frac{\pi}{\pi-(\delta+r)}\right). & (3.40) \end{aligned}$$



Obrázok 3.1: Optimálne riadenie a jeho odozva

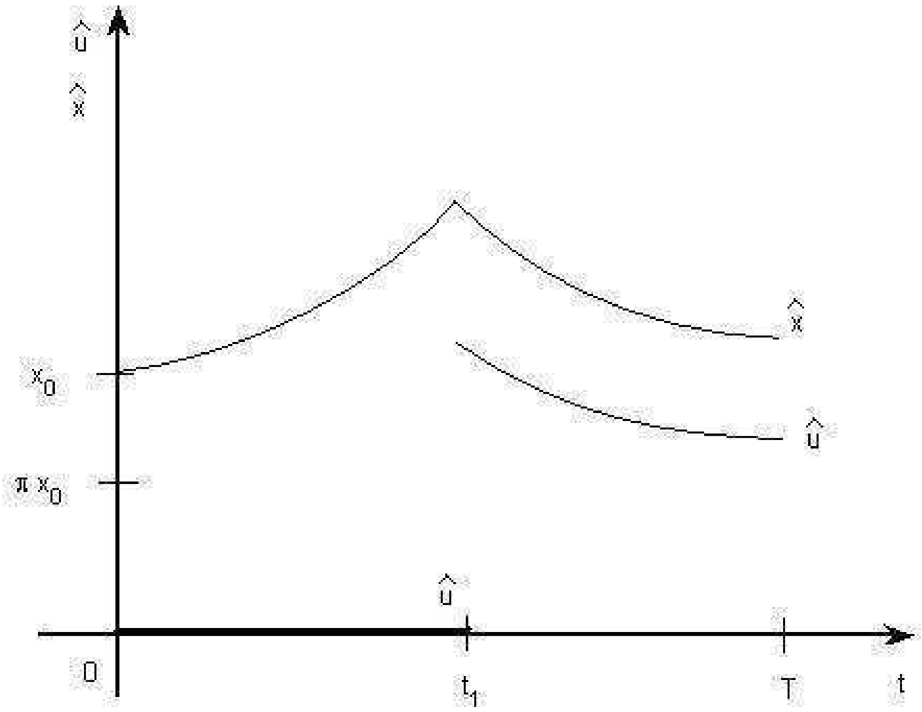
Čas t_1 musí byť kladný. Z rovnice (3.40) teda vyplýva, že

$$T > \frac{1}{\delta + r} \ln \left(\frac{\pi}{\pi - (\delta + r)} \right). \tag{3.41}$$

Pre $t \in [0, t_1]$ má stavová rovnica tvar $\dot{x} = (\pi - \delta)x$ a pre $t \in [t_1, T]$ má tvar $\dot{x} = -\delta x$. Stavová premenná x je teda daná vzťahom

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x_0 e^{(\pi-\delta)t}, & \text{ak } t \in [0, t_1], \\ x_0 e^{(\pi-2\delta)t+\delta t_1}, & \text{ak } t \in [t_1, T]. \end{cases} \tag{3.42}$$

Dostali sme teda, že pre $T < \frac{1}{\delta+r} \ln \left(\frac{\pi}{\pi-(\delta+r)} \right)$ kandidátom na optimálne riadenie je $\hat{u}(t)$ učené vzťahom (3.30) a odozva $\hat{x}(t)$ určená vzťahom (3.31). Tento prípad je zobrazený na obrázku 3.1. Pre $T > \frac{1}{\delta+r} \ln \left(\frac{\pi}{\pi-(\delta+r)} \right)$ je kandidátom na optimálne



Obrázok 3.2: Optimálne riadenie a jeho odozva

riadenie $\hat{u}(t)$ dané vzťahom(3.35) a odozva $\hat{x}(t)$ daná vzťahom (3.42), kde t_1 je dané vzťahom (3.40). Tento prípad je zobrazený na obrázku 3.2.

Teraz potrebujeme ešte ukázať, že kandidát na optimálne riešenie, ktorého sme našli, je skutočne optimálnym riadením. Na to musí spĺňať postačujúce podmienky. Ukážeme, že nami nájdený kandidát na optimálne riešenie spĺňa postačujúce podmienky uvedené vo Vete 3. Musíme teda ukázať, že funkcia $H(x(t), u(t), \psi(t), t)$ je konkávna v (x, u) a funkcie $h_1(u)$ a $h_2(x, u)$ sú kvázikonkávne funkcie v (x, u). Keďže $H(x(t), u(t), \psi(t), t)$ je lineárna v (x, u), tak je konkávna. Funkcie $h_1(u)$ a $h_2(x, u)$ sú tiež lineárne v (x, u) a teda sú kvázikonkávne. Keďže postačujúce podmienky sú splnené nami nájdený kandidát na optimálne riešenie je optimálnym riešením danej úlohy.

Kapitola 4

Dvojrozmerná úloha

V tejto kapitole budeme riešiť dvojrozmernú úlohu. Jej zadanie je prebrané z [1]. V [1] je úloha uvednená medzi príkladmi na precvičenie.

Uvažujme teda nasledujúcu úlohu optimálneho riadenia:

$$\max \int_0^T (1-s)(bK + rB - u)dt, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
\dot{K}(t) &= s(t)(bK(t) + rB(t) - u(t)), && (4.2)\\
\dot{B}(t) &= u(t), && (4.3)\\
K(0) &= K_0, && (4.4)\\
B(0) &= 0, && (4.5)\\
K(T) &\geq K_T, && (4.6)\\
B(T) &\geq 0, && (4.7)\\
u(t) &\geq u_D, && (4.8)\\
s(t) &\in [0,1], && (4.9)\\
u(t) &\leq bK(t) + rB(t) - d, && (4.10)
\end{aligned}$$

kde K_0, K_T, T, b, r, d sú kladné konštanty a u_D je záporná konštanta. Na dáta úlohy máme stanovené nasledovné ohraničenia:

$$b > r, \tag{4.11}$$

$$\frac{1}{r} > T > \frac{1}{b}, \tag{4.12}$$

$$\frac{d}{b} < K_0 < K_T < K_0 e^{bT}. \tag{4.13}$$

Táto úloha predstavuje rastový model rozšírený o možnosť predaja a nákupu zahraničných dlhopisov. Sú tu dve stavové premenné K a B. Stavová premenná $K(t)$ predstavuje hodnotu kapitálu v čase t a stavová premenná $B(t)$ je hodnota zahraničných dlhopisov v čase t. Riadiace premenné sú u a s. Premenná $u(t)$ je zmena hodnoty dlhopisov v čase t. Ak $u(t)$ je kladné znamená to, že v čase t sa dlhopisy nakupovali, ak $u(t)$ je záporné dlhopisy sa v čase t predávali. Premenná $s(t)$ je miera úspor, jej hodnota je z intervalu $[0, 1]$. Výraz $(bK(t) + rB(t) - u(t))$ je súčet produkcie v ekonomike, úroku z dlhopisov (r je úroková miera) a zmeny hodnoty dlhopisov, t.j. je to hodnota, ktorú ekonomika získa v čase t. Časť s z tejto hodnoty sa usporí a o túto časť sa zvýši kapitál a časť $1 - s$ sa spotrebuje. Pre $s = 0$ sa všetko spotrebuje a pre $s = 1$ sa všetko investuje. Podmienka (4.11) hovorí, že úroková miera dlhopisov je menšia ako miera produkcie.

Úloha je dvojrozmerná, autonómna, s pevným časom a s ohraničením typu nerovnosti na koncový stav. Obsaje čisté ohraničenia na riadiace premenné (4.8), (4.9) a jedno zmiešané ohraničenie na riadiace a stavové premenné (4.10).

Potrebujeme ukázať, že pre túto úlohu sú splnené podmienky regularity. Najprv ohraničenia prepíšeme do tvaru:

$$\begin{aligned} h_1(K, B, u) &= bK + rB - u - d \geq 0, && (4.14)\\ \tilde{h}_2(u) &= u - u_D \geq 0, && (4.15)\\ \tilde{h}_3(u) &= s \geq 0, && (4.16)\\ \tilde{h}_4(u) &= 1 - s \geq 0. && (4.17) \end{aligned}$$

Uvažujme teraz maticu parciálnych derivácií

$$\begin{bmatrix} \partial h_1/\partial u & \partial h_1/\partial v \\ \partial \tilde{h}_2/\partial u & \partial \tilde{h}_2/\partial v \\ \partial \tilde{h}_3/\partial u & \partial \tilde{h}_3/\partial v \\ \partial \tilde{h}_4/\partial u & \partial \tilde{h}_4/\partial v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Podmienky regularity buď splnené ak riadky matice (4.18) sú pre aktívne ohraničenia lineárne nezávislé. Ak je aktívne iba je z ohraničení (4.14)-(4.17) podmienka je splnená.

Ak sú aktívne dve ohraničenia súčasne problém by nastal ak by to boli súčasne aktívne (4.16) a (4.17) alebo (4.14) a (4.15). Je zrejmé, že ohraničenia (4.16) a (4.17) nemôžu byť aktívne súčasne. Potrebujeme teda ešte ukázať, že (4.14) a (4.15) nie sú aktívne súčasne, t.j. že $u_D < b\hat{K} + r\hat{B} - d$. Podľa (4.14) platí

$$d \leq bK(t) + rB(t) - u. \tag{4.19}$$

Vynásobením $s(t)$ dostaneme

$$ds(t) \leq s(t)(bK(t) + rB(t) - u), \tag{4.20}$$

a keďže $d > 0$ a $s \in [0, 1]$ platí

$$0 \leq s(t)(bK(t) + rB(t) - u). \tag{4.21}$$

Potom pre riešenie stavovej rovnice pre $K(t)$ platí

$$K_0 \leq K(t). \tag{4.22}$$

Podľa (4.15) platí

$$u_D \leq u. \tag{4.23}$$

Potom pre riešenie stavovej rovnice pre $B(t)$ platí

$$u_D t \leq B(t). \tag{4.24}$$

Z (4.22) vyplýva, že $bK_0 \leq bK(t)$ a z (4.24) vyplýva, že $ru_D t \leq rB(t)$. Potom platí

$$bK_0 + ru_D t \leq bK(t) + rB(t). \tag{4.25}$$

Úpravou tejto nerovnosti dostaneme

$$u_D \leq \frac{bK(t) + rB(t) - bK_0}{rt}. \tag{4.26}$$

Podľa (4.13) platí $d < bK_0$ a na základe toho dostávame

$$u_D < \frac{bK(t) + rB(t) - d}{rt} \text{ pre všetky } t \in [0, T]. \tag{4.27}$$

Podľa (4.12) platí $T < \frac{1}{r}$, t.j. pre všetky $t \in [0, T]$ platí $rt < 1$. Ukázali sme teda, že $u_D < bK(t) + rB(t) - d$ pre všetky $t \in [0, T]$. Ohraničnia (4.14) a (4.15) nemôžu byť aktívne súčasne. Podmienka regularity je splnená.

Úlohu budeme riešiť pomocou podmienok Pontrjaginovho princípu maxima (PPM), tak ako sú uvedené vo Vete 1.

Hamiltonova funkcia pre túto úlohu má tvar

$$H(\psi^0,\psi^1,\psi^2,B,K,u,s)=\psi^0(1-s)(bK+rB-u)+\psi^1 s(bK+rB-u)+\psi^2 u \quad (4.28)$$

a Lagrangeova funkcia má tvar

$$\begin{aligned} L(\psi^0,\psi^1,\psi^2,\mu,B,K,u,s) &= H(\psi^0,\psi^1,\psi^2,B,K,u,s)+\mu_1(bK+rB-u-d)+ \\ &+\mu_2(u-u_D)+\mu_3 s+\mu_4(1-s). \end{aligned} \quad (4.29)$$

V ďaľšom texte označme hodnotu $b\hat{K}+r\hat{B}-d$ ako u_H.

Formulácia podmienok PPM v riadení $\hat{u}$, $\hat{s}$ a jeho odozve $\hat{K}$ a $\hat{B}$:

podmienka maxima (PM)

$$\max_{u\in(u_D,u_H),s\in(0,1)} H(\psi^0,\psi^1,\psi^2,\hat{B},\hat{K},u,s)=H(\psi^0,\psi^1,\psi^2,\hat{B},\hat{K},\hat{u},\hat{s}), \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial\hat{L}}{\partial s} = (\psi^1-\psi^0)(b\hat{K}+r\hat{B}-\hat{u})+\mu_3-\mu_4=0, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial\hat{L}}{\partial u} = \psi^0(\hat{s}-1)-\psi^1\hat{s}+\psi^2-\mu_1+\mu_2=0, \quad (4.32)$$

adjungovaná rovnica (AR)

$$\dot{\psi}^1=-\frac{\partial\hat{L}}{\partial K}=-b(\psi^0(1-\hat{s})+\psi^1\hat{s}+\mu_1), \quad (4.33)$$

$$\dot{\psi}^2=-\frac{\partial\hat{L}}{\partial B}=-r(\psi^0(1-\hat{s})+\psi^1\hat{s}+\mu_1), \quad (4.34)$$

podmienka tranzverzality (PT)

$$\psi^1(T) \geq 0, \quad \psi^1(T)(\hat{K}(T)-K_T)=0, \quad (4.35)$$

$$\psi^2(T) \geq 0, \quad \psi^2(T)\hat{B}(T)=0, \quad (4.36)$$

podmienky pre multipliátory

$$\mu_1(t) \geq 0, \quad \mu_1(t)(b\hat{K}+r\hat{B}-\hat{u}-d)=0, \quad (4.37)$$

$$\mu_2(t) \geq 0, \quad \mu_2(t)(\hat{u}-u_D)=0, \quad (4.38)$$

$$\mu_3(t) \geq 0, \quad \mu_3(t)\hat{s}=0, \quad (4.39)$$

$$\mu_4(t) \geq 0, \quad \mu_4(t)(1-\hat{s})=0. \quad (4.40)$$

Najprv ukážeme platnosť nasledujúcej lemy, ktorú budeme neskôr pri riešení úlohy potrebovať.

Lema 2. *Nech štvorica* $(\hat{K}(t), \hat{B}(t), \hat{u}(t), \hat{s}(t))$ *spĺňa spolu s* ψ^0, $\psi^1(t)$ *a* $\psi^2(t)$ *podmienky PPM (4.30)-(4.40). Potom platí:*

$$\psi^2(t) - \psi^2(T) = \frac{r}{b}\psi^1(t) - \psi^1(T), \tag{4.41}$$

t.j. medzi $\psi^1(t)$ *a* $\psi^2(t)$ *je lineárna závislosť.*

Dôkaz: Z adjungovnej rovnice (4.33) vyplýva, že $\psi^0(1-\hat{s}) + \psi^1\hat{s} + \mu = -\frac{\dot{\psi}^1}{b}$. Dosadením do adjungovanej rovnice (4.34) dostávame $\dot{\psi}^2(s) = \frac{r}{b}\dot{\psi}^1(s)$. Integrovaním tohoto výrazu na intervale $[t, T]$ dostávame $\psi^2(t) - \psi^2(T) = \frac{r}{b}\psi^1(t) - \psi^1(T)$, čo sme chceli dokázať.■

V nasledujúcej leme vyjadríme riadenie ako funkciu adjungovanej premennej v prípade, že $\psi^0 = 1$. Prípadom $\psi^0 = 0$ sa budeme zaoberať neskôr.

Lema 3. *Nech štvorica* $(\hat{K}(t), \hat{B}(t), \hat{u}(t), \hat{s}(t))$ *spĺňa spolu s* ψ^0, $\psi^1(t)$ *a* $\psi^2(t)$ *podmienky (4.30)-(4.40). Nech* $\psi^0 = 1$. *Potom*

$$\hat{s}(t) = \begin{cases} 0, & ak\ \psi^1(t) < 1, \\ 1, & ak\ \psi^1(t) > 1, \end{cases} \tag{4.42}$$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u_D, & ak\ \psi^2(t) < \max\{1, \psi^1\}, \\ u_H, & ak\ \psi^2(t) > \max\{1, \psi^1\}. \end{cases} \tag{4.43}$$

Dôkaz: Najprv nájdeme riadenie, ktoré je riešením podmienky maxima (4.30). Pre riadiacu premennú s môžu nastať tri možnosti. Buď nadobúda hodnotu 0 alebo hodnotu 1 alebo môže byť z intervalu $(0, 1)$. Ak $\hat{s} \in (0, 1)$ potom podľa vzťahov (4.39) a (4.40) platí, že $\mu_3 = 0$ a $\mu_4 = 0$. Z rovnice (4.31) potom vyplýva $(\psi^1 - 1)(b\hat{K} + r\hat{B} - \hat{u}) = 0$. Ak $\hat{s} = 0$ potom podľa vzťahu (4.40) platí, že $\mu_4 = 0$. Z rovnice (4.31) potom vyplýva $(\psi^1 - 1)(b\hat{K} + r\hat{B} - \hat{u}) = -\mu_3 \leq 0$. Ak $\hat{s} = 1$ potom podľa vzťahu (4.39) platí, že $\mu_3 = 0$. Z rovnice (4.31) potom vyplýva $(\psi^1 - 1)(b\hat{K} + r\hat{B} - \hat{u}) = \mu_4 \geq 0$. Premenná s teda nadobúda nasledovné hodnoty:

$$\hat{s}(t) \begin{cases} = 0, & \text{ak } (\psi^1 - 1)(b\hat{K} + r\hat{B} - \hat{u}) \leq 0, \\ \in (0, 1), & \text{ak } (\psi^1 - 1)(b\hat{K} + r\hat{B} - \hat{u}) = 0, \\ = 1, & \text{ak } (\psi^1 - 1)(b\hat{K} + r\hat{B} - \hat{u}) \geq 0. \end{cases} \tag{4.44}$$

Podľa vzťahu (4.10) vieme, že $b\hat{K} + r\hat{B} - \hat{u} \geq d$, kde $d > 0$. Vďaka tomu môžeme vzťah (4.44) prepísať do tvaru

$$\hat{s}(t) \begin{cases} = 0, & \text{ak } \psi^1 \leq 1, \\ \in (0,1), & \text{ak } \psi^1 = 1, \\ = 1, & \text{ak } \psi^1 \geq 1. \end{cases} \tag{4.45}$$

Pre $\psi^1(t) = 1$ môže $\hat{s}(t)$ nadobúdať akúkoľvek hodnotu z intervalu $[0,1]$. Túto hodnotu je potrebné určiť. Predpokladajme, že $\psi^1(t) = 1$ pre všetky $t \in I = [t_1, t_2]$. Z toho vyplýva, že $\dot{\psi}^1(t) = 0 = -b(1 - \hat{s} + \hat{s} + \mu) = -b(1 + \mu)$. Potom platí $\mu(t) = -1$ pre všetky $t \in I$ a to je spor s tým, že $\mu(t) \geq 0$. Z toho vyplýva, že $\hat{s}$ môže nadobúdať len hodnoty (4.42).

Ďalej potrebujeme určiť hodnotu riadiacej premennej u. Táto môže nadobúdať buď hodnotu u_D alebo hodnotu u_H alebo môže byť z intervalu (u_D, u_H). Ak $\hat{u} \in (u_D, u_H)$ potom podľa vzťahov (4.37) a (4.38) platí, že $\mu_1 = 0$ a $\mu_2 = 0$. Z rovnice (4.32) potom vyplýva $\hat{s} - 1 - \psi^1\hat{s} + \psi^2 = 0$. Pre $\psi^1 < 1$ je $\hat{s} = 0$ a dostávame $\psi^2 = 1$. Pre $\psi^1 > 1$ je $\hat{s} = 1$ a dostávame $\psi^2 = 1$. Z toho vyplýva $\psi^2 = \max\{1, \psi^1\}$. Ak $\hat{u} = u_D$ potom podľa vzťahu (4.37) platí, že $\mu_1 = 0$. Z rovnice (4.32) potom vyplýva $\hat{s} - 1 - \psi^1\hat{s} + \psi^2 = -\mu_2 \leq 0$. Pre $\psi^1 < 1$ je $\hat{s} = 0$ a dostávame $\psi^2 < 1$. Pre $\psi^1 > 1$ je $\hat{s} = 1$ a dostávame $\psi^2 < 1$. Z toho vyplýva $\psi^2 < \max\{1, \psi^1\}$. Ak $\hat{u} = u_H$ potom podľa vzťahu (4.38) platí, že $\mu_2 = 0$. Z rovnice (4.32) potom vyplýva $\hat{s} - 1 - \psi^1\hat{s} + \psi^2 = \mu_1 \geq 0$. Pre $\psi^1 < 1$ je $\hat{s} = 0$ a dostávame $\psi^2 > 1$. Pre $\psi^1 > 1$ je $\hat{s} = 1$ a dostávame $\psi^2 > \psi^1$. Z toho vyplýva $\psi^2 < \max\{1, \psi^1\}$. Riadiaca premenná $\hat{u}$ teda nadobúda hodnoty:

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u_D & \text{ak } \psi^2(t) \leq \max\{1, \psi^1\}, \\ (u_D, u_H) & \text{ak } \psi^2(t) = \max\{1, \psi^1\}, \\ u_H & \text{ak } \psi^2(t) \geq \max\{1, \psi^1\}. \end{cases} \tag{4.46}$$

Potrebujeme ešte určiť hodnotu $\hat{u}$ v prípade, že $\psi^2(t) = \max\{1, \psi^1\}$. Pre $\psi^1 < 1$ platí, že $\psi^2(t) = 1$ a $\hat{s} = 0$. Potom dosadením do rovnice (4.34) dostávame $\dot{\psi}^2 = -r = 0$ a to je spor s tým, že $r > 0$. Pre $\psi^1 > 1$ platí, že $\psi^2 = \psi^1$ a $\hat{s} = 1$. Potom dosávame $\dot{\psi}^2 = \dot{\psi}^1$ a z toho vyplýva $b = r$ a to je spor s tým, že $b > r$. Z toho vyplýva, že $\hat{u}$ môže nadobúdať len hodnoty (4.43). Lema 3 je dokázaná.■

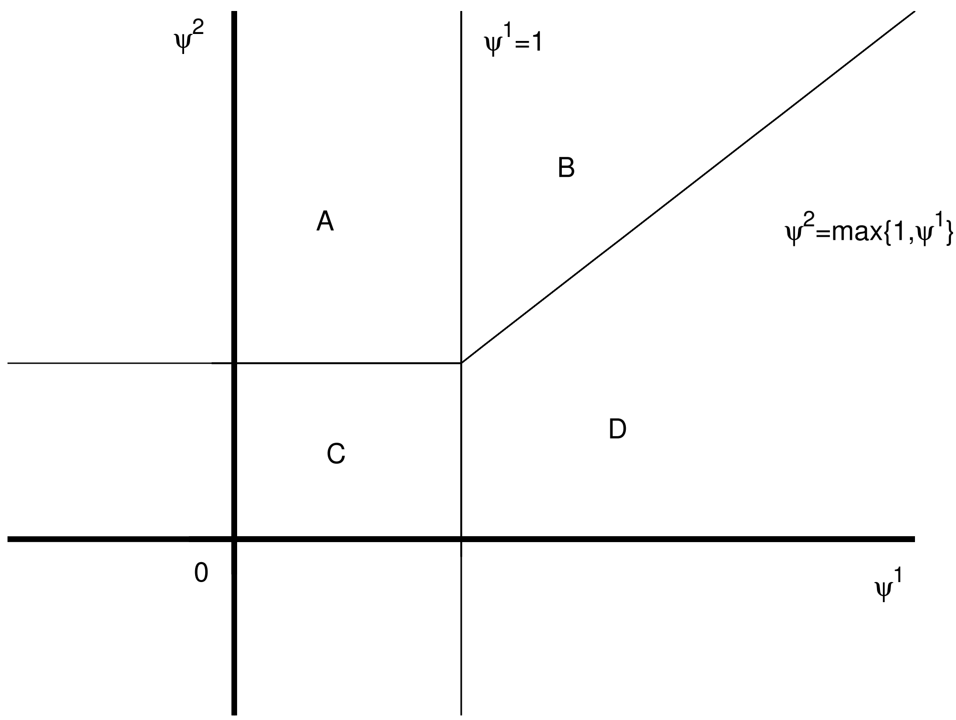
Kedže hodnota optimálneho riadenia závisí od hodnoty adjungovaných premenných ψ^1 a ψ^2 existujú 4 kombinácie $\hat{s}$ a $\hat{u}$. Toto je znázornené na obrázku č.4.1. Kladný kvadrant je rozdelený na 4 oblasti označené A, B, C a D. Riadenia v jednotlivých oblastiach vyzerajú nasledovne:

Oblasť A: $\hat{s} = 0$, $\hat{u} = u_H$

Oblasť B: $\hat{s} = 1$, $\hat{u} = u_H$

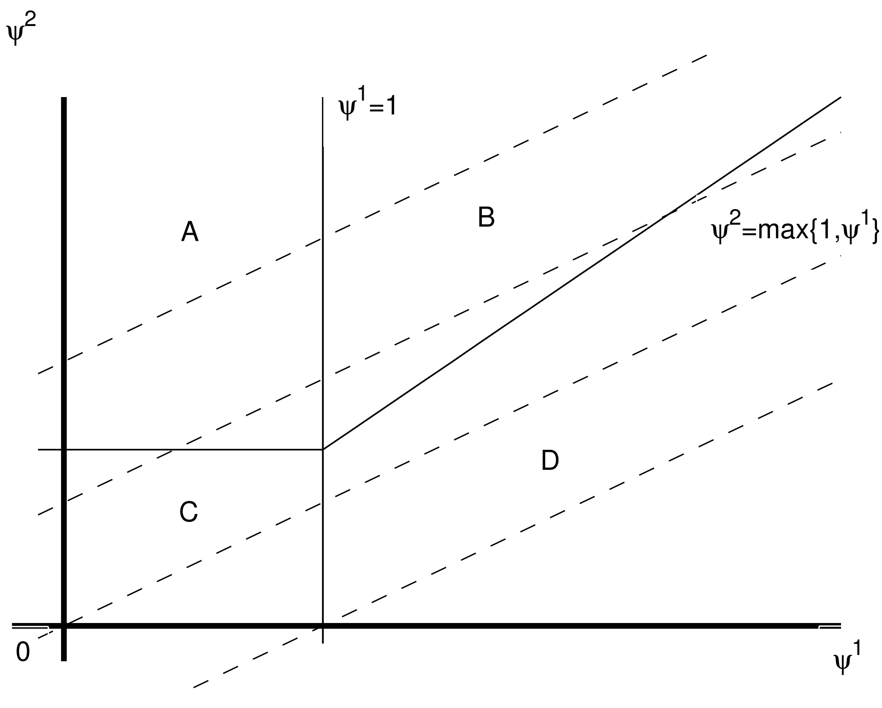
Oblasť C: $\hat{s} = 0$, $\hat{u} = u_D$

Oblasť D: $\hat{s} = 1$, $\hat{u} = u_D$



Obrázok 4.1: Oblasti A, B, C, D

Na základe lemy 2 vieme, že medzi ψ^1 a ψ^2 je lineárna závislosť. Vieme tiež, že $b > r$ a preto sklon $\frac{r}{b}$ je menší ako 1. Teraz ukážeme, že ψ^1 a ψ^2 sú v závislosti od času klesajúce. Stačí nám ukázať, že to platí pre jednu z nich a z lemy 2 vyplýva, že to platí aj pre druhú. Funkcia $\psi^2(t)$ je klesajúca, ak jej derivácia $\dot{\psi}^2$ je záporná. Chceme ukázať, že $-r(1-\hat{s}+\psi^1\hat{s}+\mu_1) < 0$. Tento výraz je záporný, ak $1-\hat{s}+\psi^1\hat{s}+\mu_1 > 0$. Podľa (4.42) vieme, že $\hat{s}$ nadobúda buď hodnotu 0 alebo hodnotu 1. Ak $\hat{s} = 0$, tak $1-\hat{s}+\psi^1\hat{s}+\mu_1 = 1+\mu_1 > 0$ lebo $\mu_1 \geq 0$. Ak $\hat{s} = 1$, tak $1-\hat{s}+\psi^1\hat{s}+\mu_1 = \psi^1+\mu_1$ a to je kladné vtedy keď $\psi^1 > -\mu_1(t) \leq 0$. Pre $\psi^1 > -\mu_1(t)$ je ψ^2 klesajúcou funkciou času. Ak $\psi^1 < -\mu_1(t) \leq 0$ je ψ^2 rastúca, ale tento prípad nemôže nastať, pretože ψ^2 je stále záporné a my požadujeme aby $\psi^2(T) \geq 0$. Ukázali sme, že $\psi^1(t)$ a $\psi^2(t)$, ktoré spĺňajú koncovú podmienku $\psi^1(T) \geq 0$ a $\psi^2(T) \geq 0$, sú v závislosti od času klesajúce a keďže musí platiť $\psi^1(T) \geq 0$ a $\psi^2(T) \geq 0$ nachádzame sa len v prvom kvadrante. Toto je znázornené na obrázku 4.2.



Obrázok 4.2:

Nastávajú nasledujúce možnosti, kde môže ležať $\psi^1(t)$ a $\psi^2(t)$ pre $t \in [0, T]$:

1. A na int. $[0, T]$,
2. B na int. $[0, T]$,
3. C na int. $[0, T]$,
4. D na int. $[0, T]$,
5. A na int. $[0, t_1]$, C na int. $[t_1, T]$,
6. B na int. $[0, t_1]$, A na int. $[t_1, T]$,
7. D na int. $[0, t_1]$, B na int. $[t_1, T]$,
8. D na int. $[0, t_1]$, C na int. $[t_1, T]$,
9. B na int. $[0, t_1]$, A na int. $[t_1, t_2]$, C na int. $[t_2, T]$,
10. D na int. $[0, t_1]$, B na int. $[t_1, t_2]$, A na int. $[t_2, T]$,
11. D na int. $[0, t_1]$, B na int. $[t_1, t_2]$, A na int. $[t_2, t_3]$, C na int. $[t_3, T]$.

Ak $\hat{u} = u_D < 0$ pre všetky $t \in [0, T]$, potom $\dot{B} = u_D$ a z toho vyplýva $B(t) = u_D t + C$. Keďže $B(0) = 0$ tak $B(t) = u_D t < 0$ pre všetky $t \in [0, T]$. spor s tým, že požadujeme aby $B(T) \geq 0$. Z toho vyplýva, že existuje aspoň jedno $t' \in [0, T]$ také, že $\hat{u}(t') = u_H$. To znamená, že optimálne riadenie musí ísť cez A alebo B. Preto možnosti 3., 4. a 8. nemôžu byť optimálnym riadením.

Ak $\hat{u} = u_H > 0$ pre všetky $t \in [0, T]$, tak B stále rastie a preto $B(T) > 0$. Z toho vyplýva $\psi^2(T) = 0$, ale to nemôže nastať ak ψ^1 a ψ^2 leží len v oblastiach A alebo B. Na základe toho môžeme vylúčiť možnosti 1., 2. a 6..

Ak $\hat{s} = 0$ pre všetky $t \in [0, T]$, potom $\dot{K} = 0$ a z toho vyplýva $K(t) = C$. Keďže $K(0) = K_0$ z toho vyplýva $K(t) = K_0 < K_T$ pre všetky $t \in [0, T]$ spor s tým, že požadujeme aby $K(T) \geq K_T$ z toho vyplýva, že existuje aspoň jedno $t' \in [0, T]$ také, že $\hat{s}(t') = 1$. Optimálne riadenie preto musí prechádzať oblasťou B alebo D. Na základe toho vylúčime možnosti 1., 3. a 5..

Zostali teda 4 možnosti a to 7., 9., 10. a 11. To, ktorá z týchto možností nastane závisí od konkrétnej konfigurácie dát. Pozrime sa teraz bližšie na jednotlivé možnosti. Ak optimálne riadenie má tvar

$$\hat{s}(t) = 1, \text{ pre } t \in [0,T], \tag{4.47}$$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u_D, & \text{pre } t \in [0,t_1], \\ u_H, & \text{pre } t \in (t_1,T], \end{cases} \tag{4.48}$$

kde $t_1 \in (0,T)$. Potom $\psi^1(T) > 0$ a $\psi^2(T) > 0$. Z toho podľa (4.35) a (4.36) vyplýva, že $K(T) = K_T$ a $B(T) = 0$. Odozva na riadenie má potom nasledujúci tvar:

$$\hat{K}(t) = \begin{cases} K_0 e^{bt} + \frac{u_D}{b}\left((e^{bt}-1)(\frac{r}{b}-1) - rt\right), & \text{pre } t \in [0,t_1], \\ d(t-t_1) + K(t_1), & \text{pre } t \in [t_1,T], \end{cases} \tag{4.49}$$

$$\hat{B}(t) = \begin{cases} u_D t, & \text{pre } t \in [0,t_1], \\ -\dfrac{db}{r}t - \dfrac{b}{r}(K(t_1)-t_1) - \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{db}{r} - d\right) + \\ e^{r(t-t_1)}\left(B(t_1) + \dfrac{db}{r}t_1 + \dfrac{b}{r}(K(t_1)-t_1) + \dfrac{1}{r}(\dfrac{db}{r} - d)\right), & \text{pre } t \in [t_1,T]. \end{cases} \tag{4.50}$$

Druhá možnosť je, že optimálne riadenie má tvar

$$\hat{s}(t) = \begin{cases} 1, & \text{pre } t \in [0,t_2], \\ 0, & \text{pre } t \in (t_2,T], \end{cases} \tag{4.51}$$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u_D, & \text{pre } t \in [0,t_1], \\ u_H, & \text{pre } t \in (t_1,T], \end{cases} \tag{4.52}$$

kde $t_1 > 0$ a $t_2 > t_1$. Potom $\psi^1(T) > 0$ z čoho podľa (4.35) vyplýva, že $K(T) = K_T$. Odozva má potom tvar:

$$\hat{K}(t) = \begin{cases} K_0 e^{bt} + \frac{u_D}{b}\left((e^{bt}-1)(\frac{r}{b}-1) - rt\right), & \text{pre } t \in [0,t_1], \\ d(t-t_1) + K(t_1), & \text{pre } t \in [t_1,t_2], \\ K(t_2) & \text{pre } t \in [t_2,T], \end{cases} \tag{4.53}$$

$$\hat{B}(t) = \begin{cases} u_D t, & \text{pre } t \in [0,t_1], \\ -\dfrac{db}{r}t - \dfrac{b}{r}(K(t_1)-t_1) - \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{db}{r} - d\right) + \\ e^{r(t-t_1)}\left(B(t_1) + \dfrac{db}{r}t_1 + \dfrac{b}{r}(K(t_1)-t_1) + \dfrac{1}{r}(\dfrac{db}{r} - d)\right), & \text{pre } t \in [t_1,t_2], \\ (B(t_2) + \frac{bK(t_2)-d}{r})e^{r(t-t_2)} - \frac{bK(t_2)-d}{r}, & \text{pre } t \in [t_2,T]. \end{cases} \tag{4.54}$$

Tretia možnosť je, že optimálne riadenie má tvar:

$$\hat{s}(t) = \begin{cases} 1, & \text{pre } t \in [0, t_1], \\ 0, & \text{pre } t \in (t_1, T], \end{cases} \tag{4.55}$$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u_H, & \text{pre } t \in [0, t_2], \\ u_D, & \text{pre } t \in (t_2, T], \end{cases} \tag{4.56}$$

kde $t_1 > 0$ a $t_2 > t_1$. V tomto prípade $\psi^2(T) >$ z čoho vyplýva, že $B(T) = 0$. Odozva na takéto riadenie má tvar:

$$\hat{K}(t) = \begin{cases} K_0 e^{bt} + \frac{u_D}{b}\left((e^{bt} - 1)(\frac{r}{b} - 1) - rt\right), & \text{pre } t \in [0, t_1], \\ K(t_1), & \text{pre } t \in [t_1, t_2], \\ K(t_1), & \text{pre } t \in [t_2, T], \end{cases} \tag{4.57}$$

$$\hat{B}(t) = \begin{cases} u_D t, & \text{pre } t \in [0, t_1], \\ (B(t_1) + \frac{bK(t_1) - d}{r})e^{r(t - t_1)} - \frac{bK(t_1) - d}{r}, & \text{pre } t \in [t_1, t_2], \\ u_D(t - t_2) + B(t_2), & \text{pre } t \in [t_2, T]. \end{cases} \tag{4.58}$$

Posledná možnosť je, že riadenie má tvar:

$$\hat{s}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre } t \in [0, t_2], \\ 0 & \text{pre } t \in (t_2, T], \end{cases} \tag{4.59}$$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u_D & \text{pre } t \in [0, t_1], \\ u_H & \text{pre } t \in (t_1, t_3], \\ u_D & \text{pre } t \in (t_3, T], \end{cases} \tag{4.60}$$

kde $t_1 > 0$, $t_2 > t_1$ a $t_3 > t_2$. Takisto ako v predošlom prípade $\psi^2(T) >$ z čoho vyplýva, že $B(T) = 0$. Odozva potom vyzerá nasledovne:

$$\hat{K}(t) = \begin{cases} K_0 e^{bt} + \frac{u_D}{b}\left((e^{bt} - 1)(\frac{r}{b} - 1) - rt\right), & \text{pre } t \in [0, t_1], \\ d(t - t_1) + K(t_1), & \text{pre } t \in [t_1, t_2], \\ K(t_2), & \text{pre } t \in [t_2, t_3], \\ K(t_2), & \text{pre } t \in [t_3, T], \end{cases} \tag{4.61}$$

$$\hat{B}(t) = \begin{cases} u_D t, & \text{pre } t \in [0, t_1], \\ -\frac{db}{r}t - \frac{b}{r}(K(t_1) - t_1) - \frac{1}{r}\left(\frac{db}{r} - d\right) + & \\ e^{r(t-t_1)}\left(B(t_1) + \frac{db}{r}t_1 + \frac{b}{r}(K(t_1) - t_1) + \frac{1}{r}(\frac{db}{r} - d)\right), & \text{pre } t \in [t_1, t_2], \\ (B(t_2) + \frac{bK(t_2)-d}{r})e^{r(t-t_2)} - \frac{bK(t_2)-d}{r}, & \text{pre } t \in [t_2, t_3], \\ u_D(t - t_3) + B(t_3), & \text{pre } t \in [t_2, T]. \end{cases} \tag{4.62}$$

Konkrétne hodnoty časov prepnutia sa dajú vypočítať využitím adjungovaných premenných, ich hodnôt v čase prepnutia a podmienok na adjungované a stavové premenné v čase T. Pri ich výpočte by sa postupovalo podobne ako v príklade v Kapitole 1. V tomto prípade by dopočítanie konkrétnych časov prepnutia bolo zložitejšie.

Tieto výsledky možeme zhrnúť do nasledovnej lemy:

Lema 4. *V prípade, že $\hat{u}(t), \hat{s}(t)$ spĺňa nutné podmienky optimality s $\psi^0 = 1$ existujú t_1, t_2, t_3, kde $t_1 < t_2 \leq t_3$ a $[t_1, t_3] \neq [0, T]$ také, že pre optimálne riadenie $\hat{u}$, $\hat{s}$ platí:*

$$\hat{s}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre } t \in [0, t_2], \\ 0 & \text{pre } t \in (t_2, T], \end{cases} \tag{4.63}$$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u_D & \text{pre } t \in [0, t_1], \\ u_H & \text{pre } t \in (t_1, t_3], \\ u_D & \text{pre } t \in (t_3, T]. \end{cases} \tag{4.64}$$

Teraz sa budeme zaoberať prípadom $\psi^0 = 0$. Riadenie ako funkciu adjungovanej premennej vyjadríme v nasledujúcej leme.

Lema 5. *Nech štvorica $(\hat{K}(t), \hat{B}(t), \hat{u}(t), \hat{s}(t))$ spĺňa spolu s ψ^0, $\psi^1(t)$ a $\psi^2(t)$. Nech $\psi^0 = 0$. Potom*

$$\hat{s}(t) = \begin{cases} 0, & ak\ \psi^1(t) < 0, \\ 1, & ak\ \psi^1(t) > 0, \end{cases} \tag{4.65}$$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u_D, & ak\ \psi^2(t) < \max\{0, \psi^1\}, \\ u_H, & ak\ \psi^2(t) > \max\{0, \psi^1\}. \end{cases} \tag{4.66}$$

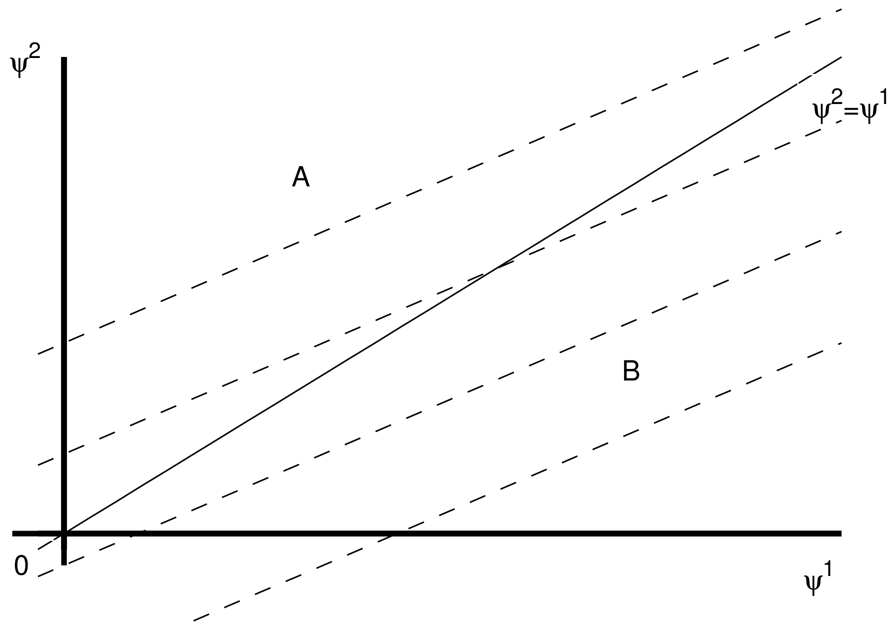
Dôkaz tejto lemy je analogický ako dôkaz lemy 3.

Hodnota optimálneho riadenia závisí od hodnoty adjungovaných premenných. Najprv ukážeme, že adjungované premenné $\psi^1(t)$ a $\psi^2(t)$, ktoré spĺňajú koncovú podmienku $\psi^1(T) \geq 0$ a $\psi^2(T) \geq 0$, sú v závislosti od času klesajúce funkcie. Kedže na základe Lemy 2. vieme, že je medzi nimi lineárna závislosť stačí to ukázať pre jednu z nich. Funkcia $\psi^2(t)$ je klesajúca, ak jej derivácia $\dot{\psi}^2(t)$ je záporná. Potrebujeme preto ukázať, že $\dot{\psi}^2(t) = -r(\psi^1(t)\hat{s} + \mu^1) \leq 0$. Pre $\hat{s} = 1$ platí $\dot{\psi}^2(t) = -r(\psi^1(t) + \mu^1)$. Keď sme sa zaoberali prípadom $\psi^0 = 1$ ukázali sme, že $\psi^2(t)$, ktoré spĺňa koncovú podmienku je klesajúca funkcia času. Keďže derivácia $\psi^2(t)$ má teda rovnaký tvar pre $\psi^0 = 1$ aj pre $\psi^0 = 0$, platí to aj teraz. Pre $\hat{s} = 0$ platí $\dot{\psi}^2(t) = -r\mu^1 \leq 0$, lebo podľa (4.37) platí $\mu_1 \geq 0$. Pre $\hat{s} = 0$ sú teda $\psi^1(t)$ a $\psi^2(t)$ nerastúce funkcie. Ukázali sme teda, že $\psi^1(t)$ a $\psi^2(t)$, ktoré spĺňajú koncovú podmienku $\psi^1(T) \geq 0$ a $\psi^2(T) \geq 0$, sú v závislosti od času klesajúce a keďže musí platiť $\psi^1(T) \geq 0$ a $\psi^2(T) \geq 0$ nachádzame sa len v kladnom kvadrante.

Keďže hodnoty $\psi^1(t)$ a $\psi^2(t)$ sa nachádzajú len v kladnom kvadrante znamená to, že $\hat{s}$ môže nadobúdať len hodnotu 1. To ako vyzerá optimálne riadenie závisí len od hodnoty $\psi^2(t)$. Podľa hodnoty adjungvaných premenných existujú dve kombinácie $\hat{s}$ a $\hat{u}$. Kladný kvadrant je rozdelený na dve oblasti, ktoré označíme A a B. Oblasti A a B a tiež priebeh trajektórií adjungovaných premenných $\psi^1(t)$ a $\psi^2(t)$ je znázornené na obrázku 4.3. Riadenia v oblastiach A a B vyzerajú nasledovne:

- Oblasť A: $\hat{s} = 1$ a $\hat{u} = u_H$
- Oblasť B: $\hat{s} = 1$ a $\hat{u} = u_D$

Nastávajú 3 môžnosti, kde môžu ležať $\psi^1(t)$ a $\psi^2(t)$ pre $t \in [0, T]$. Prvá možnosť je, že $\psi^2(t) < \psi^1(t)$ pre všetky $t \in [0, T]$. V tomto prípade by $\hat{u}$ bolo rovné u_D pre všetky $t \in [0, T]$. Druhá možnosť je, že $\psi^2(t) < \psi^1(t)$ pre všetky $t \in [0, T]$. Potom $\hat{u}$ bolo rovné u_H pre všetky $t \in [0, T]$. Už pri analýze prípadu $\psi^0 = 1$ sme ale ukázali, že $\hat{u}$ nemôže byť rovné u_D pre všetky $t \in [0, T]$ a tiež, že $\hat{u}$ nemôže byť rovné u_H pre všetky $t \in [0, T]$. Zostáva ešte tretia možnosť a to, že existuje $t_1 \in (0, T)$, také že $\psi^2(t) < \psi^1(t)$ pre $t \in [0, t_1]$ a $\psi^2(t) > \psi^1(t)$ pre $t \in [t_1, T]$. Tento výsledok môžeme zhrnúť do nasledovnej lemy:



Obrázok 4.3:

Lema 6. *V prípade, že $\hat{K}(t), \hat{B}(t), \hat{u}(t), \hat{s}(t)$ spĺňa nutné podmienky optimality s $\psi^0 = 0$, tak pre $\hat{u}$, $\hat{s}$ a ich odozvu $\hat{K}(t)$, $\hat{B}(t)$ platí:*

$$\hat{s}(t) = 1, \text{ pre } t \in [0,T], \tag{4.67}$$

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} u_D, & \text{pre } t \in [0,t_1], \\ u_H, & \text{pre } t \in (t_1,T], \end{cases} \tag{4.68}$$

$$\hat{K}(t) = \begin{cases} K_0 e^{bt} + \frac{u_D}{b}\left((e^{bt}-1)(\frac{r}{b}-1) - rt\right), & \text{pre } t \in [0,t_1], \\ d(t-t_1) + K(t_1), & \text{pre } t \in [t_1,T], \end{cases} \tag{4.69}$$

$$\hat{B}(t) = \begin{cases} u_D t, & \text{pre } t \in [0,t_1], \\ -\dfrac{db}{r}t - \dfrac{b}{r}(K(t_1)-t_1) - \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{db}{r} - d\right) + & \\ e^{r(t-t_1)}\left(B(t_1) + \dfrac{db}{r}t_1 + \dfrac{b}{r}(K(t_1)-t_1) + \dfrac{1}{r}(\dfrac{db}{r} - d)\right) & \text{pre } t \in [t_1,T]. \end{cases} \tag{4.70}$$

Toto ale nie je žiadne nové riešenie oproti riešeniam, ktoré sme získali skúmaním prípadu $\psi^0 = 1$.

Podmienky Pontrjaginovho princípu maxima nám dávajú kandidátov na optimálne riadenie uvedených v Leme 4. Potrebujeme ešte ukázať, že títo kandidáti na optimálne riadenie, ktorých sme našli, sú skutočne optimálnymi riadeniami. Na to musia byť splnené postačujúce podmienky. Ukážeme, že sú splnené postačujúce podmiekny uvedené vo Vete 3. Musíme teda ukázať, že funkcia $H(\psi^0, \psi^1, \psi^2, B, K, u, s)$ je konkávna v (K, B, s, u) a funkcie $h_k(K, B, s, u), k = 1, \ldots, 4$ sú kvázikonkávne funkcie v (K, B, s, u). Keďže $H(\psi^0, \psi^1, \psi^2, B, K, u, s)$ je lineárna v (K, B, s, u), tak je konkávna. Funkcie $h_k(K, B, s, u), k = 1, \ldots, 4$ sú tiež lineárne v (K, B, s, u) a teda sú kvázikonkávne. Keďže postačujúce podmienky sú splnené nami nájdení kandidáti na optimálne riešenie sú optimálnym riešením danej úlohy.

Záver

V diplomovej práci sme stručne spracovali teóriu optimálneho riadenia pre úlohy so zmiešanými ohraničeniami na riadiace a stavové premenné. Uviedli sme nutné aj postačujúce podmienky pre takéto úlohy. Pri nutných podmienkach sme uviedli dve verzie podmienky maxima. Prvá z nich je pre úlohy, ktoré obsahujú zmiešané ohraničenia bez ohľadu na to, či obsahujú aj čisté ohraničenia na riadiace premenné. Druhá je špeciálne pre úlohy, ktoré obsahujú aj čisté ohraničenia na riadiace premenné. V prvej kapitole tejto práce sme ukázali, že pre úlohy obsahujúce zmiešané ohraničenia aj čisté ohraničenia na riadiace premmenné sú tieto podmienky sú ekvivalentné.

V nasledujúcich troch kapitolách sme použitie teórie z prvej kapitoly ilustrovali na riešení konkrétnych úloh optimálneho riadenia obsahujúcich zmiešané ohraničenia na riadiace a stavové premenné. Prvou úlohou bol rastový model s exitenčným minimom, ďaľšou lineárna verzia Ramseyho modelu a v poslednej kapitole sme riešili dvojrozmernú úlohu, ktorá predstavovala rastový model rozšírený o možnosť nákupu a predaja dlhopisov. Formulácie úloh boli prebrané z literatúry. Pri každej úlohe sme uviedli jej ekonomickú interpretáciu. Pri riešení úloh sme najprv ukázali, že sú splnené podmienky regularity. Potom sme formulovali nutné podmienky optimality na základe Vety 1. a ich riešením sme určili kandidátov na optimálne riadenie a ich odozvu. V každej úlohe sme tiež ukázali, že sú splnené aj postačujúce podmienky.

Literatúra

[1] Seierstad, A., Sydsæter, K.: Optimal Control Theory with Economic Applications, Elsevier North-Holland, Inc., New York, 1986

[2] Halická, M.: Optimálne riadenie 2, Učebný text k predmetu Optimálne riadenie, 2009

[3] Jurča, P.: Ramseyho model ekonomického rastu ako úloha optimálneho riadenia, Diplomová práca, 2004

[4] Sethi, S.P., Thompson G.L.: Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics, Springer, 2000