

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



Aproximácia cien dlhopisov v dvojfaktorových modeloch úrokových mier

Diplomová práca

2011

Bc. Jana Halgašová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



Aproximácia cien dlhopisov v dvojfaktorových modeloch úrokových mier

Diplomová práca

Evidenčné číslo: 514de50e-ca56-434a-91d0-d0fa2101162c

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Vedúca diplomovej práce:

RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava 2011

Bc. Jana Halgašová



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Jana Halgašová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Aproximácia cien dlhopisov v dvojfaktorových modeloch úrokových mier
Cieľ : Oboznámiť sa s modelmi úrokových mier, kde short rate je súčtom dvoch faktorov. Študovať modely s volatilitou úmernou mocnine úrokovej miery, podľa analógie s jednofaktorovými modelmi. Hľadať aproximáciu riešenia rovnice pre cenu dlhopisu v takomto modeli. Navrhnuť postup kalibrácie a otestovať ho.

Vedúci : RNDr. Mgr. Beáta Stehlíková, PhD.

Dátum zadania: 02.02.2010

Dátum schválenia: 05.04.2011

.....
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

.....
vedúci práce

Podakovanie

Rada by som poďakovala diplomovej vedúcej

RNDr. Beáte Stehlíkovej, PhD.

nielen za cenné návrhy a pripomienky, ale rovnako aj za nadšenie, trpezlivosť a povzbudenie, ktorými mi pomohla pri vypracovaní tejto práce.

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s využitím svojich poznatkov a uvedenej literatúry.

Bratislava 17. apríl 2011

.....
Jana Halgašová

HALGAŠOVÁ, Jana. *Aproximácia cien dlhopisov v dvojfaktorových modeloch úrokových mier* [diplomová práca].

Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Vedúca diplomovej práce: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava, 2011. /65 s./

Abstrakt

Dvojfaktorové modely opisujú okamžitú úrokovú mieru ako funkciu dvoch premenných, ktorých dynamika je charakterizovaná systémom stochastických diferenciálnych rovníc. Táto práca je venovaná dvojfaktorovému modelu typu Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders s korelovanými prírastkami Wienerových procesov. Okamžitá úroková miera v tomto modeli zodpovedá súčtu dvoch mean-reverting procesov s volatilitou úmernou veľkosti príslušného faktora. Takýto model poskytuje flexibilitu potrebnú na zachytenie vývoja okamžitej úrokovej miery v čase. Na druhej strane, ak vyjadríme dynamiku úrokovej miery týmto spôsobom, neexistujú explicitné vzorce pre následný výpočet cien dlhopisov a opcí.

Navrhujeme analytickú aproximačnú formulu pre ceny dlhopisov, odvodenú na základe ceny v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli s korelovanými zložkami. V modeloch Vašíčkovho typu sa predpokladá konštantná volatilita jednotlivých faktorov. Dôsledkom je menšia výpočtová náročnosť a existencia vzorcov pre ceny dlhopisov. Schopnosť takéhoto modelu opísať reálnu dynamiku úrokovej miery je však obmedzená.

Aproximačná formula sa získa nahradením konštantnej volatility v cene pre Vašíčkov model volatilitou citlivou na veľkosť faktorov. Odvodíme presnosť takejto aproximácie a ukážeme jej využitie v kalibrácii. V prvom kroku navrhujeme jednoduchú metódu kalibrácie dvojfaktorového Vašíčkovho modelu s nulovou koreláciou. Hodnoty parametrov a faktorov okamžitej úrokovej miery odhadneme podľa pozorovateľných výnosových kriviek. Tento algoritmus neskôr použijeme ako základ kalibrácie zložitejších modelov. Postup kalibrácie a presnosť navrhutej aproximácie testujeme na dátach simulovaných podľa Coxovho-Ingersollovho-Rossovoho modelu, pre ktorý možno vypočítavať presné ceny dlhopisov. V závere práce aplikujeme metódu na reálne trhové dáta.

Kľúčové slová: dvojfaktorový model úrokovej miery, CKLS model, Vašíčkov model, cena dlhopisu, analytická aproximácia, kalibrácia.

HALGAŠOVÁ, Jana. *Approximation for pricing zero-coupon bonds in two-factor interest rate models* [Master's thesis].

Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics.

Supervisor: RNDr. Beáta Stehlíková, PhD.

Bratislava, 2011. /65 p./

Abstract

In two-factor models, the short-term interest rate is assumed to be a function of two factors, whose dynamics is given by a system of stochastic differential equations. We study the two-factor Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders-type model with correlated increments of Wiener processes. In this model, the short rate is a sum of two dependent mean-reverting processes, each with a volatility proportional to the level of the factor itself. Such a model provides flexibility in capturing the behavior of the short-term interest rate. However, it does not give rise to closed-form bond and option prices.

We propose an analytical approximation formula for pricing zero-coupon bonds based on the two-factor Vasicek model with correlated factors. In the Vasicek-type model, the volatilities of both factors are assumed to be constant. As a result, the model shows high analytic tractability and closed-form solutions do exist for bond prices. Nevertheless, the ability to capture the dynamics of the short-term interest rate is reduced.

The approximative solution is obtained by substituting the volatilities sensitive to the power of factors for the constant volatilities into the Vasicek price. We derive the order of accuracy of this approximation and suggest its use in calibration. First of all, we propose a simple method for calibration of the two-factor Vasicek model with uncorrelated factors. In this method, both parameters and factors of the short-rate are estimated using observable yield curves. Next, we use this algorithm as a basis for calibration of more general models. To test the methodology, we use the simulated data from the Cox-Ingersoll-Ross model where the exact bond prices can be computed. Finally, we apply this method to the real market data.

Keywords: two-factor interest rate model, CKLS model, Vasicek model, bond price, analytical approximation formula, calibration.

Obsah

Úvod	1
1 Teória modelovania úrokovej miery a oceňovania dlhopisov	2
1.1 Základné pojmy	2
1.2 Jednofaktorové rovnovážne modely úrokovej miery	5
1.3 Ceny dlhopisov v jednofaktorových modeloch úrokových mier	7
1.3.1 Ceny dlhopisov vo Vašíčkovom a Coxovom-Ingersollovom-Rossovom modeli	9
1.3.2 Princíp zmeny miery	10
1.3.3 Aproximácia cien dlhopisov v CKLS modeli	12
1.4 Dvojfaktorové rovnovážne modely úrokovej miery	12
2 Dvojfaktorový Vašíčkov model s korelovanými zložkami	15
3 Dvojfaktorový CKLS model s korelovanými zložkami	19
4 Kalibrácia dvojfaktorových modelov úrokových mier	24
4.1 Kalibrácia Vašíčkovho modelu	25
4.1.1 Kalibrácia jednofaktorového Vašíčkovho modelu	25
4.1.2 Kalibrácia dvojfaktorového Vašíčkovho modelu s nulovou koreláciou	29
4.2 Kalibrácia dvojfaktorového CIR modelu s nulovou koreláciou	35
4.3 Kalibrácia CKLS modelu	43
4.3.1 Kalibrácia jednofaktorového CKLS modelu	43
4.3.2 Kalibrácia dvojfaktorového CKLS modelu so známymi parametrami γ a ρ	44
4.3.3 Odhady parametrov γ a ρ v dvojfaktorovom CKLS modeli	46
4.4 Zhrnutie výsledkov zo simulovaných dát	49
4.5 Aplikácia na reálne dáta	50
Záver	54
Literatúra	55

A Numerické metódy pri kalibrácii dvojfaktorového Vašíčkovho modelu	58
A.1 Numerické metódy riešenia sústav lineárnych rovníc	58
A.1.1 Gaussova-Seidelova metóda a SOR metóda	60
A.1.2 Metóda konjugovaných gradientov	61
A.1.3 Huangova projekčná metóda	62
A.2 Kalibrácia dvojfaktorového Vašíčkovho modelu s nulovou koreláciou použitím rôznych numerických metód	64

Úvod

Fungovanie finančných trhov je dnes neodmysliteľne spojené s využitím sofistikovaných matematických modelov a výpočtových algoritmov. Jednou z kľúčových oblastí finančnej matematiky je modelovanie úrokových mier. Hodnota úrokovej miery totiž predstavuje základnú informáciu, nevyhnutnú pre korektné ocenenie ľubovoľného finančného nástroja.

Kľúčovou otázkou pri modelovaní úrokových mier je zachytenie dynamiky okamžitej úrokovej miery ako teoretického začiatku výnosovej krivky. Čím komplexnejší model tejto dynamiky zvolíme, tým bohatšia je množina prípustných tvarov výnosových kriviek. Takýmto spôsobom možno docieľiť zhodu teoretických úrokových mier s hodnotami pozorovanými na trhu. Na druhej strane, zložitosť modelu okamžitej úrokovej miery sa negatívne prejaví pri oceňovaní jej derivátov.

V tejto práci sa budeme zaoberať dvojfaktorovým modelom typu Chan-Karolyi-Longstaff-Sanders (ďalej CKLS), ktorý bol navrhnutý ako zovšeobecnenie viacerých modelov svojej triedy. Okamžitú úrokovú mieru charakterizuje ako súčet dvoch stochastických procesov s volatilitou úmernou veľkosti príslušného faktora. Vďaka tomu je mimoriadne flexibilný a má predpoklady dobre zachytiť vývoj úrokovej miery. Nevýhodou je, že pre takýto model neexistuje explicitný vzorec na výpočet ceny dlhopisu ako najbežnejšieho derivátu úrokových mier. Naším cieľom preto je vyriešiť dve zásadné otázky. Prvou z nich je ocenenie dlhopisu v CKLS modeli pomocou vhodnej aproximačnej formuly. Druhú predstavuje návrh metódy, ktorou na základe pozorovaných výnosových kriviek odhadneme parametre modelu a hodnoty faktorov okamžitej úrokovej miery.

Prácu sme rozdelili na štyri kapitoly. Prvá časť je venovaná stručnému úvodu do problematiky modelovania úrokovej miery a oceňovania dlhopisov. V druhej odvodíme riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli s korelovanými zložkami. V tretej kapitole navrhujeme aproximačnú formulu ceny dlhopisu v CKLS modeli v tvare riešenia pre dvojfaktorový Vašíčkov model s upravenou volatilitou. Následne odvodíme presnosť takejto aproximácie. V záverečnej časti práce sa zaoberáme kalibráciou CKLS modelu. Ako prvý krok navrhujeme algoritmus kalibrácie pre špeciálne prípady tohto modelu - Vašíčkov a Coxov-Ingersollov-Rossov model, v ktorých je odhad parametrov a faktorového rozkladu relatívne jednoduchý. Tento postup skúsime použiť ako základ pre kalibráciu všeobecného CKLS modelu. Navrhnutú aproximačnú formulu a metódu kalibrácie testujeme na simulovaných aj reálnych dátach. Presnosť dosiahnutých výsledkov porovnáваме s inými opísanými metódami.

Kapitola 1

Teória modelovania úrokovej miery a oceňovania dlhopisov

Časová štruktúra úrokových mier je jedným zo základných predmetov finančného modelovania. Efektívne modely úrokovej miery sú nevyhnutné pre správne ocenenie jej derivátov, vyhodnocovanie finančného rizika a tiež nastavenie monetárnej politiky (pozri [4]).

Korektný model úrokovej miery by mal podľa [21] zahŕňať jej základné vlastnosti: nezápornosť, ohraničenosť a tendenciu návratu k rovnovážnej hodnote (mean reverting proces). Kľúčové charakteristiky z hľadiska praktického využitia modelu zdôrazňuje autor v [23]. Dobrý model musí byť dostatočne flexibilný, aby obsiahol rozmanité situácie, ktoré v praxi môžu nastať. Od jeho výstupu požadujeme nielen dodržanie všeobecných vlastností úrokovej miery, ale aj čo najlepšiu zhodu s reálnymi dátami. Pri návrhu modelu treba ďalej zabezpečiť, aby vstupné údaje boli dobre pozorovateľné, alebo sa aspoň dali vypočítať. Tieto vlastnosti by sa pritom nemali spájať so zvýšením zložitosti. Model musí byť taký jednoduchý, aby čas potrebný na získanie odhadov bol prijateľný pre jeho využitie.

Túto kapitolu venujeme vysvetleniu základných pojmov a stručnému prehľadu modelov úrokovej miery. Uvedieme hlavné nástroje stochastického kalkulu a jeho využitie pri oceňovaní derivátov úrokových mier.

1.1 Základné pojmy

Teória úrokovej miery je úzko spätá s časovou hodnotou peňazí. Určitá peňažná suma v súčasnosti má väčšiu hodnotu, než možnosť disponovať takou istou sumou v budúcnosti. Úroková miera predstavuje v tomto prípade mieru preferencie. Na úvod definujeme základné pojmy a zavedieme označenie, ktorého sa budeme v celej práci pridržať.

Bezkupónový dlhopis je kontrakt, ktorý v čase maturity T prinesie držiteľovi peňažnú hodnotu $P(T, T) = 1$. Jeho cenu v čase $t < T$ označujeme $P(t, T)$. Pre čas do splatnosti (maturity) dlhopisu sa používa označenie τ .

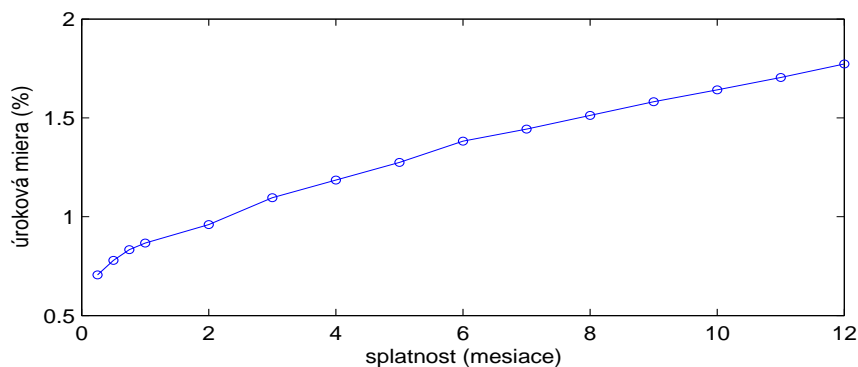
Výnos $R(t, T)$ je odvodený z ceny dlhopisu. Dlhopis s maturitou T má v čase t

výnos $R(t, T)$ definovaný vzťahom

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}, \quad 0 \leq t < T,$$

preto môžeme vyjadriť

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T-t}.$$



Obr. 1.1: Príklad časovej štruktúry úrokových mier - Euribor, 1. marec 2011. Zdroj: <http://www.euribor-ebf.eu>.

Časová štruktúra úrokových mier (výnosová krivka) predstavuje závislosť výnosu $R(t, T)$ od doby do splatnosti dlhopisu τ vo fixovanom časovom bode t .

Okamžitá úroková miera (short-rate) r_t je úroková miera pre dlhopis s okamžitou splatnosťou. Predstavuje začiatok výnosovej krivky:

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) = R(t, t).$$

Pre korektné ocenenie derivátov úrokovej miery je nevyhnutné vziať do úvahy stochastický charakter jej vývoja v čase. Preto v nasledujúcej časti práce predstavujeme základné pojmy a nástroje stochastického kalkulu. Vychádzame z článku [16] a kníh [3] a [29].

Definícia 1.1.1 *Stochastický proces je t -parametrický systém náhodných premenných $\{X(t), t \in I\}$, kde I je interval alebo diskrétna množina indexov.*

Kľúčovým nástrojom pre modelovanie okamžitej úrokovej miery je špeciálny typ stochastického procesu, nazývaný Wienerov proces. Vo finančnej matematike sa rovnako často používa aj jeho zovšeobecnenie - Brownov pohyb.

Definícia 1.1.2 *Brownov pohyb $\{X(t), t \geq 0\}$ s parametrami $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ je t -parametrický systém náhodných premenných, pričom*

- všetky prírastky $X(t+\Delta) - X(t)$ majú normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu\Delta$ a disperziou $\sigma^2\Delta$,
- pre každé delenie $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 \cdots < t_n$ sú prírastky $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezávislé náhodné premenné s parametrami podľa predchádzajúceho bodu,
- $X(0) = 0$ a trajektórie $X(t)$ sú spojité s pravdepodobnosťou 1.

Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ nazývame Wienerov proces.

Modely okamžitej úrokovej miery majú obvykle tvar stochastickej diferenciálnej rovnice

$$d\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, t)dt + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t)d\mathbf{W}(t). \quad (1.1)$$

Pre m -faktorový model je riešenie $\mathbf{r}(t)$ m -rozmerný stochastický proces a $d\mathbf{W}$ označuje maticu prírastkov Wienerovho procesu s rozmermi $m \times m$. Okamžitá úroková miera sa definuje ako funkcia stochastického procesu $\mathbf{r}(t)$. Rovnica (1.1) predstavuje proces difúzie, nazývaný aj Itóov proces.

Modely okamžitej úrokovej miery slúžia na stanovenie cien jej derivátov - funkcií úrokovej miery. Ak úrokovú mieru modelujeme stochastickou diferenciálnou rovnicou, potrebujeme účinný nástroj na prácu s funkciami náhodných premenných. Týmto základným nástrojom stochastickej analýzy je Itóova lema.

Lema 1.1.3 (Itóova lema) *Nech $f(x, t)$ je hladká funkcia dvoch premenných, pričom premenná x je riešením stochastickej diferenciálnej rovnice*

$$dx = \mu(x, t)dt + \sigma(x, t)dw,$$

kde w je Wienerov proces. Potom prvý diferenciál funkcie f je daný vzťahom

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt,$$

dôsledkom čoho funkcia f vyhovuje stochastickej diferenciálnej rovnici

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} dw.$$

Medzi najjednoduchšie deriváty úrokovej miery patria popri dlhopisoch aj deriváty typu swap, swaption, cap, floor a opcie na dlhopisy. Používajú sa na zaistenie proti fluktuáciám úrokovej miery, prípadne naopak na špekulácie. Podrobnejšie sa derivátom úrokovej miery venujú napríklad [18] a [19].

Swap je výmena toku konštantných platieb za tok pohyblivých platieb. Zaväzuje jednu stranu kontraktu platiť po dohodnutú dobu fixný úrok z dohodnutej sumy výmenou za platby plávajúceho úroku od druhého účastníka kontraktu.

Swaption predstavuje pre držiteľa právo, nie však povinnosť, vstúpiť do swapového kontraktu.

Cap predstavuje horné ohraničenie úrokových platieb. Zabezpečuje držiteľovi kompenzáciu dodatočných výdavkov v prípade, že trhová úroková miera prekračuje vopred stanovenú hranicu.

Floor predstavuje dolné ohraničenie úrokových platieb. Je to opak derivátu typu cap.

Pri modelovaní úrokových mier sa možno stretnúť s rozličnými prístupmi. Každý z nich kladie dôraz na inú časť informácie o vývoji úrokovej miery. Môžeme hovoriť o dvoch hlavných triedach týchto modelov (pozri [3]).

Rovnovážne modely boli pôvodne odvodené z teoretických predpokladov o správaní ekonomických subjektov. Základnou myšlienkou prvých modelov bolo dosiahnutie rovnováhy medzi dopytom po dlhopisoch (a iných finančných derivátoch) a ich ponukou. Do tejto skupiny patria napríklad Vašíčkov model (navrhnutý v [32]), alebo Coxov-Ingersollov-Rossov model (uvedený prácou [9]). V neskoršom období vzniklo viacero modifikovaných modelov, vychádzajúcich zo štatistickej analýzy dát. Jedným z nich je Chanov-Karolyiov-Longstaffov-Sandersov model, navrhnutý v článku [5] s cieľom porovnať viacero modelov short-rate. Premostenie medzi týmito rozdielnymi prístupmi predstavuje práca [20]. Dokazuje, že predpisy viacerých modelov, ktoré vznikli na základe štatistickej analýzy, možno odvodiť aj z rovnovážnej teórie.

Bezarbitrážne modely boli vytvorené v snahe odstrániť hlavný nedostatok rovnovážnych modelov - skutočnosť, že často nedokážu súčasnú časovú štruktúru úrokových mier modelovať tak, aby zodpovedala pozorovaným hodnotám. Preto bezarbitrážne modely vychádzajú z aktuálnej časovej štruktúry ako štartovacieho bodu. Ďalší vývoj je modelovaný tak, aby bol konzistentný so začiatočnou časovou štruktúrou. Takýto postup je sprevádzaný vyššou zložitou modelov. Do tejto skupiny patrí napríklad Hullov a Whiteov bezarbitrážny model, navrhnutý v článku [15].

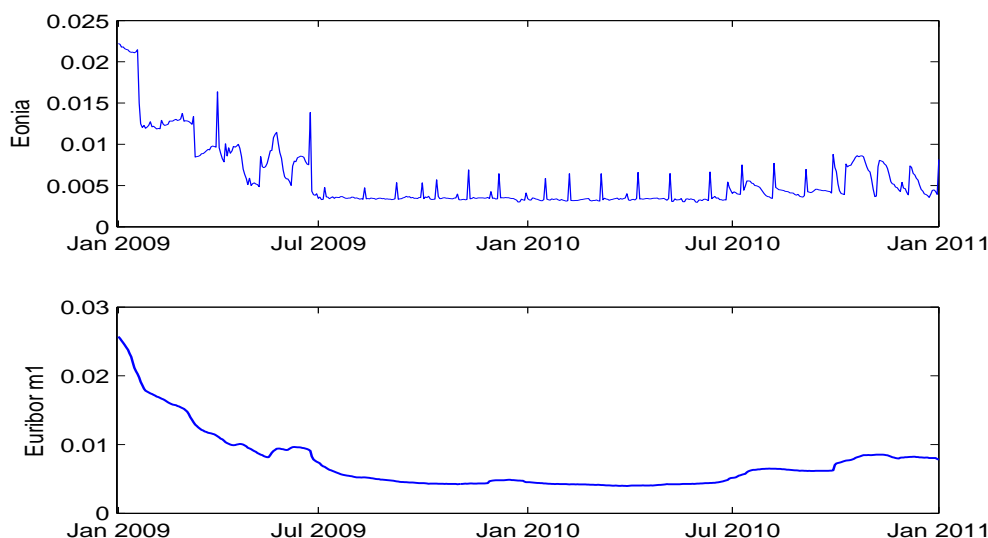
Oceňovanie dlhopisov v dvojfaktorových rovnovážnych modeloch úrokových mier je ťažiskom tejto práce. Budeme sa zaoberať konkrétnou triedou týchto modelov, ktorú špecifikujeme neskôr.

1.2 Jednofaktorové rovnovážne modely úrokovej miery

V jednofaktorových modeloch je vývoj short-rate r vyjadrený v závislosti od jediného faktora - úrokovej miery samotnej. Jej dynamika je charakterizovaná stochastickou diferenciálnou rovnicou, ktorá má všeobecný tvar

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw. \quad (1.2)$$

Deterministický člen $\mu(r, t)dt$ predstavuje trend (drift) vo vývoji úrokovej miery. Funkcia $\sigma(r, t)$ charakterizuje volatilitu procesu. Čím väčšia je hodnota stochastického člena $\sigma(r, t)dw$, tým väčšia je náhodná fluktuácia úrokovej miery okolo trendovej zložky.



Obr. 1.2: Vývoj jednoduchovej (Eonia) a jednomesačnej (Euribor m1) úrokovej miery na medzibankovom trhu v rokoch 2009 a 2010. Zdroj: <http://www.euribor-ebf.eu>.

Na základe pozorovaní možno usúdiť, že okamžitá úroková miera sa obvykle vracia k dlhodobej priemernej hodnote (viď jednoduchá a jednomesačná úroková miera na obrázku 1.2). Táto skutočnosť viedla k myšlienke zvoliť deterministický člen v tvare $\mu(r, t) = \kappa(\theta - r)$, kde κ a θ sú kladné konštanty. Stredná hodnota úrokovej miery je potom rýchlosťou κ priťahovaná k limitnej úrokovej miere θ . Platí (pozri [29])

$$dE(r_t) = E(dr_t) = \kappa(\theta - E(r_t))dt + E(\sigma(r, t)dw) = \kappa(\theta - E(r_t))dt,$$

teda

$$E(r_t) = \theta + (r_0 - \theta)e^{-\kappa t},$$

z čoho následne vyplýva, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(r_t) = \theta.$$

Stochastický proces s takýmito vlastnosťami sa nazýva mean reversion proces.

Od voľby funkcie volatility $\sigma(r, t)$ závisia ďalšie vlastnosti modelu short-rate. Jednoduché modely, ktoré sa používajú najčastejšie, sú podľa empirických štúdií (napr. [5]) málo efektívne. Dynamiku úrokovej miery možno presnejšie zachytiť sofistikovanejšími modelmi s väčším počtom parametrov. Pre takéto modely úrokovej miery je však následné ocenenie jej derivátov zložitejšie.

Vašíčkov model [32] je jedným z prvých navrhnutých modelov okamžitej úrokovej miery. Charakterizuje short-rate ako stochastický proces s konštantnou volatilitou σ :

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw, \quad (1.3)$$

kde $\kappa, \theta, \sigma > 0$. Takto modelované úrokové miery sú normálne rozdelené. Táto vlastnosť na jednej strane mimoriadne zjednodušuje oceňovanie derivátov, na strane druhej však vedie k zrejmemu nedostatku modelu: r môže s kladnou pravdepodobnosťou nadobúdať aj záporné hodnoty, čo je v rozpore s nezápornosťou úrokových mier.

Coxov-Ingersollov-Rossov model [9] (ďalej CIR model) bol podľa [2] po dlhú dobu najpoužívanejším modelom short-rate. Relatívna jednoduchosť ho robí výhodným pre analytické oceňovanie finančných derivátov, voľba stochastickej zložky zabezpečuje nezápornosť úrokových mier. Namiesto konštantnej hodnoty je v tomto prípade použitá volatilita úmerná úrovni short-rate. Proces difúzie bol navrhnutý v tvare

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw. \quad (1.4)$$

Keď sa hodnota r blíži k nule, znižuje sa aj volatilita procesu. Ak by r dosiahlo nulovú hodnotu, stochastický člen procesu by bol nulový a deterministický člen kladný. Úroková miera by preto s istotou opäť nadobudla kladnú hodnotu. Navyše, ak je splnená podmienka $2\kappa\theta \geq \sigma^2$, pravdepodobnosť pre $r = 0$ je nulová (pozri [12]).

Chanov-Karolyiov-Longstaffov-Sandersov model [5] (ďalej CKLS model) bol navrhnutý pre účely porovnania dovedy známych modelov ako ich zovšeobecnenie. Dynamika short-rate je charakterizovaná rovnicou

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma dw, \quad (1.5)$$

kde $\gamma \geq 0$. Pre hodnotu parametra $\gamma = 0$ zodpovedá tento zápis Vašíčkovmu modelu, pre $\gamma = 1/2$ CIR modelu. Táto empirická štúdia ukázala, že dva uvedené najznámejšie modely nedokážu dostatočne efektívne opísať vývoj úrokových mier. Dynamike short-rate viac zodpovedala funkcia volatility, ktorá pružne reaguje na zmenu veľkosti r . Autori dosiahli dobré výsledky pri použití modelov, ktoré pripúšťajú hodnoty $\gamma \geq 1$. Optimálnu hodnotu γ pre jednofaktorový model odhadli ako 1.5.

Po tomto úvodnom článku sa do diskusie o správnom tvare volatility v modeloch short-rate a o jej citlivosti na hodnoty úrokovej miery zapojili viacerí ďalší autori. Štúdia [11] skúma stochastickú dynamiku jednomesačnej úrokovej miery na medzi-bankovom trhu v desiatich krajinách. Odhady parametra γ sa pre jednotlivé krajiny výrazne líšia. Dosahujú hodnoty od 0.20 do 1.56.

Z uvedených výsledkov vyplýva, že je nevyhnutné sústrediť sa na modely, ktoré umožňujú zvoliť aj $\gamma \neq 0$, $\gamma \neq 1/2$. Nevýhodou CKLS modelu je skutočnosť, že pri jeho použití neexistujú analytické riešenia pre ceny derivátov short-rate.

1.3 Ceny dlhopisov v jednofaktorových modeloch úrokových mier

Bezakupónový dlhopis je základným derivátom okamžitej úrokovej miery. V tejto časti práce sa zameriame na výpočet ceny dlhopisu v prípade, že dynamiku short-rate

opisujeme jednofaktorovým modelom. Uvažujme všeobecný jednofaktorový model

$$dr = \mu(r, t)dt + \sigma(r, t)dw.$$

Cena bezkupónového dlhopisu $P(r, t, T)$ je funkciou maturity T , aktuálneho času t a hodnoty okamžitej úrokovej miery r v tomto čase. Stručne priblížime odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice (PDR) pre cenu P , pričom postupovať budeme podľa [18].

Podľa Itóovej lemy musí platiť:

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r} dw.$$

Keď označíme trend a volatilitu ceny dlhopisu $\mu_P(r, t)$, respektíve $\sigma_P(r, t)$, dostaneme zjednodušený zápis:

$$dP = \mu_P dt + \sigma_P dw.$$

V ďalšom kroku vytvoríme bezrizikové portfólio. Skonštruujeme portfólio z jedného dlhopisu splatného v čase T_1 v kombinácii s Δ dlhopismi splatnými v čase T_2 . Hodnota takéhoto portfólia je v každom čase

$$\pi = P(r, t, T_1) + \Delta P(r, t, T_2).$$

Pre zmenu ceny portfólia dostávame

$$\begin{aligned} d\pi &= dP(r, t, T_1) + \Delta dP(r, t, T_2) \\ &= (\mu_P(r, t, T_1) + \Delta \mu_P(r, t, T_2))dt + (\sigma_P(r, t, T_1) + \Delta \sigma_P(r, t, T_2))dw. \end{aligned}$$

Aby sme eliminovali stochastický člen rovnice, musí byť počet dlhopisov Δ zvolený nasledovne:

$$\Delta = -\frac{\sigma_P(r, t, T_1)}{\sigma_P(r, t, T_2)}.$$

Takto zostrojené portfólio možno označiť ako bezrizikové, lebo zmena jeho hodnoty je deterministická

$$d\pi = \left(\mu_P(r, t, T_1) - \frac{\sigma_P(r, t, T_1)}{\sigma_P(r, t, T_2)} \mu_P(r, t, T_2) \right) dt.$$

Vylúčenie arbitrážnych príležitostí znamená podmienku $d\pi = r\pi dt$, pretože výnos z bezrizikového portfólia musí zodpovedať bezrizikovej úrokovej miere. V dôsledku tejto podmienky musí platiť

$$\mu_P(r, t, T_1) - \frac{\sigma_P(r, t, T_1)}{\sigma_P(r, t, T_2)} \mu_P(r, t, T_2) = r \left(P(r, t, T_1) - \frac{\sigma_P(r, t, T_1)}{\sigma_P(r, t, T_2)} P(r, t, T_2) \right),$$

čo implikuje rovnosť

$$\frac{\mu_P(r, t, T_1) - rP(r, t, T_1)}{\sigma_P(r, t, T_1)} = \frac{\mu_P(r, t, T_2) - rP(r, t, T_2)}{\sigma_P(r, t, T_2)}. \quad (1.6)$$

Vzťah (1.6) musí byť splnený pre ľubovoľne zvolené T_1 a T_2 . Výrazy na jednotlivých stranách rovnosti teda nemôžu závisieť od času do splatnosti. Funkcia $\lambda(r, t)$, ktorá pre ľubovoľnú hodnotu T spĺňa

$$\lambda(r, t) = \frac{\mu_P(r, t, T) - rP(r, t, T)}{\sigma_P(r, t, T)}, \quad (1.7)$$

sa označuje ako trhová cena rizika. Po dosadení μ_P a σ_P do rovnice (1.7) a jednoduchej úprave dostaneme PDR pre cenu dlhopisu:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu(r, t) - \lambda(r, t)\sigma(r, t))\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r, t)}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \quad (1.8)$$

pre $0 \leq t < T$ a $r > 0$. Z definície bezkupónového dlhopisu vyplýva koncová podmienka pre rovnicu (1.8) v tvare:

$$P(r, T, T) = 1 \quad \text{pre každe } r > 0.$$

1.3.1 Ceny dlhopisov vo Vaııckovom a Coxovom-Ingersollovom-Rossovom modeli

Popularita Vaııckovho a CIR modelu je spôsobená tým, že umožňujú najst analytické riešenie pre ceny derivátov úrokových mier. Uvedieme stručný postup pre Vaııckov model. Odvodenie pre CIR model je podobné, uvádzame preto len výsledok. Celý postup poskytuje viacero učebníc, napríklad [18].

Stochastický proces úrokovej miery je vo Vaııckovom modeli charakterizovaný vzťahom (1.3). Trhová cena rizika je konštantná: $\lambda(r, t) = \lambda$. Rovnicu (1.8) potom možno prepísať do tvaru

$$-\frac{\partial P}{\partial \tau} + (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad (1.9)$$

kde $P(r, \tau)$ je cena dlhopisu pre príslušnú short-rate a čas do splatnosti. Sucasne musí být splnená zaıatocna podmienka

$$P(r, 0) = 1 \quad \text{pre každe } r > 0. \quad (1.10)$$

Riešenie pre cenu dlhopisu hľadáme v tvare

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r},$$

z rovnice (1.9) preto po úprave dostávame:

$$(\dot{A} - A\dot{B}r) + \frac{\sigma^2}{2}B^2A - (\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma)AB - rA = 0.$$

Tento vzťah je vhodné upraviť do tvaru

$$\left(-\dot{A} + \frac{\sigma^2}{2}AB^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma)AB\right) + rA(\dot{B} + \kappa B - 1) = 0.$$

Predchádzajúca rovnosť musí platiť pre ľubovoľné r , čo je splnené len ak sú obe zátvorky identicky nulové. Dostávame tak sústavu diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} -\dot{A} + \frac{\sigma^2}{2}AB^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma)AB &= 0 \\ \dot{B} + \kappa B - 1 &= 0 \end{aligned}$$

s počiatočnými podmienkami $A(0) = 1$ a $B(0) = 0$ podľa (1.10). Riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice pre B spĺňajúce začiatočnú podmienku je

$$B(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa\tau}}{\kappa}. \quad (1.11)$$

Integrovaním rovnice pre A dostaneme

$$\ln A = \int \frac{\sigma^2}{2}B^2 - (\kappa\theta - \lambda\sigma)B d\tau$$

a nasledovne

$$\ln A(\tau) = \left[\frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa\tau}) - \tau \right] R_\infty - \frac{\sigma^2}{4\kappa^3}(1 - e^{-\kappa\tau})^2, \quad (1.12)$$

kde

$$R_\infty = \theta - \frac{\lambda\sigma}{\kappa} - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}$$

je limita časovej štruktúry úrokových mier pre $\tau \rightarrow \infty$.

Aj v prípade CIR modelu, kedy uvažujeme trhovú cenu rizika $\lambda(r, t) = \lambda\sqrt{r}$, je cena dlhopisu $P(r, \tau)$ vyjadrená v tvare

$$P(r, \tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}. \quad (1.13)$$

Po zavedení označenia

$$\psi = \kappa + \lambda\sigma, \quad \phi = \sqrt{\psi^2 + 2\sigma^2} = \sqrt{(\kappa + \lambda\sigma)^2 + 2\sigma^2}$$

zodpovedajú $A(\tau)$ a $B(\tau)$ vo vzťahu (1.13) výrazom:

$$B(\tau) = \frac{2(e^{\phi\tau} - 1)}{(\psi + \phi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} \quad (1.14)$$

$$A(\tau) = \left(\frac{2\phi e^{(\phi+\psi)\tau/2}}{(\psi + \phi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} \right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}. \quad (1.15)$$

1.3.2 Princíp zmeny miery

Pri zápise dynamiky okamžitej úrokovej miery stochastickou diferenciálnou rovnicou si môžeme vybrať z dvoch základných prístupov. Niekedy je vhodné vyjadrenie v reálnej pravdepodobnostnej miere, aké sme uvádzali doteraz. V iných prípadoch,

napríklad pri oceňovaní derivátov, je výhodnejšie použiť zápis v rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere. Problematika zmeny miery je pomerne náročná a jej vysvetlenie si vyžaduje definovať pojmy podmienenej strednej hodnoty a martingalu. V teoretickom úvode k tejto diplomovej práci sa obmedzíme len na stručné objasnenie zmeny vo vyjadrení dynamiky short-rate. Vychádzame pritom z učebnice [19], ktorá sa týmito otázkami zaoberá podrobnejšie a ozrejmuje teda aj cestu k výsledkom, ktoré tu budeme prezentovať.

Dynamiku short-rate v CKLS modeli sme v reálnej pravdepodobnostnej miere charakterizovali rovnicou

$$dr(t) = \kappa(\theta - r)dt + \sigma r^\gamma(t)dw(t), \quad (1.16)$$

čo zodpovedá zápisu

$$dr(t) = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^\gamma(t)dw(t), \quad (1.17)$$

kde $\alpha = \kappa\theta$ a $\beta = -\kappa$. Zmenu miery možno veľmi zjednodušene opísať ako prechod od vychýleného Wienerovho procesu v reálnej miere P k štandardnému Wienerovmu procesu (definícia (1.1.2)) v rizikovo neutrálnej miere Q . Podľa Girsanovovej vety (pozri opäť [19]) platí

$$d\tilde{w}(t) = dw(t) + \lambda(r)dt, \quad \text{resp.} \quad dw(t) = d\tilde{w}(t) - \lambda(r)dt,$$

kde vlnovka označuje zápis v rizikovo neutrálnej miere. Pôvodnú rovnicu (1.17) v miere P potom môžeme prepísať ako

$$dr(t) = (\alpha + \beta r - \lambda(r)\sigma r^\gamma(t))dt + \sigma r^\gamma(t)d\tilde{w}(t)$$

v miere Q . Tento vzťah možno upraviť na tvar

$$dr(t) = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r)dt + \sigma r^\gamma(t)d\tilde{w}(t),$$

pričom závislosť medzi reálnymi a rizikovo neutrálnymi parametrami je určená trhovou cenou rizika

$$\lambda(r) = \frac{(\alpha - \tilde{\alpha}) + (\beta - \tilde{\beta})r}{\sigma r^\gamma}.$$

Vašíčkov model je špeciálnym prípadom všeobecného zápisu (1.16) pre voľbu $\gamma = 0$. Okamžitú úrokovú mieru charakterizuje v reálnej miere ako stochastický proces

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma dw.$$

Pre konštantnú trhovú cenu rizika λ potom v miere Q dostávame

$$dr = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r)dt + \sigma d\tilde{w},$$

pričom prevod parametrov vyjadrujú vzťahy $\tilde{\alpha} = \kappa\theta - \lambda\sigma$, $\tilde{\beta} = -\kappa$.

CIR modelu zodpovedá rovnica (1.16) pre prípad $\gamma = 1/2$, teda stochastický proces v tvare

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dw.$$

Ak uvažujeme trhovú cenu rizika $\lambda = \lambda\sqrt{r}$, zápis má v rizikovo neutrálnej miere tvar

$$dr = (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}r)dt + \sigma\sqrt{r}d\tilde{w},$$

kde $\tilde{\alpha} = \kappa\theta$ a $\tilde{\beta} = -\kappa - \lambda\sigma$.

V pokračovaní práce kvôli väčšej prehľadnosti zjednodušíme používaný zápis a vyjadrenie v rizikovo neutrálnej miere nebudeme viac značiť vlnovkou.

1.3.3 Aproximácia cien dlhopisov v CKLS modeli

CKLS model charakterizuje dynamiku short-rate rovnicou (1.5), čo v bezrizikovej miere pri vhodnej voľbe trhového rizika zodpovedá zápisu

$$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^\gamma dw. \quad (1.18)$$

Pre takýto proces vo všeobecnosti neexistuje explicitné riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice (1.8) pre ceny dlhopisov (len pre špeciálnu voľbu parametra $\gamma = 0$ alebo $\gamma = 1/2$). Preto boli navrhnuté viaceré aproximačné formuly, ktoré umožňujú oceniť dlhopisy aj v tomto modeli s relatívne vysokou presnosťou (pozri články [7], [26] a [24]). Z nášho hľadiska je kľúčová aproximácia na základe Vašíčkovho modelu z [24].

V prípade voľby parametra $\gamma = 0$, teda pre Vašíčkov model, existuje explicitné riešenie ceny dlhopisu $P^{vas}(\tau, r)$, pre ktoré platí

$$\ln P^{vas}(\tau, r) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \right) \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right) + \frac{\sigma^2}{4\beta^3} (1 - e^{\beta\tau})^2 + \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} r. \quad (1.19)$$

Aproximácia ceny P^{ap} pre všeobecný prípad (1.18) bola navrhnutá v tvare

$$\ln P^{ap}(\tau, r) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{2\beta^2} \right) \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right) + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{4\beta^3} (1 - e^{\beta\tau})^2 + \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} r. \quad (1.20)$$

Táto aproximačná formula teda vznikla substitúciou volatility σr^γ namiesto konštantnej volatility σ v cene dlhopisu podľa Vašíčkovho modelu. Možno dokázať, že takto navrhnutá aproximácia má presnosť štvrtého rádu. Ak označíme presnú cenu dlhopisu P^{ex} , platí

$$\ln P^{ap}(\tau, r) - \ln P^{ex}(\tau, r) = c_4(r)\tau^4 + o(\tau^4) \quad \text{pre } \tau \rightarrow 0^+. \quad (1.21)$$

1.4 Dvojfaktorové rovnovážne modely úrokovej miery

V jednofaktorových modeloch je celá časová štruktúra úrokových mier jednoznačne určená začiatkom krivky. Jediný stochastický faktor v modeli teda predstavuje samotná okamžitá úroková miera. Takýto prístup má pre svoju jednoduchosť viacero výhod, ale neposkytuje dostatočnú flexibilitu na modelovanie skutočného správania úrokových mier.

K riešeniu tohto nedostatku prispievajú viacfaktorové modely úrokovej miery. Vychádzajú z predpokladu, že jej vývoj môže závisieť od niekoľkých stochastických faktorov. Tým sa výrazne rozšíri množina tvarov výnosových kriviek, ktoré sme na základe modelov short-rate schopní vygenerovať. Na druhej strane, zložitosť takto opísanej dynamiky úrokovej miery sa premietne aj do oceňovania jej derivátov. Pre niektoré modely to znamená analyticky náročnejší výpočet ceny dlhopisu, pre mnohé explicitná formula na ocenenie dlhopisu neexistuje (viac o tejto téme možno nájsť napríklad v [18]).

Vo všeobecnom dvojfaktorovom modeli chápeme okamžitú úrokovú mieru r ako funkciu dvoch stochastických faktorov x , y , ktoré môžu navzájom od seba závisieť. Tomu zodpovedá zápis:

$$\begin{aligned} r &= r(x, y) \\ dx &= \mu_x(x, y)dt + \sigma_x(x, y)dw_x \\ dy &= \mu_y(x, y)dt + \sigma_y(x, y)dw_y \\ \text{Cov}[dw_x, dw_y] &= \rho dt. \end{aligned}$$

V niektorých prípadoch je short-rate modelovaná ako súčet jednotlivých faktorov, pričom ich interpretácia môže byť rôzna. Najznámejšími z tejto skupiny sú dvojfaktorový Vašíčkov model a dvojfaktorový CIR model. Stochastický proces pre každý faktor v nich zodpovedá dynamike short-rate v príslušnom jednofaktorovom modeli (pozri [29]).

Dvojfaktorový Vašíčkov model charakterizuje dynamiku zložiek short-rate dvojicou stochastických diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1dw_1 \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2dw_2. \end{aligned}$$

Dvojfaktorový CIR model modeluje úrokovú mieru ako súčet dvoch stochastických procesov v tvare

$$\begin{aligned} dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1\sqrt{r_1}dw_1 \\ dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2\sqrt{r_2}dw_2. \end{aligned}$$

Konvergenčné modely tvoria samostatnú skupinu v rámci viacfaktorových modelov okamžitej úrokovej miery. Charakterizujú dynamiku úrokovej miery krajiny so samostatnou menou v závislosti od dynamiky úrokovej miery menovej únie. Konvergenčný model Corzovej a Schwartza navrhnutý v [8] predpokladá pre domácu r_d a európsku r_e úrokovú mieru časový vývoj v tvare

$$\begin{aligned} dr_e &= c(d - r_e)dt + \sigma_edw_e \\ dr_d &= (a + b(r_e - r_d))dt + \sigma_d dw_d. \end{aligned}$$

Fongov-Vašíčkov model so stochastickou volatilitou prináša v práci [13] celkom odlišný prístup k modelovaniu stochastickej zložky short-rate. Volatilita okamžitej úrokovej miery má v tomto prípade sama dynamiku stochastického procesu, čo zodpovedá sústave rovníc

$$\begin{aligned} dr &= \kappa_1(\theta_1 - r)dt + \sqrt{y}dw_1 \\ dy &= \kappa_2(\theta_2 - y)dt + v\sqrt{y}dw_2. \end{aligned}$$

Ceny dlhopisov v jednotlivých dvojfaktorových modeloch úrokových mier nebudeme na tomto mieste odvodzovať. Uvedieme len explicitné formuly pre Vašíčkov a CIR model s predpokladom nulovej korelácie medzi faktormi. Postupy ich odvodenia sa podobajú výpočtu ceny dlhopisu v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli s korelovanými zložkami, ktorý bude obsahom kapitoly 2. Možno sa s nimi oboznámiť napríklad v učebnici [29]. Označme cenu dlhopisu $P(r_1, r_2, \tau)$. Pre oba modely je cena dlhopisu súčinom riešení z príslušných jednofaktorových modelov:

$$P(r_1, r_2, \tau) = A_1(\tau)A_2(\tau)e^{-B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2}. \quad (1.22)$$

Vo Vašíčkovom modeli sú funkcie $A_i(\tau)$ a $B_i(\tau)$ určené vzorcami (1.11) a (1.12). Pre CIR model $A_i(\tau)$ a $B_i(\tau)$ taktiež vyhovujú vzorcom (1.14) a (1.15) pre jednofaktorový model.

Ako dôsledok predchádzajúceho potom platí, že časová štruktúra úrokových mier v oboch prípadoch zodpovedá súčtu výnosov v jednofaktorových modeloch:

$$R(r_1, r_2, t, t + \tau) = -\frac{\ln P(r_1, r_2, \tau)}{\tau} = -\frac{\ln P_1(r_1, \tau)}{\tau} - \frac{\ln P_2(r_2, \tau)}{\tau}.$$

Kapitola 2

Dvojfaktorový Vašíčkov model s korelovanými zložkami

V nasledujúcej časti práce odvodíme explicitný vzorec na výpočet ceny dlhopisu v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli bez zjednodušujúceho predpokladu nulovej korelácie prírastkov Wienerových procesov dw_1 , dw_2 pre jednotlivé faktory. Takýto model je charakterizovaný sústavou:

$$\begin{aligned}r &= r_1 + r_2 \\dr_1 &= \kappa_1(\theta_1 - r_1)dt + \sigma_1dw_1 \\dr_2 &= \kappa_2(\theta_2 - r_2)dt + \sigma_2dw_2 \\Cov[dw_1, dw_2] &= \rho dt.\end{aligned}$$

Najprv odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu $P(r_1, r_2, t)$, ktorá je funkciou faktorov r_1 , r_2 a času t . Z viacrozmernej Itóovej lemy (pozri napr. [18]) dostávame:

$$dP = \mu dt + \sigma dw_1 + \tilde{\sigma} dw_2, \quad (2.1)$$

kde

$$\mu = \frac{\partial P}{\partial t} + \kappa_1(\theta_1 - r_1) \frac{\partial P}{\partial r_1} + \kappa_2(\theta_2 - r_2) \frac{\partial P}{\partial r_2} + \frac{\sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \frac{\partial^2 P}{\partial r_1 \partial r_2}, \quad (2.2)$$

$$\sigma = \sigma_1 \frac{\partial P}{\partial r_1}, \quad \tilde{\sigma} = \sigma_2 \frac{\partial P}{\partial r_2}. \quad (2.3)$$

V ďalšom kroku zostrojíme bezrizikové portfólio π ako kombináciu troch dlhopisov so splatnosťami T_1 , T_2 a T_3 . Objem jednotlivých aktív v portfóliu označíme ako V_1 , V_2 a V_3 . Pre hodnotu portfólia π a jej zmenu v čase musí potom platiť:

$$\begin{aligned}\pi &= P(T_1)V_1 + P(T_2)V_2 + P(T_3)V_3 \\d\pi &= dP(T_1)V_1 + dP(T_2)V_2 + dP(T_3)V_3 \\&= (\mu(T_1)V_1 + \mu(T_2)V_2 + \mu(T_3)V_3)dt \\&\quad + (\sigma(T_1)V_1 + \sigma(T_2)V_2 + \sigma(T_3)V_3)dw_1 \\&\quad + (\tilde{\sigma}(T_1)V_1 + \tilde{\sigma}(T_2)V_2 + \tilde{\sigma}(T_3)V_3)dw_2,\end{aligned}$$

kde $P(T_i)$ predstavuje cenu dlhopisu so splatnosťou T_i . Aby bola zabezpečená bezrizikovosť tohto portfólia, musia byť z dynamiky jeho ceny eliminované stochastické členy. To možno dosiahnuť zvolením správnych množstiev V_1 , V_2 a V_3 :

$$\sigma(T_1)V_1 + \sigma(T_2)V_2 + \sigma(T_3)V_3 = 0 \quad (2.4)$$

$$\tilde{\sigma}(T_1)V_1 + \tilde{\sigma}(T_2)V_2 + \tilde{\sigma}(T_3)V_3 = 0. \quad (2.5)$$

Na základe princípu vylúčenia arbitráže musí platiť:

$$d\pi = r\pi dt,$$

teda výnos zo skonštruovaného bezrizikového portfólia musí zodpovedať bezrizikovej úrokovej miere. Ako dôsledok tejto rovnosti a dynamiky ceny portfólia dostávame:

$$\mu(T_1)V_1 + \mu(T_2)V_2 + \mu(T_3)V_3 = r\pi.$$

Tento vzťah je výhodné prepísať do tvaru:

$$(\mu(T_1) - rP(T_1))V_1 + (\mu(T_2) - rP(T_2))V_2 + (\mu(T_3) - rP(T_3))V_3 = 0. \quad (2.6)$$

Sústava lineárnych rovníc (2.4), (2.5), (2.6) má nenulové riešenie $(V_1, V_2, V_3)^T$ práve vtedy, keď existujú také $\lambda_1(r_1, r_2, t)$ a $\lambda_2(r_1, r_2, t)$, že platí:

$$\mu(T_j) - rP(T_j) = \lambda_1\sigma(T_j) + \lambda_2\tilde{\sigma}(T_j), \quad \text{pre } j = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

Poznamenajme, že trhové ceny rizika jednotlivých faktorov λ_1 a λ_2 nemôžu závisieť od maturít dlhopisov, nakoľko T_1 , T_2 a T_3 boli zvolené ľubovoľne.

Označme $\tau = T - t$ dobu do maturity dlhopisu. Za predpokladu, že trhové ceny rizika λ_1 , λ_2 sú konštanty, dostávame dosadením (2.2) a (2.3) do rovnice (2.7) parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial \tau} + [\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1]\frac{\partial P}{\partial r_1} + [\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2]\frac{\partial P}{\partial r_2} \\ + \frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} + \rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2 P}{\partial r_1\partial r_2} - (r_1 + r_2)P = 0 \end{aligned}$$

s počiatočnou podmienkou $P(r_1, r_2, 0) = 1, \forall r_1, r_2 > 0$. Riešenia hľadáme v separovanom tvare

$$P(r_1, r_2, \tau) = P_1(r_1, \tau)P_2(r_2, \tau),$$

pričom z pôvodnej počiatočnej podmienky dostávame $P_1(r_1, 0) = 1$ a $P_2(r_2, 0) = 1$. Rovnicu pre cenu dlhopisu potom môžeme zapísať ako:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P_1}{\partial \tau}P_2 - \frac{\partial P_2}{\partial \tau}P_1 + [\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1\sigma_1]\frac{\partial P_1}{\partial r_1}P_2 + [\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2\sigma_2]\frac{\partial P_2}{\partial r_2}P_1 \\ + \frac{\sigma_1^2}{2}\frac{\partial^2 P_1}{\partial r_1^2}P_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 P_2}{\partial r_2^2}P_1 + \rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial P_1}{\partial r_1}\frac{\partial P_2}{\partial r_2} - (r_1 + r_2)P_1P_2 = 0. \end{aligned}$$

Každú z funkcií P_i hľadáme v tvare $P_i = A_i(\tau)e^{-B_i(\tau)r_i}$. Pre jednotlivé parciálne derivácie preto platí:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \tau} = \dot{A}_i e^{-B_i r_i} - \dot{B}_i A_i e^{-B_i r_i} r_i, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial r_i} = -A_i B_i e^{-B_i r_i}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 P_i}{\partial r_i^2} = A_i B_i^2 e^{-B_i r_i}. \quad (2.10)$$

Nech $A_1 A_2 = A$. Po dosadení (2.8), (2.9) a (2.10) do PDR pre cenu dlhopisu a nasledovnej úprave získavame:

$$\begin{aligned} & -\dot{A} + \dot{B}_1 A r_1 + \dot{B}_2 A r_2 - [\kappa_1(\theta_1 - r_1) - \lambda_1 \sigma_1] A B_1 - [\kappa_2(\theta_2 - r_2) - \lambda_2 \sigma_2] A B_2 \\ & + \frac{\sigma_1^2}{2} A B_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2} A B_2^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 A B_1 B_2 - r_1 A - r_2 A = 0 \end{aligned}$$

Táto rovnosť musí byť splnená pre všetky r_i , teda dostávame:

$$\dot{A} = (\lambda_1 \sigma_1 - \kappa_1 \theta_1) A B_1 + (\lambda_2 \sigma_2 - \kappa_2 \theta_2) A B_2 + \frac{\sigma_1^2}{2} A B_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2} A B_2^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 A B_1 B_2 \quad (2.11)$$

$$\dot{B}_1 = 1 - \kappa_1 B_1 \quad (2.12)$$

$$\dot{B}_2 = 1 - \kappa_2 B_2. \quad (2.13)$$

Riešenia lineárnych obyčajných diferenciálnych rovníc (2.12) a (2.13) pre počiatočnú podmienku $B_i(0) = 0$ majú tvar:

$$B_i(\tau) = \frac{1 - e^{-\kappa_i \tau}}{\kappa_i}. \quad (2.14)$$

S využitím podmienky $A(0) = 1$ z rovnice (2.11) dostávame:

$$\ln A(\tau) = \int_0^\tau (\lambda_1 \sigma_1 - \kappa_1 \theta_1) B_1 + (\lambda_2 \sigma_2 - \kappa_2 \theta_2) B_2 + \frac{\sigma_1^2}{2} B_1^2 + \frac{\sigma_2^2}{2} B_2^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 B_1 B_2 ds. \quad (2.15)$$

Po dosadení (2.14) a opätovnom využití počiatočnej podmienky vyjadríme:

$$\begin{aligned} \ln A(\tau) &= -\tau R_\infty - \frac{\sigma_1^2}{4\kappa_1^3} (1 - e^{-\kappa_1 \tau})^2 - \frac{\sigma_2^2}{4\kappa_2^3} (1 - e^{-\kappa_2 \tau})^2 \\ &+ (1 - e^{-\kappa_1 \tau}) \frac{1}{\kappa_1} \left(R_{\infty 1} - \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa_1 \kappa_2} \right) + (1 - e^{-\kappa_2 \tau}) \frac{1}{\kappa_2} \left(R_{\infty 2} - \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa_1 \kappa_2} \right) \\ &+ \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa_1 \kappa_2} \frac{(1 - e^{-(\kappa_1 + \kappa_2) \tau})}{\kappa_1 + \kappa_2}, \end{aligned}$$

kde

$$R_{\infty i} = \theta_i - \frac{\lambda_i \sigma_i}{\kappa_i} - \frac{\sigma_i^2}{2\kappa_i^2}, \quad i = 1, 2 \quad R_\infty = R_{\infty 1} + R_{\infty 2} - \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{\kappa_1 \kappa_2}.$$

Predchádzajúci vzťah možno upraviť na tvar:

$$\ln A = \ln \tilde{A}_1 + \ln \tilde{A}_2 + \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\kappa_1 \kappa_2} \left[\tau - \frac{1}{\kappa_1} (1 - e^{-\kappa_1 \tau}) - \frac{1}{\kappa_2} (1 - e^{-\kappa_2 \tau}) + \frac{1 - e^{-(\kappa_1 + \kappa_2) \tau}}{\kappa_1 + \kappa_2} \right], \quad (2.16)$$

pričom \tilde{A}_1 a \tilde{A}_2 predstavujú zložku ceny dlhopisu v jednofaktorovom Vašíčkovom modeli, danú vzťahom (1.12). Vo všeobecnosti pre cenu dlhopisu v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli platí:

$$\ln P^{vas}(r_1, r_2, \tau) = \ln A(\tau) - B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2, \quad (2.17)$$

kde A , B_1 a B_2 sme odvodili vyššie.

Kapitola 3

Dvojfaktorový CKLS model s korelovanými zložkami

Dvojfaktorový CKLS model je zovšeobecnením dvojfaktorového Vašíčkovho a dvojfaktorového CIR modelu. Spája v sebe výhody bohatej množiny prípustných tvarov výnosových kriviek a citlivosti volatility na hodnoty úrokovej miery. Budeme uvažovať najvšeobecnejší tvar tohto modelu, ktorý umožňuje zachytiť aj koreláciu prírastkov Wienerových procesov pre jednotlivé zložky short-rate:

$$\begin{aligned}r &= r_1 + r_2 \\dr_1 &= (\alpha_1 + \beta_1 r_1)dt + \sigma_1 r_1^\gamma dw_1 \\dr_2 &= (\alpha_2 + \beta_2 r_2)dt + \sigma_2 r_2^\gamma dw_2 \\Cov[dw_1, dw_2] &= \rho dt.\end{aligned}$$

Parciálnu diferenciálnu rovnicu pre cenu dlhopisu $P(r_1, r_2, t)$ odvodíme rovnakým postupom, ako bol použitý v kapitole 2:

$$\begin{aligned}-\frac{\partial P}{\partial \tau} + [\alpha_1 + \beta_1 r_1] \frac{\partial P}{\partial r_1} + [\alpha_2 + \beta_2 r_2] \frac{\partial P}{\partial r_2} \\+ \frac{\sigma_1^2 r_1^{2\gamma}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_1^2} + \frac{\sigma_2^2 r_2^{2\gamma}}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r_2^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 (r_1 r_2)^\gamma \frac{\partial^2 P}{\partial r_1 \partial r_2} - (r_1 + r_2)P = 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Všeobecnosť CKLS modelu, taká výhodná pre zachytenie skutočnej dynamiky úrokovej miery, sa pri oceňovaní jej derivátov stáva výrazným nedostatkom. Uvedená rovnica pre cenu dlhopisu nemá analytické riešenie, čo nás núti hľadať vhodnú aproximačnú formulu, dostatočne presnú pre modelovanie výnosových kriviek a súčasne praktickú pri kalibrácii.

Pri návrhu vhodnej formuly budeme vychádzať z aproximácie ceny dlhopisu v jednofaktorovom CKLS modeli uvedenej v [24], ktorú sme už spomenuli v podkapitole 1.3.3. Autorka ako aproximačnú formulu použila upravenú cenu dlhopisu vo Vašíčkovom modeli. Následne ukázala, že jej presnosť je štvrtého rádu. Tento postup teraz zovšeobecníme pre dvojfaktorový model. Aproximačnú formulu ceny dlhopisu P^{ap} dvojfaktorovom CKLS modeli navrhne tak, že substituujeme $\sigma_i r_i^\gamma$ namiesto konštantnej volatility σ_i v cene pre dvojfaktorový Vašíčkov model:

$$\ln P^{ap}(\tau, r_1, r_2) = \ln A^{ap}(\tau, r_1, r_2) - B_1(\tau)r_1 - B_2(\tau)r_2,\tag{3.2}$$

kde

$$\begin{aligned} \ln A^{ap} &= \left(\tau - \frac{1}{\beta_1} (e^{\beta_1 \tau} - 1) \right) \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\sigma_1^2 r_1^{2\gamma}}{2\beta_1^2} \right) + \frac{\sigma_1^2 r_1^{2\gamma}}{4\beta_1^3} (1 - e^{\beta_1 \tau})^2 \\ &+ \left(\tau - \frac{1}{\beta_2} (e^{\beta_2 \tau} - 1) \right) \left(\frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\sigma_2^2 r_2^{2\gamma}}{2\beta_2^2} \right) + \frac{\sigma_2^2 r_2^{2\gamma}}{4\beta_2^3} (1 - e^{\beta_2 \tau})^2 \\ &+ \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2 (r_1 r_2)^\gamma}{\beta_1 \beta_2} \left(\tau + \frac{1}{\beta_1} (1 - e^{\beta_1 \tau}) + \frac{1}{\beta_2} (1 - e^{\beta_2 \tau}) - \frac{1 - e^{(\beta_1 + \beta_2) \tau}}{\beta_1 + \beta_2} \right) \\ B_i(\tau) &= \frac{e^{\beta_i \tau} - 1}{\beta_i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Kľúčovou vlastnosťou aproximačnej formuly je jej presnosť v porovnaní s exaktným riešením. Najjednoduchší prípad, v ktorom má zmysel uvažovať o presnosti navrhutej aproximácie, je CIR model s nulovou koreláciou, ktorý zodpovedá hodnotám parametrov $\gamma = 0.5$ a $\rho = 0$. Ako uvádza vzťah (1.22), pre presnú cenu dlhopisu P^{ex} v tomto modeli platí $\ln P^{ex} = \ln P_1 + \ln P_2$, kde P_1 a P_2 sú ceny dlhopisov pre jednofaktorový CIR model. Z presnosti aproximácie pre jednofaktorové modely (1.21) vyplýva, že v tomto prípade $\ln P^{ap} - \ln P^{ex} = O(\tau^4)$. Nasledujúca veta ukazuje, že aproximácia má taký istý rád chyby aj vo všeobecnosti, teda pre ľubovoľné hodnoty γ a ρ .

Veta 3.0.1 *Nech P^{ap} je aproximujúca a P^{ex} presná cena dlhopisu v CKLS modeli. Potom pre $\tau \rightarrow 0^+$*

$$\ln P^{ap}(\tau, r_1, r_2) - \ln P^{ex}(\tau, r_1, r_2) = c_4(r_1, r_2) \tau^4 + o(\tau^4)$$

kde

$$\begin{aligned} c_4(r_1, r_2) &= -\frac{1}{24} \frac{\gamma}{r_1^2 r_2^2} \left[(2\gamma - 1) (r_1^{4\gamma} r_2^2 \sigma_1^4 + r_1^2 r_2^{4\gamma} \sigma_2^4) + 2\gamma \rho \sigma_1^2 \sigma_2^2 (r_1 r_2)^{2\gamma+1} \right. \\ &+ \rho(\gamma - 1) (r_1^{3\gamma} r_2^{\gamma+2} \sigma_1^3 \sigma_2 + r_1^{\gamma+2} r_2^{3\gamma} \sigma_1 \sigma_2^3) \\ &+ 2(\alpha_2 + \beta_2 r_2) (\rho \sigma_1 \sigma_2 r_1^{2+\gamma} r_2^{1+\gamma} + \sigma_2^2 r_1^2 r_2^{1+2\gamma}) \\ &\left. + 2r_1 r_2^2 \sigma_1 (\alpha_1 + \beta_1 r_1) (r_1^{2\gamma} \sigma_1 + \rho \sigma_2 (r_1 r_2)^\gamma) \right]. \end{aligned}$$

Dôkaz Presné riešenie rovnice (3.1) pre cenu dlhopisu v CKLS modeli sme označili P^{ex} . Definujme funkciu $f^{ex}(\tau, r_1, r_2) = \ln P^{ex}(\tau, r_1, r_2)$. Potom platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^{ex}}{\partial \tau} &= P^{ex} \frac{\partial f^{ex}}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial P^{ex}}{\partial r_i} &= P^{ex} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_i}, \\ \frac{\partial^2 P^{ex}}{\partial r_i^2} &= P^{ex} \left[\left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_i} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_i^2} \right], \\ \frac{\partial^2 P^{ex}}{\partial r_1 \partial r_2} &= P^{ex} \left[\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_1 \partial r_2} \right]. \end{aligned}$$

Parciálna diferenciálna rovnica (3.1) má pre funkciu f^{ex} tvar:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial f^{ex}}{\partial \tau} + [\alpha_1 + \beta_1 r_1] \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_1} + [\alpha_2 + \beta_2 r_2] \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_2} \\ & + \frac{\sigma_1^2 r_1^{2\gamma}}{2} \left[\left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_1^2} \right] + \frac{\sigma_2^2 r_2^{2\gamma}}{2} \left[\left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_2^2} \right] \\ & + \rho \sigma_1 \sigma_2 (r_1 r_2)^\gamma \left[\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 f^{ex}}{\partial r_1 \partial r_2} \right] - (r_1 + r_2) = 0. \end{aligned}$$

Pre aproximáciu $f^{ap}(\tau, r_1, r_2) = \ln P^{ap}(\tau, r_1, r_2)$ dostávame z pôvodnej PDR rovnicu s netriviálnou pravou stranou $h(\tau, r_1, r_2)$:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial f^{ap}}{\partial \tau} + [\alpha_1 + \beta_1 r_1] \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_1} + [\alpha_2 + \beta_2 r_2] \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_2} \\ & + \frac{\sigma_1^2 r_1^{2\gamma}}{2} \left[\left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_1} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{ap}}{\partial r_1^2} \right] + \frac{\sigma_2^2 r_2^{2\gamma}}{2} \left[\left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_2} \right)^2 + \frac{\partial^2 f^{ap}}{\partial r_2^2} \right] \\ & + \rho \sigma_1 \sigma_2 (r_1 r_2)^\gamma \left[\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 f^{ap}}{\partial r_1 \partial r_2} \right] - (r_1 + r_2) = h(\tau, r_1, r_2). \end{aligned}$$

V ďalšom kroku dosadíme do predchádzajúcej rovnice aproximáciu ceny dlhopisu (3.2) a rozvineme všetky členy do Taylorových rozvojev vzhľadom na τ . Dostávame:

$$h(\tau, r_1, r_2) = k_3(r_1, r_2)\tau^3 + o(\tau^3),$$

kde pre funkciu k_3 platí

$$\begin{aligned} k_3(r_1, r_2) = & \frac{1}{6} \frac{\gamma}{r_1^2 r_2^2} \left((2\gamma - 1)(r_1^{4\gamma} r_2^2 \sigma_1^4 + r_1^2 r_2^{4\gamma} \sigma_2^4) + \rho(\gamma - 1)(r_1^{3\gamma} r_2^{\gamma+2} \sigma_1^3 \sigma_2 + r_1^{\gamma+2} r_2^{3\gamma} \sigma_1 \sigma_2^3) \right. \\ & + 2(\alpha_2 + \beta_2 r_2)(\rho \sigma_1 \sigma_2 r_1^{2+\gamma} r_2^{1+\gamma} + \sigma_2^2 r_1^2 r_2^{1+2\gamma}) + 2\gamma \rho \sigma_1^2 \sigma_2^2 (r_1 r_2)^{2\gamma+1} \\ & \left. + 2r_1 r_2^2 \sigma_1 (\alpha_1 + \beta_1 r_1) (r_1^{2\gamma} \sigma_1 + \rho \sigma_2 (r_1 r_2)^\gamma) \right). \end{aligned}$$

Uvažujme funkciu $g(\tau, r_1, r_2) = f^{ap} - f^{ex}$. Pre jej parciálne derivácie dostávame:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial r_i} \right)^2 &= \left(\frac{\partial f^{ap}}{\partial r_i} \right)^2 - \left(\frac{\partial f^{ex}}{\partial r_i} \right)^2 - 2 \frac{\partial g}{\partial r_i} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_i}, \quad i = 1, 2, \\ \frac{\partial g}{\partial r_1} \frac{\partial g}{\partial r_2} &= \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{ap}}{\partial r_2} - \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_1} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_2} - \frac{\partial g}{\partial r_1} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_2} - \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_1} \frac{\partial g}{\partial r_2}. \end{aligned}$$

Preto pre funkciu g platí rovnosť:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial g}{\partial \tau} + [\alpha_1 + \beta_1 r_1] \frac{\partial g}{\partial r_1} + [\alpha_2 + \beta_2 r_2] \frac{\partial g}{\partial r_2} + \frac{\sigma_1^2 r_1^{2\gamma}}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r_1^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial r_1^2} \right] \\ & + \frac{\sigma_2^2 r_2^{2\gamma}}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r_2^2} \right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial r_2^2} \right] + \rho \sigma_1 \sigma_2 (r_1 r_2)^\gamma \left[\frac{\partial g}{\partial r_1} \frac{\partial g}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 g}{\partial r_1 \partial r_2} \right] \\ & = h(\tau, r_1, r_2) - \sigma_1^2 r_1^{2\gamma} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_1} \frac{\partial g}{\partial r_1} - \sigma_2^2 r_2^{2\gamma} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_2} \frac{\partial g}{\partial r_2} - \rho \sigma_1 \sigma_2 (r_1 r_2)^\gamma \left[\frac{\partial g}{\partial r_1} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_2} - \frac{\partial g}{\partial r_2} \frac{\partial f^{ex}}{\partial r_1} \right]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Rozvinutie riešenia tejto rovnice do Taylorovho rozvoja vzhľadom na τ je tvaru

$$g(\tau, r_1, r_2) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(r_1, r_2)\tau^i = \sum_{i=\omega}^{\infty} c_i(r_1, r_2)\tau^i,$$

kde $c_\omega(r_1, r_2)\tau^\omega$ je prvý nenulový člen radu. Potom určite platí:

$$\partial_\tau g = \omega c_\omega(r_1, r_2)\tau^{\omega-1} + o(\tau^{\omega-1}).$$

Poznamenajme, že $\omega \neq 0$. Koeficient c_0 nemôže byť prvým nenulovým členom rozvoja, pretože predstavuje hodnotu funkcie g v čase splatnosti dlhopisu. Pre funkciu g platí $g(0, r_1, r_2) = f^{ap}(0, r_1, r_2) - f^{ex}(0, r_1, r_2)$, teda je rozdielom logaritmov dvojice cien maturujúceho dlhopisu. Presná i aproximujúca cena dlhopisu je v čase jeho splatnosti jednotková. Rozdiel logaritmov týchto cien sa preto rovná nule.

Okrem funkcie $h(\tau, r_1, r_2) = k_3(r_1, r_2)\tau^3 + o(\tau^3)$ sú všetky členy v rovnici (3.3) násobkom aspoň jednej z parciálnych derivácií $\frac{\partial g}{\partial r_1}$ a $\frac{\partial g}{\partial r_2}$. Tieto parciálne derivácie sú rádu $O(\tau^\omega)$. Z tohto dôvodu sú všetky členy s výnimkou $h(\tau, r_1, r_2)$ rádu $o(\tau^{\omega-1})$ pre $\tau \rightarrow 0^+$. Aby bola rovnica (3.3) splnená, musí platiť:

$$-\omega c_\omega(r_1, r_2)\tau^{\omega-1} = k_3(r_1, r_2)\tau^3.$$

Z tejto rovnice dostávame $\omega = 4$, čo znamená

$$g(\tau, r_1, r_2) = \ln P^{ap}(\tau, r_1, r_2) - \ln P^{ex}(\tau, r_1, r_2) = -\frac{1}{4}k_3(r_1, r_2)\tau^4 + o(\tau^4).$$

Dosadením $k_3(r_1, r_2)$ dostaneme tvrdenie vety.

□

Poznamenajme, že zápis vety v tvare rozdielu logaritmov, namiesto samotných cien dlhopisov, je výhodný z hľadiska výpočtu relatívnej chyby a rozdielov vo výnosových krivkách.

Dôsledok 3.0.2 *Z vety 3.0.1 vyplýva, že*

1. *relatívna chyba P je daná vzťahom*

$$\frac{P^{ap}(\tau, r_1, r_2) - P^{ex}(\tau, r_1, r_2)}{P^{ex}(\tau, r_1, r_2)} = c_4(r_1, r_2)\tau^4 + o(\tau^4) \quad \text{pre } \tau \rightarrow 0^+,$$

2. *chybu v časovej štruktúre úrokových mier môžeme vyjadriť ako*

$$R^{ap}(\tau, r_1, r_2) - R^{ex}(\tau, r_1, r_2) = -c_4(r_1, r_2)\tau^3 + o(\tau^3) \quad \text{pre } \tau \rightarrow 0^+.$$

Dôkaz Podľa vety 3.0.1 platí $\ln P^{ap} - \ln P^{ex} = c_4(r_1, r_2)\tau^4 + o(\tau^4)$. Z toho vyplýva, že

$$\frac{P^{ap}}{P^{ex}} = e^{c_4(r_1, r_2)\tau^4 + o(\tau^4)}.$$

Rozvinutím do Taylorovho radu vzhľadom na τ dostávame:

$$\frac{P^{ap}}{P^{ex}} = 1 + c_4(r_1, r_2)\tau^4 + o(\tau^4) \quad \text{pre } \tau \rightarrow 0^+.$$

Potom musí platiť aj

$$\frac{P^{ap}(\tau, r_1, r_2) - P^{ex}(\tau, r_1, r_2)}{P^{ex}(\tau, r_1, r_2)} = c_4(r_1, r_2)\tau^4 + o(\tau^4) \quad \text{pre } \tau \rightarrow 0^+.$$

Druhá poznámka priamočiaro vyplýva zo vzorca pre výpočet výnosov $R(\tau, r) = -\ln P(\tau, r)/\tau$ a vety 3.0.1:

$$\begin{aligned} R^{ap}(\tau, r_1, r_2) - R^{ex}(\tau, r_1, r_2) &= -\frac{\ln P^{ap}(\tau, r_1, r_2) - \ln P^{ex}(\tau, r_1, r_2)}{\tau} \\ &= -c_4(r_1, r_2)\tau^3 + o(\tau^3) \quad \text{pre } \tau \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Kapitola 4

Kalibrácia dvojfaktorových modelov úrokových mier

Voľba modelu okamžitej úrokovej miery zohráva pri výpočte teoretických výnosov kľúčovú úlohu. Viacfaktorové modely ponúkajú širšiu škálu prípustných tvarov výnosových kriviek než jednofaktorové. Na druhej strane, ak chápeme okamžitú úrokovú mieru ako súčet viacerých faktorov, výnosová krivka je jednoznačne určená až informáciou o rozklade short-rate na jednotlivé zložky. Priblíženie teoretických hodnôt empirickým dátam si teda často vyžaduje nielen použitie numerických metód na oceňovanie dlhopisov, ale aj zložitejšie postupy pri odhadovaní parametrov modelu.

Kalibrácia modelov okamžitej úrokovej miery môže byť založená na minimalizácii odchýlok teoretických výnosov od hodnôt pozorovaných na trhu. Takýto prístup bol zvolený napríklad v prácach [30] a [27]. Nech R_{ij} označuje výnos pozorovaný v i -ty deň pre maturitu τ_j a $R(\tau_j, r_{1i}, r_{2i})$ výnos vypočítaný pre príslušnú dobu do splatnosti z dvojfaktorového modelu, pričom r_{1i} a r_{2i} predstavujú rozklad short-rate na faktory v deň i . Váhy označíme w_{ij} . V najvšeobecnejšom prípade hľadáme také hodnoty parametrov modelu $\alpha, \beta, \sigma, \gamma$, rozkladu na faktory $\mathbf{r}(\cdot)$ a korelácie ich prírastkov ρ , ktoré minimalizujú funkciu

$$F(\alpha, \beta, \sigma, \gamma, \mathbf{r}(\cdot), \rho) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(R(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}) - R_{ij} \right)^2. \quad (4.1)$$

Pretože rozklad short-rate na faktory je v každý z n dní pozorovaní iný, predstavuje $\mathbf{r}(\cdot)$ maticu $2 \times n$ hodnôt. Namiesto presného riešenia $R(\tau, r_1, r_2)$ musíme v prípade dvojfaktorového CKLS modelu použiť aproximáciu $R^{ap}(\tau, r_1, r_2)$. Vypočítame ju ako $R^{ap} = -\ln P^{ap} / \tau$ s použitím aproximačnej formuly (3.2).

Bez ohľadu na používaný model, nie je možné vypočítať výnosové krivky bez znalosti okamžitej úrokovej miery alebo jednotlivých jej zložiek. Okamžitá úroková miera, definovaná ako začiatok časovej štruktúry úrokových mier, je však teoretická veličina, a teda nie je pozorovateľná. Autori ju niekedy aproximujú reálnymi krátkodobými výnosmi, napríklad hodnotami overnightu (úroku na jednodňovú pôžičku) v práci [27] alebo jednomesačnými výnosmi v prácach [5] a [11]. Použitie jednomesačných výnosov je však v rozpore s významom short-rate ako limity úrokových mier pre nulovú

splatnosť a preto ani vypočítané výnosové krivky nemôžeme korektne interpretovať. V uvedených prácach tento problém nevznikol, lebo uvažovali jediný časový rad ako aproximáciu short-rate, nie celé výnosové krivky. Nahradenie short-rate hodnotami overnightu tiež nie je celkom správne, pretože táto jednodňová úroková miera môže byť príliš ovplyvnená špekuláciami na finančných trhoch. V našej práci budeme k odhadu okamžitej úrokovej miery z pozorovaných výnosov pristupovať ako k súčasť kalibrácie jednotlivých modelov.

Prvú časť tejto kapitoly venujeme kalibrácii Vašíčkovho modelu. Ukážeme, ako predpoklad konštantnej volatility v tomto modeli zjednodušuje odhad okamžitej úrokovej miery a jej faktorového rozkladu. V druhej a tretej časti budeme pokračovať kalibráciou dvojfaktorového CIR a dvojfaktorového CKLS modelu. Postup kalibrácie je v oboch prípadoch založený na odhadoch parametrov a faktorov short-rate pomocou Vašíčkovho modelu, ktoré sú východiskom pre ďalšie úpravy. Pri kalibrácii CKLS modelu načrtneme aj problematiku odhadu citlivosti volatility na hodnoty úrokovej miery a odhadu korelácie prírastkov jednotlivých faktorov. V závere kapitoly zhrnieme výsledky kalibrácie na simulovaných výnosových krivkách a následne aplikujeme navrhnuté metódy na reálne dáta.

4.1 Kalibrácia Vašíčkovho modelu

Jednoduchosť Vašíčkovho modelu je výhodou nielen pri analytickom oceňovaní dlhopisov, ale aj pri jeho kalibrácii. Ukážeme, ako možno jednoducho odhadnúť parametre a okamžitú úrokovú mieru v prípade jedno- i dvojfaktorového Vašíčkovho modelu pomocou sústav lineárnych rovníc. Tieto odhady sú vhodným východiskovým bodom pre kalibráciu zložitejších modelov.

4.1.1 Kalibrácia jednofaktorového Vašíčkovho modelu

Jeden z možných prístupov ku kalibrácii jednofaktorového Vašíčkovho modelu a odhadu okamžitej úrokovej miery je opísaný v diplomovej práci [1]. Vstupné dáta v tejto metóde predstavujú výnosové krivky z určitého časového obdobia. Na začiatku výpočtu sú zvolené štartovacie hodnoty okamžitej úrokovej miery. Ďalší postup spočíva v opakovaní dvoch krokov. V prvom kroku sa odhadnuté hodnoty short-rate použijú na výpočet parametrov, ktoré minimalizujú sumu štvorcov odchýlok teoretických a pozorovaných výnosov. V druhom kroku sa potom na základe odhadnutých parametrov nájdu optimálne hodnoty okamžitej úrokovej miery. Tie v ďalšej iterácii vstupujú do prvej fázy. Testovaním na simulovaných dátach autorka ukázala, že odhadované hodnoty okamžitej úrokovej miery konvergujú k skutočným.

Hodnoty short-rate však nie je nutné počítať iteračne. Cenu bezkupónového dlhopisu v jednofaktorovom Vašíčkovom modeli možno zapísať v tvare:

$$\ln P(\tau, r) = c_0(\tau)r + c_1(\tau)\alpha + c_2(\tau)\sigma^2, \quad (4.2)$$

kde

$$c_0 = \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta}, \quad c_1 = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right], \quad c_2 = \frac{1}{2\beta^2} \left[\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta\tau})^2}{2\beta} \right].$$

Minimalizujeme účelovú funkciu

$$F(\alpha, \beta, \sigma, \mathbf{r}(\cdot)) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(R(\tau_j, r_i) - R_{ij} \right)^2, \quad (4.3)$$

pričom teoretický výnos v i -ty deň pre j -tu splatnosť vypočítame ako

$$R(\tau_j, r_i) = \frac{-\ln P(\tau_j, r_i)}{\tau_j}$$

podľa (4.2). Funkcia (4.3) je konvexná nielen vzhľadom na premenné α a σ^2 , ale vďaka predpokladu konštantnej volatility aj vzhľadom na hodnoty okamžitej úrokovej miery $r_i, i = 1, \dots, n$. Ak fixujeme β ako parameter, môžeme optimálne hodnoty všetkých ostatných premenných nájsť derivovaním účelovej funkcie. Keď položíme derivácie rovné nule, dostávame sústavu $n + 2$ lineárnych rovníc, ktorú dokážeme efektívne riešiť. Túto sústavu môžeme zapísať v maticovom tvare

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Jednotlivé bloky sú nasledovné:

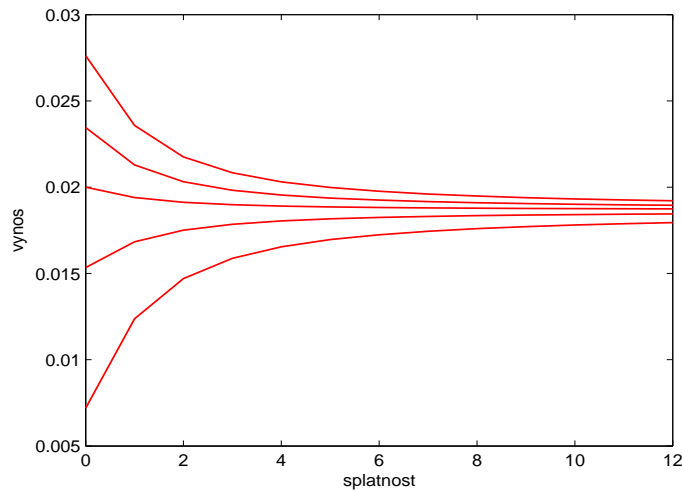
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1^2 & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1 c_2 \\ \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1 c_2 & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j} c_1 c_0 & \sum_j \frac{w_{2,j}}{\tau_j} c_1 c_0 & \dots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j} c_1 c_0 \\ \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j} c_2 c_0 & \sum_j \frac{w_{2,j}}{\tau_j} c_2 c_0 & \dots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j} c_2 c_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_j \frac{w_{2,j}}{\tau_j^2} c_0^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_0^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = [\alpha, \sigma^2] \quad \mathbf{y}' = [r_1, r_2, \dots, r_n] \quad \mathbf{u}' = \left[-\sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j} R_{i,j} c_1, \quad -\sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j} R_{i,j} c_2 \right]$$

$$\mathbf{v}' = \left[-\sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j} R_{1,j} c_0, \quad -\sum_j \frac{w_{2,j}}{\tau_j} R_{2,j} c_0, \quad \dots, \quad -\sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j} R_{n,j} c_0 \right].$$



Obr. 4.1: Príklady vygenerovaných výnosových kriviek pre zvolené parametre jednofaktorového Vašíčkovho modelu.

Vďaka špeciálnej štruktúre uvažovaného lineárneho systému je možné redukovať jeho rozmer. Využívame pri tom skutočnosť, že k bloku \mathbf{D} , ktorý je diagonálny, vieme jednoducho nájsť inverznú maticu \mathbf{D}^{-1} . Vektor \mathbf{y} potom môžeme vyjadriť ako:

$$\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y} = \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{v} - \mathbf{C}\mathbf{x}).$$

Z rovnice $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{u}$ dosadením za \mathbf{y} dostávame:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v}.$$

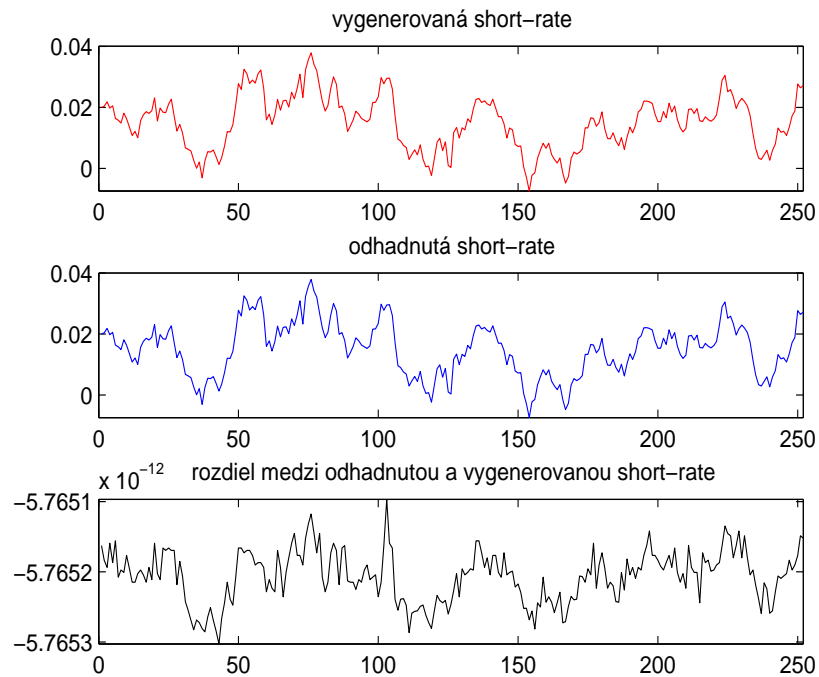
Tento systém je rozmeru 2×2 . Odstránili sme tak závislosť medzi počtom vstupných pozorovaní a rozmerom riešenej sústavy. Po nájdení optimálnych hodnôt parametrov α , σ a faktorového rozkladu pre danú hodnotu β predstavuje odhad parametra β jednorozmerný optimalizačný problém. Vyriešime ho pomocou funkcie *fminsearch* pre voľnú optimalizáciu v programe Matlab.

Navrhnutú metódu kalibrácie vyskúšame na simulovaných výnosových krivkách. Výhodou simulovaných dát sú známe hodnoty parametrov, ktoré umožňujú spätne

κ	θ	λ	σ
16.2000	0.01700	-0.5294	0.05085
α	β	σ	
0.3023	-16.2000	0.05085	

Tabuľka 4.1: Parametre procesu jednofaktorového Vašíčkovho modelu použité na generovanie simulovaných dát v reálnej miere a po prevedení do rizikovo neutrálnej miery.

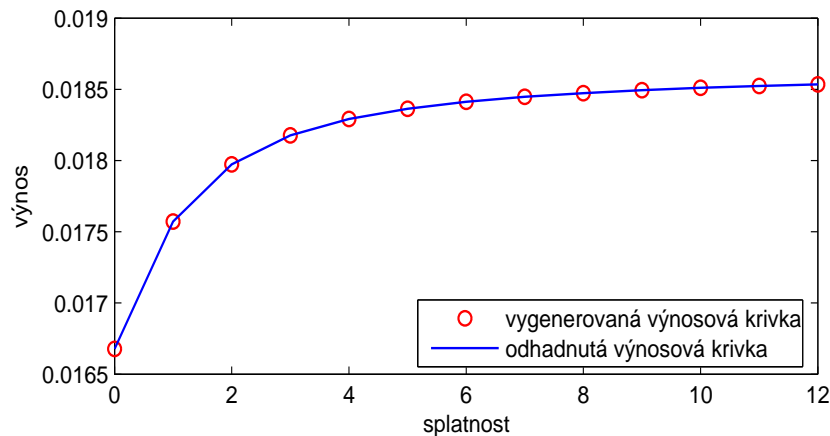
kontrolovať presnosť odhadov. Na generovanie procesu použijeme parametre prevzaté



Obr. 4.2: Porovnanie presného a odhadnutého vývoja short-rate pre jednofaktorový Vašíčkov model.

z [28]. Tieto parametre boli odhadnuté pre CIR model na základe reálnych dát z roku 2003 ako $\tilde{\kappa} = 16.2$, $\tilde{\theta} = 0.017$, $\tilde{\lambda} = -4.06$ a $\tilde{\sigma} = 0.39$. Aby ich použitie pri generovaní výnosových kriviek pre Vašíčkov model viedlo k rozumným výsledkom, je nevyhnutné upraviť volatilitu $\tilde{\sigma}$. Volatilita vygenerovaného Vašíčkovho procesu musí byť blízka volatilita pôvodného CIR procesu (viď predpisy (1.3) a (1.4) v teoretickom úvode). Úplnú zhodu nevieme dosiahnuť, pretože volatilita CIR procesu závisí od hodnoty okamžitej úrokovej miery, ktorú nepoznáme. Ak úrokovú mieru aproximujeme jej limitou θ , dostávame prevodný vzťah $\sigma = \tilde{\sigma}\sqrt{\theta}$. Najlepšiu zhodu výnosových kriviek pre oba modely dosiahneme tak, že rovnakým spôsobom upravíme aj trhovú cenu rizika $\lambda = \tilde{\lambda}\sqrt{\theta}$. Hodnoty ostatných parametrov zostanú nezmenené. Všetky parametre uvádzame v tabuľke 4.1. Začiatočná hodnota okamžitej úrokovej miery $r_0 = 0.02$. Uvažujeme denné dáta z doby jedného roka a výnosy pre 12 rôznych splatností: od jedného do dvanásť mesiacov. Váhy $w_{i,j}$ zvolíme v tvare τ_j^2 , rovnako ako v článku [30]. Takto zabezpečíme lepšiu zhodu odhadovaných a presných výnosov dlhopisov s dlhšou splatnosťou.

Na obrázku 4.2 je zobrazený vygenerovaný priebeh okamžitej úrokovej miery a jeho odhad z testovanej kalibrácie, na obrázku 4.3 sú odhadnuté výnosy pre rôzne splatnosti porovnané s presnou výnosovou krivkou. Tabuľka 4.2 obsahuje odhadnuté hodnoty parametrov modelu. Všetky odhady vykazujú vysokú presnosť. Tomu zodpovedajú aj hodnoty účelovej funkcie, zdokumentované v tabuľke 4.3 pre tisíc opakovaní kalibrácie na totožnom súbore parametrov.



Obr. 4.3: Porovnanie presnej a odhadnutej časovej štruktúry úrokových mier pre jednofaktorový Vašíčkov model.

α	β	σ
0.3023	-16.2000	0.05085

Tabuľka 4.2: Odhadnuté parametre pre jednofaktorový Vašíčkov model.

Na záver porovnáme efektívnosť navrhnutej metódy kalibrácie s výsledkami dosiahnutými v diplomovej práci [1], ktorú sme opísali v úvode tejto časti. Nakoľko obe práce vychádzajú zo simulovaných výnosových kriviek pre dvanásť rôznych splatností a štvrtročné obdobie, je takéto porovnanie zmysluplné. Poznamenajme, že autorka v [1] musela zvoliť kritérium zastavenia optimalizačného algoritmu tak, aby výpočet nebol extrémne zdĺhavý, pretože metóda bola výpočtovo pomerne náročná. Našla tak odhady parametrov a okamžitej úrokovej miery, ktorým prislúchala hodnota účelovej funkcie rádovo 10^{-9} . Odhadnuté parametre však v reálnej miere zodpovedali zápornej hodnote parametra κ , čo je v rozpore s charakterom mean reversion procesu. Navyše, v niektorých prípadoch nebolo možné odhady parametrov kvôli osciláciám vôbec určiť. Metóda kalibrácie jednofaktorového Vašíčkovho modelu, ktorú sme v tejto časti práce navrhli, je teda nielen rýchlejšia, ale hlavne presnejšia, než bola predchádzajúca.

maximum	minimum	priemer	štandardná odchýlka
1.1033×10^{-27}	5.4447×10^{-35}	8.8231×10^{-29}	1.2402×10^{-28}

Tabuľka 4.3: Hodnoty účelovej funkcie pre jednofaktorový Vašíčkov model.

4.1.2 Kalibrácia dvojfaktorového Vašíčkovho modelu s nulovou koreláciou

Dvojfaktorový Vašíčkov model budeme kalibrovať rovnakou metódou, akú sme v predchádzajúcej časti navrhli pre jednofaktorový model. V tomto prípade vyjadríme cenu

dlhopisu ako funkciu času do splatnosti a dvojice faktorov úrokovej miery:

$$\ln P(\tau, r_1, r_2) = c_{01}(\tau)r_1 + c_{02}(\tau)r_2 + c_1^\alpha(\tau)\alpha_1 + c_2^\alpha(\tau)\alpha_2 + c_1^\sigma(\tau)\sigma_1^2 + c_2^\sigma(\tau)\sigma_2^2,$$

kde

$$\begin{aligned} c_{01} &= \frac{1 - e^{\beta_1\tau}}{\beta_1}, & c_{02} &= \frac{1 - e^{\beta_2\tau}}{\beta_2}, \\ c_1^\alpha &= \frac{1}{\beta_1} \left[\frac{1 - e^{\beta_1\tau}}{\beta_1} + \tau \right], & c_2^\alpha &= \frac{1}{\beta_2} \left[\frac{1 - e^{\beta_2\tau}}{\beta_2} + \tau \right], \\ c_1^\sigma &= \frac{1}{2\beta_1^2} \left[\frac{1 - e^{\beta_1\tau}}{\beta_1} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta_1\tau})^2}{2\beta_1} \right], & c_2^\sigma &= \frac{1}{2\beta_2^2} \left[\frac{1 - e^{\beta_2\tau}}{\beta_2} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta_2\tau})^2}{2\beta_2} \right]. \end{aligned}$$

Premenné β_1 a β_2 znova fixujeme ako parametre. Keď účelovú funkciu v tvare (4.1) zderivujeme podľa premenných $\alpha_1, \sigma_1^2, \alpha_2, \sigma_2^2, r_{1i}, i = 1, \dots, n$ a $r_{2i}, i = 1, \dots, n$, dostávame sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

kde jednotlivé bloky predstavujú

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} (c_1^\alpha)^2 & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1^\alpha c_1^\sigma & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1^\alpha c_2^\alpha & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1^\alpha c_2^\sigma \\ \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1^\alpha c_1^\sigma & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} (c_1^\sigma)^2 & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1^\sigma c_2^\alpha & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1^\sigma c_2^\sigma \\ \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1^\alpha c_2^\alpha & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_2^\alpha c_1^\sigma & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} (c_2^\alpha)^2 & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_2^\alpha c_2^\sigma \\ \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1^\alpha c_2^\sigma & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_1^\sigma c_2^\sigma & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} c_2^\alpha c_2^\sigma & \sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j^2} (c_2^\sigma)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_1^\alpha c_{01} & \cdots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_1^\alpha c_{01} & \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_1^\alpha c_{02} & \cdots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_1^\alpha c_{02} \\ \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_1^\sigma c_{01} & \cdots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_1^\sigma c_{01} & \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_1^\sigma c_{02} & \cdots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_1^\sigma c_{02} \\ \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_2^\alpha c_{01} & \cdots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_2^\alpha c_{01} & \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_2^\alpha c_{02} & \cdots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_2^\alpha c_{02} \\ \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_2^\sigma c_{01} & \cdots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_2^\sigma c_{01} & \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_2^\sigma c_{02} & \cdots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_2^\sigma c_{02} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{1,1} & D_{1,2} \\ D_{2,1} & D_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$D_{k,h} = \begin{bmatrix} \sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j^2} c_{0k} c_{0h} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_j \frac{w_{2,j}}{\tau_j^2} c_{0k} c_{0h} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j^2} c_{0k} c_{0h} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = [\alpha_1, \sigma_1^2, \alpha_2, \sigma_2^2] \quad \mathbf{y}' = [r_{11}, r_{12}, \dots, r_{1n}, r_{21}, r_{22}, \dots, r_{2n}]$$

$$\mathbf{u}' = \left[-\sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j} R_{i,j} c_1^\alpha, \quad \dots, \quad -\sum_{i,j} \frac{w_{i,j}}{\tau_j} R_{i,j} c_2^\sigma \right]$$

$$\mathbf{v}' = \left[-\sum_j \frac{w_{1,j}}{\tau_j} R_{1,j} c_{01}, \quad \dots, \quad -\sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j} R_{n,j} c_{01}, \quad \dots, \quad -\sum_j \frac{w_{n,j}}{\tau_j} R_{n,j} c_{02} \right].$$

Aj v tomto prípade je možné redukovať rozmer uvažovanej sústavy. Matica \mathbf{D} je blokovo diagonálna, preto k nej ľahko nájdeme inverznú maticu \mathbf{D}^{-1} . Rovnako ako pre jednofaktorový model potom dostaneme systém

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v},$$

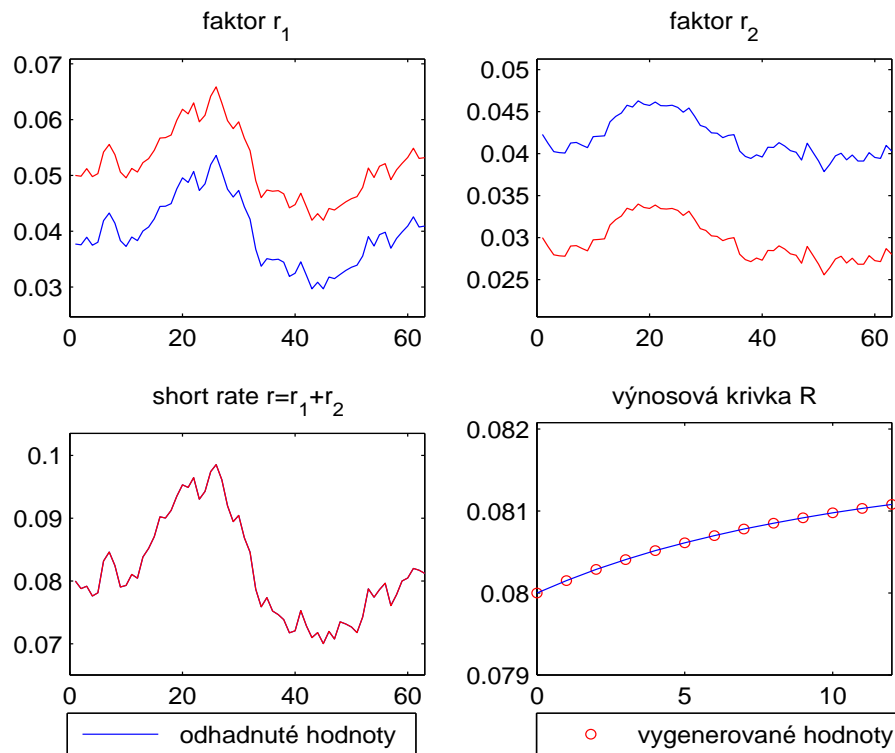
ktorý je rozmeru 4×4 . Po vyriešení tejto lineárnej sústavy pre danú dvojicu parametrov β_1, β_2 nájdeme hodnoty β_1 a β_2 voľnou minimalizáciou účelovej funkcie.

i	κ_i	θ_i	λ_i	σ_i
1	1.8341	0.05148	-0.02843	0.03501
2	0.005212	0.03083	-0.01168	0.01174
i	α_i	β_i		σ_i
1	0.09541	-1.8341		0.03501
2	0.0002978	-0.005212		0.01174

Tabuľka 4.4: Parametre procesov dvojfaktorového Vašíčkovho modelu použité na generovanie simulovaných dát v reálnej miere a po prevedení do rizikovo neutrálnej miery.

Navrhnutú metódu kalibrácie opäť vyskúšame na simulovaných dátach, pre ktoré sú známe presné hodnoty parametrov na spätnú kontrolu. Parametre, použité na generovanie výnosových kriviek podľa dvojfaktorového Vašíčkovho modelu, uvádzame v tabuľke 4.4. Ide o hodnoty navrhnuté pre dvojfaktorový CIR model v práci [6] s upravenou volatilitou. Vzhľadom na rozdiely v predpisoch stochastických procesov (1.3) a (1.4) sme rovnako ako v predchádzajúcej časti pôvodné parametre pre CIR model $\tilde{\sigma}_1$ a $\tilde{\sigma}_2$ zmenili pre Vašíčkov model na $\sigma_i = \tilde{\sigma}_i \sqrt{\theta_i}, i = 1, 2$. To znamená, že volatilita Vašíčkovho procesu zodpovedá pôvodnej volatilitě CIR procesu pre jednotlivé faktory r_i rovné príslušným limitným hodnotám θ_i . Čo najlepšiu zhodu výnosových kriviek sme zabezpečili zmenou trhovej ceny rizika podľa vzťahu $\lambda_i = \tilde{\lambda}_i \sqrt{\theta_i}, i = 1, 2$. Vychádzame z denných dát zo štvrtročného obdobia, pričom opäť sledujeme 12 splatností v dĺžke od jedného do dvanástich mesiacov. Začiatkové hodnoty faktorov sme zvolili podľa parametrov θ_i ako 0.05 a 0.03. Váhy uvažujeme znova v tvare τ_j^2 .

Na rozdiel od jednofaktorového modelu, v tomto prípade sústavu (4.5) nie je jednoduché efektívne riešiť. Dôvodom je numerická nestabilita. Pre uvažované dáta je číslo podmienenosti blokovej matice rádovo 10^{16} . Tradičné priame metódy riešenia lineárnych systémov pre takto extrémne zle podmienenú sústavu zlyhávajú. Daný



Obr. 4.4: Porovnanie presného a odhadnutého faktorového rozkladu, okamžitej úrokovej miery a výnosovej krivky v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli.

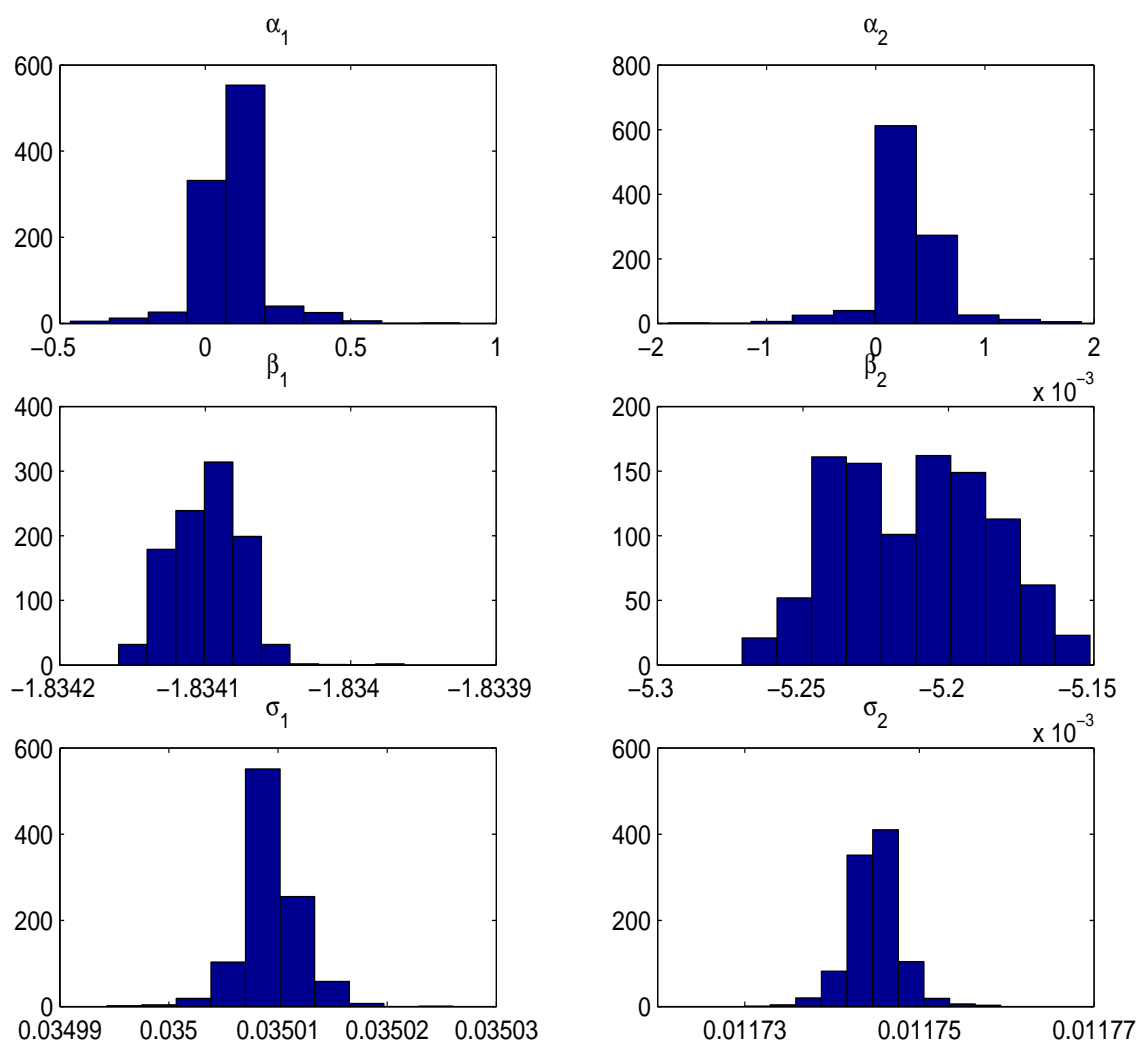
lineárny systém preto budeme riešiť metódou konjugovaných gradientov, konkrétne pomocou funkcie *Preconditioned conjugate gradients method (pcg)* v programe Matlab. Tento prístup nielen vedie k najpresnejším odhadom parametrov modelu a okamžitej úrokovej miery, ale je aj najrýchlejší. Prehľad numerických metód, ktorými sme systém riešili a porovnanie výsledkov pre jednotlivé metódy uvádzame v prílohe.

Výsledky kalibrácie ilustruje obrázok 4.4. Odhadnutý faktorový rozklad celkom nezodpovedá vygenerovaným hodnotám. Priebeh jednotlivých zložiek je posunutý o konštanty rovnakej hodnoty, no opačného znamienka. To znamená, že okamžitá úroková miera, určená súčtom faktorov, je odhadnutá s vysokou presnosťou. Výnosová krivka, vypočítaná na základe získaných odhadov, zodpovedá časovej štruktúre úrokových mier, ktorá bola vstupom do algoritmu.

i	α_i	β_i	σ_i
1	0.08170	-1.8341	0.03501
2	0.0003369	-0.005212	0.01174

Tabuľka 4.5: Priemerné hodnoty odhadov jednotlivých parametrov dvojfaktorového Vašíčkovho modelu.

Po zopakovaní kalibrácie tisíckrát pre rovnaký súbor parametrov môžeme urobiť štatistiku výsledkov. Priemerné odhady parametrov uvádzame v tabuľke 4.5. S výnimkou parametra α_1 sme dosiahli odhady s vysokou presnosťou. Histogramy hodnôt



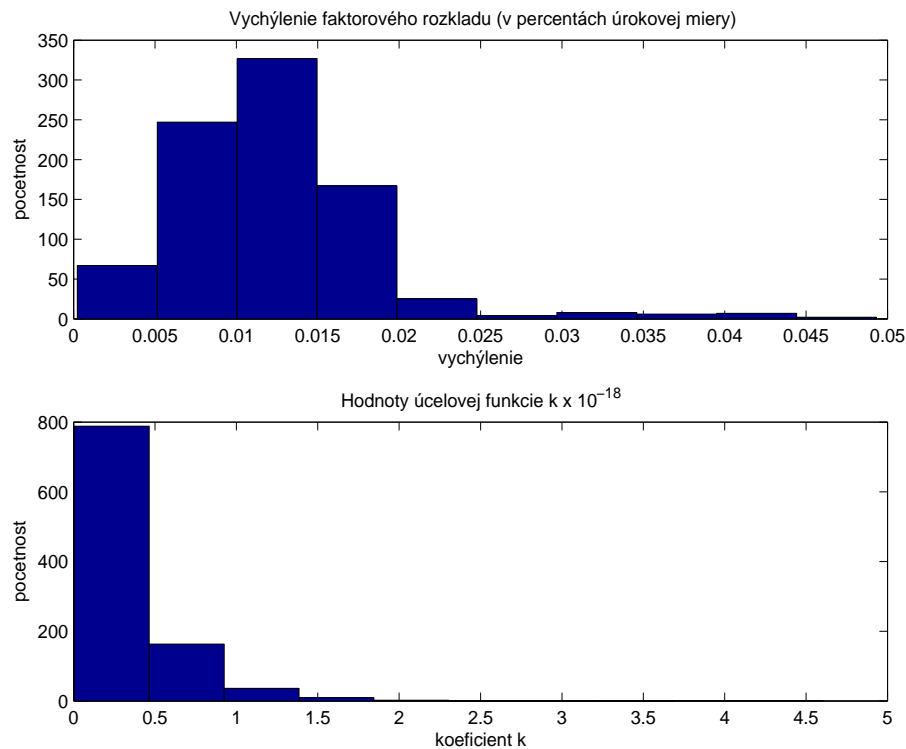
Obr. 4.5: Odhady parametrov, dvojfaktorový Vašíčkov model.

odhadnutých parametrov sú znázornené na obrázku 4.5.

Odhadnutý faktorový rozklad je obvykle relatívne nepresný. Časový vývoj každého z faktorov je oproti presnému riešeniu posunutý o konštantu. Štatistické ukazovatele pre tieto chyby zhŕňa tabuľka 4.6. Z tisíc realizovaných experimentov sme

	účelová funkcia	chyba odhadu r	vychýlenie r_i
maximum	4.6049×10^{-18}	1.0745×10^{-7}	0.4245
minimum	5.2606×10^{-21}	2.4700×10^{-9}	2.2975×10^{-4}
priemer	3.3382×10^{-19}	2.3644×10^{-8}	0.0281
št. odchýlka	3.3456×10^{-19}	1.1098×10^{-8}	0.0459
medián	2.4173×10^{-19}	2.2008×10^{-8}	0.0129

Tabuľka 4.6: Hodnoty účelovej funkcie, chyba odhadu okamžitej úrokovej miery a charakteristiky vychýlenia faktorového rozkladu pre dvojfaktorový Vašíčkov model.



Obr. 4.6: Vychýlenie faktorového rozkladu (v absolútnej hodnote) a hodnoty účelovej funkcie pre dvojfaktorový Vašíčkov model.

skoro v deväťsto zaznamenali vychýlenie menšie než 5 percentuálnych bodov. Na histograme 4.6 sú kvôli lepšej prehľadnosti znázornené len tieto prípady. Môžeme si všimnúť, že odhad faktorového rozkladu bol najčastejšie vypočítaný s chybou 0.5 až 1.5 percentuálneho bodu.

Súčet odhadnutých faktorov napriek tomu zodpovedá presnej hodnote okamžitej úrokovej miery. V tabuľke 4.6 uvádzame štatistiky pre maximálnu odchýlku odhadnutej od vygenerovanej short-rate spomedzi n hodnôt uvažovaných v každom opakovaní kalibrácie. Dokumentuje, že navrhnutou metódou dokážeme okamžitú úrokovú mieru odhadnúť s presnosťou 10^{-8} .

Napriek nie celkom presným odhadom parametrov a vychýleniam faktorových rozkladov poskytuje navrhnutá metóda kalibrácie relatívne spoľahlivé výsledky. Výnosové krivky, ktoré na ich základe vypočítame, sa zhodujú s vygenerovanými krivkami, predstavujúcimi vstupné dáta. Dokazujú to veľmi nízke hodnoty minimalizovanej účelovej funkcie. Ich charakteristiky pre tisíc opakovaní kalibrácie uvádza tabuľka 4.6 a obrázok 4.6.

4.2 Kalibrácia dvojfaktorového CIR modelu s nulovou koreláciou

Navrhnutá aproximačná formula (3.2) vychádza z exaktnej ceny dlhopisu v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli, teda pre prípad parametra $\gamma = 0$ v modeli CKLS. Existuje jediný ďalší špeciálny prípad voľby tohto parametra, v ktorom možno odvodiť uzavretú formulu pre ceny dlhopisov - CIR model, zodpovedajúci $\gamma = 0.5$ a $\rho = 0$. Naším cieľom je testovať presnosť navrhnutej aproximácie pri použití v kalibrácii, preto sa v tejto časti práce sústreďujeme práve na CIR model, ktorý nám umožňuje porovnať aproximujúce s presným riešením.

Kalibráciu dvojfaktorového CIR modelu opäť založíme na minimalizácii účelovej funkcie v tvare (4.1). Aby sme mohli otestovať navrhnutú aproximáciu, nepoužijeme v účelovej funkcii teoretické výnosy vypočítané pomocou presného riešenia PDR pre cenu dlhopisu. Nahradíme ich výnosmi vypočítanými z aproximujúceho riešenia tejto rovnice. Účelovú funkciu preto zapíšeme ako:

$$F(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}(\cdot)) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(R^{ap}(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}) - R_{ij} \right)^2. \quad (4.6)$$

V tomto zápise predstavuje R_{ij} výnos pozorovaný v i -ty deň pre maturitu τ_j . Rozklad short-rate na faktory v deň i označujeme r_{1i} a r_{2i} , pre váhy používame označenie w_{ij} . Na výpočet aproximujúcej výnosovej krivky $R^{ap}(\tau, r_1, r_2)$ slúži vzťah $R^{ap} = -\ln P^{ap}/\tau$. Cena dlhopisu P^{ap} je špeciálnym prípadom aproximačnej formuly (3.2) pre $\gamma = 1/2$. Môžeme ju upraviť na tvar:

$$\begin{aligned} \ln P^{ap}(\tau, r_1, r_2) = \\ = c_0(\tau, r_1, r_2) + c_1^\alpha(\tau, r_1, r_2)\alpha_1 + c_2^\alpha(\tau, r_1, r_2)\alpha_2 + c_1^\sigma(\tau, r_1, r_2)\sigma_1^2 + c_2^\sigma(\tau, r_1, r_2)\sigma_2^2, \end{aligned}$$

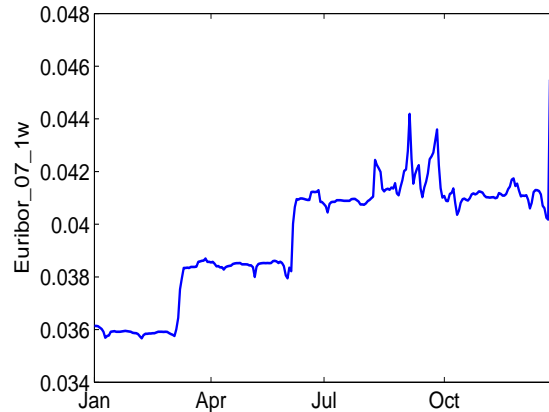
kde

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1 - e^{\beta_1\tau}}{\beta_1} r_1 + \frac{1 - e^{\beta_2\tau}}{\beta_2} r_2, \\ c_1^\alpha &= \frac{1}{\beta_1} \left[\frac{1 - e^{\beta_1\tau}}{\beta_1} + \tau \right], \quad c_2^\alpha = \frac{1}{\beta_2} \left[\frac{1 - e^{\beta_2\tau}}{\beta_2} + \tau \right], \\ c_1^\sigma &= \frac{r_1}{2\beta_1^2} \left[\frac{1 - e^{\beta_1\tau}}{\beta_1} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta_1\tau})^2}{2\beta_1} \right], \quad c_2^\sigma = \frac{r_2}{2\beta_2^2} \left[\frac{1 - e^{\beta_2\tau}}{\beta_2} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta_2\tau})^2}{2\beta_2} \right]. \end{aligned}$$

Na rozdiel od Vašíčkovho modelu, v CIR modeli je volatilita závislá od hodnôt okamžitej úrokovej miery. Táto skutočnosť sa prejaví aj odlišnými vlastnosťami účelovej funkcie. Aproximačná formula $\ln P^{ap}$ v tomto prípade nepredstavuje lineárnu funkciu všetkých uvažovaných premenných $\alpha_1, \sigma_1^2, \alpha_2, \sigma_2^2, r_{1i}, i = 1, \dots, n$ a $r_{2i}, i = 1, \dots, n$. V dôsledku toho nie je možné určiť ich hodnoty derivovaním účelovej funkcie (4.6) a následným riešením systému lineárnych rovníc.

Ukážeme, že odhady parametrov a faktorového rozkladu pomocou Vašíčkovho modelu, ktorým sme sa venovali v predchádzajúcej časti práce, sú vhodným východiskom aj pri kalibrácii CIR modelu. Parametre jednotlivých modelov porovnáme

na výsledkoch publikovaných v [25]. Súčasťou tejto práce je odhad parametrov jednofaktorových modelov pre rôzne zvolené hodnoty γ na reálnych dátach z roku 2007. Teoretické hodnoty short-rate sú aproximované jednotýždňovou úrokovou mierou Eu-



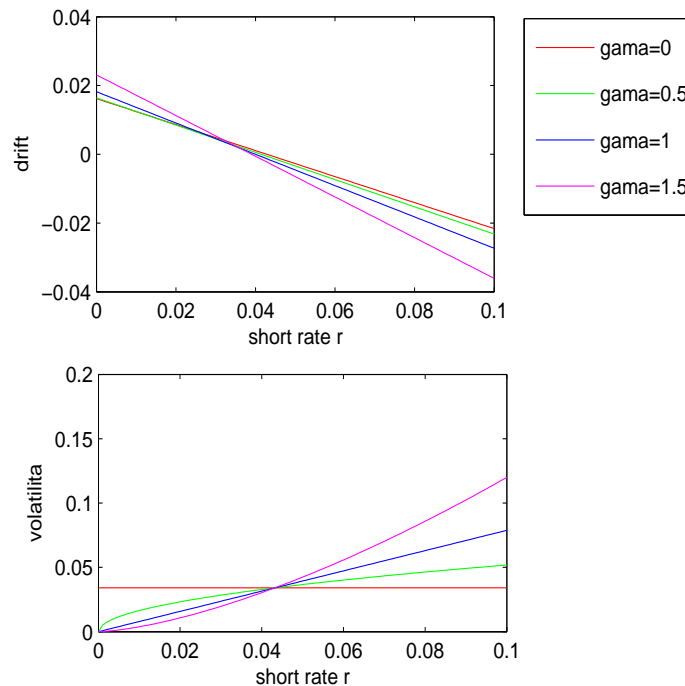
Obr. 4.7: Vývoj jednotýždňovej úrokovej miery na európskom medzibankovom trhu v roku 2007.

ribor (viď obrázok 4.7). V prvom kroku sa odhadne volatilita procesu pomocou Nowmanových gaussovských aproximácií. Rizikovo neutrálny drift procesu je následne odhadnutý s využitím aproximačnej formuly pre ceny dlhopisov, navrhutej v článku [7]. Odhady driftu aj volatility pre hodnoty parametra $\gamma \in \{0; 0.5; 1; 1.5\}$ uvádzame v tabuľke 4.7 a na obrázku 4.8. Rozdiel driftu procesov $\alpha + \beta r$ pre Vašíčkov a CIR

γ	α	β	σ
0	0.0162	-0.3781	0.0341
0.5	0.0164	-0.3959	0.1638
1	0.0182	-0.4552	0.7877
1.5	0.0231	-0.5918	3.7931

Tabuľka 4.7: Odhady parametrov pre viacero modelov short rate podľa práce [25].

model je relatívne malý. Z tohto dôvodu možno očakávať, že hodnoty parametrov $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, odhadnuté podľa dvojfaktorového Vašíčkovho modelu, budú veľmi dobrým štartovacím bodom pre kalibráciu dvojfaktorového CIR modelu. Odhady parametra σ pre jednotlivé modely sa líšia výraznejšie. Na obrázku 4.8 vidno rozdielne krivky volatility σr^γ . Pripomeňme si rozdiely v predpisoch stochastických procesov (1.3) a (1.4). Kým vo Vašíčkovom modeli zodpovedá volatilita konštante σ^v , v CIR modeli je vyjadrená ako $\sigma^c \sqrt{r}$. Pre zjednodušenie budeme predpokladať, že okamžitá úroková miera dosiahla rovnovážny stav a jej priebeh v čase predstavuje fluktuácie okolo rovnovážnej hodnoty. V tom prípade môžeme parameter σ^c odhadnúť pomocou parametra σ^v , získaného kalibráciou Vašíčkovho modelu, ako $\sigma^v / \sqrt{\bar{r}}$, kde \bar{r} označuje priemer odhadu okamžitej úrokovej miery. Priemerná hodnota short rate, uvažovanej



Obr. 4.8: Drift a volatilita stochastických procesov pre rôzne modely short-rate podľa práce [25].

v práci [25], je 0.0396. Podľa hodnoty σ^v v tabuľke 4.7 platí $\sigma^v/\sqrt{r} = 0.1714$, čo približne zodpovedá odhadu $\sigma^c = 0.1638$. Ako vidno na grafickom znázornení, volatility jednotlivých modelov v závislosti od r sa skutočne pretínajú blízko hodnoty 0.04.

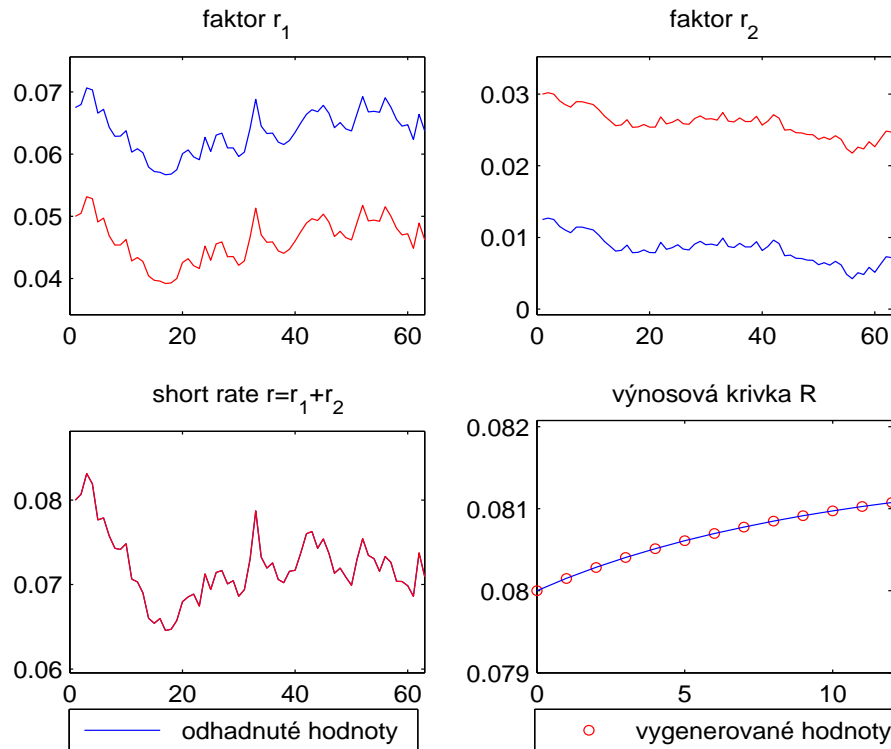
Pri kalibrácii dvojfaktorového CIR modelu s nulovou koreláciou porovnáme dva navzájom veľmi podobné postupy. Nazveme ich Algoritmus A a Algoritmus B. V oboch prípadoch sú vstupom do algoritmu výnosové krivky pre CIR model, vygenerované pre zvolený súbor parametrov. V našej práci prevezmeme parametre z článku [6], ktoré uvádzame v tabuľke 4.8.

i	κ_i	θ_i	λ_i	σ_i
1	1.8341	0.05148	-0.1253	0.1543
2	0.005212	0.03083	-0.06650	0.06689
i	α_i	β_i	σ_i	
1	0.09442	-1.8148	0.1543	
2	0.00016069	-0.0007638	0.06689	

Tabuľka 4.8: Parametre CIR procesov použité na generovanie simulovaných dát v reálnej miere [6] a po prevedení do bezrizikovej miery.

V prvej fáze kalibrácie odhadujeme faktorový rozklad okamžitej úrokovej miery r_1^v, r_2^v a parametre dvojfaktorového Vašíčkovho modelu $\alpha_1, \beta_1, \sigma_1^v, \alpha_2, \beta_2, \sigma_2^v$ tak,

aby výnosové krivky podľa Vašíčkovho modelu čo najlepšie vystihovali zadanú časovú štruktúru úrokových mier. Ako ilustruje obrázok 4.9, takto získaný odhad faktorov je relatívne presný. Vývoj odhadnutej okamžitej úrokovej miery sa skoro zhoduje s vygenerovanými hodnotami. Nájdené faktory a parametre α_1 , β_1 , α_2 , β_2 spoločne



Obr. 4.9: Porovnanie presného a odhadnutého faktorového rozkladu, okamžitej úrokovej miery a výnosovej krivky, generovaných podľa CIR modelu, pri kalibrácii dvojfaktorového Vašíčkovho modelu.

s upravenými parametrami $\sigma_1^c = \sigma_1^v / \sqrt{r_1}$, $\sigma_2^c = \sigma_2^v / \sqrt{r_2}$ vstupujú do druhej fázy kalibrácie.

V Algoritme A pokladáme presnosť nájdeného faktorového rozkladu za postačujúcu a pokračujeme hľadaním optimálnych hodnôt šesticke parametrov α_1 , β_1 , σ_1 , α_2 , β_2 , σ_2 CIR modelu. Tento problém riešime viazanou minimalizáciou účelovej funkcie (4.6):

$$\min_{\alpha, \beta, \sigma} F(\alpha, \beta, \sigma, r(\cdot)) \quad \text{za podmienok:}$$

$$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \beta_1, \beta_2 \leq 0, \quad \sigma_1, \sigma_2 \geq 0.$$

Odhady parametrov z prvej fázy predstavujú štartovací bod optimalizácie. Ohraničenia pre jednotlivé parametre sme zvolili tak, aby čo najlepšie zodpovedali vlastnostiam úrokovej miery. Pri odhadovaní volatility σ_1 , σ_2 sú záporné hodnoty neprípustné. Ohraničenia pre α_i a β_i zabezpečujú short-rate charakter mean reversion procesu aj v rizikovo neutrálnej miere. Sú v súlade s odhadmi parametrov na základe reálnych

dát, ktoré sme prevzali z [6]. Parametre α_i a β_i vo všeobecnosti nemusia mať uvedené znamienka, pretože v rizikovo neutrálnej miere proces nemusí nevyhnutne byť mean-reverting. V prípade, že ich majú, takto stanovené podmienky pomôžu nájsť správne odhady. Keď sme do formulácie optimalizačnej úlohy tieto ohraničenia nezahrnuli, výsledky boli niekedy výrazne vychýlené. Ak by pri aplikácii na reálne dáta niektoré z ohraničení bolo v optimálnom riešení aktívne (pri kalibrácii na simulovaných dátach taká situácia nenastala), odhadneme parametre modelu voľnou minimalizáciou.

Algoritmus B obsahuje oproti predchádzajúcemu postupu jeden medzikrok navyše. Druhá časť kalibrácie začína hľadaním optimálneho faktorového rozkladu pre hodnoty parametrov vstupujúce z prvej fázy. Teoretický výnos závisí vždy iba od faktorového rozkladu v príslušnom dni, preto je možné odhadovať zložky short-rate pre každý deň osobitne:

$$\min_{\mathbf{r}(\cdot)} F(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}(\cdot)) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \min_{\mathbf{r}^{(i)}} \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(R^{ap}(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}) - R_{ij} \right)^2.$$

Dostávame tak n -ticu úloh dvojrozmernej optimalizácie, ktoré vieme efektívne riešiť. Po upravení faktorového rozkladu pokračujeme opäť odhadom parametrov modelu pomocou viazanej minimalizácie účelovej funkcie.

Algoritmus kalibrácie (typ A)

Vstupy

- vektor splatností $\boldsymbol{\tau}$ dĺžky m
- trhové výnosy $R_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ z n dní a pre m splatností

Kalibrácia podľa Vašíčkovho modelu

- minimalizujeme funkciu

$$F^v(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}(\cdot)) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(R^v(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}) - R_{ij} \right)^2,$$

kde $R^v(\tau_j, r_{1i}, r_{2i})$ označuje cenu dlhopisu vo Vašíčkovom modeli, postupom navrhnutým v časti (4.1.2)

- výstupom sú odhady parametrov $\alpha_1, \beta_1, \sigma_1^v, \alpha_2, \beta_2, \sigma_2^v$ a dvojica vektorov faktorového rozkladu \mathbf{r}_1^v a \mathbf{r}_2^v

Kalibrácia CIR modelu

- odhady parametrov $\alpha_1, \beta_1, \sigma_1, \alpha_2, \beta_2, \sigma_2$ vpočítame riešením optimalizačnej úlohy

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}} F(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}(\cdot)) \quad & \text{za podmienok:} \\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad & \beta_1, \beta_2 \leq 0, \quad \sigma_1, \sigma_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Algoritmus kalibrácie (typ B)

Vstupy

- vektor splatností τ dĺžky m
- trhové výnosy $R_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ z n dní a pre m splatností

Kalibrácia podľa Vašíčkovho modelu

- minimalizujeme funkciu

$$F^v(\alpha, \beta, \sigma, r(\cdot)) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(R^v(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}) - R_{ij} \right)^2,$$

kde $R^v(\tau_j, r_{1i}, r_{2i})$ označuje cenu dlhopisu vo Vašíčkovom modeli, postupom navrhnutým v časti (4.1.2)

- výstupom sú odhady parametrov $\alpha_1, \beta_1, \sigma_1^v, \alpha_2, \beta_2, \sigma_2^v$ a dvojica vektorov faktorového rozkladu r_1^v a r_2^v

Kalibrácia CIR modelu

- hľadáme optimálny faktorový rozklad r_1, r_2 pre parametre $\alpha_1, \beta_1, \sigma_1^c = \sigma_1^v / \sqrt{r_1}, \alpha_2, \beta_2, \sigma_2^c = \sigma_2^v / \sqrt{r_2}$ minimalizáciou účelovej funkcie (4.6):

$$\min_{r(\cdot)} F(\alpha, \beta, \sigma, r(\cdot)) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \min_{r^{(i)}} \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(R^{ap}(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}) - R_{ij} \right)^2.$$

- odhady parametrov $\alpha_1, \beta_1, \sigma_1, \alpha_2, \beta_2, \sigma_2$ dopočítame riešením optimalizačnej úlohy

$$\begin{aligned} & \min_{\alpha, \beta, \sigma} F(\alpha, \beta, \sigma, r(\cdot)) \quad \text{za podmienok:} \\ & \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \beta_1, \beta_2 \leq 0, \quad \sigma_1, \sigma_2 \geq 0 \end{aligned}$$

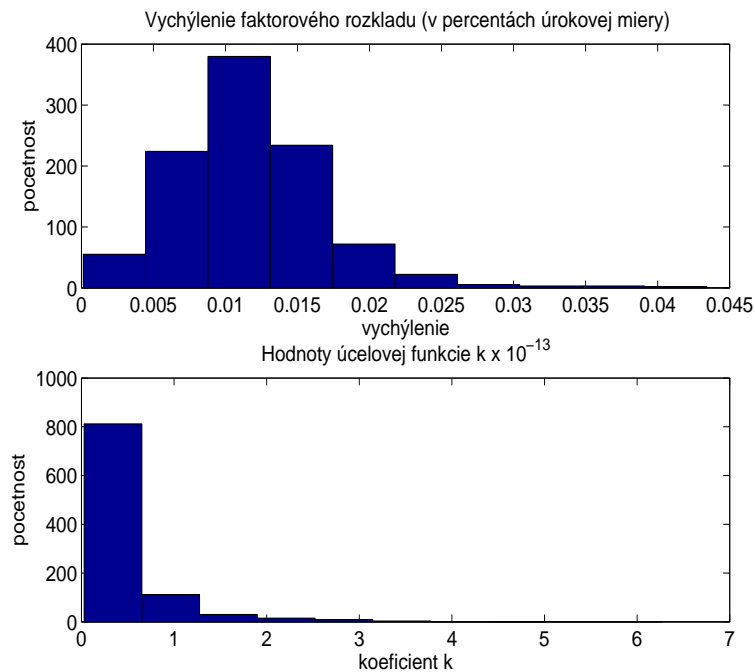
A	i	α_i	β_i	σ_i
	1	0.07405	-1.8151	0.1735
	2	0.0003528	-0.005418	0.05536
B	i	α_i	β_i	σ_i
	1	0.07405	-1.8151	0.1735
	2	0.0003528	-0.005418	0.05536

Tabuľka 4.9: Priemerné hodnoty odhadov parametrov dvojfaktorového CIR modelu pre algoritmy A a B.

Opísané metódy realizujeme tisíckrát, obe na totožnom súbore vstupných dát. Rovnako ako pri kalibrácii Vašíčkovho modelu, aj teraz používame denné dáta zo štvrtročného obdobia pre 12 splatností: od jedného mesiaca do jedného roka. Začiatkové

A	účelová funkcia	chyba odhadu r	vychýlenie r_i
maximum	5.3876×10^{-10}	7.4933×10^{-6}	0.0434
minimum	2.2954×10^{-12}	9.3422×10^{-7}	1.2618×10^{-4}
priemer	2.8233×10^{-11}	2.7511×10^{-6}	0.0117
št. odchýlka	3.6546×10^{-11}	9.3339×10^{-7}	0.0051
medián	1.6830×10^{-11}	2.7511×10^{-6}	0.0112
B	účelová funkcia	chyba odhadu r	vychýlenie r_i
maximum	3.3643×10^{-9}	7.4933×10^{-6}	0.0434
minimum	2.8965×10^{-15}	9.3422×10^{-7}	1.2618×10^{-4}
priemer	9.4257×10^{-12}	2.7511×10^{-6}	0.0117
št. odchýlka	1.2412×10^{-10}	9.3339×10^{-7}	0.0051
medián	2.8146×10^{-14}	2.7511×10^{-6}	0.0112

Tabuľka 4.10: Porovnanie vlastností odhadov pre algoritmy A a B pri kalibrácii dvojfaktorového CIR modelu.



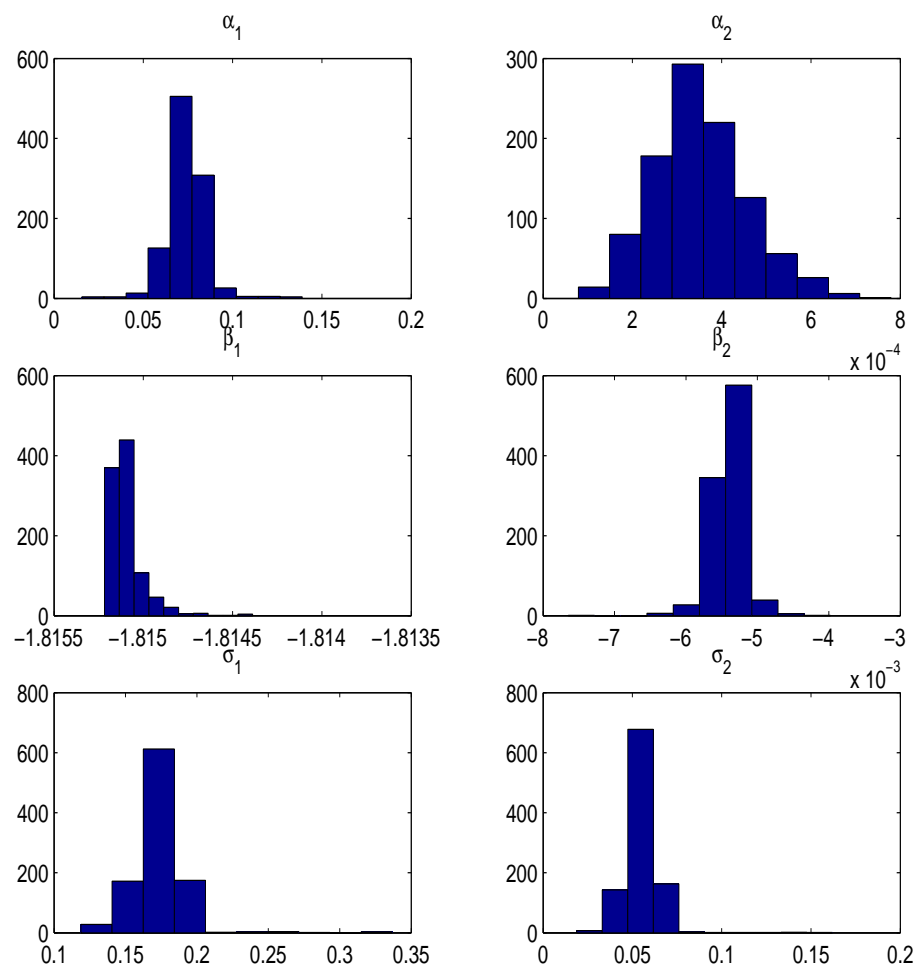
Obr. 4.10: Vychýlenie faktorového rozkladu a hodnoty účelovej funkcie pre dvojfaktorový CIR model.

hodnoty faktorov sme zvolili ako 0.05 a 0.03, váhy v tvare τ_j^2 . Priemerné hodnoty odhadov parametrov modelu uvádzame v tabuľke 4.9.

Tabuľka 4.10 obsahuje štatistické vyhodnotenie dosahovaných výsledkov. Rozdiel medzi výsledkami algoritmov v hodnotách parametrov aj faktorového rozkladu je obvykle rádu 10^{-8} až 10^{-6} . Takéto drobné odchýlky sa na väčšine ukazovateľov neprejavia. Na druhej strane, hoci je zmena faktorového rozkladu realizovaná v Algoritme B minimálna, postačuje na výrazné zníženie hodnôt účelovej funkcie. Hodnota mediánu

v tomto prípade klesla o tri rády. Z tohto dôvodu môžeme Algoritmus B vyhodnotiť ako efektívnejší a navrhnúť ho ako vhodnú metódu pri kalibrácii dvojfaktorového CIR modelu.

Na záver tejto časti zhrnieme výsledky, ktoré sme použitím tohto spôsobu kalibrácie dosiahli. Prvý z dvojice obrázkov 4.10 ilustruje vychýlenie odhadu faktorového rozkladu oproti skutočným hodnotám zložiek short-rate. Ako dokazujú aj štatistiky v tabuľke 4.10, posunutie faktorového rozkladu je menšie, než sme zaznamenali pri kalibrácii dvojfaktorového Vašíčkovho modelu. Druhý z obrázkov dokumentuje dosiahnuté hodnoty účelovej funkcie. Z tisíc realizovaných experimentov bola v 983 prípadoch hodnota účelovej funkcie menšia než 10^{-12} . Histogram pre väčšiu prehľadnosť zobrazuje len tieto realizácie.



Obr. 4.11: Odhady parametrov, dvojfaktorový CIR model.

Obrázok 4.11 dopĺňa informácie v časti B tabuľky 4.9 o histogramy odhadov jednotlivých parametrov. Hodnoty parametrov modelu a okamžitej úrokovej miery sú odhadnuté s menšou presnosťou, než sme dosiahli pri kalibrácii Vašíčkovho modelu. Tomu zodpovedajú aj štatistiky účelovej funkcie. Zatiaľčo v predchádzajúcom prípade

bol medián funkčných hodnôt rádu 10^{-19} , pre CIR model má hodnotu rádovo 10^{-14} . Stále však ide o nízku hodnotu.

Efektívnosť navrhutej metódy možno vyhodnotiť len porovnaním s inými spôsobmi kalibrácie dvojfaktorového CIR modelu. Jedným z nich je rozšírená dvojfázová min-max metóda, ktorej sa zaoberá diplomová práca [27] z roku 2009. Autor v nej pri minimalizácii účelovej funkcie použil techniku simulovaného žihania, ktorá je značne výpočtovo náročná. Výrazným rozdielom medzi porovnávanými spôsobmi kalibrácie je prístup k hodnotám okamžitej úrokovej miery. V našom prípade sme odhadovali r_1 a r_2 bez toho, aby sme poznali ich súčet. Oproti tomu v [27] autor tento súčet pokladal za známy. Pre totožný súbor parametrov, na akom sme testovali algoritmy v tejto kapitole, dosiahol hodnotu účelovej funkcie rádovo 10^{-8} . Navyše, znamienka odhadov v niektorých prípadoch nezodpovedali vlastnostiam mean-reversion procesu v reálnej miere, hoci presné parametre tieto vlastnosti mali. Môžeme teda uzavrieť, že odhad parametrov dvojfaktorového CIR modelu metódou použitou v našej práci má relatívne vysokú presnosť pri nízkej výpočtovej zložitosti. Ukázali sme tak, že aproximačná formula navrhnutá v kapitole 3 je vhodná na použitie v kalibrácii.

4.3 Kalibrácia CKLS modelu

Cieľom tejto časti práce je navrhnúť postup kalibrácie dvojfaktorového CKLS modelu s využitím aproximácie, ktorú sme opísali v kapitole 3. Na úvod načrtujeme, akú metódu kalibrácie používa autorka článku [24] pri testovaní aproximácie v jednofaktorovom modeli. Túto metódu však nie je možné rozšíriť na viac faktorov. V ďalšom kroku preto uvádzame postup kalibrácie, ktorý je zovšeobecnením algoritmu pre dvojfaktorový CIR model s nulovou koreláciou z predchádzajúcej časti. Ukážeme, že pri odhadovaní vybraných parametrov modelu nie je vhodné použiť analytické metódy. Algoritmu kalibrácie by preto mala predchádzať ekonometrická analýza časových radov úrokových mier.

4.3.1 Kalibrácia jednofaktorového CKLS modelu

Kalibrácia jednofaktorového CKLS modelu v článku [24] je založená na minimalizácii odchýlok teoretických a pozorovaných výnosových kriviek. Účelová funkcia má tvar

$$F(\alpha, \beta, \sigma, \gamma) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(R^{ap}(\tau_j, r_i) - R_{ij} \right)^2, \quad (4.7)$$

kde R_{ij} opäť predstavuje pozorovaný výnos, $R^{ap}(\tau_j, r_i)$ teoretický výnos vypočítaný pomocou aproximačnej formuly (1.20) a r_i označuje okamžitú úrokovú mieru v i -ty deň. Hoci je short-rate teoretická veličina, v tomto prípade je stotožnená s pozorovanou hodnotou over-nightu. Takýto prístup vedie k zjednodušeniu kalibrácie. Aproximačná formula $\ln P^{ap}$ má pre jednofaktorový model tvar

$$\ln P^{ap}(\tau, r) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{2\beta^2} \right) \left(\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right) + \frac{\sigma^2 r^{2\gamma}}{4\beta^3} (1 - e^{\beta\tau})^2 + \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} r$$

a dá sa zapísať ako lineárna funkcia parametrov α a σ^2 :

$$\ln P^{ap}(\tau, r) = c_0(\tau, r) + c_1(\tau, r)\alpha + c_2(\tau, r)\sigma^2,$$

kde

$$c_0 = \frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta}r, \quad c_1 = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau \right], \quad c_2 = \frac{r^{2\gamma}}{2\beta^2} \left[\frac{1 - e^{\beta\tau}}{\beta} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta\tau})^2}{2\beta} \right].$$

Keď derivácie konvexnej funkcie (4.7) podľa premenných α a σ^2 položíme rovné nule, dostaneme sústavu dvoch lineárnych rovníc. Pre ľubovoľné pevné γ a parameter β z nich môžeme vyjadriť optimálne α a σ^2 . Minimalizáciou sumy štvorcov odchýlok teoretických výnosov od pozorovaných potom možno získať optimálnu hodnotu parametra β . Porovnaním hodnôt účelovej funkcie pre rôzne fixné hodnoty γ sa dá určiť posledný parameter modelu.

Tento spôsob kalibrácie nemôžeme priamočiaro zovšeobecniť pre viacfaktorové modely. Jednotlivé zložky short-rate nie sú pozorovateľné a musia byť odhadnuté spolu s ostatnými parametrami modelu. Navyše, vzhľadom na zachovanie charakteru short-rate ako limity časovej štruktúry úrokových mier, je vhodné vyhnúť sa jej aproximácii krátkodobými výnosmi.

4.3.2 Kalibrácia dvojfaktorového CKLS modelu so známymi parametrami γ a ρ

Pri kalibrácii dvojfaktorového CKLS modelu minimalizujeme účelovú funkciu

$$F(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}(\cdot), \gamma, \rho) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(R^{ap}(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}) - R_{ij} \right)^2, \quad (4.8)$$

kde $R^{ap}(\tau_j, r_{1i}, r_{2i})$ predstavuje teoretický výnos v i -ty deň pre j -tu splatnosť, vypočítaný pomocou aproximačnej formuly (3.2). Túto formulu môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} \ln P^{ap}(\tau, r_1, r_2) = & c_0(\tau, r_1, r_2) + c_1^\alpha(\tau, r_1, r_2)\alpha_1 + c_2^\alpha(\tau, r_1, r_2)\alpha_2 \\ & + c_1^\sigma(\tau, r_1, r_2)\sigma_1^2 + c_2^\sigma(\tau, r_1, r_2)\sigma_2^2 + c^\rho(\tau, r_1, r_2)\rho\sigma_1\sigma_2, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1 - e^{\beta_1\tau}}{\beta_1}r_1 + \frac{1 - e^{\beta_2\tau}}{\beta_2}r_2, \\ c_1^\alpha &= \frac{1}{\beta_1} \left[\frac{1 - e^{\beta_1\tau}}{\beta_1} + \tau \right], \quad c_2^\alpha = \frac{1}{\beta_2} \left[\frac{1 - e^{\beta_2\tau}}{\beta_2} + \tau \right], \\ c_1^\sigma &= \frac{r_1^{2\gamma}}{2\beta_1^2} \left[\frac{1 - e^{\beta_1\tau}}{\beta_1} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta_1\tau})^2}{2\beta_1} \right], \quad c_2^\sigma = \frac{r_2^{2\gamma}}{2\beta_2^2} \left[\frac{1 - e^{\beta_2\tau}}{\beta_2} + \tau + \frac{(1 - e^{\beta_2\tau})^2}{2\beta_2} \right], \\ c^\rho &= \frac{(r_1 r_2)^\gamma}{\beta_1 \beta_2} \left[\tau + \frac{1}{\beta_1}(1 - e^{\beta_1\tau}) + \frac{1}{\beta_2}(1 - e^{\beta_2\tau}) - \frac{1 - e^{(\beta_1 + \beta_2)\tau}}{\beta_1 + \beta_2} \right]. \end{aligned}$$

V tejto časti práce navrhujeme algoritmus, vhodný na kalibráciu takéhoto modelu úrokovej miery v prípade, že hodnoty parametrov γ a ρ sú vopred známe. Hľadaniu optimálneho tvaru volatility a korelácie medzi zložkami short-rate sa budeme venovať v nasledujúcej podkapitole. Pripomeňme, že v častiach 4.1.2 a 4.2 sa zaoberáme špeciálnymi prípadmi CKLS modelu pre hodnoty parametrov $\gamma = 0$, resp. $\gamma = 0.5$ a $\rho = 0$. Vhodným postupom pre kalibráciu všeobecného modelu je rozšírenie algoritmu, navrhnutého pre dvojfaktorový CIR model s nulovou koreláciou.

Vstupom do algoritmu sú v tomto prípade trhové výnosové krivky $R_{i,j}$ pre splatnosti τ_j , $j = 1, 2, \dots, m$, prislúchajúce dňom $i = 1, 2, \dots, n$, a hodnoty parametrov γ a ρ . Prvý krok metódy opäť spočíva v kalibrácii dvojfaktorového Vašíčkovho modelu s nekorelovanými zložkami. Nájdeme tak faktorový rozklad \mathbf{r}_1^v , \mathbf{r}_2^v a odhady parametrov α_1 , β_1 , σ_1^v , α_2 , β_2 , σ_2^v , pre ktoré teoretické výnosové krivky z Vašíčkovho modelu najlepšie zodpovedajú trhovej časovej štruktúre úrokových mier. Rovnako ako pre CIR model, aj v tomto prípade musíme odhady volatility σ_1^v a σ_2^v pred vstupom do druhej fázy kalibrácie upraviť. Z rozdielu medzi stochastickými členmi procesov short-rate vo Vašíčkovom (1.3) a CKLS (1.5) modeli odvodíme transformáciu v tvare $\sigma_i^c = \sigma_i^v / \bar{r}_i^\gamma$, $i = 1, 2$.

Druhú časť metódy tvorí kalibrácia dvojfaktorového CKLS modelu. Najprv využijeme odhady parametrov α_1 , β_1 , σ_1^c , α_2 , β_2 , σ_2^c z predchádzajúceho kroku na nájdenie optimálneho faktorového rozkladu \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 . Minimalizáciu účelovej funkcie (4.8) možno opäť realizovať pre každý deň samostatne. Problém sa tak prevedie na n -ticu úloh dvojrozmernej optimalizácie, ktoré vieme efektívne vyriešiť. Po tejto úprave pokračujeme hľadaním hodnôt parametrov CKLS modelu α_1 , β_1 , σ_1 , α_2 , β_2 , σ_2 viazanou minimalizáciou účelovej funkcie (4.8). Odhady parametrov z prvého kroku použijeme ako štartovacie hodnoty.

Algoritmus kalibrácie CKLS modelu (pre známe γ a ρ)

Vstupy

- vektor splatností τ dĺžky m
- trhové výnosy $R_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ z n dní a pre m splatností
- hodnoty parametrov γ a ρ

Kalibrácia podľa Vašíčkovho modelu

- minimalizujeme funkciu

$$F^v(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}(\cdot)) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(R^v(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}) - R_{ij} \right)^2,$$

kde $R^v(\tau_j, r_{1i}, r_{2i})$ označuje cenu dlhopisu vo Vašíčkovom modeli, postupom navrhnutým v časti (4.1.2)

- výstupom sú odhady parametrov α_1 , β_1 , σ_1^v , α_2 , β_2 , σ_2^v a dvojica vektorov faktorového rozkladu \mathbf{r}_1^v a \mathbf{r}_2^v

Kalibrácia CKLS modelu

- hľadáme optimálny faktorový rozklad \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 pre parametre α_1 , β_1 , $\sigma_1^c = \sigma_1^v / \bar{r}_1^\gamma$, α_2 , β_2 , $\sigma_2^c = \sigma_2^v / \bar{r}_2^\gamma$ minimalizáciou účelovej funkcie (4.8):

$$\min_{\mathbf{r}(\cdot)} F(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}(\cdot), \gamma, \rho) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \min_{\mathbf{r}^{(i)}} \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(R^{ap}(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}) - R_{ij} \right)^2.$$

- odhady parametrov α_1 , β_1 , σ_1 , α_2 , β_2 , σ_2 dopočítame riešením optimalizačnej úlohy

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}} F(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}(\cdot), \gamma, \rho) \quad \text{za podmienok:}$$

$$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \beta_1, \beta_2 \leq 0, \quad \sigma_1, \sigma_2 \geq 0$$

Takýto všeobecný algoritmus nemôžeme použiť na testovanie vlastností navrhnutej aproximačnej formuly (3.2), pretože presné riešenie rovnice pre cenu dlhopisu (3.1) pre $\gamma \neq 0, 0.5$ neexistuje.

4.3.3 Odhady parametrov γ a ρ v dvojfaktorovom CKLS modeli

Algoritmus, ktorý sme navrhli v predchádzajúcej podkapitole, je možné použiť pri kalibrácii CKLS modelu len v prípade, že citlivosť volatility na hodnoty úrokovej miery γ a korelácia medzi faktormi ρ sú vopred známe. V nasledujúcej časti práce sa venujeme odhadu tejto dvojice parametrov. Ukážeme, že rozšírenie predchádzajúceho postupu o odhadovanie γ a ρ nepredstavuje vhodné riešenie tohto problému. Kalibrácii CKLS modelu preto musí predchádzať analýza časových radov úrokových mier, pomocou ktorej nájdeme hodnoty γ a ρ .

Algoritmus z podkapitoly 4.3.2 upravíme nasledovne:

Algoritmus kalibrácie CKLS modelu

Vstupy

- vektor splatností $\boldsymbol{\tau}$ dĺžky m
- trhové výnosy $R_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ z n dní a pre m splatností

Kalibrácia podľa Vašíčkovho modelu

- minimalizujeme funkciu

$$F^v(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}(\cdot)) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(R^v(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}) - R_{ij} \right)^2,$$

kde $R^v(\tau_j, r_{1i}, r_{2i})$ označuje cenu dlhopisu vo Vašíčkovom modeli, postupom navrhnutým v časti (4.1.2)

- výstupom sú odhady parametrov $\alpha_1, \beta_1, \sigma_1^v, \alpha_2, \beta_2, \sigma_2^v$ a dvojica vektorov faktorového rozkladu \mathbf{r}_1^v a \mathbf{r}_2^v

Kalibrácia CKLS modelu

- hľadáme optimálnu hodnotu parametra γ , ktorá minimalizuje účelovú funkciu (4.8)

$$F(\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{r}^*(\cdot), \gamma, \rho^*) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(R^{ap}(\tau_j, r_{1i}^*, r_{2i}^*) - R_{ij} \right)^2,$$

kde:

- optimálny faktorový rozklad $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*$ pre parametre $\alpha_1, \beta_1, \sigma_1^c = \sigma_1^v / \bar{r}_1^\gamma$, $\alpha_2, \beta_2, \sigma_2^c = \sigma_2^v / \bar{r}_2^\gamma$ z prvej fázy kalibrácie hľadáme riešením minimalizácie:

$$\min_{\mathbf{r}(\cdot)} F(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}(\cdot), \gamma | \rho = 0) = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n \min_{\mathbf{r}^{(i)}} \sum_{j=1}^m w_{ij} \left(R^{ap}(\tau_j, r_{1i}, r_{2i}) - R_{ij} \right)^2.$$

- odhady parametrov $\alpha_1^*, \beta_1^*, \sigma_1^*, \alpha_2^*, \beta_2^*, \sigma_2^*$ a ρ^* vypočítame riešením optimalizačnej úlohy

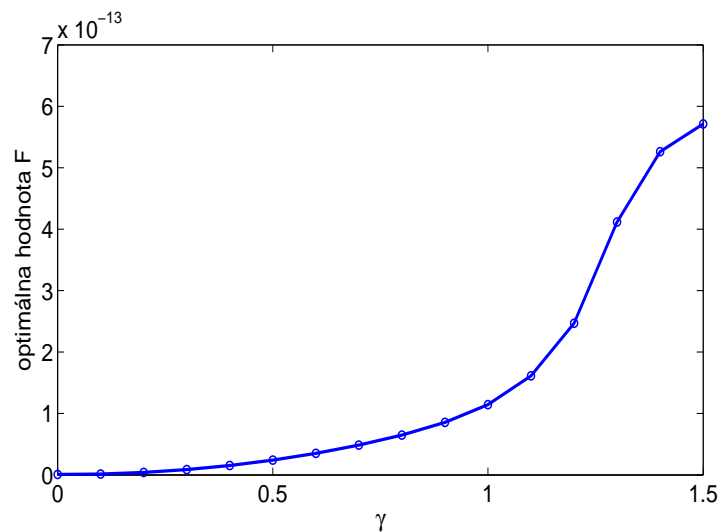
$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}, \rho} F(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}(\cdot), \gamma, \rho) \quad \text{za podmienok:} \\ & \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \beta_1, \beta_2 \leq 0, \quad \sigma_1, \sigma_2 \geq 0, \quad -1 \leq \rho \leq 1. \end{aligned}$$

Efektívnosť takto navrhnutého algoritmu otestujeme kalibráciou dvojfaktorového CIR modelu s nulovou koreláciou. Optimálne hodnoty parametrov γ a ρ sú v tomto prípade $\gamma = 0.5$ a $\rho = 0$. Vstupom do algoritmu sú výnosové krivky, generované pre rovnaký súbor parametrov, ako v podkapitole 4.2 (viď tabuľka 4.8). Aby sme dokázali rozhodnúť, či je možné tento algoritmus použiť na odhad aspoň jedného z parametrov γ a ρ , budeme optimalizáciu pre každý z nich testovať samostatne.

V prvom kroku vychádzame z predpokladu, že nulová korelácia medzi faktormi short-rate je vopred daná. Naším cieľom je zistiť, či navrhnutá metóda identifikuje hodnotu $\gamma = 0.5$ ako optimálnu. Tabuľka 4.11 obsahuje odhady parametrov modelu a optimálnu hodnotu účelovej funkcie pre rôzne hodnoty γ . Odhady parametrov sú síce najpresnejšie v prípade $\gamma = 0.5$, hodnoty účelovej funkcie tomu ale nezodpovedajú. Závislosť minima účelovej funkcie od hodnoty parametra γ ilustruje aj obrázok 4.12. Najmenší rozdiel medzi generovanými a teoretickými výnosovými krivkami

γ	α_i	β_i	σ_i	optim. hodnota F
0	0.07840	-1.8152	0.03099	7.0122×10^{-16}
	0.0002691	-0.005383	0.009470	
0.25	0.07840	-1.8152	0.07164	6.2210×10^{-15}
	0.0002691	-0.005383	0.02155	
0.5	0.07840	-1.8152	0.1656	2.4161×10^{-14}
	0.0002691	-0.005383	0.04906	
0.75	0.07840	-1.8152	0.3827	5.6358×10^{-14}
	0.0002691	-0.005383	0.1117	
1	0.07840	-1.8152	0.8845	1.1446×10^{-13}
	0.0002691	-0.005383	0.2541	
1.25	0.07840	-1.8152	2.0444	3.1582×10^{-13}
	0.0002692	-0.005383	0.5784	
1.5	0.07840	-1.8152	4.7252	5.7126×10^{-13}
	0.0002693	-0.005383	1.3165	

Tabuľka 4.11: Odhady parametrov a optimálne hodnoty účelovej funkcie pre rôzne hodnoty γ , simulované dáta pre CIR model s nulovou koreláciou.



Obr. 4.12: Optimálne hodnoty účelovej funkcie F v závislosti od parametra γ .

bol dosiahnutý pre $\gamma = 0$. Táto chyba pomerne priamočiaro vyplýva z návrhu algoritmu. Kalibráciu začíname odhadom faktorového rozkladu z Vašíčkovho modelu. Úprava rozkladu na faktory v ďalšom kroku nie je taká výrazná, aby postačila na zníženie hodnoty účelovej funkcie na úroveň dosiahnutú pre Vašíčkov model. Musíme teda uzavrieť, že takáto metóda kalibrácie nedokáže správne rozpoznať závislosť volatility short-rate od veľkosti r .

V druhej časti sa zameriame na odhad parametra ρ . Predpokladáme, že o časovej štruktúre úrokových mier vieme, že zodpovedá dvojfaktorovému CIR modelu. Zau-

jíma nás, či pomocou navrhnutého algoritmu dokážeme nájsť optimálnu hodnotu parametra $\rho = 0$. Ako vidno z tabuľky 4.12, minimalizácia účelovej funkcie vzhľadom na tento parameter závisí od zvoleného štartovacieho bodu. Optimálna hodnota ρ sa

štart ρ	odhad ρ	α_i	β_i	σ_i	optim. hodnota F
-0.9	-0.90000	0.07839 0.0002582	-1.8152 -0.005383	0.1656 0.04906	3.4456×10^{-10}
-0.6	-0.60000	0.07839 0.0002618	-1.8152 -0.005383	0.1656 0.04906	1.5314×10^{-10}
-0.3	-0.30000	0.07840 0.0002655	-1.8152 -0.005383	0.1656 0.04906	3.8298×10^{-11}
0	0.00000	0.07840 0.0002691	-1.8152 -0.005383	0.1656 0.04906	2.4161×10^{-14}
0.3	0.30000	0.07840 0.0002727	-1.8152 -0.005382	0.1656 0.04906	3.8323×10^{-11}
0.6	0.60000	0.07840 0.0002764	-1.8152 -0.005382	0.1656 0.04906	1.5319×10^{-10}
0.9	0.90000	0.07841 0.0002800	-1.8152 -0.005382	0.1656 0.04906	3.4464×10^{-10}

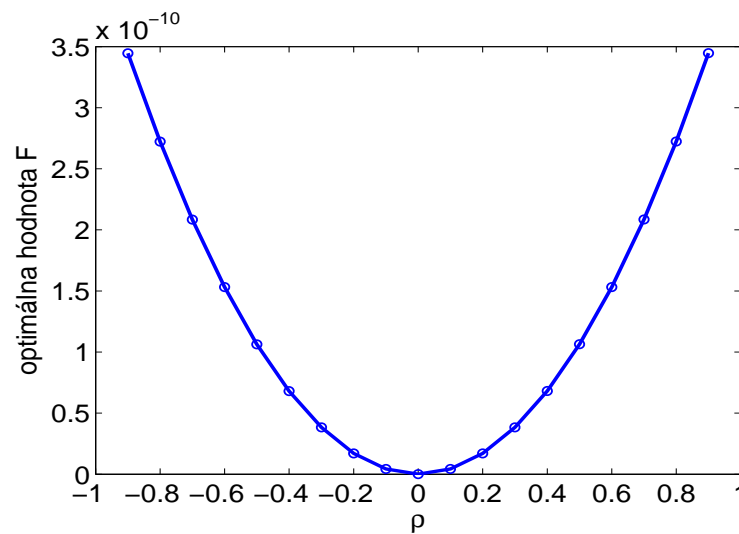
Tabuľka 4.12: Odhady parametrov a optimálne hodnoty účelovej funkcie pre rôzne štartovacie hodnoty ρ , simulované dáta pre CIR model s nulovou koreláciou.

od štartovacej hodnoty líši rádovo o 10^{-10} až 10^{-8} . Pri uvažovanej presnosti teda rozdiely nezaznamenáme. Hodnoty účelovej funkcie vzhľadom na parameter ρ ilustruje obrázok 4.13. Nízka hodnota účelovej funkcie pre prípad $\rho = 0$ je opäť spôsobená odhadom faktorového rozkladu z Vašíčkovho modelu s nekorelovanými zložkami. Pre výnosové krivky vygenerované pre dvojfaktorový Vašíčkov model s nenulovou koreláciou sme správnu hodnotu parametra ρ na základe účelovej funkcie neidentifikovali.

Na začiatku kalibrácie CKLS modelu je teda nevyhnutné analyzovať časové rady úrokových mier. Na základe tejto ekonometrickej analýzy je potrebné určiť vlastnosti volatility okamžitej úrokovej miery a vzájomnú závislosť jej faktorov. Výber vhodných nástrojov na odhady parametrov γ a ρ predstavuje priestor pre pokračovanie tejto práce.

4.4 Zhrnutie výsledkov zo simulovaných dát

Predchádzajúcu časť práce sme venovali kalibrácii dvojfaktorového CKLS modelu okamžitej úrokovej miery. Naším cieľom bolo otestovať použitie navrhnutej aproximačnej formuly (3.2). Na začiatku sme pracovali so špeciálnymi prípadmi modelu CKLS, pre ktoré sa dá problém kalibrácie riešiť relatívne jednoducho. Ukázali sme, ako možno rýchlo a presne odhadnúť priebeh okamžitej úrokovej miery a parametre dvojfaktorového Vašíčkovho modelu s nulovou koreláciou riešením sústavy lineárnych



Obr. 4.13: Optimálne hodnoty účelovej funkcie F v závislosti od parametra ρ .

rovníc. Tento algoritmus sa stal základom navrhnutej metódy kalibrácie zložitejších modelov. Prvým z nich bol dvojfaktorový CIR model s nulovou koreláciou, pre ktorý poznáme exaktné vzorce na generovanie výnosových kriviek a je vhodný na otestovanie presnosti aproximácie. Ukázali sme, že časová štruktúra úrokových mier, odhadnutá s použitím odvodenej aproximačnej formuly, relatívne presne zodpovedá simulovaným výnosom. Modifikovaný postup môžeme použiť pri kalibrácii všeobecného CKLS modelu v prípade, že hodnoty parametrov γ a ρ vopred odhadneme na základe analýzy časových radov. Navrhnutá metóda kalibrácie predstavuje výpočtovo relatívne nenáročný spôsob, ktorým dokážeme odhadnúť priebeh short-rate z pozorovanej časovej štruktúry úrokových mier pre ľubovoľný model uvažovaného typu.

4.5 Aplikácia na reálne dáta

V záverečnej časti práce otestujeme efektívnosť navrhnutej metódy kalibrácie na trhových dátach. Vlastnosti tejto metódy najlepšie vyhodnotíme porovnaním s inými opísanými postupmi. Vychádzať budeme opäť z práce [27], v ktorej autor použil na kalibráciu dvojfaktorového CIR modelu s nulovou koreláciou dvojfázovú min-max metódu. Priebeh okamžitej úrokovej miery pritom aproximoval hodnotami jednoduchých výnosov na medzibankovom trhu Eonia. Optimalizoval teda faktorový rozklad s predpokladom, že súčet jednotlivých zložiek short-rate je vopred známy. Poznamenajme, že účelová funkcia predstavovala váženú sumu štvorcov odchýlok teoretických a pozorovaných výnosov, rovnako ako v našej práci. Aby bolo porovnanie výsledkov korektné, budeme používať aj rovnaký súbor vstupných dát. Časovú štruktúru úrokových mier Euribor a hodnoty Eonia pre všetky pracovné dni roku 2008 nájdeme na <http://www.euribor-ebf.eu>.

Odhady parametrov modelu po prevedení do rizikovo neutrálnej miery a optimálne hodnoty účelovej funkcie podľa práce [27] uvádzame v tabuľke 4.13. Najvý-

štvrtrok	α_i	β_i	σ_i	optim. hodnota F
1.	14.5073	-3.1078	1.7034	3.4456×10^{-2}
	0	-0.00001197	0.00013	
2.	60.5784	10.1841	5.7387	6.0077×10^{-2}
	0	0.3814	0.2881	
3.	32.2322	-20.5626	2.5390	5.6862×10^{-2}
	28.0731	0.03447	8.3012	
4.	41.4410	15.5655	2.8789	1.0244×10^{-1}
	0.05341	-0.08086	0.1034	

Tabuľka 4.13: Odhady parametrov a optimálne hodnoty účelovej funkcie pre reálne dáta z roku 2008 podľa práce [27].

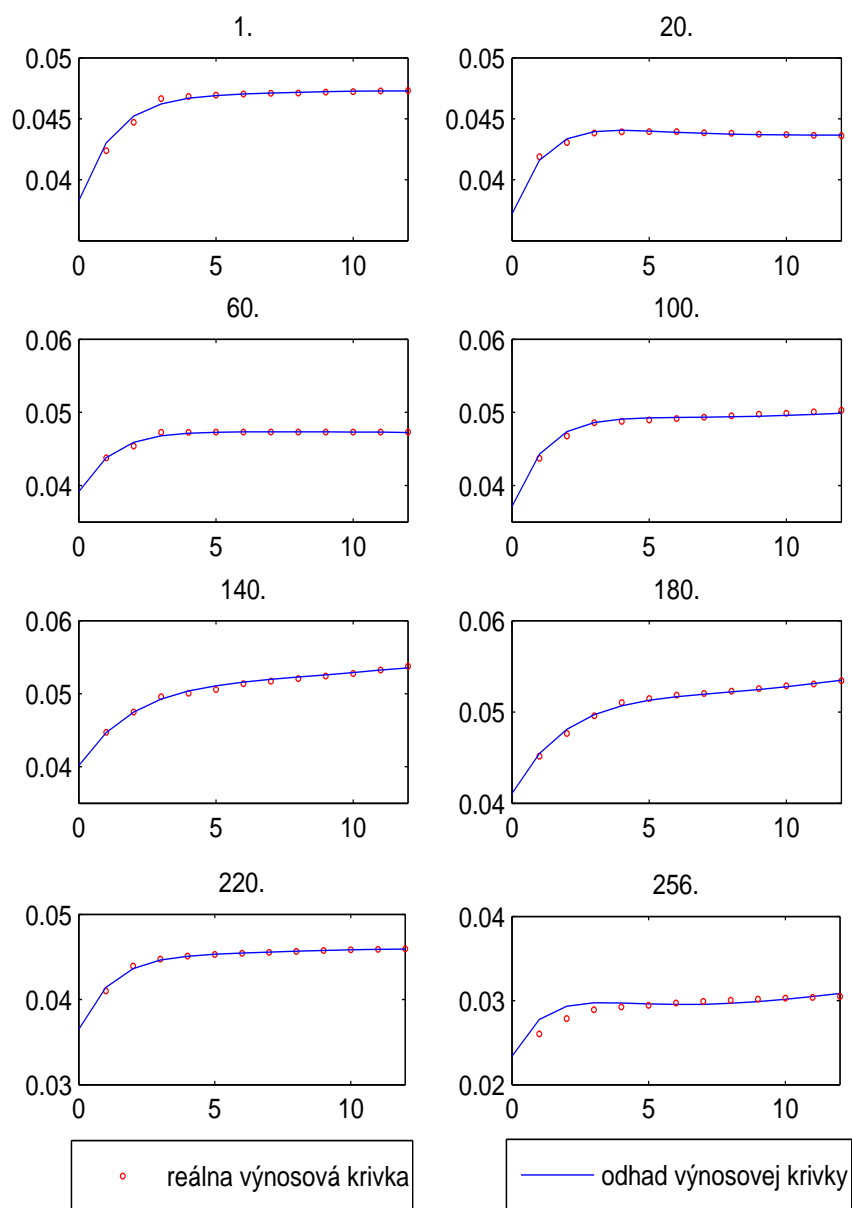
raznejším nedostatkom týchto výsledkov sú nulové hodnoty parametrov α_2 pre dva zo štyroch uvažovaných štvrtrokov. Zodpovedajú nulovým odhadom parametrov κ_2 v reálnej miere. Nakoľko parameter κ predstavuje rýchlosť konverencie príslušného faktora k jeho priemernej úrovni, nulové hodnoty odhadov nie sú v súlade s vlastnosťami mean-reverting procesu.

Výsledky získané postupom, ktorý sme na kalibráciu dvojfaktorového CIR modelu navrhli v podkapitole 4.2, sú zaznamenané v tabuľke 4.14. V prípade tretieho kvartálu uvádzame výsledok algoritmu bez ohraničení na parametre modelu. Pre ostatné štvrtroky neboli ohraničenia aktívne. V troch zo štyroch realizácií kalibrácie teda odhady parametrov zodpovedajú mean-reverting procesu v rizikovo neutrálnej miere. Hodnoty účelovej funkcie rádovo 10^{-9} až 10^{-8} naznačujú, že zhoda odhadnutých a pozorovaných výnosových kriviek je veľmi dobrá. Túto skutočnosť ilustruje obrázok 4.14, na ktorom je znázornené porovnanie odhadnutej a skutočnej časovej štruktúry úrokových mier pre rovnomerne zvolené dni uvažovaného roka. V niektorých prípadoch nie je odhad krátkodobých výnosov celkom presný. Je to spôsobené voľbou váh v tvare $w_{ij} = \tau_j^2$, čo zodpovedá väčšiemu dôrazu na presnosť výnosovej krivky pre dlhšie splatnosti.

štvrtrok	α_i	β_i	σ_i	optim. hodnota F
1.	0.04066	-0.4343	1.1835	1.3448×10^{-9}
	0.1891	-5.2580	12.0768	
2.	0.2763	-5.5246	18.1710	4.6693×10^{-8}
	0.01386	-0.0002369	0.4957	
3.	-0.08639	3.8142	0.07358	1.5839×10^{-8}
	0.1933	-3.4212	6.3873	
4.	0.03044	-0.01743	1.1325	1.3509×10^{-8}
	0.1879	-5.1296	13.0090	

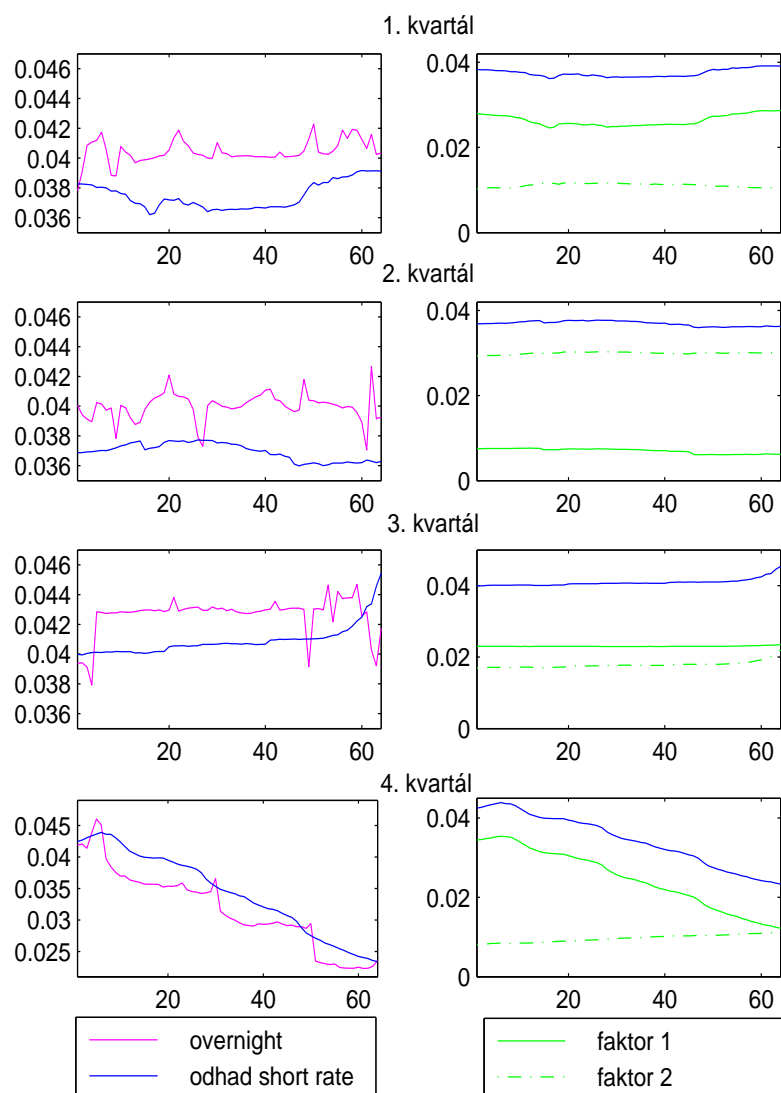
Tabuľka 4.14: Odhady parametrov a optimálne hodnoty účelovej funkcie pre reálne dáta z roku 2008 podľa metódy navrhnutej v tejto práci.

Schopnosť novonavrhnutej metódy dobre modelovať výnosové krivky pravde-



Obr. 4.14: Porovnanie reálnej a odhadnutej časovej štruktúry úrokových mier pre niekoľko dní roku 2008.

podobne vyplýva zo zvoleného prístupu k okamžitej úrokovej miere. Odhad short-rate, získaný na základe časovej štruktúry úrokových mier, je lepším vstupom do výpočtu teoretických výnosov než pozorované hodnoty jednoduchovej úrokovej miery, ktoré môžu byť ovplyvnené špekuláciami na finančných trhoch. Rozdiely odhadnutej short rate oproti priebehu úrokovej miery Eonia, ktorá bola v diplomovej práci [27] použitá ako aproximácia okamžitej úrokovej miery, sú znázornené na obrázkoch 4.15. Odhady short-rate sú obvykle nižšie, než jednoduchová úroková miera. V sérii obrázkov 4.15



Obr. 4.15: Porovnanie reálnej úrokovej miery overnight s odhadnutým priebehom short-rate a odhad faktorového rozkladu pre jednotlivé kvartály roku 2008.

ilustrujeme aj odhady faktorového rozkladu pre jednotlivé kvartály.

Aplikáciou na reálne dáta sme ukázali, že navrhnutá aproximácia cien dlhopisov a metóda kalibrácie modelov úrokovej miery sa dajú používať s uspokojivo presnými výsledkami. Za predpokladu, že okamžitá úroková miera v uvažovanom období zodpovedá modelu typu CKLS, môžeme pomocou algoritmu z podkapitoly 4.3.2 rýchlo a efektívne odhadnúť jej priebeh. Tento výsledok je základom správneho ocenenia ľubovoľného z derivátov úrokových mier.

Záver

V tejto práci sme sa venovali dvojfaktorovým modelom úrokovej miery typu CKLS. Okamžitá úroková miera je v takomto modeli vyjadrená ako súčet dvoch (vo všeobecnosti závislých) zložiek, z ktorých každú môžeme charakterizovať stochastickou diferenciálnou rovnicou. Vo všeobecnom prípade, keď volatilita procesu závisí od veľkosti príslušného faktora, neexistuje v tomto modeli explicitný vzorec pre ceny dlhopisov. Ako riešenie tohto problému sme navrhli analytickú aproximačnú formulu, odvodenú z ceny dlhopisu v dvojfaktorovom Vašíčkovom modeli s korelovanými zložkami. Ukázali sme, že chyba logaritmu tejto aproximácie oproti presnej cene dlhopisu je rádu $O(\tau^4)$.

Navrhnutý vzorec pre cenu dlhopisu možno v praxi použiť len v prípade, že vieme odhadnúť hodnoty faktorového rozkladu a parametrov modelu na základe pozorovateľných dát. V druhej časti práce sme sa preto zaoberali kalibráciou CKLS modelu. Jedným z našich cieľov bol odhad okamžitej úrokovej miery podľa reálnych výnosových kriviek. Stotožnenie okamžitej úrokovej miery s jednomesačným výnosom alebo s overnightom totiž nemusí byť korektné. Ukázali sme, že dvojfaktorový Vašíčkov model s nulovou koreláciou vieme s vysokou presnosťou kalibrovať riešením sústavy lineárnych rovníc. Tento algoritmus sme potom rozšírili pre použitie v zložitejších modeloch. Vlastnosti aproximácie sme testovali pomocou CIR modelu, teda jediného modelu okrem Vašíčkovho, pre ktorý vieme simulovať presné výnosové krivky. Presvedčili sme sa, že zhoda teoretických a pozorovaných výnosových kriviek je pri našom postupe lepšia než v práci, kde bola okamžitá úroková miera aproximovaná overnightom.

Algoritmus, ktorý sme navrhli pre kalibráciu CKLS modelu, však nedokáže správne identifikovať všetky hľadané parametre. Citlivosť volatility na hodnoty faktorov a koreláciu medzi nimi je potrebné odhadnúť iným spôsobom. Riešenie tohto problému predstavuje priestor pre ďalšiu vedeckú prácu v tejto oblasti.

Literatúra

- [1] BOUŠKOVÁ, Z.: *Odhadovanie okamžitej úrokovej miery z výnosových kriviek*, Diplomová práca FMFI UK, 2010
- [2] BRIGO, D., MERCURIO, F.: *Interest Rate Models: Theory and Practice. With smile, Inflation and Credit*, Springer, 2007
- [3] CAIRNS, A. J. G.: *Interest Rate Models: An Introduction*, Princeton University Press, 2004
- [4] CARMONA, R., TEHRANCHI, M.: *Interest Rate Models: an Infinite Dimensional Stochastic Analysis Perspective*, Springer, 2006
- [5] CHAN, K. C., KAROLYI, G. A., LONGSTAFF, F. A., SANDERS, A. B.: *An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-Term Interest Rate*, The Journal of Finance 47(3), 1992, 1209-1227
- [6] CHEN, R. R., SCOTT, L.: *Pricing interest rate options in a two-factor Cox-Ingersoll-Ross model of the term structure*, The Review of Financial Studies 5(4), 1992, 613-636
- [7] CHOI, Y., WIRJANTO, T. S.: *An analytic approximation formula for pricing zero-coupon bonds*, Finance Research Letters 4(2), 2007, 116-126
- [8] CORZO, T., SCHWARTZ, E. S.: *Convergence within the European Union: Evidence from Interest Rates*, Economic Notes 29(2), 2000, 243-268.
- [9] COX, J., INGERSOLL, JR., J. E., ROSS, S. A.: *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica 53(2), 1985, 385-407
- [10] DAHLQUIST, G., BJÖRCK, A.: *Numerical Methods*, Prentice Hall, 2003
- [11] EPISCOPOS, A.: *Further evidence on alternative continuous time models of the short-term interest rate*. Journal of International Financial Markets, Institutions and Money 10, 2000, 199-212
- [12] FELLER, W.: *Two Singular Diffusion Problems*, Annals of Mathematics 54, 1951, 173-182
- [13] FONG, H. G., VASICEK, O. A.: *Fixed-income volatility management*, The Journal of Portfolio Management 17(4), 1991, 41-46

- [14] HUANG, H. Y.: *A direct method for the general solution of a system of linear equations*, Journal of Optimization Theory and Applications 16(5/6), 1975, 429-445
- [15] HULL, J., WHITE, A.: *Pricing Interest-Rate-Derivative Securities*, Review of Financial Studies 3(4), 1990, 573-592.
- [16] ITÔ, K.: 1951, *On a Formula Concerning Stochastic Differentials*, Nagoya Math. Journal 3, 1951, 55-65.
- [17] JUDD, K. L.: *Numerical Methods in Economics*, Massachusetts Institute of Technology, 1998
- [18] KWOK, Y. K.: *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer, 2008
- [19] MELICHERČÍK, I., OLŠAROVÁ, L., ÚRADNÍČEK, V.: *Kapitoly z finančnej matematiky*, EPOS, 2005
- [20] NAKAGAWA, H.: *A Remark on Spot Rate Models Induced by an Equilibrium Model*, Journal of Mathematical Sciences The University of Tokyo 6, 1999, 453-475.
- [21] PRIVAULT, N.: *An Elementary Introduction to Stochastic Interest Rate Modeling*, World Scientific, 2008
- [22] QUARTERONI, A. , SACCO, R. , SALERI, F.: *Numerical mathematics*, Springer, 2007
- [23] ROGERS, L. C. G.: *Which model for term-structure of interest rates should one use?*, Mathematical Finance, IMA Volume 65, 1995, 93-116
- [24] STEHLÍKOVÁ, B.: *Approximate formula for the bond price based on the Vasicek model*, preprint.
- [25] STEHLÍKOVÁ B.: *Mathematical analysis of term structure models*, Dissertation Thesis FMPH UK, 2008
- [26] STEHLÍKOVÁ, B., ŠEVČOVIČ, D.: *Approximate Formulae for Pricing Zero-Coupon Bonds and their Asymptotic Analysis*, International Journal of Numerical Analysis and Modeling 6(2), 2009, 274-283
- [27] SUTÓRIS, I.: *Odhady parametrov modelov časovej štruktúry úrokových mier*, Diplomová práca FMFI UK, 2009
- [28] ŠEVČOVIČ D., STEHLÍKOVÁ B., MIKULA K.: *Analytical and numerical methods for pricing financial derivatives*, Nova Science Publishers, Inc., Hauppauge, 2011
- [29] ŠEVČOVIČ, D., STEHLÍKOVÁ, B., MIKULA, K.: *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Slovenská technická univerzita v Bratislave, 2009

-
- [30] ŠEVČOVIČ, D., URBÁNOVÁ CSAJKOVÁ, A.: *On a two-phase minmax method for parameter estimation of the Cox, Ingersoll, and Ross interest rate model*, Central European Journal of Operations Research 13, 2005, 169-188
- [31] TAKÁČ, M.: *Porovnanie rôznych metód riešenia extrémne zle podmienených sústav lineárnych rovníc*, FMFI UK, 2007
- [32] VASICEK, O. A.: *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics 5(2), 1977, 177-188
- [33] <http://www.euribor-ebf.eu>

Dodatok A

Numerické metódy pri kalibrácii dvojfaktorového Vašíčkovho modelu

Ako sme ukázali v časti 4.1.2, minimalizácia sumy štvorcov odchýlok medzi teoretickými a pozorovanými výnosmi pri kalibrácii dvojfaktorového Vašíčkovho modelu s nulovou koreláciou vedie k riešeniu sústavy lineárnych rovníc (4.5). Táto sústava je veľmi zle podmienená a preto nie je jednoduché ju efektívne riešiť. Na tomto mieste vysvetlíme, v čom spočíva numerická nestabilita systému a opíšeme metódy, ktoré sme použili pri hľadaní jeho riešenia. V ďalšom kroku porovnáme dosiahnuté výsledky a zvolíme pre ďalšie výpočty numerickú metódu, ktorá je najvhodnejšia.

A.1 Numerické metódy riešenia sústav lineárnych rovníc

Sústavu lineárnych rovníc $Ax = b$ môžeme riešiť priamymi alebo iteračnými metódami. Metóda sa označuje za priamu, ak po určitom počte krokov vedie k presnému riešeniu sústavy, pričom neuvažujeme chyby spôsobené zaokrúhľovaním. Výstupom iteračných metód je oproti tomu postupnosť aproximujúcich riešení, ktorá pre počet krokov blížiaci sa nekonečnu konverguje k presnému riešeniu. Voľba prístupu závisí predovšetkým od vlastností matice A . Ak je väčšina prvkov matice nenulová, sú obvykle najviac efektívne priame metódy. V prípade riedkych sústav však dokážu iteračné metódy často lepšie využiť špeciálny tvar matice A . Spolu s menšou časovou a pamäťovou náročnosťou ich táto schopnosť predurčuje na riešenie veľkých riedkych systémov (pozri [10]). Použitiu iteračných metód pri riešení extrémne zle podmienených sústav sa venuje práca [31], prezentovaná na študentskej vedeckej konferencii FMFI.

Číslo podmienenosti predstavuje elasticitu riešenia problému vzhľadom k dátam. Malé číslo podmienenosti znamená, že výsledok algoritmu nie je príliš citlivý na zaokrúhľovacie chyby. Ak je elasticita riešenia veľká, hovoríme, že sústava je zle podmienená. V tom prípade aj malé chyby v prvých krokoch algoritmu spôsobia veľké vychýlenie konečného riešenia. Číslo podmienenosti matice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ je definované

ako

$$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|,$$

kde $\|\cdot\|$ je maticová norma. Číslo podmienenosti závisí od zvolenej normy a pre všetky matice platí $K(A) \geq 1$. Pre singularne matice je číslo podmienenosti $K(A) = \infty$. Podrobnejšie vysvetlenie možno nájsť napríklad v [17] alebo [22].

Pri riešení sústavy lineárnych rovníc ľubovoľnou numerickou metódou vznikajú zaokrúhľovacie chyby. Preto výstupom algoritmu nie je presné riešenie sústavy $Ax = b$, ale riešenie $x + \delta x$ perturbovaného systému

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b. \quad (\text{A.1})$$

Veta A.1.1 [22] *Nech $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je regulárna matica a $\delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spĺňa $\|A^{-1}\| \|\delta A\| < 1$ pre maticovú normu $\|\cdot\|$. Potom ak $x \in \mathbb{R}^n$ je riešením sústavy $Ax = b$ s $b \in \mathbb{R}^n, b \neq 0$ a $\delta x \in \mathbb{R}^n$ vyhovuje (A.1) pre $\delta b \in \mathbb{R}^n$. Potom*

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{K(A)}{1 - K(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right).$$

Nech $\|\delta A\| = 0$. Potom platí:

$$\frac{1}{K(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq K(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Ak je matica sústavy dobre podmienená a chyba $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ je malá, potom je malý aj člen $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ a nájdené riešenie bude relatívne presné. Pre veľké číslo podmienenosti $K \gg 0$ sa však na vypočítanom riešení systému prejaví aj malé vychýlenie vektora b .

V prípade extrémne zle podmienených sústav (experiment v [31] bol realizovaný pre matice s číslom podmienenosti 10^{15} až 10^{21}) vedie použitie najznámejších priamych metód, ako je Gaussova eliminačná metóda, metóda LU rozkladu alebo metóda QR rozkladu, k výrazným odchýlkam od správneho riešenia. Presnejšie výsledky možno dosiahnuť pomocou iteračnej metódy konjugovaných gradientov, alebo pomocou projekčnej metódy Huanga, ktorá patrí medzi priame metódy.

Na tomto mieste uvádzame stručný prehľad metód, ktoré sme v práci použili. O efektívnom riešení sústav lineárnych rovníc rôznymi metódami sa možno dozvedieť viac napríklad v [22]. Na úvod je potrebné definovať dva základné pojmy.

Definícia A.1.2 *Symetrická matica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je kladne definitná vtedy a len vtedy, keď $(Ax, x) > 0$ pre každý vektor $x, x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n$.*

Definícia A.1.3 *Matica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sa nazýva silne diagonálne dominantná, ak*

$$|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

A.1.1 Gaussova-Seidelova metóda a SOR metóda

Gaussova-Seidelova metóda je príkladom klasických iteračných metód na riešenie sústavy $Ax = b$. Prvým krokom je vyjadriť maticu A ako súčet diagonálnej matice D , hornej trojuholníkovej matice U a dolnej trojuholníkovej matice L :

$$A = -L + D - U.$$

Potom pôvodnú sústavu upravíme nasledovne:

$$\begin{aligned} (-L + D - U)x &= b \\ (D - L)x &= Ux + b \\ x &= (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b \\ x &= Cx + g, \end{aligned}$$

kde iteračná matica $C = (D - L)^{-1}U$ a $g = (D - L)^{-1}b$. Keď označíme vektor k -tej iteračnej aproximácie ako x_k , môžeme Gaussovu-Seidelovu iteračnú schému zapísať v tvare:

$$x_{k+1} = Cx_k + g.$$

Veta A.1.4 [17] *Ak je matica A silne diagonálne dominantná, potom Gaussova-Seidelova metóda konverguje pre ľubovoľný začiatkový vektor x_0 .*

Veta A.1.5 [22] *Ak je matica A symetrická a kladne definitná, potom je Gaussova-Seidelova metóda monotónne konvergentná vzhľadom na normu $\|\cdot\|_A$.*

SOR metóda (the successive over-relaxation method) vznikla modifikáciou Gaussovej-Seidelovej metódy. S cieľom zvýšiť rýchlosť konvergenzie bol do iteračnej schémy zavedený iteračný parameter $\omega \neq 0$. Prípád $\omega = 1$ zodpovedá Gaussovej-Seidelovej metóde. Pôvodný lineárny systém môžeme upraviť do tvaru:

$$\begin{aligned} (-L + D - U)x &= b \\ \omega(-L + D - U)x &= \omega b \\ ((1 - \omega)D + \omega U)x + \omega Lx &= -\omega b + Dx \\ ((1 - \omega)D + \omega U)x &= -\omega b + (D - \omega L)x \\ (\omega U + (1 - \omega)D)x + \omega b &= (D - \omega L)x \\ x &= (D - \omega L)^{-1}(\omega U + (1 - \omega)D)x + \omega(D - \omega L)^{-1}b \\ x &= Cx + g. \end{aligned}$$

Iteračná schéma má opäť tvar

$$x_{k+1} = Cx_k + g,$$

kde

$$C = (D - \omega L)^{-1}(\omega U + (1 - \omega)D) \quad g = \omega(D - \omega L)^{-1}b.$$

Tvrdenie A.1.6 (Ostrowski) [22] Ak A je symetrická a kladne definitná, potom *SOR* metóda konverguje vtedy a len vtedy, keď $0 < \omega < 2$. Navyše, konvergencia je monotónna vzhľadom na $\|\cdot\|_A$.

Ak je matica A silne diagonálne dominantná, potom *SOR* metóda konverguje pre $0 < \omega \leq 1$.

Rýchlosť konvergenie závisí od voľby relaxačného parametra ω . Optimálne hodnoty ω sú známe pre viacero špeciálnych prípadov, v tejto práci sa však nimi nebudeme zaoberať.

A.1.2 Metóda konjugovaných gradientov

Základ metódy konjugovaných gradientov predstavuje myšlienka, že pre symetrické a kladne definitné matice je riešenie sústavy

$$Ax = b$$

ekvivaletné minimalizácii kvadratickej funkcie

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - x^T b,$$

pretože ak sú tieto podmienky splnené, funkcia $f(x)$ je rýdzokonvexná a jej minimum je jednoznačne určené vzťahom

$$\nabla f = Ax - b = 0.$$

Hľadanie minima $f(x)$ v každej iterácii pozostáva z dvoch krokov. Prvým je nájdenie vhodného smeru p_k , v ktorom funkcia f klesá. V druhej fáze sa hľadá lokálne minimum funkcie f v zvolenom spádovom smere, teda takzvaný optimálny krok α_k . Iteračná schéma má potom tvar:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Parameter α_k pre optimálny posun nájdeme derivovaním funkcie $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$:

$$\phi'(\alpha_k) = \nabla f(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k = 0.$$

Po ďalších úpravách dostávame

$$\alpha_k = \frac{p_k^T r_k}{p_k^T A p_k},$$

kde $r_k = -\nabla f(x_k)$. Na začiatku algoritmu sa prvý smer volí ako $p_1 = r_1 = -\nabla f(x_1)$. V každej ďalšej iterácii vypočítame nový spádový smer podľa vzťahu

$$p_{k+1} = r_{k+1} - \beta_k p_k,$$

pričom

$$\beta_k = \frac{(A p_k)^T r_{k+1}}{(A p_k)^T p_k}.$$

Takto zabezpečíme, že pre každé $k > 1$ sú smery p_1, p_2, \dots, p_k navzájom konjugovane ortogonálne, teda

$$(Ap_i)^T p_j = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, k, i \neq j.$$

Podrobnejšie sú vlastnosti opísané v [22].

Veta A.1.7 [22] *Nech $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je symetrická kladne definitná matica. Potom metóda konjugovaných gradientov pri riešení systému $Ax = b$ skonverguje k presnému riešeniu za najvyšš n krokov.*

A.1.3 Huangova projekčná metóda

Huangova metóda je výpočtovo stabilná priama metóda na riešenie systému lineárnych rovníc (pozri [14] a [31]). Uvažujme sústavu

$$Ax = b, \tag{A.2}$$

takú, že platí $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $h(A) = h(A|b) = m \leq n$. Výstupom Huangovej metódy je riešenie x_m s najmenšou možnou hodnotou $\|x_2\|$ a projekčná matica H_m . Všeobecné riešenie uvažovanej sústavy potom dostaneme ako

$$x = x_m + H_m y$$

pre ľubovoľný vektor $y \in \mathbb{R}^n$. V našej práci budeme Huangovu metódu používať pre štvorcové matice. V takom prípade existuje jediné riešenie x_m systému a teda H_m je nulová matica.

Označme i -ty riadok matice A ako a_i^T . Bez ujmy na všeobecnosti budeme uvažovať $a_i^T \neq 0, \forall i$. V opačnom prípade by sústava buď bola nekonzistentná a nemala žiadne riešenie, alebo by sme i -tu rovnicu mohli vynechať bez dopadu na riešenie systému.

Sústavu (A.2) zapíšeme v zložkovom tvare ako

$$r_i(x) = a_i^T x - b_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Huangova metóda v prvom kroku hľadá riešenie

$$x = x_1 + H_1 y \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

pre prvú rovnicu sústavy

$$a_1^T x = b_1.$$

Nájdené x_1 predstavuje riešenie s najkratšou dĺžkou a H_1 označuje maticu projekcie do $\mathcal{N}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | a_1^T x = 0\}$. Musí platiť

$$x_1 = \frac{b_1}{a_1^T a_1} a_1$$

a

$$H_1 = I - \frac{a_1 a_1^T}{a_1^T a_1}.$$

Dôkaz je uvedený napríklad v [31]. V ďalšom kroku ukážeme, ako na základe riešenia sústavy $i - 1$ rovníc vyriešime systém, ktorý vznikne po pridaní i -tej rovnice. Nech $x = x_{i-1} + H_{i-1}y$, kde y je ľubovoľný vektor z \mathbb{R}^n , je všeobecným riešením systému

$$\begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_{i-1}^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{i-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

a H_{i-1} označuje projekciu do

$$\mathcal{N}_{i-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_{i-1}^T \end{pmatrix} x = 0 \right\}.$$

Pri pridaní rovnice $a_i^T x = b_i$ k sústave (A.3) sprojektujeme a_i^T do \mathcal{N}_{i-1} . Označme

$$p_i = H_{i-1}a_i \quad (\text{A.4})$$

V prípade $p_i = 0$ buď neexistuje riešenie pôvodnej sústavy (A.2), alebo i -tu rovnicu nemusíme pri riešení systému uvažovať. Ak $p_i \neq 0$, všeobecné riešenie systému (A.3) má tvar

$$x_i = x_{i-1} - \alpha_i p_i. \quad (\text{A.5})$$

Ak zvolíme

$$\alpha_i = \frac{r_i(x_i)}{p_i^T a_i} = \frac{a_i^T x_{i-1} - b_i}{p_i^T a_i}, \quad (\text{A.6})$$

potom x_i vyhovuje aj rovnici $a_i^T x_i - b_i = 0$ a teda je riešením systému

$$\begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_i^T \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \end{pmatrix}.$$

Dá sa ukázať, že

$$H_i = H_{i-1} - \frac{p_i p_i^T}{p_i^T a_i} \quad (\text{A.7})$$

je maticou projekcie do

$$\mathcal{N}_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_i^T \end{pmatrix} x = 0 \right\}.$$

Všeobecné riešenie systému (A.3) teda nájdeme ako $x = x_i + H_i y$, kde y je ľubovoľný vektor z \mathbb{R}^n . Základ algoritmu Huangovej projekčnej metódy tvoria vzťahy (A.4), (A.5), (A.6) a (A.7).

A.2 Kalibrácia dvojfaktorového Vašíčkovho modelu s nulovou koreláciou použitím rôznych numerických metód

Kalibráciu dvojfaktorového Vašíčkovho modelu s nulovou koreláciou môžeme zredukovať na lineárny optimalizačný problém (4.5) s parametrami β_1 a β_2 . Po vyriešení systému, teda nájdení optimálnych hodnôt premenných $\alpha_1, \sigma_1^2, \alpha_2, \sigma_2^2$ a faktorového rozkladu $r_{1i}, i = 1, \dots, n$ a $r_{2i}, i = 1, \dots, n$, môžeme zvyšné dva parametre odhadnúť voľnou optimalizáciou. Uvažovaná sústava je však extrémne zle podmienená. Na jej riešenie preto aplikujeme numerické metódy, ktoré boli popísané vyššie.

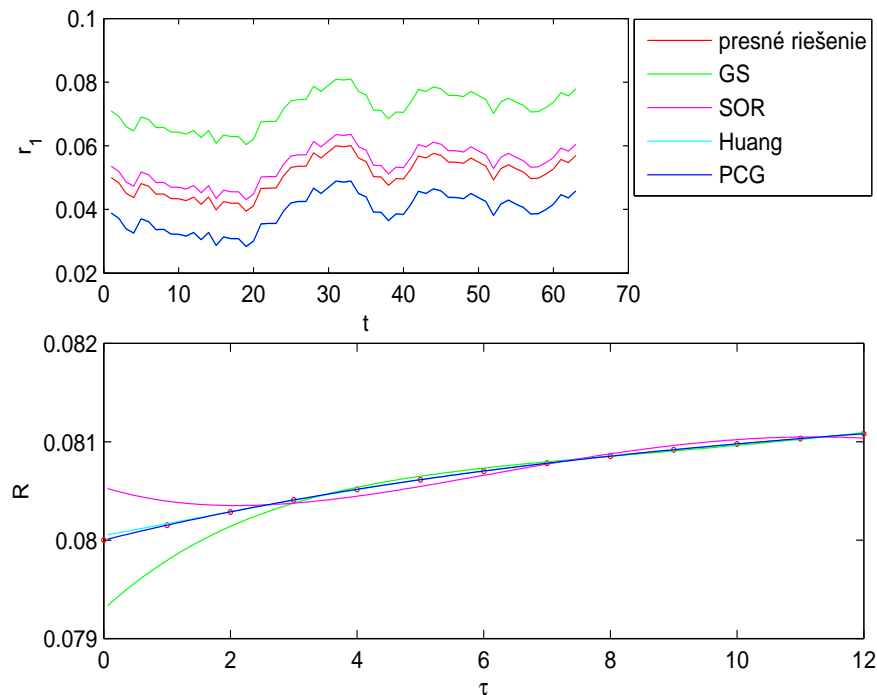
Kalibráciu modelu testujeme na simulovaných výnosových krivkách, vygenerovaných pre parametre v tabuľke 4.4. Taký prístup nám umožňuje posúdiť presnosť odhadnutých hodnôt. Parametre β_1 a β_2 dokážeme identifikovať s presnosťou na štyri desatinné miesta použitím bežných metód. Odhad zvyšných premenných riešením sústavy (4.5) však nie je triviálny. Číslo podmienenosti v hodnotách 10^{16} indikuje, že musíme použiť numerické metódy, vhodné pre nestabilné systémy. Poznamenajme, že vzhľadom na predmet modelovania sú naše nároky na presnosť riešenia veľmi vysoké. Hodnoty faktorového rozkladu okamžitej úrokovej miery sú v prípade simulovaných dát rádu 10^{-2} , pričom pre reálne dáta musíme očakávať ešte nižšie hodnoty. Uvažovaná sústava zodpovedá nutným podmienkam optimality pre minimalizáciu konvexnej funkcie, je teda kladne definitná. Súčasne spĺňa aj podmienku symetrie, takže uvažované numerické metódy by mali skonvergovať k presnému riešeniu.

	α_1	σ_1^2	α_2	σ_2^2
presné hodnoty	0.09541	0.001226	0.0002978	0.0001378
GS	0.1149	0.07616	0.01761	0.009142
SOR	0.05740	-0.02547	0.03167	0.03353
Huang	0.08787	-0.02196	-0.01176	-0.009054
CG	0.07705	0.001226	0.0003500	0.0001380

Tabuľka A.1: Parametre dvojfaktorového Vašíčkovho modelu odhadnuté použitím jednotlivých numerických metód (jedna iterácia).

Tabuľka A.1 a obrázky A.1 ilustrujú výsledky kalibrácie pri použití Gaussovej-Seidelovej metódy (označenej GS), SOR metódy s parametrom $\omega = 0.3$, Huangovej projekčnej metódy a metódy konjugovaných gradientov (označenej PCG). Pri riešení touto metódou použijeme funkciu *Preconditioned conjugate gradients method - pcg* v programe Matlab. Táto funkcia zabezpečuje urýchlenie konvergenencie prepodmiene- ním sústavy - úpravou problému do tvaru, ktorý je vhodnejší pre numerické riešenie.

Pri vyhodnocovaní úspešnosti jednotlivých metód si musíme všimnúť niekoľko ukazovateľov. Prvým ukazovateľom je presnosť odhadov jednotlivých faktorov a presnosť odhadu okamžitej úrokovej miery ako ich súčtu. Nutnou podmienkou efektívnej kalibrácie je presný odhad parametrov $\alpha_1, \sigma_1, \alpha_2, \sigma_2$. Potrebujeme tiež dosiahnuť čo najlepšiu zhodu pôvodnej a odhadnutej výnosovej krivky, čo zodpovedá minimálnej hodnote účelovej funkcie. Ako vidieť na prvom obrázku, kde je znázornený vývoj



Obr. A.1: Porovnanie rôznych numerických metód pri kalibrácii 2-faktorového Vašíčkovho modelu.

faktora r_1 , všetky metódy odhadnú rozklad na faktory pre jednotlivé dni s určitým posunom. Najpresnejší je odhad faktorového rozkladu metódou SOR. V prudkom kontraste s týmto výsledkom je odhad parametrov modelu. Pri použití SOR metódy rovnako ako Huangovej metódy dostávame záporné hodnoty σ_1^2 , čo je neprípustné. Lepšie výsledky dosiahneme pomocou Gaussovej-Seidelovej metódy a metódy konjugovaných gradientov. Metóda konjugovaných gradientov pritom odhadne parametre s relatívne vysokou presnosťou. Porovnanie výnosových kriviek na druhom z dvojice obrázkov potvrdzuje predchádzajúce pozorovanie. Kým výnosy vypočítané pomocou Gaussovej-Seidelovej a SOR metódy sa od vygenerovanej časovej štruktúry výrazne odchýlili, výnosová krivka pre metódu konjugovaných gradientov sa s presnou krivkou na obrázku prekrýva.

Metódu konjugovaných gradientov môžeme označiť za najvýhodnejšiu pre riešenie sústavy (4.5) pri kalibrácii Vašíčkovho modelu. Vďaka matlabskej funkcii *pcg* je takýto výpočet aj relatívne rýchly. Preto pri odhadovaní faktorového rozkladu a tiež všetkých šiestich parametrov používame v práci práve túto metódu.