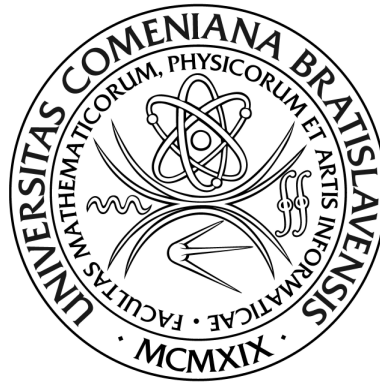


**UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY**

KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



**Pravdepodobnostný model svetelnej
križovatky**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2011

Bc. Kamila Hollá

Pravdepodobnostný model svetelnej križovatky

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bc. Kamila Hollá



UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce:
Mgr. Ján Somorčík, PhD.

Bratislava 2011

78ff1f65-e042-4b09-83c2-c791f6b0afdc



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Kamila Hollá
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Pravdepodobnostný model svetelnej križovatky

Cieľ : Úvodným cieľom práce je osvojiť si základný pravdepodobnostný model svetelnej križovatky. Ďalej zostaviť a numericky vyriešiť rôzne optimalizačné problémy ohľadom nastavenia dôb svietenia zelenej na rôznych typoch križovatiek. Následne by sa mal zostaviť simulačný model, ktorým by bolo možné experimentálne overiť výsledky numerickej optimalizácie. Prípadne by sa simulačný model mohol použiť na riešenie zložitejších situácií, ktorých matematický popis a numerické riešenie by bolo obtiažne.

Vedúci : Mgr. Ján Somorčík, PhD.

Dátum zadania: 27.01.2010

Dátum schválenia: 04.04.2011

.....
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne pod vedením vedúceho diplomovej práce a s použitím uvedenej literatúry.

V Bratislave 26. apríla 2011

.....

Pod'akovanie

Touto cestou by som sa chcela poďakovať vedúcemu diplomovej práce Mgr. Jánovi Somorčíkovi, PhD. za jeho odborné vedenie, pripomienky, návrhy a za množstvo času a trpezlivosti, ktoré mi venoval pri vypracovaní diplomovej práce.

Abstrakt

Hollá, Kamila: Pravdepodobnostný model svetelnej križovatky. Diplomová práca, Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky. Vedúci diplomovej práce: Mgr. Ján Somorčík, PhD. Bratislava: FMFI UK, 2011. 73 strán.

Diplomová práca sa zaoberá skúmaním pravdepodobnostného modelu svetelnej križovatky a následným vytvorením simulačného modelu. Hlavným cieľom práce je numericky a experimentálne pomocou Monte Carlo simulácií zistiť optimálne nastavenie dôb svietenia zelených svetiel na križovatke za účelom minimalizácie času stráveného autami na križovatke čakaním na červenej a zároveň eliminácie nevyužitého svietenia zelenej. Práca je rozdelená do troch kapitol. V prvej kapitole sa venujeme samotnému pravdepodobnostnému modelu, uvedieme uvažované typy optimalizačných problémov a podmienky pre dobu svietenia zeleného svetla. V druhej kapitole predstavíme rôzne typy križovatiek a výsledky numerického riešenia. Tretia kapitola sa zaoberá simuláciami a porovnaním experimentálnych výsledkov s numerickými.

Kľúčové slová: svetelná križovatka, Poissonov proces, Monte Carlo simulácie, kvadratické programovanie, nelineárne programovanie

Abstract

Hollá, Kamila: Probability model of traffic lights. Master's thesis, Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics. Supervisor: Mgr. Ján Somorčík, PhD. Bratislava: FMPH Comenius University, 2011. 73 pages.

The master's thesis presents a probability model of traffic lights and a simulation model. The main objective of this work is to find numerically and experimentally using Monte Carlo simulations the optimal setting of periods of lighting green lights with the purpose to minimize the time spent by cars that wait for the green light and to eliminate the time of superfluous lighting of the green light. The work is divided into three chapters. The first chapter is dedicated to the probability model, introduces the considered types of optimization problems and conditions for the time of lighting the green light. The second chapter presents various types of intersections and the results of numerical solution. The third chapter deals with the simulations and comparison of experimental results with numerical results.

Keywords: traffic lights, Poisson process, Monte Carlo simulations, quadratic programming, nonlinear programming

Obsah

Úvod	1
1 Matematický model svetelnej križovatky	2
1.1 Stredná hodnota celkového času čakania áut na križovatke .	2
1.2 Stredná hodnota doby zbytočného svietenia zeleného svetla	9
1.3 Optimalizácia doby svietenia zeleného svetla	11
1.4 Podmienky pre dobu svietenia zeleného svetla	11
2 Schémy svetelných križovatiek	12
2.1 Križovatka I.	12
2.1.1 Optimalizované funkcie pre križovatku I.	13
2.1.2 Podmienky pre križovatku I.	14
2.1.3 Numerické výsledky optimalizácie pre križovatku I.	17
2.2 Križovatka II.	18
2.2.1 Optimalizované funkcie pre križovatku II.	20
2.2.2 Podmienky pre križovatku II.	21
2.2.3 Numerické výsledky optimalizácie pre križovatku II.	21
2.3 Križovatka III.	23
2.3.1 Optimalizované funkcie pre križovatku III.	24
2.3.2 Podmienky pre križovatku III.	26
2.3.3 Numerické výsledky optimalizácie pre križovatku III.	26
2.4 Križovatka IV.	27
2.4.1 Optimalizované funkcie pre križovatku IV.	29
2.4.2 Podmienky pre križovatku IV.	31
2.4.3 Numerické výsledky optimalizácie pre križovatku IV.	31
2.4.4 Zmena parametrov λ pre križovatku IV.	32
2.5 Križovatka V.	33
2.5.1 Optimalizované funkcie pre križovatku V.	34
2.5.2 Podmienky pre križovatku V.	36
2.5.3 Numerické výsledky optimalizácie pre križovatku V.	37
2.6 Križovatka VI.	37
2.6.1 Optimalizované funkcie pre križovatku VI.	40
2.6.2 Podmienky pre križovatku VI.	43
2.6.3 Numerické výsledky optimalizácie pre križovatku VI.	44
2.6.4 Zmena parametrov λ pre križovatku VI.	45
3 Monte Carlo model svetelnej križovatky	46
3.1 Križovatka I.	49
3.2 Križovatka II.	51

3.3	Križovatka III.	54
3.4	Križovatka IV.	56
3.5	Križovatka V.	61
3.6	Križovatka VI.	62
	Záver	66
	Zoznam použitej literatúry	68

Úvod

Predstavme si, že je daná jednoduchá cestná križovatka so štyrmi cestami, riadená svetelnými semaformi. Z dôvodov koordinácie je určená dĺžka cyklu a začiatok zelenej v hlavnom smere. Ďalej sú dané intenzity príchodu áut na svetelnú križovatku vo všetkých smeroch. Úlohou je nájsť čas ukončenia zelenej v hlavnom smere tak, aby stredná časová strata áut pri prechode križovatkou bola minimálna.

V matematickom modeli sa takáto úloha rieši tak, že sa odvodí nelineárna funkcia, vyjadrujúca závislosť strednej časovej straty od voľby neznámej premennej, predstavujúcej dĺžku trvania svietenia zeleného svetla na semafore a nájde sa optimálna hodnota tejto premennej, ktorá minimalizuje danú funkciu.

V simulačnom modeli sa pre túto úlohu postupuje tak, že sa pomocou generátora náhodných čísel simulujú vstupy jednotlivých áut do križovatky a následne sa simuluje pravidelné striedanie svetelných signálov. Ak má auto zelenú a nie je pred ním rad, tak prejde. Ak nie, tak sa zaradí do radu a čaká. Počítač si pre každé auto zapamätá stratový čas a z nich vypočíta priemer, čím dostane odhadnuté hodnoty optimalizovanej funkcie pre rôzne doby svietenia zelenej a následne sa nájde doba svietenia zeleného svetla, pri ktorej odhadnutá funkcia nadobúda minimum.

V diplomovej práci sa budeme zaoberať práve takýmto typom úloh, skúmaním matematického modelu a následne zostavením simulačného modelu. Budeme sa snažiť nájsť optimálne hodnoty nastavenia dôb svietení zelenej na semafore pre rôzne typy križovatiek s úmyslom minimalizovať čas čakania áut na červenej a zároveň vyhnúť sa zbytočnému svieteniu zelenej. Diplomová práca je rozdelená na tri kapitoly.

Prvá kapitola sa venuje základným predpokladom, odvodeniu vzťahov pre stredné hodnoty celkového času čakania áut na križovatkách a doby zbytočného svietenia zeleného svetla. Uvedieme tiež rôzne spôsoby zostavenia optimalizačných problémov a definujeme podmienky na dobu svietenia zelenej tak, aby nedochádzalo k hromadeniu áut na križovatkách.

V druhej kapitole predstavíme rôzne typy križovatiek, zostavíme pre ne optimalizované funkcie, určíme podmienky pre doby svietenia zeleného svetla a numericky nájdeme optimálne nastavenie dôb svietení zelenej.

Tretia kapitola vysvetľuje zostavenie simulačného modelu, porovnáva numerické výsledky z predošlej kapitoly s výsledkami Monte Carlo simulácií, čím sa overí správnosť zostaveného simulačného modelu, ktorý možno využiť neskôr aj na riešenie zložitejších situácií.

1 Matematický model svetelnej križovatky

Nech náhodná premenná X_t vyjadruje počet áut prechádzajúcich svetelnou križovatkou v časovom intervale $(0, t)$. Predpokladáme, že X_t je Poissonov proces s parametrom λt , kde parameter λ predstavuje intenzitu príchodu áut na svetelnú križovatku. Voľba Poissonovho procesu vyplýva z jeho vhodných vlastností (viď [6]):

- $X_0 = 0$,
- nezávislé prírastky – počet udalostí v disjunktných intervaloch je od seba navzájom nezávislý,
- stacionárne prírastky – rozdelenie pravdepodobnosti počtu udalostí v každom časovom intervale závisí len na dĺžke intervalu.

Dôsledkom týchto vlastností platí:

- rozdelenie pravdepodobnosti X_t je Poissonovo rozdelenie, teda

$$P(X_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad (1)$$

- rozdelenie pravdepodobnosti času do nastatia ďalšej udalosti je exponenciálne s parametrom λ .

Ďalej nech S_i predstavuje čas príchodu i -teho auta na svetelnú križovatku. Časy medzi jednotlivými príchodmi áut označme T_i a definujme ako $T_i = S_i - S_{i-1}$. Z vlastností Poissonovho procesu vieme, že T_1, T_2, T_3, \dots sú nezávislé a z exponenciálneho rozdelenia s parametrom λ .

1.1 Stredná hodnota celkového času čakania áut na križovatke

Pre neskoršie potreby minimalizácie celkového času stráveného autami na svetelnej križovatke odvodíme vzťah pre výpočet strednej hodnoty celkového času čakania áut na zasvietenie zeleného svetla na semafore, ktorý označíme Z . Dobu svietenia červeného svetla na semafore označíme t , čo inými slovami znamená, že v intervale $(0, t)$ svieti na semafore svetelnej križovatky červené svetlo.

Strednú hodnotu celkového času čakania áut na zasvietenie zeleného svetla na semafore vyjadríme nasledovne

$$E(Z) = E(Z|X_t = 0) P(X_t = 0) + E(Z|X_t = 1) P(X_t = 1) + \dots + \\ + E(Z|X_t = n) P(X_t = n) + \dots, \quad (2)$$

kde $E(Z|X_t = i)$ predstavuje strednú hodnotu celkového času Z čakania áut na zasvietenie zeleného svetla na semafore, za podmienky, že na križovatku prišlo i áut do času t , ktorú násobíme pravdepodobnosťou, že na križovatku prišlo práve i áut ($P(X_t = i)$).

Auto, ktoré prišlo na križovatku v čase S_i , čaká na zasvietenie zeleného svetla v čase t po dobu $t - S_i$. Celkovú dobu čakania všetkých áut na zasvietenie zeleného svetla na semafore svetelnej križovatky Z potom vyjadríme ako $Z = (t - S_1) + (t - S_2) + \dots + (t - S_n)$, čo využijeme pri počítaní podmienenej strednej hodnoty:

$$E(Z|X_t = n) = E((t - S_1) + (t - S_2) + \dots + (t - S_n) | X_t = n).$$

Z vlastností Poissonovho procesu vieme, že časy medzi jednotlivými príchodmi áut T_i sú nezávislé, z čoho vyplýva, že aj doby čakania $t - S_i$ sú navzájom nezávislé. Zároveň je zrejmé, že doba svietenia červeného svetla na križovatke t nie je náhodná premenná. Podmienenú strednú hodnotu upravíme na základe týchto faktov:

$$\begin{aligned} E(Z|X_t = n) &= E(t - S_1|X_t = n) + \dots + E(t - S_n|X_t = n) = \\ &= t - E(S_1|X_t = n) + \dots + t - E(S_n|X_t = n). \end{aligned} \quad (3)$$

Pri úpravách vo výpočte $E(Z)$ dostávame podmienenú strednú hodnotu $E(S_k|X_t = n)$, ktorú vypočítame nasledovne:

$$E(S_k|X_t = n) = \int_0^t x f_k(x) dx, \quad (4)$$

kde $f_k(x)$ predstavuje hustotu náhodnej premennej $S_k|X_t = n$. Hustotu $f_k(x)$ náhodnej premennej $S_k|X_t = n$ však zatiaľ nepoznáme, bude sa tomu venovať nasledujúce odvodenie.

Nech Y_1, \dots, Y_n sú nezávislé náhodné premenné z rovnomerného rozdelenia s parametrami 0 a t . Hustotu týchto náhodných premenných si označíme ako f a distribučnú funkciu ako F . Ak usporiadame tieto náhodné premenné vzostupne podľa veľkosti a označíme nasledovne $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$, dostaneme vektor

$$\begin{pmatrix} Y_{(1)} \\ \vdots \\ Y_{(n)} \end{pmatrix}.$$

Nasledovné vektory

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix} | X_t = n \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} Y_{(1)} \\ \vdots \\ Y_{(n)} \end{pmatrix}$$

majú rovnaké rozdelenie (viď [2]), preto na základe určenia distribučnej funkcie a hustoty vektora náhodných premenných $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$ zistíme aj hustotu náhodnej premennej $S_k | X_t = n$.

Hustotu náhodnej premennej $Y_{(1)}$ si označíme f_1 , hustotu pre $Y_{(n)}$ ako f_n , hustotu pre $Y_{(k)}$ si označíme f_k atď. Potom hustota $f_k(x)$ náhodnej premennej $S_k | X_t = n$ sa rovná hustote f_k náhodnej premennej $Y_{(k)}$, keďže dané náhodné premenné majú rovnaké rozdelenie.

Distribučnú funkciu F_1 pre náhodnú premennú $Y_{(1)} = \min \{Y_1, \dots, Y_n\}$ vypočítame ako

$$\begin{aligned} F_1(x) &= P[Y_{(1)} < x] = P[\min \{Y_1, \dots, Y_n\} < x] = P[Y_1 < x \vee \dots \vee Y_n < x] = \\ &= 1 - P[Y_1 \geq x, \dots, Y_n \geq x] = 1 - \prod_{i=1}^n P[Y_i \geq x] = \\ &= 1 - (1 - F(x))^n. \end{aligned}$$

Hustotu pre $Y_{(1)}$ potom vyjadríme nasledovne

$$f_1(x) = F_1'(x) = n (1 - F(x))^{n-1} f(x).$$

Distribučnú funkciu F_n pre náhodnú premennú $Y_{(n)} = \max \{Y_1, \dots, Y_n\}$ dostaneme ako

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P[Y_{(n)} < x] = P[\max \{Y_1, \dots, Y_n\} < x] = \\ &= P[Y_1 < x, \dots, Y_n < x] = \prod_{i=1}^n P[Y_i < x] = \\ &= (F(x))^n. \end{aligned}$$

Potom hustota pre $Y_{(n)}$ vyzerá nasledovne

$$f_n(x) = F_n'(x) = n (F(x))^{n-1} f(x).$$

Pre výpočet distribučnej funkcie F_k pre náhodnú premennú $Y_{(k)}$, pričom vieme, že platí $F_k(x) = P[Y_{(k)} < x]$, si najskôr uvedomíme, že ak má byť k -te Y pri usporiadaní vzostupne menšie ako x , musí byť k premenných Y určite menších od x , kým ostatné premenné Y môžu a nemusia byť menšie. Postupne uvažujeme každú možnosť, ktorá môže nastať a pri každej novej kombinácii násobíme pravdepodobnosť nastania tejto možnosti počtom takýchto prípadov. Distribučnú funkciu F_k pre náhodnú

premennú $Y_{(k)}$ potom vyjadríme nasledovne

$$\begin{aligned} F_k(x) &= P[Y_{(k)} < x] = \\ &= \binom{n}{k} P[Y_1 < x, \dots, Y_k < x, Y_{k+1} > x, \dots, Y_n > x] + \\ &+ \binom{n}{k+1} P[Y_1 < x, \dots, Y_{k+1} < x, Y_{k+2} > x, \dots, Y_n > x] + \\ &+ \dots + \binom{n}{n} P[Y_1 < x, \dots, Y_n < x]. \end{aligned}$$

Z predpokladov o náhodných premenných Y_1, \dots, Y_n vieme, že sú nezávislé, preto môžeme pravdepodobnosti v predošlom výraze rozpísať na súčin pravdepodobností jednotlivých náhodných premenných:

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \binom{n}{k} P[Y_1 < x] \dots P[Y_k < x] P[Y_{k+1} > x] \dots P[Y_n > x] + \\ &+ \binom{n}{k+1} P[Y_1 < x] \dots P[Y_{k+1} < x] P[Y_{k+2} > x] \dots P[Y_n > x] + \\ &+ \dots + \binom{n}{n} P[Y_1 < x] \dots P[Y_n < x] = \binom{n}{k} F^k (1-F)^{n-k} + \\ &+ \binom{n}{k+1} F^{k+1} (1-F)^{n-k-1} + \dots + \binom{n}{n} F^n = \\ &= \sum_{a=k}^n \binom{n}{a} F^a (1-F)^{n-a}. \end{aligned}$$

V predošlom odvodení i v nasledujúcich vzťahoch zjednodušíme zápis $F(x)$ len na F a takisto $f(x)$ na f . Hustotu pre $Y_{(k)}$ vypočítame nasledovne

$$\begin{aligned} f_k(x) = F'_k(x) &= \sum_{a=k}^n \left\{ \binom{n}{a} a F^{a-1} f (1-F)^{n-a} + \right. \\ &\left. + \binom{n}{a} F^a (1-F)^{n-a-1} (-f) (n-a) \right\}. \end{aligned}$$

Rozpísaním súm na jednotlivé zložky dostávame:

$$\begin{aligned}
f_k(x) &= k \binom{n}{k} F^{k-1} (1-F)^{n-k} f_- \\
&\quad - (n-k) \binom{n}{k} F^k (1-F)^{n-k-1} f_+ \\
&\quad + (k+1) \binom{n}{k+1} F^k (1-F)^{n-k-1} f_- \\
&\quad - (n-k-1) \binom{n}{k+1} F^{k+1} (1-F)^{n-k-2} f_+ \dots \\
&\quad \dots + (n-1) \binom{n}{n-1} F^{n-2} (1-F)^{n-n+1} f_- \\
&\quad - (n-n+1) \binom{n}{n-1} F^{n-1} (1-F)^{n-n+1-1} f_+ \\
&\quad + n \binom{n}{n} F^{n-1} (1-F)^{n-n} f_- \\
&\quad - (n-n) \binom{n}{n} F^n (1-F)^{n-n-1} f.
\end{aligned}$$

Pre ďalšie úpravy ukážeme, že platia nasledujúce vzťahy:

$$a \binom{n}{a} = a \frac{n!}{a! (n-a)!} = n \frac{(n-1)!}{(a-1)! (n-a)!} = n \binom{n-1}{a-1},$$

$$(n-a) \binom{n}{a} = (n-a) \frac{n!}{a! (n-a)!} = n \frac{(n-1)!}{a! (n-a-1)!} = n \binom{n-1}{a}.$$

Využitím predošlých vzťahov nakoniec dostávame:

$$\begin{aligned}
f_k(x) &= n \binom{n-1}{k-1} F^{k-1} (1-F)^{n-k} f_- - n \binom{n-1}{k} F^k (1-F)^{n-k-1} f_+ \\
&\quad + n \binom{n-1}{k} F^k (1-F)^{n-k-1} f_- - n \binom{n-1}{k+1} F^{k+1} (1-F)^{n-k-2} f_+ \\
&\quad + \dots + n \binom{n-1}{n-2} F^{n-2} (1-F) f_- - n \binom{n-1}{n-1} F^{n-1} (1-F)^0 f_+ \\
&\quad + n \binom{n-1}{n-1} F^{n-1} (1-F)^0 f_- - 0.
\end{aligned}$$

Všimnime si, že všetky výrazy okrem prvého sa nám navzájom od seba odpočítajú, preto hustotu náhodnej premennej $Y_{(k)}$ vyjadríme ako

$$f_k(x) = n \binom{n-1}{k-1} F^{k-1} (1-F)^{n-k} f,$$

čo je zároveň aj hustota pre náhodnú premennú $S_k|X_t = n$.

Na základe predpokladov pre náhodné premenné Y_1, \dots, Y_n si vyjadříme distribučnú funkciu F a hustotu f a následne dosadíme do výpočtov. Pre rovnomerné rozdelenie s parametrami 0 a t platí pre distribučnú funkciu a hustotu:

$$F(x) = \frac{x-0}{t-0} = \frac{x}{t}, \quad f(x) = F'(x) = \frac{1}{t} \quad \text{pre } x \in (0, t).$$

Teraz keď už poznáme vyjadrenie pre hustotu náhodnej premennej $S_k|X_t = n$, môžeme pokračovať vo výpočte podmienenej strednej hodnoty $E(S_k|X_t = n)$. Dosadením f_k, F, f do výrazu (4) a následnou úpravou s využitím vlastností binomického rozvoja

$$(a-b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^{n-i} a^i b^{n-i},$$

vzťahu (viď [3])

$$\binom{b}{0} \frac{1}{a} - \binom{b}{1} \frac{1}{a+1} + \dots + \binom{b}{b} \frac{1}{a+b} = \beta(a, b+1) \quad \text{pre } a, b \in N,$$

a s využitím vlastností Beta a Gama funkcie

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{pre } n \in N,$$

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!},$$

dostávame vyjadrenie pre podmienenú strednú hodnotu $E(S_k|X_t = n)$:

$$\begin{aligned} E(S_k|X_t = n) &= \int_0^t x f_k(x) dx = \int_0^t x n \binom{n-1}{k-1} F^{k-1} (1-F)^{n-k} f dx = \\ &= n \binom{n-1}{k-1} \int_0^t x \left(\frac{x}{t}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{t}\right)^{n-k} \frac{1}{t} dx = \\ &= n \binom{n-1}{k-1} \int_0^t \frac{x^k (t-x)^{n-k}}{t^k t^{n-k}} dx = \\ &= n \binom{n-1}{k-1} \int_0^t \frac{x^k (t-x)^{n-k}}{t^n} dx = \\ &= n \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{t^n} \int_0^t x^k (t-x)^{n-k} dx = \\ &= n \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{t^n} \int_0^t x^k \left[\sum_{a=0}^{n-k} (-1)^{n-k-a} \binom{n-k}{a} t^a x^{n-k-a} \right] dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{t^n} \sum_{a=0}^{n-k} (-1)^{n-k-a} \binom{n-k}{a} t^a \int_0^t x^{n-a} dx = \\
&= n \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{t^n} \sum_{a=0}^{n-k} (-1)^{n-k-a} \binom{n-k}{a} t^a \left[\frac{x^{n-a+1}}{n-a+1} \right]_0^t = \\
&= n \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{t^n} \sum_{a=0}^{n-k} (-1)^{n-k-a} \binom{n-k}{a} t^a \frac{t^{n-a+1}}{n-a+1} = \\
&= n \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{t^n} t^{n+1} \sum_{a=0}^{n-k} \binom{n-k}{a} \frac{(-1)^{n-k-a}}{n-a+1} = \\
&= n \binom{n-1}{k-1} t \beta(k+1, n-k+1) = \\
&= n \binom{n-1}{k-1} t \frac{\Gamma(k+1) \Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} = \\
&= n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-1-k+1)!} t \frac{(k+1-1)! (n-k+1-1)!}{(n+2-1)!} = \\
&= \frac{n(n-1)! k! (n-k)! t}{(k-1)! (n-k)! (n+1)!} = \frac{n! k (k-1)! t}{(k-1)! (n+1)!} = \frac{k}{n+1} t.
\end{aligned}$$

Nakoniec sme dospeli k jednoduchému výrazu pre podmienenú strednú hodnotu:

$$E(S_k | X_t = n) = \frac{k}{n+1} t, \quad (5)$$

ktorý dosadíme do rovnosti (3):

$$\begin{aligned}
E(Z | X_t = n) &= t - E(S_1 | X_t = n) + \dots + t - E(S_n | X_t = n) = \\
&= n t - \frac{1}{n+1} t - \frac{2}{n+1} t - \dots - \frac{n}{n+1} t = \\
&= n t - \frac{t}{n+1} \sum_{k=1}^n k = n t - \frac{t}{n+1} \frac{1}{2} n(n+1) = \\
&= n t - \frac{n t}{2} = \frac{1}{2} n t.
\end{aligned}$$

Získali sme vyjadrenie pre podmienenú strednú hodnotu $E(Z | X_t = n)$ potrebnú pre výpočet strednej hodnoty celkového času čakania áut na zosvietenie zeleného svetla na semafore $E(Z)$:

$$E(Z | X_t = n) = \frac{1}{2} n t, \quad (6)$$

Vztáhy (6) a (1) dosadíme do (2) a jednoduchými úpravami dostávame:

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(Z|X_t = 0)P(X_t = 0) + \dots + E(Z|X_t = n)P(X_t = n) + \dots = \\ &= 0 + \frac{t}{2} \frac{\lambda t}{1!} e^{-\lambda t} + \frac{2t}{2} \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t} + \dots + \frac{nt}{2} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kt}{2} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \frac{t}{2} \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda t} \frac{t}{2} \lambda t e^{\lambda t} = \frac{\lambda t^2}{2}. \end{aligned}$$

Odvodili sme vzťah pre výpočet strednej hodnoty celkového času čakania áut na zasvietenie zeleného svetla na semafore

$$E(Z) = \frac{\lambda t^2}{2}, \tag{7}$$

kde Z predstavuje celkový čas čakania áut na zasvietenie zeleného svetla na semafore, t dobu svietenia červeného svetla na semafore a λ intenzitu príchodu áut na svetelnú križovatku.

1.2 Stredná hodnota doby zbytočného svietenia zeleného svetla

Pre neskoršie potreby minimalizácie celkového času stráveného autami na svetelnej križovatke odvodíme aj vzťah pre výpočet strednej hodnoty doby zbytočného svietenia zeleného svetla na semafore, kedy už križovatkou neprešlo žiadne auto, ktorú označíme V . V tomto prípade si symbolom t označíme dobu svietenia zeleného svetla na semafore, čo inými slovami znamená, že v intervale $(0, t)$ svieti na semafore zelené svetlo.

Strednú hodnotu doby svietenia zeleného svetla na semafore, počas ktorej neprešlo križovatkou ani jedno auto vyjadríme nasledovne

$$\begin{aligned} E(V) &= E(V|X_t = 0)P(X_t = 0) + E(V|X_t = 1)P(X_t = 1) + \dots + \\ &+ E(V|X_t = n)P(X_t = n) + \dots, \end{aligned} \tag{8}$$

kde $E(V|X_t = i)$ predstavuje strednú hodnotu doby V zbytočného svietenia zeleného svetla na semafore, za podmienky, že na križovatku prišlo i áut do času t , ktorú násobíme pravdepodobnosťou, že na križovatku prišlo práve i áut ($P(X_t = i)$).

Ak na križovatku neprišlo do času t žiadne auto, znamená to, že doba zbytočného svietenia zeleného svetla sa rovná celej dobe svietenia zeleného svetla, t. j. $V = t$. Ak v čase S_1 príde na križovatku prvé auto a zároveň vieme, že na križovatku prišlo len toto jedno auto, potom sa doba zbytočného svietenia zeleného svetla rovná dobe svietenia zeleného svetla

od prechodu daného auta križovatkou po naskočenie červeného svetla na semafore, t. j. platí $V = t - S_1$.

Vo všeobecnosti, ak na križovátku príde n áut do času t , pričom príchod posledného n -tého auta je S_n , potom doba nevyužitého svietenia zeleného svetla na semafore sa rovná dobe svietenia zeleného svetla od prechodu posledného auta križovatkou po naskočenie červeného svetla na semafore, t. j. $V = t - S_n$. Tieto úvahy využijeme pri upravovaní výrazu pre $E(V)$

$$E(V) = E(t|X_t = 0)P(X_t = 0) + \dots + E((t - S_n)|X_t = n)P(X_t = n) + \dots = tP(X_t = 0) + \dots + (t - E(S_n|X_t = n))P(X_t = n) + \dots \quad (9)$$

Pri úpravách vo výpočte $E(V)$ dostávame podmienenú strednú hodnotu $E(S_n|X_t = n)$, ktorú vypočítame nasledovne:

$$E(S_n|X_t = n) = \int_0^t x f_n(x) dx, \quad (10)$$

kde $f_n(x)$ je hustota náhodnej premennej $S_n|X_t = n$ a podľa predošlých výpočtov v kapitole 1.1 platí $f_n(x) = n(F(x))^{n-1}f(x)$.

Dosadením f_n, F, f podľa vyššie uvedených predpisov do výrazu (10) a následnou jednoduchou úpravou dostávame:

$$\begin{aligned} E(S_n|X_t = n) &= \int_0^t x f_n(x) dx = \int_0^t x n F^{n-1} f dx = \int_0^t x n \left(\frac{x}{t}\right)^{n-1} \frac{1}{t} dx = \\ &= \frac{n}{t^n} \int_0^t x^n dx = \frac{n}{t^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^t = \frac{n}{t^n} \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{n t}{n+1}. \end{aligned}$$

Získali sme vyjadrenie pre podmienenú strednú hodnotu $E(S_n|X_t = n)$ potrebnú pre výpočet strednej hodnoty doby nevyužitého svietenia zeleného svetla na semafore $E(V)$:

$$E(S_n|X_t = n) = \frac{n t}{n+1}. \quad (11)$$

Vztáhy (11) a (1) dosadíme do (9) a jednoduchými úpravami dostávame:

$$\begin{aligned} E(V) &= tP(X_t = 0) + \dots + (t - E(S_n|X_t = n))P(X_t = n) + \dots = \\ &= t \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} + \dots + \left(t - \frac{n t}{n+1}\right) \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t}{k+1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1} \lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \\ &= e^{-\lambda t} \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \frac{(\lambda t)^0}{0!} \right) = e^{-\lambda t} \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}). \end{aligned}$$

Odvodili sme vzťah pre výpočet strednej hodnoty doby zbytočného svietenia zeleného svetla na semafore, kedy už križovatkou neprešlo žiadne auto

$$E(V) = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}), \quad (12)$$

kde V predstavuje celkový čas nevyužitého svietenia zeleného svetla na semafore, t dobu svietenia zeleného svetla na semafore a λ intenzitu príchodu áut na svetelnú križovatku.

1.3 Optimalizácia doby svietenia zeleného svetla

Odvodené vzťahy pre stredné hodnoty celkového času čakania áut na zasvietenie zeleného svetla na semafore $E(Z)$ a doby zbytočného svietenia zeleného svetla na semafore $E(V)$, kedy už križovatkou neprešlo žiadne auto, využijeme pri optimalizácii času stráveného autami na križovatke čakaním na zasvietenie zeleného svetla na semafore.

Budeme sa snažiť nájsť optimálne trvanie doby svietenia zeleného svetla na semafore jedným z nasledujúcich troch spôsobov tak, aby

1. súčet stredných dôb čakania áut na zasvietenie zeleného svetla na semafore $E(Z)$ bol minimálny,
2. súčet stredných dôb čakania áut na zasvietenie zeleného svetla na semafore $E(Z)$ a stredných dôb nevyužitého svietenia zeleného svetla na semafore $E(V)$ bol minimálny,
3. maximálna hodnota zo stredných dôb čakania áut na zasvietenie zeleného svetla na semafore $E(Z)$ a stredných dôb nevyužitého svietenia zeleného svetla na semafore $E(V)$ bola minimálna.

1.4 Podmienky pre dobu svietenia zeleného svetla

Pre dobu svietenia zeleného svetla na semafore stanovíme podmienky tak, aby sme zabránili hromadeniu áut na križovatke. Budeme požadovať, aby doba svietenia zeleného svetla na semafore bola väčšia nanajvýš rovná dobe, za ktorú sa priemerne vybaví autá, ktoré sa na križovatke nahromadili počas svietenia červeného svetla a ktoré prišli na križovatku počas práve prebiehajúceho svietenia zeleného svetla.

Dobu, za ktorú sa priemerne vybaví autá, vyjadríme všeobecne ako súčin strednej hodnoty počtu áut prichádzajúcich na križovatku a priemernej doby vybavenia jedného auta.

Počet áut má Poissonovo rozdelenie s parametrom λt , ktorý je zároveň aj strednou hodnotou, preto strednú hodnotu počtu áut určíme ako súčin parametra λ predstavujúceho intenzitu príchodu áut na svetelnú križovatku a doby svietenia červeného alebo zeleného svetla na semafore (v závislosti od prípadu, či sa jedná o autá, ktoré sa tam predtým nahromadili počas svietenia červenej alebo autá, ktoré prišli počas práve svietiacej zelenej).

Priemernú dobu vybavenia jedného auta vypočítame ako podiel priemernej dĺžky áut prichádzajúcich na križovatku a priemernej rýchlosti áut prechádzajúcich križovatkou. Priemernú dĺžku sme stanovili na 8 metrov a priemernú rýchlosť na 40 km/h, čo prevedieme na 11 m/s.

2 Schémy svetelných križovatiek

Teraz si podrobne rozoberieme jednotlivé zjednodušené typy križovatiek, odvodíme funkcie pre všetky spôsoby optimalizácie pre daný typ križovatky a stanovíme podmienky pre dobu trvania svietenia zeleného svetla na semafore pre každý typ križovatky.

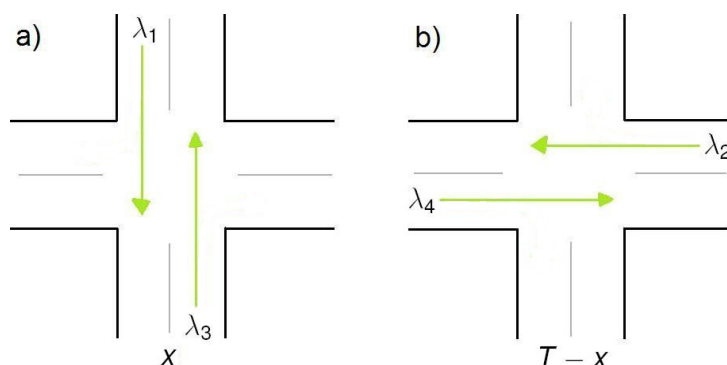
2.1 Križovatka I.

V najjednoduchšej schéme svetelnej križovatky, ktorou sa budeme zaoberať, uvažujeme len autá idúce rovno pre všetky 4 smery. Každému smeru zodpovedá práve jeden parameter λ_i , ktorý vyjadruje intenzitu toku áut v danom smere i . Nech T symbolizuje periódu svetiel a x dobu svietenia zeleného svetla na semafore svetelnej križovatky pre smery 1, 3, a teda smery 2, 4 majú zelenú po dobu $T - x$.

V najjednoduchšom type križovatky znázornenom na Obr. 1 vo fáze

- a) po dobu x svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce rovno oproti sebe z horného a dolného smeru, a teda pre zvyšné smery svieti červené svetlo,
- b) po dobu $T - x$ svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce rovno oproti sebe z pravého a ľavého smeru, takisto pre zvyšné smery svieti červené svetlo.

Vidíme, že tento typ križovatky neuvažuje odbočovanie áut doľava ani doprava.



Obr. 1: Schéma križovatky I.

2.1.1 Optimalizované funkcie pre križovatku I.

Definujme Z_i ako celkový čas čakania áut na červenom svetle v smere i . Strednú hodnotu $E(Z_i)$ vypočítame podľa vzťahu (7). Podobne V_i si označme dobu nevyužitého svietenia zelenej v smere i a jej strednú hodnotu vypočítame podľa vzorca (12). Našou úlohou je nájsť optimálne trvanie doby svietenia zeleného svetla na semafore x a $T - x$ tak, aby

1. súčet stredných dôb čakania áut na červenej bol minimálny:

$$E(Z_1) + E(Z_2) + E(Z_3) + E(Z_4) \longrightarrow \min$$

$$\frac{\lambda_1}{2} (T - x)^2 + \frac{\lambda_2}{2} x^2 + \frac{\lambda_3}{2} (T - x)^2 + \frac{\lambda_4}{2} x^2 \longrightarrow \min$$

2. súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej bol minimálny:

$$E(Z_1) + E(Z_2) + E(Z_3) + E(Z_4) + E(V_1) + E(V_2) + E(V_3) + E(V_4) \longrightarrow \min$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1}{2} (T - x)^2 + \frac{\lambda_2}{2} x^2 + \frac{\lambda_3}{2} (T - x)^2 + \frac{\lambda_4}{2} x^2 + \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x}) + \\ & + \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 (T-x)}) + \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x}) + \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4 (T-x)}) \longrightarrow \min \end{aligned}$$

3. maximálna hodnota zo stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej bola minimálna:

$$\max \{E(Z_1), \dots, E(Z_4), E(V_1), \dots, E(V_4)\} \longrightarrow \min$$

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \frac{\lambda_1}{2} (T-x)^2, \frac{\lambda_2}{2} x^2, \frac{\lambda_3}{2} (T-x)^2, \frac{\lambda_4}{2} x^2, \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x}), \right. \\ & \left. \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 (T-x)}), \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x}), \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4 (T-x)}) \right\} \rightarrow \min \end{aligned}$$

V prvom type optimalizácie možno ľahko vyjadriť optimálne x vďaka nutným podmienkam optimality, kedy položíme prvú deriváciu optimalizovanej funkcie rovnú 0:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{\lambda_1}{2} (T-x) \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{\lambda_2}{2} x + 2 \cdot \frac{\lambda_3}{2} (T-x) \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{\lambda_4}{2} x &= 0 \\ \lambda_1 x - \lambda_1 T + \lambda_2 x + \lambda_3 x - \lambda_3 T + \lambda_4 x &= 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{T(\lambda_1 + \lambda_3)}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4} \end{aligned} \quad (13)$$

Po konkretizovaní všetkých parametrov λ_i , dĺžky periódy svetiel T a dosadení do predošlého odvodeného výrazu už ľahko spočítame hodnotu optimálnej doby svietenia zeleného svetla na semafore pre prvý typ optimalizácie – minimalizácia súčtu stredných dôb čakania áut na červenom svetle.

2.1.2 Podmienky pre križovatku I.

Ako sme už uviedli v kapitole 1.4, podmienky pre dobu svietenia zeleného svetla stanovíme tak, aby sme zabránili hromadeniu áut na križovatke.

Požadujeme, aby doba svietenia zeleného svetla na semafore bola väčšia nanajvýš rovná dobe, za ktorú sa priemerne vybaví autá, ktoré sa na križovatke nahromadili počas svietenia červeného svetla a ktoré prišli na križovatku počas svietenia zeleného svetla, čo práve svieti. Dobu, za ktorú sa priemerne vybaví autá, vypočítame ako súčin strednej hodnoty počtu áut prichádzajúcich na križovatku a priemernej doby vybavenia jedného auta, ktorú sme si v kapitole 1.4 stanovili na $\frac{8}{11}$.

V tomto type križovatky podrobne rozanalyzujeme prvý smer s parametrom intenzity toku áut λ_1 . Pre prvý smer svieti zelené svetlo po dobu x a červené svetlo po dobu $T-x$.

Strednú hodnotu počtu áut, ktoré sa predtým nahromadili na križovatke v danom smere počas svietenia červeného svetla, určíme ako súčin parametra intenzity toku áut pre prvý smer λ_1 a doby svietenia červeného svetla na semafore $T-x$, teda $\lambda_1 (T-x)$. Strednú hodnotu počtu áut, ktoré prišli počas práve svietiaceho zeleného svetla, vypočítame ako súčin λ_1 a doby svietenia zeleného svetla na semafore x , teda $\lambda_1 x$.

Dobu, za ktorú sa priemerne vybavajú autá, ktoré sa nahromadili na križovatke, vyjadríme ako súčin strednej hodnoty počtu áut, ktoré sa predtým nahromadili na križovatke v danom smere počas svietenia červeného svetla a priemernej doby vybavenia jedného auta, teda

$$\lambda_1 (T - x) \frac{8}{11}.$$

Dobu, za ktorú sa priemerne vybavajú autá, ktoré práve prišli na križovatku počas svietenia zeleného svetla, vyjadríme ako súčin strednej hodnoty počtu áut, ktoré práve prišli na križovatku v danom smere počas svietenia zeleného svetla a priemernej doby vybavenia jedného auta, teda

$$\lambda_1 x \frac{8}{11}.$$

Celkovú dobu, za ktorú sa priemerne vybavajú autá, ktoré sa nahromadili na križovatke aj tie čo práve prišli, dostaneme ako súčet týchto dvoch dôb:

$$\lambda_1 (T - x) \frac{8}{11} + \lambda_1 x \frac{8}{11}.$$

Keďže požadujeme, aby doba svietenia zeleného svetla na semafore bola väčšia nanajvýš rovná dobe, za ktorú sa priemerne vybavajú autá, dostávame pre prvý smer nasledujúcu nerovnosť

$$\begin{aligned} x &\geq \lambda_1 (T - x) \frac{8}{11} + \lambda_1 x \frac{8}{11} = \lambda_1 T \frac{8}{11} \\ \Rightarrow x &\geq \lambda_1 T \frac{8}{11}. \end{aligned}$$

Pre druhý smer s parametrom intenzity toku áut λ_2 svieti zelené svetlo po dobu $T - x$ a červené svetlo po dobu x . Podmienka v tomto prípade bude mať na ľavej strane nerovnosti hodnotu doby svietenia zeleného svetla pre daný smer, teda $T - x$ a na pravej strane nerovnosti rovnaký výraz, akurát sa zmení parameter λ :

$$T - x \geq \lambda_2 T \frac{8}{11}.$$

Pre tretí smer s parametrom intenzity toku áut λ_3 svieti zelené svetlo po dobu x a červené svetlo po dobu $T - x$, rovnako ako v prípade prvého smeru. Podmienka v tomto prípade bude mať rovnaký tvar ako pre prvý smer, akurát sa zmení parameter λ :

$$x \geq \lambda_3 T \frac{8}{11}.$$

V rovnakom duchu ako pri druhom smere skonštruujeme aj podmienku pre štvrtý smer s parametrom intenzity toku áut λ_4 , dobou svietenia zeleného svetla $T - x$, dobou svietenia červeného svetla x , a dostávame

$$T - x \geq \lambda_4 T \frac{8}{11}.$$

Ďalej nesmieme zabudnúť, že doba svietenia zeleného svetla x pre smery 1, 3 a $T - x$ pre smery 2, 4, musí byť logicky nezáporné číslo a zároveň nesmie prevýšiť dĺžku trvania celej periódy svetiel T , teda

$$x, T - x \in \langle 0, T \rangle.$$

Pre križovatku I. môžeme súhrnne napísať podmienky nasledovne:

$$\begin{aligned} x &\geq \lambda_1 T \frac{8}{11} \\ T - x &\geq \lambda_2 T \frac{8}{11} \\ x &\geq \lambda_3 T \frac{8}{11} \\ T - x &\geq \lambda_4 T \frac{8}{11} \\ x, T - x &\in \langle 0, T \rangle. \end{aligned}$$

Vidíme však, že dané podmienky možno zjednodušiť a znížiť ich počet, čo oceníme najmä neskôr pri počítaní optimálnych dôb svietení zelených svetiel pri väčšom počte parametrov λ , neznámych hodnôt svietenia zeleného svetla x , a teda aj väčšom počte podmienok.

Poľahky si všimneme, že parametre λ a perióda T sú kladné čísla, a preto výraz na pravej strane každej horeuvedenej nerovnosti je vždy kladný. Ak majú byť hodnoty x a $T - x$ väčšie nanajvýš rovné výrazu, ktorý je vždy kladný, potom je automaticky splnená podmienka nezápornosti týchto dvoch hodnôt. Môžeme teda vynechať časť poslednej podmienky o nezápornosti pre obe hodnoty. Podmienka $x \leq T$ je tiež vždy splnená, nakoľko x a $T - x$ sú vždy kladné. Takisto možno úplne vynechať podmienku $T - x \leq T$, keďže x bude vždy z intervalu $\langle 0, T \rangle$ a tým pádom aj $T - x$ padne tiež do tohto intervalu.

Pre obe hodnoty svietenia zeleného svetla x a $T - x$ sa vyskytujú po dve podmienky. Stačí však, ak bude x , resp. $T - x$ väčšie ako väčší z príslušných výrazov na pravej strane, potom je splnená aj druhá podmienka pre menší

z výrazov na pravej strane nerovnosti. Matematicky vyjadrené:

$$\begin{aligned} x &\geq \max \{ \lambda_1, \lambda_3 \} T \frac{8}{11} \\ T - x &\geq \max \{ \lambda_2, \lambda_4 \} T \frac{8}{11}. \end{aligned} \quad (14)$$

2.1.3 Numerické výsledky optimalizácie pre križovatku I.

Pre názornosť zvolíme si periódu svetiel $T = 60$ s a parametre λ napríklad nasledovne: $\lambda_1 = 0,07$; $\lambda_2 = 0,05$; $\lambda_3 = 0,065$; $\lambda_4 = 0,055$. Po dosadení konkrétnych hodnôt parametrov a periódy do vyššie odvodeného výrazu (13) pre optimálnu hodnotu x dostávame

$$x = \frac{60 (0,07 + 0,065)}{0,07 + 0,05 + 0,065 + 0,055} = 33,75.$$

Pre prvý typ optimalizácie, teda minimalizácia súčtu stredných dôb čakania áut na červenom svetle na semafore, získame výpočtom optimálne hodnoty: $x = 33,75$ s a $T - x = 26,25$ s. V tomto prípade sa jedná o voľnú optimalizáciu bez uvažovania podmienok. Vypočítané optimálne hodnoty však spĺňajú podmienky (14) pre danú križovatku.

Pre ďalšie dva typy optimalizácie už nemožno tak jednoznačne vyjadriť riešenie, preto určíme optimálne hodnoty doby svietenia zeleného svetla na semafore pri daných podmienkach použitím matematického softvéru Matlab. Konkrétne používame funkciu `fmincon` už zabudovanú v Matlabe, ktorá na výpočet využíva metódu sekvenčného kvadratického programovania. V tejto metóde, funkcia rieši podúlohu kvadratického programovania v každej iterácii. Odhad Hessianu a Lagrangianu je aktualizovaný v každej iterácii pomocou BFGS formuly.

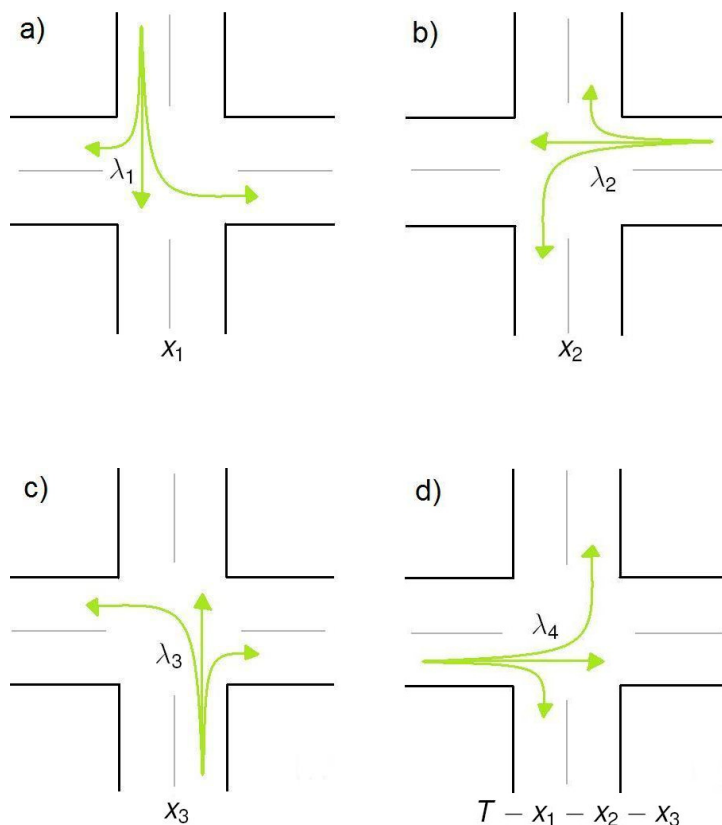
Pre prvý typ optimalizácie pri uvažovaní podmienok (14) dostaneme optimalizáciou v Matlabe rovnaké výsledky ako pri predošlom výpočte. Pre druhý typ optimalizácie, kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej, dostávame nasledujúce podmienkam (14) vyhovujúce výsledky: $x = 35,25$ s a $T - x = 24,75$ s. Pre tretí typ optimalizácie, kedy minimalizujeme maximálnu hodnotu zo stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej, dostávame nasledujúce podmienkam (14) vyhovujúce výsledky: $x = 31,81$ s a $T - x = 28,19$ s.

Pozorujeme, že výsledné optimálne dĺžky svietenia zeleného svetla pre jednotlivé fázy korešpondujú veľkosti intenzity toku áut v daných smeroch. Pre smery 1 a 3 sme zvolili vyššie parametre λ ako pre smery

2, 4 v druhej fáze, čo znamená, že v prvej fáze je vyššia intenzita toku áut, preto by logicky mala svietiť zelená pre tieto dva smery dlhšie ako pre zvyšné smery, aby nedochádzalo k hromadeniu áut na križovatke a takisto zbytočnému svieteniu zeleného svetla.

2.2 Križovatka II.

V ďalšom type svetelnej križovatky uvažujeme, že zelené svetlo na semafore svieti vždy práve pre jeden smer a zároveň umožňuje autám ísť do všetkých smerov – rovno, doprava aj doľava. Každému smeru i zodpovedá práve jeden parameter vyjadrujúci intenzitu toku áut λ_i . Nech T naďalej symbolizuje periódu svetiel a x_i dobu svietenia zeleného svetla na semafore svetelnej križovatky pre smer i , pričom pre zníženie počtu neznámych pri minimalizácii vyjadríme svietenie zeleného svetla na semafore pre posledný smer ako $x_4 = T - x_1 - x_2 - x_3$.



Obr. 2: Schéma križovatky II.

V o niečo zložitejšom type križovatky znázornenom na Obr. 2 vo fáze

- po dobu x_1 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z horného smeru do všetkých možných smerov – rovno, doprava aj doľava, a teda pre autá prichádzajúce zo zvyšných smerov svieti červené svetlo,
- po dobu x_2 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z pravého smeru do všetkých možných smerov,
- po dobu x_3 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z dolného smeru do všetkých možných smerov,
- po dobu $x_4 = T - x_1 - x_2 - x_3$ svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z ľavého smeru do všetkých možných smerov.

Vidíme, že tento typ križovatky už umožňuje odbočovanie áut doľava a doprava.

2.2.1 Optimalizované funkcie pre križovatku II.

Snažíme sa nájsť optimálne trvanie doby svietenia zeleného svetla na semafore $x_1, x_2, x_3, T - x_1 - x_2 - x_3$ tak, aby

- súčet stredných dôb čakania áut na červenej bol minimálny:

$$E(Z_1) + E(Z_2) + E(Z_3) + E(Z_4) \longrightarrow \min$$

$$\frac{\lambda_1}{2} (T - x_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (T - x_2)^2 + \frac{\lambda_3}{2} (T - x_3)^2 + \frac{\lambda_4}{2} (x_1 + x_2 + x_3)^2 \longrightarrow \min$$

- súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej bol minimálny:

$$E(Z_1) + \dots + E(Z_4) + E(V_1) + \dots + E(V_4) \longrightarrow \min$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1}{2} (T - x_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (T - x_2)^2 + \frac{\lambda_3}{2} (T - x_3)^2 + \frac{\lambda_4}{2} (x_1 + x_2 + x_3)^2 + \\ & + \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1}) + \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 x_2}) + \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_3}) + \\ & + \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4 (T - x_1 - x_2 - x_3)}) \longrightarrow \min \end{aligned}$$

3. maximálna hodnota zo stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej bola minimálna:

$$\begin{aligned} & \max \{E(Z_1), \dots, E(Z_4), E(V_1), \dots, E(V_4)\} \longrightarrow \min \\ & \max \left\{ \frac{\lambda_1}{2} (T - x_1)^2, \frac{\lambda_2}{2} (T - x_2)^2, \frac{\lambda_3}{2} (T - x_3)^2, \frac{\lambda_4}{2} (x_1 + x_2 + x_3)^2, \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1}), \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 x_2}), \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_3}), \right. \\ & \quad \left. \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4 (T - x_1 - x_2 - x_3)}) \right\} \longrightarrow \min \end{aligned}$$

2.2.2 Podmienky pre križovatku II.

Podmienky vytvoríme analogicky ako v prvom type križovatky. V tomto prípade kvôli zvýšenému počtu parametrov λ_i a neznámym x_i sa dá zjednodušiť len posledná podmienka, kedy znova netreba zvlášť uvažovať nezápornosť, keďže je automaticky splnená ostatnými podmienkami a tiež podmienky $x_1, x_2, x_3, T - x_1 - x_2 - x_3 \leq T$ možno vynechať z toho istého dôvodu ako v prípade prvej križovatky. Dostávame:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq \lambda_1 T \frac{8}{11} \\ x_2 &\geq \lambda_2 T \frac{8}{11} \\ x_3 &\geq \lambda_3 T \frac{8}{11} \\ T - x_1 - x_2 - x_3 &\geq \lambda_4 T \frac{8}{11}. \end{aligned} \tag{15}$$

2.2.3 Numerické výsledky optimalizácie pre križovatku II.

Parametre λ a periódu svetiel T si zvolíme rovnaké ako v prípade križovatky I., teda $T = 60$ s; $\lambda_1 = 0,07$; $\lambda_2 = 0,05$; $\lambda_3 = 0,065$; $\lambda_4 = 0,055$ a použijeme kvadratického programovania v štatistickom programe R (viď [4]) spočítame optimálne doby svietenia zeleného svetla $x_1, x_2, x_3, T - x_1 - x_2 - x_3$ pre prvý typ optimalizácie pri daných podmienkach (15), kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenom svetle.

Pre výpočet v R pomocou kvadratického programovania využívame špeciálny balíček s názvom *quadprog* (viď [5]), konkrétne funkciu s názvom `solve.QP`, ktorá využíva pre výpočet duálnu metódu Goldfarba a

Idnaniho na riešenie problému kvadratického programovania v tvare

$$\min(-d^T x + \frac{1}{2}x^T D x) \quad (16)$$

s podmienkami

$$A^T x \geq x_0. \quad (17)$$

Funkciu, ktorú minimalizujeme pri prvom type optimalizácie, teda súčet stredných hodnôt času stráveného autami na križovatke čakaním na zsvietenie zeleného svetla, upravíme na požadovaný tvar (16). Takisto podmienky pre dobu svietenia zeleného svetla (15) upravíme na tvar (17), aby sme si vyjadrili vstupné matice a vektory pre funkciu `solve.QP`, ktorá následne vypočíta optimálne hodnoty vektora x dôb svietení zelenej. Dostali sme nasledujúce podmienkam (15) vyhovujúce optimálne hodnoty $x_1 = 22,10$ s; $x_2 = 6,94$ s; $x_3 = 19,19$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 = 11,77$ s.

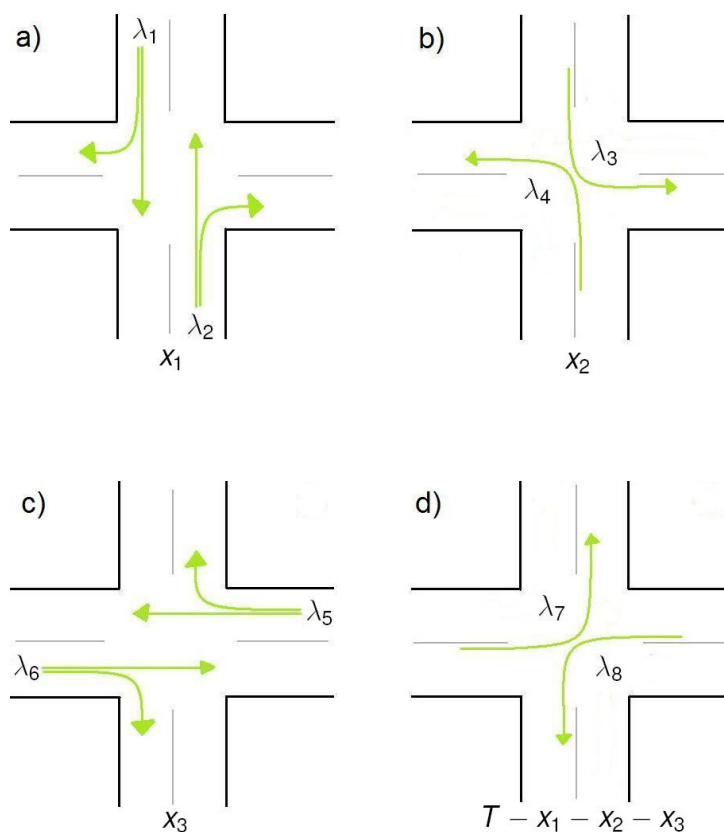
Rovnakým spôsobom ako v predošlom prípade sme použitím matematického softvéru Matlab spočítali optimálne doby svietenia zeleného svetla pre zvyšné dva typy optimalizácie pri daných podmienkach, ktoré už nemožno spočítať pomocou kvadratického programovania. Pre druhý typ optimalizácie, kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej, sme dostali nasledujúce podmienkam (15) vyhovujúce optimálne hodnoty: $x_1 = 26,33$ s; $x_2 = 2,18$ s; $x_3 = 22,65$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 = 8,84$ s a pre tretí typ optimalizácie, kedy minimalizujeme maximálnu hodnotu zo stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej: $x_1 = 18,61$ s; $x_2 = 11,03$ s; $x_3 = 17,05$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 = 13,31$ s.

Všimneme si, že získané optimálne dĺžky svietenia zeleného svetla pre jednotlivé fázy korešpondujú veľkosti intenzity toku áut v daných smeroch. Najvyššiu intenzitu toku áut sme si zvolili pre smer 1, čo znamená, že pre tento smer by sme mali dostať aj najdlhšiu dobu svietenia zeleného svetla, aby nedochádzalo k hromadeniu áut v tomto smere a takisto zbytočnému svieteniu zeleného svetla pre ostatné smery. V predošlých výsledkoch pre všetky typy optimalizácie vidíme, že práve pre smer 1, teda smer s najvyššou intenzitou príchodu áut, dostávame najdlhšiu dobu svietenia zelenej. Ďalej si môžeme všimnúť, že ostatné dĺžky svietenia zeleného svetla tiež zachovávajú postupnosť podľa veľkosti, teda pre smer 3 s druhým najvyšším parametrom λ dostávame optimálne druhú najdlhšiu dobu svietenia zeleného svetla vo všetkých typoch optimalizácie, pre smer 4 s nižšou intenzitou ešte kratšiu dobu svietenia zelenej a nakoniec pre posledný smer 2 s najnižšou λ má svietiť zelená najkratšie.

2.3 Križovatka III.

V treťom type svetelnej križovatky budeme pre autá odbočujúce doľava z každého smeru uvažovať intenzitu toku áut odlišnú od intenzity pre autá idúce rovno a súčasne doprava. Rozlišujeme v tomto prípade 8 rôznych smerov, preto dochádza k nárastu počtu parametrov λ . Nech T naďalej symbolizuje periódu svetiel a x_i dobu svietenia zeleného svetla na semafore pre danú fázu.

V tomto type križovatky by sa dalo uvažovať aj odbočovanie doprava súčasne pri odbočovaní doľava v druhej a štvrtej fáze. Neuvádzame tu však zvlášť intenzitu príchodu áut pre smery odbočujúce doprava, tento smer je súčasťou smeru rovno. Prípady s 12 smermi berieme do úvahy až v ďalších križovatkách a možno križovátku III. interpretovať aj tak, že pri tomto type križovatky umožňujeme okrem áut aj chodcom prechádzať cez cestu v tom smere, kde nemá žiadny smer pre autá zelenú.



Obr. 3: Schéma križovatky III.

V type križovatky znázornenom na Obr. 3 vo fáze

- po dobu x_1 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z horného a dolného smeru rovno a doprava,
- po dobu x_2 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z horného a dolného smeru doľava,
- po dobu x_3 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z pravého a ľavého smeru rovno a doprava,
- po dobu $x_4 = T - x_1 - x_2 - x_3$ svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z pravého a ľavého smeru doľava.

2.3.1 Optimalizované funkcie pre križovatku III.

Našou úlohou je nájsť optimálne trvanie doby svietenia zeleného svetla na semafore $x_1, x_2, x_3, T - x_1 - x_2 - x_3$ tak, aby

- súčet stredných dôb čakania áut na červenej bol minimálny:

$$E(Z_1) + \dots + E(Z_8) \longrightarrow \min$$

$$\frac{\lambda_1}{2} (T - x_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (T - x_1)^2 + \frac{\lambda_3}{2} (T - x_2)^2 + \frac{\lambda_4}{2} (T - x_2)^2 +$$

$$+ \frac{\lambda_5}{2} (T - x_3)^2 + \frac{\lambda_6}{2} (T - x_3)^2 + \frac{\lambda_7}{2} (T - (T - x_1 - x_2 - x_3))^2 +$$

$$+ \frac{\lambda_8}{2} (T - (T - x_1 - x_2 - x_3))^2 \longrightarrow \min$$

- súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej bol minimálny:

$$E(Z_1) + \dots + E(Z_8) + E(V_1) + \dots + E(V_8) \longrightarrow \min$$

$$\frac{\lambda_1}{2} (T - x_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (T - x_1)^2 + \frac{\lambda_3}{2} (T - x_2)^2 + \frac{\lambda_4}{2} (T - x_2)^2 +$$

$$+ \frac{\lambda_5}{2} (T - x_3)^2 + \frac{\lambda_6}{2} (T - x_3)^2 + \frac{\lambda_7}{2} (T - (T - x_1 - x_2 - x_3))^2 +$$

$$+ \frac{\lambda_8}{2} (T - (T - x_1 - x_2 - x_3))^2 + \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1}) + \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 x_1}) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_2}) + \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4 x_2}) + \frac{1}{\lambda_5} (1 - e^{-\lambda_5 x_3}) + \frac{1}{\lambda_6} (1 - e^{-\lambda_6 x_3}) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_7} (1 - e^{-\lambda_7 (T - x_1 - x_2 - x_3)}) + \frac{1}{\lambda_8} (1 - e^{-\lambda_8 (T - x_1 - x_2 - x_3)}) \longrightarrow \min$$

3. maximálna hodnota zo stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej bola minimálna:

$$\begin{aligned} & \max \{E(Z_1), \dots, E(Z_8), E(V_1), \dots, E(V_8)\} \longrightarrow \min \\ & \max \left\{ \frac{\lambda_1}{2} (T - x_1)^2, \frac{\lambda_2}{2} (T - x_1)^2, \frac{\lambda_3}{2} (T - x_2)^2, \frac{\lambda_4}{2} (T - x_2)^2, \right. \\ & \quad \frac{\lambda_5}{2} (T - x_3)^2, \frac{\lambda_6}{2} (T - x_3)^2, \frac{\lambda_7}{2} (T - (T - x_1 - x_2 - x_3))^2, \\ & \quad \frac{\lambda_8}{2} (T - (T - x_1 - x_2 - x_3))^2, \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1}), \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 x_1}), \\ & \quad \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_2}), \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4 x_2}), \frac{1}{\lambda_5} (1 - e^{-\lambda_5 x_3}), \frac{1}{\lambda_6} (1 - e^{-\lambda_6 x_3}), \\ & \quad \left. \frac{1}{\lambda_7} (1 - e^{-\lambda_7 (T - x_1 - x_2 - x_3)}), \frac{1}{\lambda_8} (1 - e^{-\lambda_8 (T - x_1 - x_2 - x_3)}) \right\} \longrightarrow \min \end{aligned}$$

2.3.2 Podmienky pre križovatku III.

Podmienky vytvoríme a zjednodušíme rovnako ako v prvom prípade:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq \max \{ \lambda_1, \lambda_2 \} T \frac{8}{11} \\ x_2 &\geq \max \{ \lambda_3, \lambda_4 \} T \frac{8}{11} \\ x_3 &\geq \max \{ \lambda_5, \lambda_6 \} T \frac{8}{11} \\ T - x_1 - x_2 - x_3 &\geq \max \{ \lambda_7, \lambda_8 \} T \frac{8}{11}. \end{aligned} \tag{18}$$

2.3.3 Numerické výsledky optimalizácie pre križovatku III.

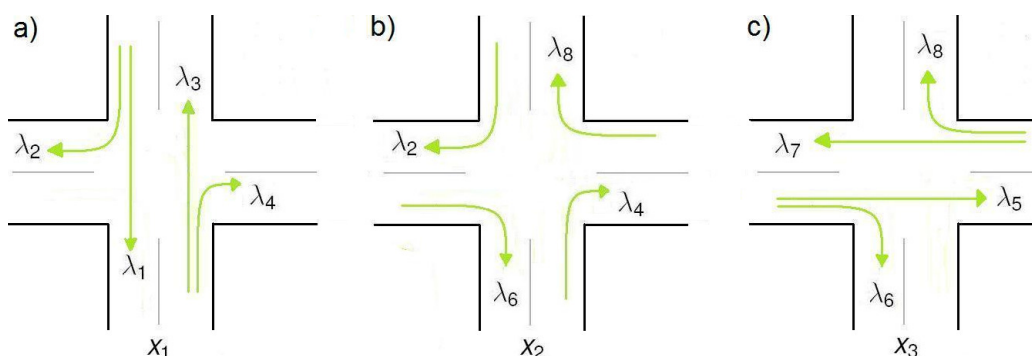
Periódou svetiel volíme stále rovnakú $T = 60$ s a parametre λ si zvolíme podobne ako doteraz napríklad nasledovne: $\lambda_1 = 0,07$; $\lambda_2 = 0,05$; $\lambda_3 = 0,065$; $\lambda_4 = 0,055$; $\lambda_5 = 0,07$; $\lambda_6 = 0,075$; $\lambda_7 = 0,05$; $\lambda_8 = 0,06$. Použitím kvadratického programovania v štatistickom softvéri R spočítame optimálne doby svietenia zeleného svetla $x_1, x_2, x_3, T - x_1 - x_2 - x_3$ pre prvý typ optimalizácie pri daných podmienkach (18), kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenom svetle. Dostali sme nasledujúce podmienkam (18) vyhovujúce optimálne hodnoty $x_1 = 14,06$ s; $x_2 = 14,06$ s; $x_3 = 21,99$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 = 9,89$ s.

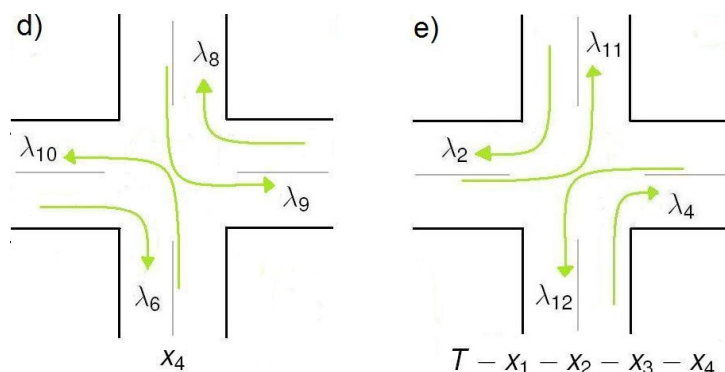
Použitím matematického softvéru Matlab sme spočítali optimálne doby svietenia zeleného svetla pre zvyšné dva typy optimalizácie pri daných podmienkach, ktoré už nemožno spočítať pomocou kvadratického programovania. Pre druhý typ optimalizácie, kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej, sme dostali nasledujúce podmienkam (18) vyhovujúce optimálne hodnoty: $x_1 = 15,12$ s; $x_2 = 15,19$ s; $x_3 = 26,45$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 = 3,24$ s a pre tretí typ optimalizácie, kedy minimalizujeme maximálnu hodnotu zo stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej: $x_1 = 15,92$ s; $x_2 = 14,26$ s; $x_3 = 17,42$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 = 12,40$ s.

Znovu si všimneme, že získané optimálne dĺžky svietenia zeleného svetla pre jednotlivé fázy korešpondujú veľkosti intenzity toku áut v daných smeroch, pričom dochádza k vplyvu viacerých intenzít vrámci jednej fázy. Pre prvý typ optimalizácie vidíme, že doby svietenia zeleného svetla pre prvú a druhú fázu vychádzajú rovnaké, teda $x_1 = x_2$, čo je v dôsledku toho, že súčty parametrov λ pre smery 1, 2 v prvej fáze a smery 3, 4 v druhej fáze sa rovnajú, teda $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 = 0,12$. Keďže intenzita príchodu áut pre dané smery v uvažovaných fázach je rovnaká, nie je dôvod, aby pre niektorú z fáz svietila zelená dlhšie ako pre druhú fázu. Pre ostatné typy optimalizácie dostávame tiež takmer rovnaké dĺžky svietenia zeleného svetla na semafore pre doby x_1 a x_2 .

2.4 Križovatka IV.

V ešte zložitejšom type svetelnej križovatky budeme uvažovať až 12 smerov, teda pre každý smer rovno, doprava aj doľava zavedieme rôzne intenzity toku áut λ . Nech T naďalej symbolizuje periódu svetiel, x_i dobu svietenia zeleného svetla na semafore svetelnej križovatky pre danú fázu.





Obr. 4: Schéma križovatky IV.

V type križovatky znázornenom na Obr. 4 vo fáze

- po dobu x_1 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z horného a dolného smeru rovno a doprava,
- po dobu x_2 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce zo všetkých smerov doprava,
- po dobu x_3 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z pravého a ľavého smeru rovno a doprava,
- po dobu x_4 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z horného a dolného smeru doľava, zároveň však môžu autá idúce z pravého a ľavého smeru odbočovať doprava,
- po dobu $x_5 = T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z pravého a ľavého smeru doľava, zároveň však môžu autá idúce z horného a dolného smeru odbočovať doprava.

2.4.1 Optimalizované funkcie pre križovatku IV.

V prípade tejto križovatky svieti pre smery 2, 4, 6, 8 odbočujúce doprava zelené svetlo viac ako raz. Fázy svietenia zeleného svetla pre dané smery však vždy nasledujú za sebou, a preto ich možno brať ako jednu dlhšiu zelenú. Napríklad pre smer 2 svieti zelená po dobu x_1, x_2 aj $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$, preto v nasledujúcich výpočtoch pre strednú hodnotu celkového času stráveného autami čakaním na zasvietenie zelenej počítame dobu svietenia červeného svetla ako $T - x_1 - x_2 - (T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) = x_3 + x_4$. Pri počítaní strednej hodnoty doby nevyužitej zelenej naopak využívame

dobu svietenia zeleného svetla, čo konkrétne pre smer 2 je dlhšia zelená po dobu $x_1 + x_2 + T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = T - x_3 - x_4$. Podobne postupujeme aj pre ostatné smery 4, 6, 8 idúce doprava.

Hľadáme optimálne trvanie doby svietenia zeleného svetla na semafore $x_1, x_2, x_3, x_4, T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ tak, aby

1. súčet stredných dôb čakania áut na červenej bol minimálny:

$$E(Z_1) + \dots + E(Z_{12}) \longrightarrow \min$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1}{2} (T - x_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (x_3 + x_4)^2 + \frac{\lambda_3}{2} (T - x_1)^2 + \frac{\lambda_4}{2} (x_3 + x_4)^2 + \\ & + \frac{\lambda_5}{2} (T - x_3)^2 + \frac{\lambda_6}{2} (T - x_2 - x_3 - x_4)^2 + \frac{\lambda_7}{2} (T - x_3)^2 + \\ & + \frac{\lambda_8}{2} (T - x_2 - x_3 - x_4)^2 + \frac{\lambda_9}{2} (T - x_4)^2 + \frac{\lambda_{10}}{2} (T - x_4)^2 + \\ & + \frac{\lambda_{11}}{2} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + \frac{\lambda_{12}}{2} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \longrightarrow \min \end{aligned}$$

2. súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej bol minimálny:

$$E(Z_1) + \dots + E(Z_{12}) + E(V_1) + \dots + E(V_{12}) \longrightarrow \min$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1}{2} (T - x_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (x_3 + x_4)^2 + \frac{\lambda_3}{2} (T - x_1)^2 + \frac{\lambda_4}{2} (x_3 + x_4)^2 + \\ & + \frac{\lambda_5}{2} (T - x_3)^2 + \frac{\lambda_6}{2} (T - x_2 - x_3 - x_4)^2 + \frac{\lambda_7}{2} (T - x_3)^2 + \\ & + \frac{\lambda_8}{2} (T - x_2 - x_3 - x_4)^2 + \frac{\lambda_9}{2} (T - x_4)^2 + \frac{\lambda_{10}}{2} (T - x_4)^2 + \\ & + \frac{\lambda_{11}}{2} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + \frac{\lambda_{12}}{2} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 + \\ & + \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1}) + \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 (T - x_3 - x_4)}) + \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_1}) + \\ & + \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4 (T - x_3 - x_4)}) + \frac{1}{\lambda_5} (1 - e^{-\lambda_5 x_3}) + \frac{1}{\lambda_6} (1 - e^{-\lambda_6 (x_2 + x_3 + x_4)}) + \\ & + \frac{1}{\lambda_7} (1 - e^{-\lambda_7 x_3}) + \frac{1}{\lambda_8} (1 - e^{-\lambda_8 (x_2 + x_3 + x_4)}) + \frac{1}{\lambda_9} (1 - e^{-\lambda_9 x_4}) + \\ & + \frac{1}{\lambda_{10}} (1 - e^{-\lambda_{10} x_4}) + \frac{1}{\lambda_{11}} (1 - e^{-\lambda_{11} (T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)}) + \\ & + \frac{1}{\lambda_{12}} (1 - e^{-\lambda_{12} (T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)}) \longrightarrow \min \end{aligned}$$

3. maximálna hodnota zo stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej bola minimálna:

$$\begin{aligned}
& \max \{E(Z_1), \dots, E(Z_{12}), E(V_1), \dots, E(V_{12})\} \longrightarrow \min \\
& \max \left\{ \frac{\lambda_1}{2} (T - x_1)^2, \frac{\lambda_2}{2} (x_3 + x_4)^2, \frac{\lambda_3}{2} (T - x_1)^2, \frac{\lambda_4}{2} (x_3 + x_4)^2, \right. \\
& \quad \frac{\lambda_5}{2} (T - x_3)^2, \frac{\lambda_6}{2} (T - x_2 - x_3 - x_4)^2, \frac{\lambda_7}{2} (T - x_3)^2, \\
& \quad \frac{\lambda_8}{2} (T - x_2 - x_3 - x_4)^2, \frac{\lambda_9}{2} (T - x_4)^2, \frac{\lambda_{10}}{2} (T - x_4)^2, \\
& \quad \frac{\lambda_{11}}{2} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2, \frac{\lambda_{12}}{2} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2, \\
& \quad \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1}), \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 (T - x_3 - x_4)}), \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_1}), \\
& \quad \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4 (T - x_3 - x_4)}), \frac{1}{\lambda_5} (1 - e^{-\lambda_5 x_3}), \frac{1}{\lambda_6} (1 - e^{-\lambda_6 (x_2 + x_3 + x_4)}), \\
& \quad \frac{1}{\lambda_7} (1 - e^{-\lambda_7 x_3}), \frac{1}{\lambda_8} (1 - e^{-\lambda_8 (x_2 + x_3 + x_4)}), \frac{1}{\lambda_9} (1 - e^{-\lambda_9 x_4}), \\
& \quad \frac{1}{\lambda_{10}} (1 - e^{-\lambda_{10} x_4}), \frac{1}{\lambda_{11}} (1 - e^{-\lambda_{11} (T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)}), \\
& \quad \left. \frac{1}{\lambda_{12}} (1 - e^{-\lambda_{12} (T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4)}) \right\} \longrightarrow \min
\end{aligned}$$

2.4.2 Podmienky pre križovatku IV.

Podmienky vytvoríme podobne ako doteraz. V tomto prípade však nemožno vynechať podmienku nezápornosti premennej x_2 , keďže ani jedna podmienka neobsahuje na ľavej strane iba premennú x_2 , čím by sa zaručila nezápornosť. Zvyšné podmienky nezápornosti možno vynechať a ostatné podmienky rovnakým spôsobom ako v prvom prípade zjednodušiť. Dostávame:

$$\begin{aligned}
x_1 &\geq \max \{ \lambda_1, \lambda_3 \} T \frac{8}{11} \\
T - x_3 - x_4 &\geq \max \{ \lambda_2, \lambda_4 \} T \frac{8}{11} \\
x_3 &\geq \max \{ \lambda_5, \lambda_7 \} T \frac{8}{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2 + x_3 + x_4 &\geq \max\{\lambda_6, \lambda_8\} T \frac{8}{11} \\
x_4 &\geq \max\{\lambda_9, \lambda_{10}\} T \frac{8}{11} \\
T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &\geq \max\{\lambda_{11}, \lambda_{12}\} T \frac{8}{11} \\
x_2 &\geq 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

2.4.3 Numerické výsledky optimalizácie pre križovatku IV.

Periódu svetiel volíme stále rovnakú $T = 60$ s a parametre λ si zvolíme podobne ako doteraz napríklad nasledovne: $\lambda_1 = 0,07$; $\lambda_2 = 0,05$; $\lambda_3 = 0,065$; $\lambda_4 = 0,055$; $\lambda_5 = 0,07$; $\lambda_6 = 0,075$; $\lambda_7 = 0,05$; $\lambda_8 = 0,06$; $\lambda_9 = 0,065$; $\lambda_{10} = 0,05$; $\lambda_{11} = 0,055$; $\lambda_{12} = 0,06$. Použitím kvadratického programovania v štatistickom softvéri R spočítame optimálne doby svietenia zeleného svetla $x_1, x_2, x_3, x_4, T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ pre prvý typ optimalizácie pri daných podmienkach (19), kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenom svetle. Dostali sme nasledujúce podmienkam (19) vyhovujúce optimálne hodnoty $x_1 = 17,84$ s; $x_2 = 0,00$ s; $x_3 = 16,77$ s; $x_4 = 14,89$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 10,50$ s.

Použitím matematického softvéru Matlab sme spočítali optimálne doby svietenia zeleného svetla pre zvyšné dva typy optimalizácie pri daných podmienkach, ktoré už nemožno spočítať pomocou kvadratického programovania. Pre druhý typ optimalizácie, kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej, sme dostali nasledujúce podmienkam (19) vyhovujúce optimálne hodnoty: $x_1 = 20,91$ s; $x_2 = 0,00$ s; $x_3 = 18,15$ s; $x_4 = 14,81$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 6,13$ s a pre tretí typ optimalizácie, kedy minimalizujeme maximálnu hodnotu zo stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej: $x_1 = 16,31$ s; $x_2 = 0,00$ s; $x_3 = 16,31$ s; $x_4 = 14,40$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 12,98$ s.

Znovu pozorujeme, že získané optimálne dĺžky svietenia zeleného svetla pre jednotlivé fázy korešpondujú veľkosti intenzity toku áut v daných smeroch, pričom dochádza k vplyvu viacerých intenzít vrámci jednej fázy. Pre prvý a druhý typ optimalizácie vidíme, že najdlhšie svieti zelená pre fázu 1, kým pre tretí typ optimalizácie vychádzajú pre všetky križovatky vzájomne vyrovnanjšie hodnoty, dokonca v prípade križovatky IV. sa takto úplne vyrovnajú hodnoty x_1 a x_3 , čím dĺžka svietenia zeleného svetla x_1 už nie je tým pádom najdlhšia.

2.4.4 Zmena parametrov λ pre križovatku IV.

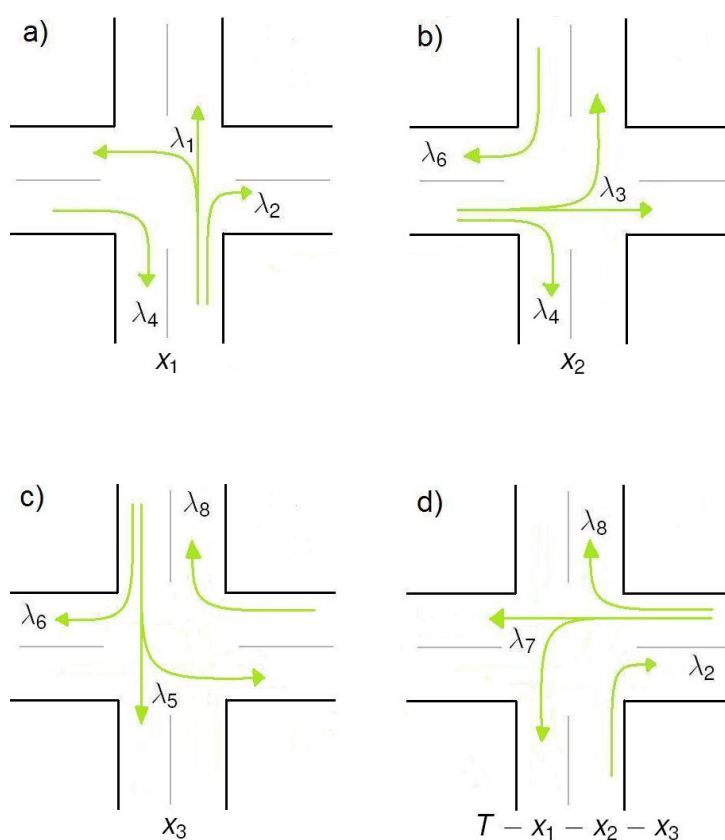
V predošlých výsledkoch optimálnych hodnôt svietení zeleného svetla na semafore si všimneme, že v prípade druhej fázy, kedy majú zelenú autá idúce doprava zo všetkých smerov, sme pre všetky typy optimalizácie dostali optimálnu hodnotu svietenia zeleného svetla na semafore $x_2 = 0$ s, pretože smerom idúcim doprava svieti zelená aj v iných fázach, napríklad pre smer 6 aj po dobu x_3 a x_4 . Znamená to, že pre zvolené hodnoty parametrov λ nie je táto fáza vôbec potrebná a mohli by sme ju kludne vynechať, keďže optimálne v tejto fáze nikdy nemá svietiť zelená a tieto smery sa zvládnu dostatočne rýchlo vyprázdniť počas iných fáz, kedy im svieti zelená.

Skúsme však dostatočne zvýšiť hodnoty parametrov λ pre všetky smery idúce doprava, teda smery 2, 4, 6 a 8, v porovnaní k ostatným parametrom λ , tak aby sme dosiahli, že sa dané smery nestihnú dostatočne rýchlo vyprázdniť na svietenie zelenej v ostatných fázach a bude potrebná aj zdanlivo zbytočná druhá fáza. Zvoľme si hodnoty parametrov λ napríklad nasledovne: $\lambda_1 = 0,07$; $\lambda_2 = 0,1$; $\lambda_3 = 0,065$; $\lambda_4 = 0,15$; $\lambda_5 = 0,07$; $\lambda_6 = 0,095$; $\lambda_7 = 0,05$; $\lambda_8 = 0,1$; $\lambda_9 = 0,065$; $\lambda_{10} = 0,05$; $\lambda_{11} = 0,055$; $\lambda_{12} = 0,06$. Použitím kvadratického programovania v štatistickom softvéri R sme pre tieto nové hodnoty parametrov λ dostali pre prvý typ optimalizácie, kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenom svetle, nasledujúce podmienkam (19) vyhovujúce optimálne hodnoty $x_1 = 18,13$ s; $x_2 = 8,19$ s; $x_3 = 12,45$ s; $x_4 = 10,38$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 10,85$ s. Vidíme, že pre takto zvolené parametre λ , kedy sme zvýšili λ pre smery 2, 4, 6, 8, je už druhá fáza dôležitá a jej optimálna doba svietenia zelenej vychádza kladná.

Pre druhý typ optimalizácie, kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej, sme dostali nasledujúce podmienkam (19) vyhovujúce optimálne hodnoty: $x_1 = 20,47$ s; $x_2 = 15,74$ s; $x_3 = 12,28$ s; $x_4 = 6,84$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4,67$ s a pre tretí typ optimalizácie, kedy minimalizujeme maximálnu hodnotu zo stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej: $x_1 = 15,98$ s; $x_2 = 1,34$ s; $x_3 = 15,90$ s; $x_4 = 14,23$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 12,55$ s. Vidíme, že pre takto zmenené parametre λ je znovu druhá fáza dôležitá a jej optimálna doba svietenia zelenej vychádza kladná pre všetky typy optimalizácie, pre tretí typ však došlo k najmenšiemu zvýšeniu len na $x_2 = 1,34$ s, kým pre prvý typ optimalizácie k dost výraznému na $x_2 = 8,19$ s, dokonca pre druhý typ až na $x_2 = 15,74$ s.

2.5 Križovatka V.

V ďalšom type svetelnej križovatky uvažujeme, že zelené svetlo na semafore svieti vždy práve pre jeden smer a umožňuje autám ísť do všetkých smerov – rovno, doprava aj doľava. Zároveň budeme pre autá odbočujúce doprava z každého smeru uvažovať intenzitu toku áut odlišnú od intenzity pre autá idúce rovno a súčasne doľava, preto v každej fáze umožňujeme zároveň autám z niektorého smeru odbočovať doprava. Nech T naďalej symbolizuje periódu svetiel a x_i dobu svietenia zeleného svetla na semafore svetelnej križovatky pre danú fázu.



Obr. 5: Schéma križovatky V.

V type križovatky znázornenom na Obr. 5 vo fáze

- a) po dobu x_1 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z dolného smeru do všetkých možných smerov – rovno, doprava aj doľava a zároveň pre autá idúce z ľavého smeru doprava,

- b) po dobu x_2 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z ľavého smeru do všetkých možných smerov a zároveň aj pre autá idúce z horného smeru doprava,
- c) po dobu x_3 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z horného smeru do všetkých možných smerov a zároveň aj pre autá idúce z pravého smeru doprava,
- d) po dobu $x_4 = T - x_1 - x_2 - x_3$ svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z pravého smeru do všetkých možných smerov a zároveň aj pre autá idúce z dolného smeru doprava.

2.5.1 Optimalizované funkcie pre križovatku V.

Rovnako ako v prípade predošlej križovatky IV. svieti zelené svetlo pre smery odbočujúce doprava 2, 4, 6, 8 viac ako raz. Fázy svietenia zeleného svetla pre dané smery takisto ako pri križovatke IV. nasledujú za sebou, a preto ich možno brať ako jednu dlhšiu zelenú. Napríklad pre smer 4 svieti zelená po dobu x_1 a x_2 , preto v nasledujúcich výpočtoch pre strednú hodnotu celkového času stráveného autami čakaním na zasvietenie zelenej počítame dobu svietenia červeného svetla ako $T - x_1 - x_2$. Pri počítaní strednej hodnoty doby nevyužitej zelenej uvažujeme svietenie zeleného svetla, čo pre tento smer 4 možno vyjadriť ako $x_1 + x_2$. Rovnakým spôsobom postupujeme aj pre ostatné smery 2, 6, 8 idúce doprava.

Našou úlohou je nájsť optimálne trvanie doby svietenia zeleného svetla na semafore $x_1, x_2, x_3, T - x_1 - x_2 - x_3$ tak, aby

1. súčet stredných dôb čakania áut na červenej bol minimálny:

$$E(Z_1) + \dots + E(Z_8) \longrightarrow \min$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1}{2} (T - x_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (x_2 + x_3)^2 + \frac{\lambda_3}{2} (T - x_2)^2 + \frac{\lambda_4}{2} (T - x_1 - x_2)^2 + \\ & + \frac{\lambda_5}{2} (T - x_3)^2 + \frac{\lambda_6}{2} (T - x_2 - x_3)^2 + \frac{\lambda_7}{2} (x_1 + x_2 + x_3)^2 + \\ & + \frac{\lambda_8}{2} (x_1 + x_2)^2 \longrightarrow \min \end{aligned}$$

2. súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej bol minimálny:

$$E(Z_1) + \dots + E(Z_8) + E(V_1) + \dots + E(V_8) \longrightarrow \min$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_1}{2} (T - x_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (x_2 + x_3)^2 + \frac{\lambda_3}{2} (T - x_2)^2 + \frac{\lambda_4}{2} (T - x_1 - x_2)^2 + \\
& \quad + \frac{\lambda_5}{2} (T - x_3)^2 + \frac{\lambda_6}{2} (T - x_2 - x_3)^2 + \frac{\lambda_7}{2} (x_1 + x_2 + x_3)^2 + \\
& \quad + \frac{\lambda_8}{2} (x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1}) + \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 (T - x_2 - x_3)}) + \\
& \quad + \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_2}) + \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4 (x_1 + x_2)}) + \frac{1}{\lambda_5} (1 - e^{-\lambda_5 x_3}) + \\
& \quad + \frac{1}{\lambda_6} (1 - e^{-\lambda_6 (x_2 + x_3)}) + \frac{1}{\lambda_7} (1 - e^{-\lambda_7 (T - x_1 - x_2 - x_3)}) + \\
& \quad + \frac{1}{\lambda_8} (1 - e^{-\lambda_8 (T - x_1 - x_2)}) \longrightarrow \min
\end{aligned}$$

3. maximálna hodnota zo stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej bola minimálna:

$$\begin{aligned}
& \max \{E(Z_1), \dots, E(Z_8), E(V_1), \dots, E(V_8)\} \longrightarrow \min \\
& \max \left\{ \frac{\lambda_1}{2} (T - x_1)^2, \frac{\lambda_2}{2} (x_2 + x_3)^2, \frac{\lambda_3}{2} (T - x_2)^2, \frac{\lambda_4}{2} (T - x_1 - x_2)^2, \right. \\
& \quad \frac{\lambda_5}{2} (T - x_3)^2, \frac{\lambda_6}{2} (T - x_2 - x_3)^2, \frac{\lambda_7}{2} (x_1 + x_2 + x_3)^2, \frac{\lambda_8}{2} (x_1 + x_2)^2, \\
& \quad \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1}), \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 (T - x_2 - x_3)}), \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_2}), \\
& \quad \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4 (x_1 + x_2)}), \frac{1}{\lambda_5} (1 - e^{-\lambda_5 x_3}), \frac{1}{\lambda_6} (1 - e^{-\lambda_6 (x_2 + x_3)}), \\
& \quad \left. \frac{1}{\lambda_7} (1 - e^{-\lambda_7 (T - x_1 - x_2 - x_3)}), \frac{1}{\lambda_8} (1 - e^{-\lambda_8 (T - x_1 - x_2)}) \right\} \longrightarrow \min
\end{aligned}$$

2.5.2 Podmienky pre križovatku V.

Podmienky vytvoríme rovnako ako doteraz, v tomto prípade však okrem nezápornosti a podmienky $x_1, x_2, x_3, T - x_1 - x_2 - x_3 \leq T$ nemôžeme už zjednodušiť iné podmienky:

$$\begin{aligned}
x_1 & \geq \lambda_1 T \frac{8}{11} \\
T - x_2 - x_3 & \geq \lambda_2 T \frac{8}{11} \\
x_2 & \geq \lambda_3 T \frac{8}{11} \\
x_1 + x_2 & \geq \lambda_4 T \frac{8}{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3 &\geq \lambda_5 T \frac{8}{11} \\
x_2 + x_3 &\geq \lambda_6 T \frac{8}{11} \\
T - x_1 - x_2 - x_3 &\geq \lambda_7 T \frac{8}{11} \\
T - x_1 - x_2 &\geq \lambda_8 T \frac{8}{11}.
\end{aligned} \tag{20}$$

2.5.3 Numerické výsledky optimalizácie pre križovatku V.

Parametre λ a periódu svetiel T si zvolíme rovnaké ako pri križovatke III., teda $T = 60$ s, $\lambda_1 = 0,07$; $\lambda_2 = 0,05$; $\lambda_3 = 0,065$; $\lambda_4 = 0,055$; $\lambda_5 = 0,07$; $\lambda_6 = 0,075$; $\lambda_7 = 0,05$; $\lambda_8 = 0,06$. Použitím kvadratického programovania v štatistickom softvéri R spočítame optimálne doby svietenia zeleného svetla $x_1, x_2, x_3, T - x_1 - x_2 - x_3$ pre prvý typ optimalizácie pri daných podmienkach (20), kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenom svetle. Dostali sme nasledujúce podmienkam (20) vyhovujúce optimálne hodnoty $x_1 = 17,36$ s; $x_2 = 14,09$ s; $x_3 = 21,90$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 = 6,65$ s.

Použitím matematického softvéru Matlab sme spočítali optimálne doby svietenia zeleného svetla pre zvyšné dva typy optimalizácie pri daných podmienkach, ktoré už nemožno spočítať pomocou kvadratického programovania. Pre druhý typ optimalizácie, kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej, sme dostali nasledujúce podmienkam (20) vyhovujúce optimálne hodnoty: $x_1 = 19,25$ s; $x_2 = 12,96$ s; $x_3 = 25,61$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 = 2,18$ s a pre tretí typ optimalizácie, kedy minimalizujeme maximálnu hodnotu zo stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej: $x_1 = 17,36$ s; $x_2 = 15,75$ s; $x_3 = 17,35$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 = 9,54$ s.

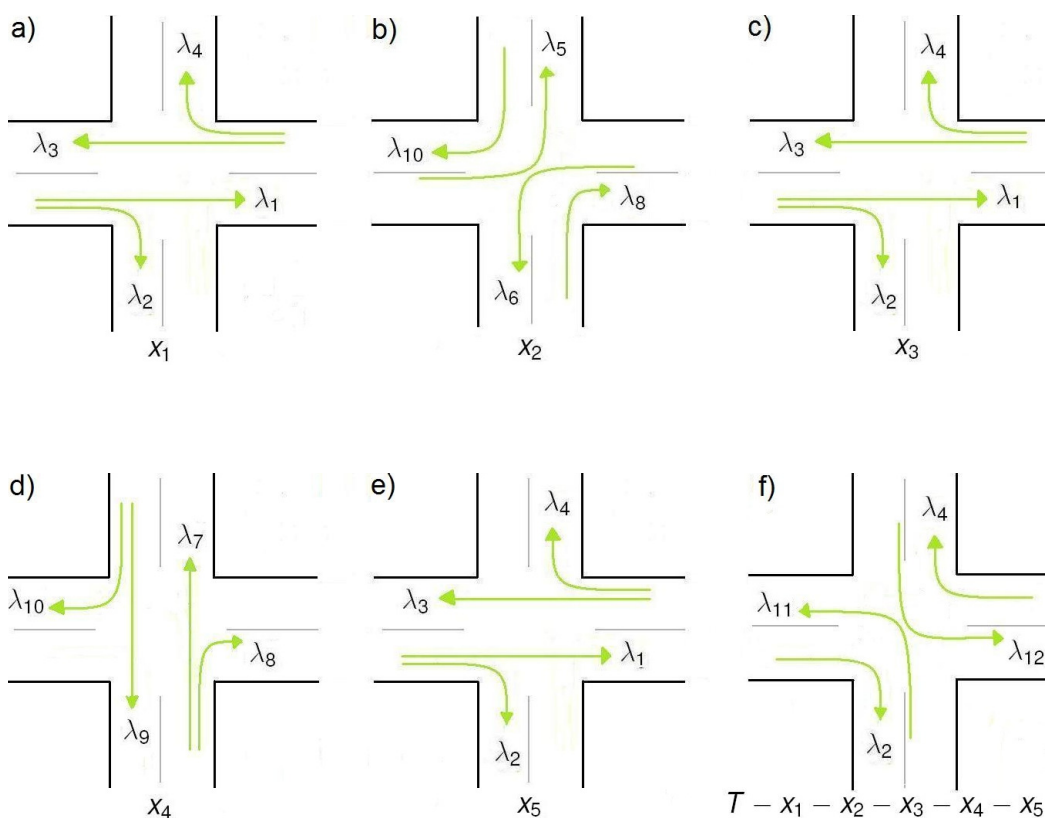
Vidíme, že získané optimálne dĺžky svietenia zeleného svetla pre jednotlivé fázy korešpondujú veľkosti intenzity toku áut v daných smeroch, pričom dochádza k vplyvu viacerých intenzít vrámci jednej fázy. Pre prvý a druhý typ optimalizácie vidíme, že najdlhšie svieti zelená pre fázu 3, kým pre tretí typ optimalizácie vychádzajú pre všetky križovatky vzájomne vyrovnanjšie hodnoty, dokonca v prípade križovatky V. dĺžka svietenia zeleného svetla x_1 je o niečo málo dlhšia ako x_3 .

Poukážme na fakt, že v prípade tretieho typu optimalizácie preukazujú doterajšie výsledky pre rôzne typy križovatiek vzájomne vyrovnanjšie hodnoty. Dôvodom tohto faktu bude práve spôsob optimalizácie, kedy minimalizujeme maximum stredných hodnôt. Možným vysvetlením by

mohlo byť, že snahou minimalizovať maximum zo stredných hodnôt dochádza k rovnomernejšiemu vyrovnaní týchto hodnôt a teda aj doby trvania svietenia optimálnych zelených sú navzájom vyrovnanejšie.

2.6 Križovatka VI.

V poslednom skúmanom type svetelnej križovatky budeme uvažovať znovu 12 smerov, teda pre každý smer rovno, doprava aj doľava zavedieme rôzne intenzity toku áut λ . Nech T naďalej symbolizuje periódu svetiel a x_i dobu svietenia zeleného svetla na semafore svetelnej križovatky pre danú fázu. Schéma križovatky je vymyslená tak, že 3-krát sa opakuje fáza, kedy svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z praveho a ľavého smeru rovno a doprava, čo možno interpretovať tak, že je to akýsi hlavný cestný ťah.



Obr. 6: Schéma križovatky VI.

V type križovatky znázornenom na Obr. 6 vo fáze

- a) po dobu x_1 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z pravého a ľavého smeru rovno a doprava,
- b) po dobu x_2 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z pravého a ľavého smeru doľava, zároveň pre autá idúce z horného a dolného smeru doprava,
- c) po dobu x_3 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z pravého a ľavého smeru rovno a doprava,
- d) po dobu x_4 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z horného a dolného smeru rovno a doprava,
- e) po dobu x_5 svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z pravého a ľavého smeru rovno a doprava,
- f) po dobu $x_6 = T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$ svieti zelené svetlo na semafore pre autá idúce z horného a dolného smeru doľava, zároveň pre autá idúce z pravého a ľavého smeru doprava.

2.6.1 Optimalizované funkcie pre križovatku VI.

V tomto prípade svieti zelené svetlo viackrát pre smery 2, 4, 6, 8 odbočujúce doprava, ale aj pre smery 1, 3 kvôli opakujúcej sa prvej fáze. Fázy svietenia zeleného svetla pre dané smery však nenasledujú vždy za sebou, a preto ich nemožno považovať za jednu dlhšiu zelenú, ale samostatne. Napríklad pre smer 1 svieti zelená po dobu x_1, x_3 a x_5 , preto v nasledujúcich výpočtoch strednú hodnotu celkového času stráveného autami čakaním na zasvietenie zelenej počítame ako súčet stredných hodnôt nezávisle pre jednotlivé doby svietenia červeného svetla x_2, x_4 a $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$, teda

$$E(Z_1) = \frac{\lambda_1}{2} x_2^2 + \frac{\lambda_1}{2} x_4^2 + \frac{\lambda_1}{2} (T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5)^2.$$

Rovnako pri počítaní strednej hodnoty doby nevyužitej zelenej uvažujeme jednotlivé svietenia zeleného svetla zvlášť, konkrétnejšie pre prvý smer

$$E(V_1) = \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1}) + \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_3}) + \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_5}).$$

V smere 2 svieti zelená po doby x_1, x_5 a $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$ hneď za sebou, preto ich možno brať ako jednu dlhšiu zelenú, teda $x_1 + x_5 + T -$

$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = T - x_2 - x_3 - x_4$ a ešte po dobu x_3 , kým červená po doby x_2 a x_4 , preto vypočítame stredné hodnoty nasledovne:

$$E(Z_2) = \frac{\lambda_2}{2}x_2^2 + \frac{\lambda_2}{2}x_4^2,$$

$$E(V_2) = \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2(T-x_2-x_3-x_4)}) + \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2x_3}).$$

Postupujeme takisto pre ostatné smery s viacnásobnou zelenou. Pri smeroch, ktorým svieti zelená len raz, počítame stredné hodnoty klasicky ako doteraz. Úlohou je nájsť optimálne trvanie doby svietenia zeleného svetla na semafore $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$ tak, aby

1. súčet stredných dôb čakania áut na červenej bol minimálny:

$$E(Z_1) + \dots + E(Z_{12}) \longrightarrow \min$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1}{2}x_2^2 + \frac{\lambda_1}{2}x_4^2 + \frac{\lambda_1}{2}(T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5)^2 + \frac{\lambda_2}{2}x_2^2 + \frac{\lambda_2}{2}x_4^2 + \\ & + \frac{\lambda_3}{2}x_2^2 + \frac{\lambda_3}{2}x_4^2 + \frac{\lambda_3}{2}(T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5)^2 + \frac{\lambda_4}{2}x_2^2 + \frac{\lambda_4}{2}x_4^2 + \\ & + \frac{\lambda_5}{2}(T - x_2)^2 + \frac{\lambda_6}{2}(T - x_2)^2 + \frac{\lambda_7}{2}(T - x_4)^2 + \frac{\lambda_8}{2}x_3^2 + \\ & + \frac{\lambda_8}{2}(T - x_2 - x_3 - x_4)^2 + \frac{\lambda_9}{2}(T - x_4)^2 + \frac{\lambda_{10}}{2}x_3^2 + \\ & + \frac{\lambda_{10}}{2}(T - x_2 - x_3 - x_4)^2 + \frac{\lambda_{11}}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 + \\ & + \frac{\lambda_{12}}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \longrightarrow \min \end{aligned}$$

2. súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej bol minimálny:

$$E(Z_1) + \dots + E(Z_{12}) + E(V_1) + \dots + E(V_{12}) \longrightarrow \min$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1}{2}x_2^2 + \frac{\lambda_1}{2}x_4^2 + \frac{\lambda_1}{2}(T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5)^2 + \frac{\lambda_2}{2}x_2^2 + \frac{\lambda_2}{2}x_4^2 + \\ & + \frac{\lambda_3}{2}x_2^2 + \frac{\lambda_3}{2}x_4^2 + \frac{\lambda_3}{2}(T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5)^2 + \frac{\lambda_4}{2}x_2^2 + \frac{\lambda_4}{2}x_4^2 + \\ & + \frac{\lambda_5}{2}(T - x_2)^2 + \frac{\lambda_6}{2}(T - x_2)^2 + \frac{\lambda_7}{2}(T - x_4)^2 + \frac{\lambda_8}{2}x_3^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_8}{2} (T - x_2 - x_3 - x_4)^2 + \frac{\lambda_9}{2} (T - x_4)^2 + \frac{\lambda_{10}}{2} x_3^2 + \\
& + \frac{\lambda_{10}}{2} (T - x_2 - x_3 - x_4)^2 + \frac{\lambda_{11}}{2} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 + \\
& + \frac{\lambda_{12}}{2} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 + \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1}) + \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_3}) + \\
& + \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_5}) + \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 (T - x_2 - x_3 - x_4)}) + \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 x_3}) + \\
& + \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_1}) + \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_3}) + \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_5}) + \\
& + \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4 (T - x_2 - x_3 - x_4)}) + \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4 x_3}) + \frac{1}{\lambda_5} (1 - e^{-\lambda_5 x_2}) + \\
& + \frac{1}{\lambda_6} (1 - e^{-\lambda_6 x_2}) + \frac{1}{\lambda_7} (1 - e^{-\lambda_7 x_4}) + \frac{1}{\lambda_8} (1 - e^{-\lambda_8 x_2}) + \\
& + \frac{1}{\lambda_8} (1 - e^{-\lambda_8 x_4}) + \frac{1}{\lambda_9} (1 - e^{-\lambda_9 x_4}) + \frac{1}{\lambda_{10}} (1 - e^{-\lambda_{10} x_2}) + \\
& + \frac{1}{\lambda_{10}} (1 - e^{-\lambda_{10} x_4}) + \frac{1}{\lambda_{11}} (1 - e^{-\lambda_{11} (T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5)}) + \\
& + \frac{1}{\lambda_{12}} (1 - e^{-\lambda_{12} (T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5)}) \longrightarrow \min
\end{aligned}$$

3. maximálna hodnota zo stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej bola minimálna:

$$\begin{aligned}
& \max \{E(Z_1), \dots, E(Z_{12}), E(V_1), \dots, E(V_{12})\} \longrightarrow \min \\
& \max \left\{ \frac{\lambda_1}{2} x_2^2 + \frac{\lambda_1}{2} x_4^2 + \frac{\lambda_1}{2} (T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5)^2, \frac{\lambda_2}{2} x_2^2 + \frac{\lambda_2}{2} x_4^2, \right. \\
& \quad \frac{\lambda_3}{2} x_2^2 + \frac{\lambda_3}{2} x_4^2 + \frac{\lambda_3}{2} (T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5)^2, \frac{\lambda_4}{2} x_2^2 + \frac{\lambda_4}{2} x_4^2, \\
& \quad \frac{\lambda_5}{2} (T - x_2)^2, \frac{\lambda_6}{2} (T - x_2)^2, \frac{\lambda_7}{2} (T - x_4)^2, \frac{\lambda_8}{2} x_3^2 + \\
& \quad + \frac{\lambda_8}{2} (T - x_2 - x_3 - x_4)^2, \frac{\lambda_9}{2} (T - x_4)^2, \frac{\lambda_{10}}{2} x_3^2 + \\
& \quad + \frac{\lambda_{10}}{2} (T - x_2 - x_3 - x_4)^2, \frac{\lambda_{11}}{2} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2, \\
& \quad \left. \frac{\lambda_{12}}{2} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2, \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_1}) + \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_3}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 x_5}), \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2(T-x_2-x_3-x_4)}) + \frac{1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 x_3}), \\
& \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_1}) + \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_3}) + \frac{1}{\lambda_3} (1 - e^{-\lambda_3 x_5}), \\
& \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4(T-x_2-x_3-x_4)}) + \frac{1}{\lambda_4} (1 - e^{-\lambda_4 x_3}), \frac{1}{\lambda_5} (1 - e^{-\lambda_5 x_2}), \\
& \frac{1}{\lambda_6} (1 - e^{-\lambda_6 x_2}), \frac{1}{\lambda_7} (1 - e^{-\lambda_7 x_4}), \frac{1}{\lambda_8} (1 - e^{-\lambda_8 x_2}) + \\
& + \frac{1}{\lambda_8} (1 - e^{-\lambda_8 x_4}), \frac{1}{\lambda_9} (1 - e^{-\lambda_9 x_4}), \frac{1}{\lambda_{10}} (1 - e^{-\lambda_{10} x_2}) + \\
& + \frac{1}{\lambda_{10}} (1 - e^{-\lambda_{10} x_4}), \frac{1}{\lambda_{11}} (1 - e^{-\lambda_{11}(T-x_1-x_2-x_3-x_4-x_5)}), \\
& \left. \frac{1}{\lambda_{12}} (1 - e^{-\lambda_{12}(T-x_1-x_2-x_3-x_4-x_5)}) \right\} \longrightarrow \min
\end{aligned}$$

2.6.2 Podmienky pre križovatku VI.

Vidíme, že v tomto type križovatky svieti zelené svetlo na semafore pre viaceré smery viac ako raz. Tento jav nastal síce už aj pre križovatky IV. a V., ale vždy nasledovali fázy svietenia zeleného svetla pre smery s viacerými zelenými za sebou a bolo možné ich brať ako jednu zelenú, len s dlhším trvaním. Z tohto dôvodu sme doteraz vytvárali podmienky aj minimalizované funkcie rovnako.

V križovatke VI. pre prvý smer s parametrom intenzity toku áut λ_1 svieti zelené svetlo po dobu x_1 , potom po dobu x_3 a nakoniec po dobu x_5 a červené svetlo po doby x_2 , x_4 a $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$.

Keďže požadujeme, aby doba svietenia zeleného svetla na semafore, pre prvú zelenú prvého smeru hodnota x_1 , bola väčšia nanajvýš rovná dobe, za ktorú sa priemerne vybaví autá, ktoré sa na križovatke nahromadili počas svietenia predošlého červeného svetla, pre zelenú x_1 má predošlá červená prvého smeru hodnotu $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$, a ktoré prišli na križovatku počas svietenia zeleného svetla, čo práve svieti, znovu x_1 , dostávame pre prvú zelenú prvého smeru nasledujúcu nerovnosť:

$$\begin{aligned}
x_1 & \geq \lambda_1 (T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5) \frac{8}{11} + \lambda_1 x_1 \frac{8}{11} \\
\Rightarrow x_1 & \geq \lambda_1 (T - x_2 - x_3 - x_4 - x_5) \frac{8}{11}.
\end{aligned}$$

Podobne vytvoríme podmienku pre druhú zelenú prvého smeru, kedy doba svietenia zeleného svetla na semafore je hodnota x_3 a predošlá červená tejto zelenej prvého smeru má hodnotu x_2 :

$$x_3 \geq \lambda_1 (x_2 + x_3) \frac{8}{11}.$$

Pre poslednú zelenú prvého smeru, kedy doba svietenia zeleného svetla na semafore je hodnota x_5 a predošlá červená tejto zelenej prvého smeru má hodnotu x_4 , dostávame podmienku:

$$x_5 \geq \lambda_1 (x_4 + x_5) \frac{8}{11}.$$

Pre druhý smer s parametrom intenzity toku áut λ_2 svieti zelené svetlo len 2-krát po dobu $x_1 + x_5 + (T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5) = T - x_2 - x_3 - x_4$, ktorému predchádza svietenie červeného svetla po dobu x_4 , a druhá zelená po dobu x_3 , ktorej predchádza červené svetlo po dobu x_2 . Podmienky v tomto prípade budú len 2 a vyzerajú nasledovne:

$$T - x_2 - x_3 - x_4 \geq \lambda_2 (T - x_2 - x_3 - x_4 + x_4) \frac{8}{11} = \lambda_2 (T - x_2 - x_3) \frac{8}{11},$$

$$x_3 \geq \lambda_2 (x_2 + x_3) \frac{8}{11}.$$

V rovnakom štýle vytvárame ďalšie podmienky, následne ich zjednodušíme ako aj doteraz a dostaneme:

$$\begin{aligned} x_1 &\geq \max \{ \lambda_1, \lambda_3 \} (T - x_2 - x_3 - x_4 - x_5) \frac{8}{11} \\ x_3 &\geq \max \{ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \} (x_2 + x_3) \frac{8}{11} \\ x_5 &\geq \max \{ \lambda_1, \lambda_3 \} (x_4 + x_5) \frac{8}{11} \\ T - x_2 - x_3 - x_4 &\geq \max \{ \lambda_2, \lambda_4 \} (T - x_2 - x_3) \frac{8}{11} \\ x_2 &\geq \max \left\{ \max \{ \lambda_8, \lambda_{10} \} (T - x_3 - x_4) \frac{8}{11}, \right. \\ &\quad \left. \max \{ \lambda_5, \lambda_6 \} T \frac{8}{11} \right\} \end{aligned} \tag{21}$$

$$x_4 \geq \max \left\{ \max \{ \lambda_8, \lambda_{10} \} (x_3 + x_4) \frac{8}{11}, \right. \\ \left. \max \{ \lambda_7, \lambda_9 \} T \frac{8}{11} \right\}$$

$$T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \geq \max \{ \lambda_{11}, \lambda_{12} \} T \frac{8}{11}.$$

2.6.3 Numerické výsledky optimalizácie pre križovatku VI.

Periódu svetiel volíme stále rovnakú $T = 60$ s a parametre λ tiež zvolíme rovnaké ako v prípade IV.: $\lambda_1 = 0,07$; $\lambda_2 = 0,05$; $\lambda_3 = 0,065$; $\lambda_4 = 0,055$; $\lambda_5 = 0,07$; $\lambda_6 = 0,075$; $\lambda_7 = 0,05$; $\lambda_8 = 0,06$; $\lambda_9 = 0,065$; $\lambda_{10} = 0,05$; $\lambda_{11} = 0,055$; $\lambda_{12} = 0,06$. Použitím kvadratického programovania v štatistickom softvéri R nedospejeme k výsledkom, keďže kvadratické programovanie tu zlyhá kvôli singularnej matici D v (16), ktorú vytvoríme z kvadratickej minimalizovanej funkcie a vkladáme ju ako vstup do `solve.QP`. Optimálne doby svietenia zeleného svetla $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$ pre prvý typ optimalizácie pri daných podmienkach (21), kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenom svetle, spočítame len prostredníctvom matematického softvéru Matlab. Dostali sme nasledujúce podmienkam (21) vyhovujúce optimálne hodnoty $x_1 = 0,93$ s; $x_2 = 21,62$ s; $x_3 = 1,16$ s; $x_4 = 18,08$ s; $x_5 = 0,97$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 17,24$ s.

Použitím matematického softvéru Matlab sme spočítali optimálne doby svietenia zeleného svetla pre zvyšné dva typy optimalizácie pri daných podmienkach, ktoré už nemožno spočítať pomocou kvadratického programovania. Pre druhý typ optimalizácie, kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej, sme dostali nasledujúce podmienkam (21) vyhovujúce optimálne hodnoty: $x_1 = 0,90$ s; $x_2 = 22,43$ s; $x_3 = 1,20$ s; $x_4 = 17,70$ s; $x_5 = 0,95$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 16,82$ s a pre tretí typ optimalizácie, kedy minimalizujeme maximálnu hodnotu zo stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej: $x_1 = 0,91$ s; $x_2 = 21,45$ s; $x_3 = 1,15$ s; $x_4 = 18,59$ s; $x_5 = 1,00$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 16,90$ s.

2.6.4 Zmena parametrov λ pre križovatku VI.

V predošlých výsledkoch optimálnych hodnôt svietení zeleného svetla na semafore si všimneme, že v prípade prvej, tretej a piatej fázy, ktoré sú vlastne rovnaká opakujúca sa fáza, kedy majú zelenú autá idúce rovno a doprava z pravého a ľavého smeru, sme pre všetky typy optimalizácie dostali optimálnu hodnotu svietenia zeleného svetla na semafore pre dané

fázy veľmi nízke v okolí 1 s. Dôvodom bude zrejme fakt, že im svieti zelená viackrát a nestíhajú sa na červenej nejako veľmi zhromažďovať.

Skúsme však dostatočne zvýšiť hodnoty parametrov λ_1 a λ_3 pre najhlavnejšie smery 1 a 3 v porovnaní k ostatným parametrom λ . Intenzitu toku áut pre smery 2 a 4 nezvyšujeme, keďže im svieti zelená ešte navyše v ďalšej fáze. Zvoľme si hodnoty parametrov λ napríklad nasledovne: $\lambda_1 = 0,25$; $\lambda_2 = 0,05$; $\lambda_3 = 0,25$; $\lambda_4 = 0,055$; $\lambda_5 = 0,07$; $\lambda_6 = 0,075$; $\lambda_7 = 0,05$; $\lambda_8 = 0,06$; $\lambda_9 = 0,065$; $\lambda_{10} = 0,05$; $\lambda_{11} = 0,055$; $\lambda_{12} = 0,06$. Použitím matematického softvéru Matlab sme pre tieto nové hodnoty parametrov λ dostali pre prvý typ optimalizácie, kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenom svetle, nasledujúce podmienkam (21) vyhovujúce optimálne hodnoty $x_1 = 2,83$ s; $x_2 = 14,08$ s; $x_3 = 16,88$ s; $x_4 = 12,16$ s; $x_5 = 2,83$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 11,22$ s. Vidíme, že pre takto zvolené parametre λ , kedy sme zvýšili λ pre smery 1 a 3, sú už prvá, tretia a piata fáza dôležitejšie (prítom tretia fáza najdôležitejšia, prvá a piata majú rovnakú dĺžku svietenia zelenej) a ich optimálna doba svietenia zelenej vychádza vyššia, hlavne pre tretiu fázu vychádza ďaleko vyššia.

3 Monte Carlo model svetelnej križovatky

Simulačný model naprogramujeme v štatistickom softvéri R. V simuláciách najskôr nastavíme vstupné parametre, ktorými sú perióda T a intenzity príchodu áut na križovatku λ_i pre všetky smery i . Ďalej si zadefinujeme premennú s názvom *doba* predstavujúcu dobu, počas ktorej skúmame chod svetelnej križovatky. Čím dlhšie budeme sledovať situáciu na križovatke, tým dospejeme k relevantnejším výsledkom.

V prvom rade nasimulujeme pomocou generátora náhodných čísel počet áut prichádzajúcich na križovatku pre každý uvažovaný smer. Počet áut pre smer i generujeme z Poissonovho rozdelenia s parametrom λ_i *doba* a uložíme do i -tej zložky vektora n . Následne vygenerujeme pre každý smer časy príchodov S jednotlivých áut na križovatku z rovnomerného rozdelenia s parametrami 0, *doba* a usporiadame ich vzostupne (viď [2]), ako sme uviedli v kapitole 1.1.

Hlavná idea simulačného modelu pozostáva zo simulácie pravidelného striedania svetelných signálov (viď [1]), ktorú vykonáme prostredníctvom viacerých vnorených for cyklov. Počet for cyklov závisí od počtu fáz svetelnej križovatky, pretože každý prechádza cez možné hodnoty svietenia zeleného svetla pre jednu fázu. Dosiahneme tak pokrytie všetkých možných kombinácií, ako nastaviť svietenie zelených svetiel na semafore pre skúmanú križovatku.

Pre každú kombináciu potom spočítame časy odchodov jednotlivých áut, pričom vo všeobecnosti platí, že ak príde auto počas svietenia zelenej a nie je pred ním rad, môže prejsť križovatkou, ak príde počas svietenia červenej alebo sa pred ním vytvára rad, zaradí sa do radu a počká na zasvietenie zelenej, pri ktorej už bude môcť opustiť križovátku.

Podľa typu optimalizácie sa vypočíta príslušný priemer, čím dostaneme odhad optimalizovanej funkcie pre každú kombináciu svietenia zelených. Nakoniec nájdeme optimálnu kombináciu nastavenia svietenia zelených svetiel na semaforoch pre všetky fázy, teda kombináciu, pri ktorej táto odhadnutá funkcia nadobúda minimum.

Pre urýchlenie simulácie nepočítame v tele vnorených for cyklov časy odchodov áut z križovatky pre každú kombináciu dôb svietení zelenej, ale sčítame len odhadnuté stredné hodnoty pre kombináciu dôb svietení zelených. Každý smer môžeme totiž brať nezávisle od ostatných smerov, čo znamená, že pre jednoduchosť budeme uvažovať, že zelená svieti v časovom intervale $(0, A)$, kde hodnoty A budeme postupne meniť od 1 po $T - 1$ s krokom 1 pre pokrytie všetkých kombinácií. Vytvoríme si for cyklus pre A idúce od 1 po $T - 1$ krokom 1, vypočítame v ňom pre každý smer časy odchodov O áut z križovatky a skonštruujeme postupne maticu E odhadnutých stredných hodnôt tak, že do $E[A, i]$ vložíme odhadnutú strednú hodnotu času stráveného autami na križovatkke čakaním na zasvietenie zeleného svetla, pri dobe svietenia zelenej A pre i -ty smer. Vo vnútri vnorených for cyklov pri súčte odhadnutých stredných hodnôt dbáme na vybratie správneho políčka matice E podľa smeru a práve simulovanej dĺžky svietenia zelenej vzhľadom k uvažovanému typu križovatky.

Samozrejme pre presnejší výpočet, prípadne presnejšiu zhodu s numerickými výsledkami, by sme mali for cyklus nechať ísť aj po oveľa menších krokoch. Takéto simulácie sú však časovo náročné a uspokojíme sa preto s celočíselnými hodnotami aj pri porovnávaní s numerickými výsledkami.

Pre počítanie odhadnutej strednej hodnoty si naprogramujeme samostatnú funkciu so vstupným parametrom číslom smeru i , ktorú budeme opakovane volať. V prvom type optimalizácie potrebujeme odhadnúť len stredné hodnoty celkového času čakania áut na križovatkke na zasvietenie zeleného svetla a možnosť opustiť križovátku, $E(Z)$.

Najprv odpočítame od vektora časov odchodov áut O vektor časov príchodov áut S pre daný smer, roztriedime si vektor rozdielov do skupín podľa poradového čísla cyklu, v ktorom prišli na križovátku, a potom vrámci každej skupiny spočítame celkovú dobu čakania áut pre daný smer počas celého uvažovaného cyklu. Z týchto celkových súčtov vypočítame priemer. Nevyužijeme na to preddefinovanú funkciu `mean` pre počítanie

priemeru, pretože nesmieme zabudnúť na tie cykly, kedy na križovatku neprišlo žiadne auto. Príkaz `mean` rátajúci priemer by delil súčet súčtov celkových dôb čakania počtom týchto súčtov, ktoré nezahŕňajú cykly, kedy neprišlo na križovatku žiadne auto. Postupujeme teda tak, že spočítame súčty celkových dôb a vydělíme celkovým počtom cyklov, teda $\frac{\text{doba}}{T}$.

Pri druhom type optimalizácie počítame odhad predošlej strednej hodnoty čakania áut na červenej, $E(Z)$, ale aj odhad strednej hodnoty zbytočného svietenia zeleného svetla, kedy už križovatkou neprešlo žiadne auto, $E(V)$. V tomto prípade si okrem matice E vytvárame rovnakým spôsobom v tom istom for cykle aj maticu F , do ktorej zapisujeme odhadnuté stredné hodnoty nevyužitej zelenej.

Pre odhad tejto strednej hodnoty si znovu naprogramujeme samostatnú funkciu so vstupným parametrom číslom smeru i a dĺžkou svietenia zeleného svetla A , ktorú budeme opakovane volať. Najskôr roztriedime do skupín priamo vektor časov odchodov O podľa poradového čísla cyklu, v ktorom opustili križovatku a vrámci každej skupiny nájdeme maximálnu hodnotu, teda posledné auto opúšťajúce križovatku počas svietenia zelenej v danom cykle. Odpočítaním týchto maximálnych hodnôt od doby A , kedy zasvietilo červené svetlo v každom uvažovanom cykle, zistíme dĺžky časov, kedy už svietila zelená zbytočne, keďže počas nej už neprešlo žiadne auto. Nesmieme takisto zabúdať na cykly, kedy neprišlo a neopustilo križovatku žiadne auto. Za každý takýto cyklus pripočítame k súčtu predošlých rozdielov hodnotu dĺžky doby svietenia zelenej A . Nakoniec celkový súčet vydělíme znovu celkovým počtom cyklov, teda $\frac{\text{doba}}{T}$.

Pre druhý typ optimalizácie vo vnútri vnorených for cyklov spočítame odhadnuté stredné hodnoty E aj F , pričom dbáme na vybratie správneho políčka matice E aj F podľa smeru a práve simulovanej dĺžky svietenia zelenej vzhľadom k uvažovanému typu križovatky. V treťom type optimalizácie vytvárame matice E a F rovnako ako doteraz, až na konci vo vnútri vnorených for cyklov nájdeme maximum odhadnutých stredných hodnôt.

Najskôr sa budeme zaoberať simuláciami, kedy uvažujeme, že autu netrvá žiaden čas opustiť križovatku. Jedná sa o zjednodušený model, ktorý si možno predstaviť, že auto, ktoré príde počas svietenia zelenej, odíde v tom istom čase ako prišlo. Autá, ktoré prišli na križovatku počas svietenia červenej, počkajú na zasvietenie najbližšej zelenej a v tom okamihu všetky naraz opustia križovatku. Uvedený model sa zhoduje s modelom, podľa ktorého fungujú optimalizované procesy, ktoré sme si rozobrali v predošlej kapitole. Na základe tohto typu simulácií budeme môcť porovnať numerické výsledky s experimentálnymi a overiť správnosť simulačného modelu.

Neskôr zistíme výsledky simulácií, kedy už funkciu na rátanie časov odchodov riešime zložitejšie. Čas odchodu auta, ktoré príde počas svietenia zelenej a nestojí pred ním žiadne auto, napríklad z predošlej červenej alebo keď prichádzajú nahusto za sebou, určíme pripočítaním konštanty d k času príchodu. Táto konštanta reprezentuje už spomínanú priemernú dobu vybavenia jedného auta, ktorú sme stanovili na $\frac{8}{11}$. Ak auto príde počas zelenej, ale sú pred ním ešte predošlé autá, jeho čas odchodu sa vypočíta ako čas odchodu predošlého auta zvýšený o priemernú dobu vybavenia jedného auta, teda konštantu d .

Čas odchodu auta, ktoré prišlo na červenú a nestojí pred ním v rade ešte žiadne iné auto, nastavíme na čas zasvietenia najbližšej zelenej zvýšený o priemernú dobu vybavenia auta. Pokiaľ pred ním už autá stoja, jeho čas odchodu sa vypočíta ako čas odchodu predošlého auta zvýšený o konštantu d . V tomto, ale aj predošlom prípade, kedy prišlo auto na zelenú, stále kontrolujeme, či potenciálny čas odchodu neprekročí čas svietenia danej zelenej. V prípade, že by malo dôjsť k prekročeniu tohto času, teda auto by prešlo na červenú, čas odchodu takéhoto auta stanovíme ako čas zasvietenia ďalšej zelenej v poradí, samozrejme zvýšený o konštantu d . Takýto model už lepšie zodpovedá realite.

3.1 Križovatka I.

Konkrétnejšie sa pokúsime vysvetliť predošlý popis simulačného modelu na križovatke I. V prvom rade si zadefinujeme vstupné parametre na rovnaké hodnoty ako v prípade numerického riešenia za účelom možnosti porovnania výsledkov, teda $T = 60$ s; $\lambda_1 = 0,07$; $\lambda_2 = 0,05$; $\lambda_3 = 0,065$; $\lambda_4 = 0,055$. Premennú *doba* nastavíme na hodnotu 120000 s, čo vlastne znamená, že danú križovatku sledujeme počas

$$\frac{\text{doba}}{T} = \frac{120000}{60} = 2000 \text{ cyklov.}$$

Následne si vygenerujeme počty áut pre každý smer z Poissonovho rozdelenia a časy príchodov áut na križovatku pre každý smer z rovnomerného rozdelenia. Naprogramujeme funkciu pre výpočet času odchodu auta z križovatky a funkcie pre odhad stredných hodnôt v zmysle vyššie vysvetleného princípu. Ďalší krok pozostáva z vypočítania matíc E pre prvý typ optimalizácie a matíc E aj F pre druhý a tretí typ optimalizácie vrámci for cyklu pre dobu svietenia zeleného svetla A od 1 po 59.

V križovatke I. nás zaujíma nastavenie dvoch svietení zelenej, keďže daná križovatka má dve fázy, čo vieme vyjadriť pomocou jedinej nezná-

mej doby trvania zelenej x a ľahko už dopočítame dĺžku trvania zelenej pre druhú fázu na základe periódy ako $T - x$. Pre tento prípad stačí uvažovať jeden for cyklus pre dobu trvania prvej zelenej a dobu trvania druhej zelenej vypočítame ako doplnok do dĺžky periódy, teda $60 - x$. Hodnoty for cyklu prechádzajú od 1 po 59 krokom 1, teda len prirodzenými číslami.

Označíme x_1 dobu trvania zelenej v prvej fáze a $x_2 = 60 - x_1$ v druhej, odhadnutú hodnotu funkcie potom vypočítame pri prvom type optimalizácie, kedy minimalizujeme strednú hodnotu času čakania áut na červenej, ako $E[x_1, 1] + E[x_2, 2] + E[x_1, 3] + E[x_2, 4]$, keďže počas intervalu $(0, x_1)$ majú zelenú smery 1 a 3, kým počas $(x_1, x_1 + x_2)$ smery 2 a 4. Ako sme už spomínali, možno vzhľadom na nezávislosť jednotlivých smerov posunúť tento interval do $(0, x_2)$, pretože nás zaujíma dĺžka trvania zelenej a nie v akej časti daného cyklu sa interval svietenia zelenej nachádza.

Pre druhý typ optimalizácie, kedy minimalizujeme súčet stredných dôb čakania áut na červenej a stredných dôb nevyužitej zelenej, odhadnutú hodnotu funkcie dostávame ako súčet $E[x_1, 1] + E[x_2, 2] + E[x_1, 3] + E[x_2, 4] + F[x_1, 1] + F[x_2, 2] + F[x_1, 3] + F[x_2, 4]$. Odhadnutú hodnotu funkcie tretím typom optimalizácie, kedy minimalizujeme maximum z odhadnutých stredných dôb čakania áut na červenej a odhadnutých stredných dôb nevyužitej zelenej, spočítame ako maximum z $E[x_1, 1]$, $E[x_2, 2]$, $E[x_1, 3]$, $E[x_2, 4]$, $F[x_1, 1]$, $F[x_2, 2]$, $F[x_1, 3]$, $F[x_2, 4]$.

Všetky tri druhy optimalizácie sme vykonali pre porovnanie s numerickými výsledkami pre prípad, keď neuvažujeme priemernú dobu vybavenia auta, ale takisto aj pre prípad s konštantou d reprezentujúcou priemernú dobu vybavenia jedného auta, kedy čas odchodu auta, ktoré príde počas svietenia zelenej a nestojí pred ním žiadne auto, napríklad z predošlej červenej, určíme pripočítaním konštanty d k času príchodu. Čas odchodu auta, ktoré prišlo na červenú a nestojí pred ním v rade žiadne auto, nastavíme na čas zasvietenia najbližšej zelenej zvýšený o priemernú dobu vybavenia auta. Ak auto príde počas zelenej alebo červenej a stoja pred ním predošlé autá, jeho čas odchodu sa vypočíta ako čas odchodu predošlého auta zvýšený o priemernú dobu vybavenia jedného auta, teda konštantu d . V každom z týchto prípadov stále kontrolujeme, či potenciálny čas odchodu neprekročí čas svietenia danej zelenej. V prípade, že by malo dôjsť k prekročeniu tohto času, teda auto by prešlo na červenú, čas odchodu takéhoto auta stanovíme ako čas zasvietenia ďalšej zelenej v poradí, samozrejme zvýšený o konštantu d .

Monte Carlo simuláciami sme pre prvý typ optimalizácie dospeli pre dve rôzne nastavenia generátora náhodných čísel k rovnakým celočíselným výsledkom $x = 33$ s, $T - x = 27$ s a pre ďalšie nastavenie generátora $x = 34$ s,

$T - x = 26$ s. Numerické výsledky boli $x = 33,75$ s a $T - x = 26,25$ s. Pre druhý typ optimalizácie sme dostali pri rôznych generovaniach výsledky $x = 37$ s, $T - x = 23$ s; $x = 36$ s, $T - x = 24$ s; $x = 35$ s, $T - x = 25$ s, numerické riešenie bolo $x = 35,25$ s a $T - x = 24,75$ s. Pre tretí typ simuláciami získané výsledky sú pre všetky nastavenie generátora náhodných čísel $x = 32$ s, $T - x = 28$ s a numerické riešenie $x = 31,81$ s a $T - x = 28,19$ s.

Vidíme, že dané výsledky sú po zaokrúhlení veľmi podobné až rovnaké. K rozdielom medzi numerickými a Monte Carlo výsledkami dochádza z dôvodu prechádzania len kombinácií prirodzených čísel kvôli skráteniu trvania simulácie a z dôvodu minimalizácie odhadnutej funkcie, ktorá je len odhadom a môže nadobúdať minimum v inom bode, ale v blízkom okolí správneho výsledku.

Pre zaujímavosť a porovnanie uvádzame tiež výsledky simulácií, kedy uvažujeme aj priemernú dobu vybavenia auta d . Pre prvý typ optimalizácie sme dostali pri rôznych generovaniach výsledky $x = 33$ s, $T - x = 27$ s; $x = 31$ s, $T - x = 29$ s; $x = 35$ s, $T - x = 25$ s. Pre druhý typ pre prvé dve rôzne počiatkové nastavenia generátora čísel sme dospeli k rovnakým výsledkom: $x = 36$ s, $T - x = 24$ s a pre tretie nastavenie generátora k $x = 37$ s, $T - x = 23$ s. Pre tretí typ pre všetky tri rôzne počiatkové nastavenia generátora náhodných čísel sme dostali rovnaké výsledky: $x = 32$ s, $T - x = 28$ s. Predpokladali by sme, že vzhľadom na zvýšenie časov odchodov v dôsledku priemernej doby vybavenia auta d , dostaneme optimálne nastavenie svietenia zelených svetiel na križovatke odlišné od optimálnych hodnôt bez priemernej doby vybavenia auta d . Pre oba typy simulácií však pozorujeme veľmi blízke výsledky, čo možno objasniť tým, že intenzity toku áut v smeroch sú nastavené tak, aby boli splnené podmienky (14) pre danú križovatku I. Nedochádza teda k výraznému hromadeniu áut na križovatke, ktoré by spôsobovalo výrazné zdržanie áut na križovatke. Minimum odhadovanej funkcie sa aj v tomto prípade nachádza v okolí predošlého, dochádza len k nárastu hodnôt odhadovanej funkcie v dôsledku uvažovania priemernej doby vybavenia auta d .

3.2 Križovatka II.

V simulácii križovatky II. postupujeme úplne rovnako ako v predošlej križovatke I., rovnakým princípom generujeme časy príchodov, zavedieme funkciu pre počítanie časov odchodov áut a funkcie pre odhad stredných hodnôt pre všetky typy optimalizácie. Takisto postupujeme pri zisťovaní hodnôt matice E a F . Dochádza však k zvýšeniu počtu vnorených for cyklov, konkrétne na 3, v dôsledku zvýšeného počtu fáz a teda neznámych

dôb trvania svietení zelených. V križovatke II. nás zaujíma nastavenie štyroch svietení zelenej, keďže daná križovatka má štyri fázy. Pre tento prípad uvažujeme tri vnorené for cykly, prvý pre dobu trvania prvej zelenej x_1 idúci od 1 po 57 krokom 1, druhý pre dobu trvania druhej zelenej x_2 idúci od 1 po $58 - x_1$ krokom 1, tretí pre dobu trvania tretej zelenej x_3 idúci od 1 po $59 - x_1 - x_2$ krokom 1 a dobu trvania poslednej zelenej vypočítame ako doplnok do dĺžky periódy, teda $x_4 = 60 - x_1 - x_2 - x_3$.

V tele vnorených for cyklov sčítame príslušné odhadnuté stredné hodnoty, konkrétne pre prvý typ optimalizácie $E[x_1, 1] + E[x_2, 2] + E[x_3, 3] + E[x_4, 4]$. Stále berieme jednotlivé smery nezávisle a zaujíma nás dĺžka trvania zelenej, nie jej umiestnenie vrámci danej periódy, preto možno pre zjednodušenie posunúť interval svietenia zelenej do intervalu začínajúceho od nuly, napríklad interval $(x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$ do intervalu $(0, x_3)$. Doteraz spomínané princípy zachovávame ďalej pri zisťovaní odhadnutých hodnôt funkcie aj v ostatných typoch optimalizácie.

Numerické výsledky v prípade prvého typu optimalizácie pre križovatku II. $x_1 = 22,10$ s; $x_2 = 6,94$ s; $x_3 = 19,19$ s, a teda $x_4 = T - x_1 - x_2 - x_3 = 11,77$ s môžeme porovnať s Monte Carlo výsledkami pre rôzne počiatkové nastavenia generátora náhodných čísel:

x_1	x_2	x_3	x_4
19	6	21	14
23	6	20	11
23	6	19	12

Tabuľka 1: Výsledky simulácií pre 1. typ optimalizácie križovatky II.

Dôležitým meradlom správnosti simulačných výsledkov vzhľadom k nepatrným rozdielom aj v dôsledku celočíselných kombinácií je hlavne zachovanie poradia dĺžok svietenia zelenej jednotlivých fáz vzhľadom k parametrom λ . Ako sme už uviedli pri numerických výsledkoch, znamená to, že pre smer s najvyšším parametrom λ bude svietiť zelená najdlhšie a tak ďalej až po smer s najnižšou intenzitou príchodu áut λ , ktorému bude svietiť zelená najkratšie.

Numerické výsledky v prípade druhého typu optimalizácie pre križovatku II. $x_1 = 26,33$ s; $x_2 = 2,18$ s; $x_3 = 22,65$ s, a teda $x_4 = T - x_1 - x_2 - x_3 = 8,84$ s porovnáme s Monte Carlo výsledkami:

x_1	x_2	x_3	x_4
26	1	26	7
27	2	24	7
27	3	20	10

Tabuľka 2: Výsledky simulácií pre 2. typ optimalizácie križovatky II.

Pre tretí typ optimalizácie pre križovatku II. s numerickými výsledkami $x_1 = 18,61$ s; $x_2 = 11,03$ s; $x_3 = 17,05$ s, a teda $x_4 = T - x_1 - x_2 - x_3 = 13,31$ s sme dospeli k výsledkom simulácií:

x_1	x_2	x_3	x_4
19	11	17	13
18	11	17	14
19	11	17	13

Tabuľka 3: Výsledky simulácií pre 3. typ optimalizácie križovatky II.

Znovu si všimneme, že numerické výsledky sú po zaokrúhlení veľmi podobné až rovnaké experimentálnym. Rovnako ako v predošlej križovatke, k rozdielom medzi numerickými a Monte Carlo výsledkami dochádza z dôvodu prechádzania len kombinácií prirodzených čísel kvôli skráteniu trvania simulácie a z dôvodu minimalizácie odhadnutej funkcie, ktorá je len odhadom a môže nadobúdať minimum v inom bode, ale v blízkom okolí správneho výsledku.

Pre zaujímavosť a porovnanie uvádzame v nasledujúcej Tabuľke 4 pre všetky typy optimalizácie výsledky simulácií, kedy uvažujeme aj priemernú dobu vybavenia auta d . Znovu postrehneme výsledky blízke predošlým výsledkom bez uvažovania priemernej doby vybavenia jedného auta.

1.typ	x_1	x_2	x_3	x_4
	22	7	21	10
	22	7	19	12
	20	7	18	15

2.typ	x_1	x_2	x_3	x_4
	22	7	22	9
	30	6	16	8
	24	7	19	10
3.typ	x_1	x_2	x_3	x_4
	19	11	17	13
	19	10	17	14
	19	11	17	13

Tabuľka 4: Výsledky simulácií križovatky II. s priemernou dobou vybavenia auta d

3.3 Križovatka III.

V simulácii križovatky III. postupujeme stále rovnako ako doteraz pri generovaní časov príchodov, zostavovaní funkcie pre počítanie časov odchodov áut, funkcie pre odhad stredných hodnôt pre všetky typy optimalizácie, zisťovaní hodnôt matíc E , F . V tomto prípade ostáva rovnaký počet a princíp vnorených for cyklov, keďže počet fáz ostáva rovnaký ako pre križovatku II. Dochádza však k zvýšeniu počtu smerov na 8, čo znamená, že aj matice E , F budú mať 8 stĺpcov.

V tele vnorených for cyklov sčítame príslušné odhadnuté stredné hodnoty v zmysle posúvania intervalov svietenia zeleného svetla do začiatku cyklu so zachovaním dĺžky svietenia a Obr. 3, konkrétne pre prvý typ optimalizácie $E[x_1, 1] + E[x_1, 2] + E[x_2, 3] + E[x_2, 4] + E[x_3, 5] + E[x_3, 6] + E[x_4, 7] + E[x_4, 8]$. Postupujeme rovnako aj pre ostatné typy optimalizácie.

Numerické výsledky v prípade prvého typu optimalizácie pre križovatku III. $x_1 = 14,06$ s; $x_2 = 14,06$ s; $x_3 = 21,99$ s, a teda $x_4 = T - x_1 - x_2 - x_3 = 9,89$ s porovnáme s Monte Carlo výsledkami pre rôzne nastavenia generátora čísel:

x_1	x_2	x_3	x_4
16	15	19	10
13	15	24	8
16	14	20	10

Tabuľka 5: Výsledky simulácií pre 1. typ optimalizácie križovatky III.

Numerické výsledky v prípade druhého typu optimalizácie pre križovatku III. $x_1 = 15,12$ s; $x_2 = 15,19$ s; $x_3 = 26,45$ s, a teda $x_4 = T - x_1 - x_2 - x_3 = 3,24$ s porovnáme s experimentálnymi výsledkami:

x_1	x_2	x_3	x_4
16	16	24	4
12	15	25	8
16	12	25	7

Tabuľka 6: Výsledky simulácií pre 2. typ optimalizácie križovatky III.

Pre tretí typ optimalizácie pre križovatku III. s numerickými výsledkami $x_1 = 15,92$ s; $x_2 = 14,26$ s; $x_3 = 17,42$ s, a teda $x_4 = T - x_1 - x_2 - x_3 = 12,40$ s sme dospeli k výsledkom simulácií:

x_1	x_2	x_3	x_4
16	14	17	13
16	14	18	12
16	14	17	13

Tabuľka 7: Výsledky simulácií pre 3. typ optimalizácie križovatky III.

Vidíme, že numerické výsledky sú po zaokrúhlení veľmi podobné až rovnaké experimentálnym. Znovu si môžeme všimnúť, že v prípade tretieho typu optimalizácie sa výsledky vrámci rôznych nastavení generátora čísel líšia minimálne a najlepšie sa približujú numerickému výsledkom. Dôvodom bude práve spôsob optimalizácie, kedy minimalizujeme maximum stredných hodnôt. Minimalizovaním maxima dostávame vyrovnanejšie hodnoty nastavenia zelených svetiel.

Pre zaujímavosť a porovnanie uvádzame v nasledujúcej Tabuľke 8 pre všetky typy optimalizácie výsledky simulácií, kedy uvažujeme aj priemernú dobu vybavenia auta d . Dostávame výsledky blízke predošlým výsledkom bez uvažovania priemernej doby vybavenia jedného auta.

1.typ	x_1	x_2	x_3	x_4
	17	15	20	8
	13	13	25	9
	13	15	21	11

2.typ	x_1	x_2	x_3	x_4
	16	13	24	7
	9	16	27	8
	13	11	28	8
3.typ	x_1	x_2	x_3	x_4
	16	15	17	12
	16	14	18	12
	16	14	18	12

Tabuľka 8: Výsledky simulácií križovatky III. s priemernou dobou vybavenia auta d

3.4 Križovatka IV.

V simulácii križovatky IV. postupujeme stále rovnako ako doteraz pri generovaní časov príchodov, zostavovaní funkcie pre počítanie časov odchodov áut, funkcie pre odhad stredných hodnôt pre všetky typy optimalizácie, zisťovaní hodnôt matíc E , F . V tomto prípade dochádza k ďalšiemu zvýšeniu počtu smerov na 12, čo znamená, že aj matice E , F budú mať 12 stĺpcov, a zároveň k zvýšeniu počtu fáz, teda zvýši sa počet vnorených for cyklov o jeden.

V križovatke IV. nás zaujíma nastavenie piatich svietení zelenej, keďže daná križovatka má päť fáz. Pre tento prípad uvažujeme štyri vnorené for cykly, prvý pre dobu trvania prvej zelenej x_1 idúci od 1 po 56 krokom 1, druhý pre dobu trvania druhej zelenej x_2 idúci od 1 po $57 - x_1$ krokom 1, tretí pre dobu trvania tretej zelenej x_3 idúci od 1 po $58 - x_1 - x_2$ krokom 1, štvrtý pre dobu trvania štvrtej zelenej x_4 idúci od 1 po $59 - x_1 - x_2 - x_3$ krokom 1 a dobu trvania poslednej zelenej vypočítame ako doplnok do dĺžky periódy, teda $x_5 = 60 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$.

V tele vnorených for cyklov sčítame príslušné odhadnuté stredné hodnoty v zmysle Obr. 4 a posúvania intervalov svietenia zeleného svetla do začiatku cyklu so zachovaním dĺžky svietenia, konkrétne pre prvý typ optimalizácie $E[x_1, 1] + E[(x_1 + x_2 + x_5), 2] + E[x_1, 3] + E[(x_1 + x_2 + x_5), 4] + E[x_3, 5] + E[(x_2 + x_3 + x_4), 6] + E[x_3, 7] + E[(x_2 + x_3 + x_4), 8] + E[x_4, 9] + E[x_4, 10] + E[x_5, 11] + E[x_5, 12]$. Nastáva tu prvýkrát prípad, kedy pre niektoré smery svieti zelená viac než raz, ale vieme ju chápať ako jednu dlhšiu zelenú, keďže dané fázy svietenia zelených nasledujú za sebou. Keď sa jedná o prvú a poslednú fázu cyklu, možno nadviazať poslednú fázu na prvú fázu ďalšieho cyklu a tak ako doteraz posunúť do začiatku cyklu. V rovnakom duchu zostavíme odhad optimalizovanej funkcie aj

pre ostatné typy optimalizácie. Numerické výsledky v prípade prvého typu optimalizácie pre križovatku IV. $x_1 = 17,84$ s; $x_2 = 0,00$ s; $x_3 = 16,77$ s; $x_4 = 14,89$ s, a teda $x_5 = T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 10,50$ s porovnáme s Monte Carlo výsledkami pre rôzne nastavenia generátora uvedenými v Tabuľke 9.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
18	1	17	15	9
17	1	13	18	11
16	1	16	15	12

Tabuľka 9: Výsledky simulácií pre 1. typ optimalizácie križovatky IV.

Numerické výsledky v prípade druhého typu optimalizácie pre križovatku IV. $x_1 = 20,91$ s; $x_2 = 0,00$ s; $x_3 = 18,15$ s; $x_4 = 14,81$ s, a teda $x_5 = T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 6,13$ s porovnáme s experimentálnymi výsledkami:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
21	1	17	16	5
24	1	13	20	2
23	1	17	17	2

Tabuľka 10: Výsledky simulácií pre 2. typ optimalizácie križovatky IV.

Pre tretí typ optimalizácie pre križovatku IV. s numerickými výsledkami $x_1 = 16,31$ s; $x_2 = 0,00$ s; $x_3 = 16,31$ s; $x_4 = 14,40$ s, a teda $x_5 = T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 12,98$ s sme dostali výsledky simulácií:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
16	1	16	14	13
16	1	16	15	12
16	1	16	14	13

Tabuľka 11: Výsledky simulácií pre 3. typ optimalizácie križovatky IV.

Všimneme si, že numerické výsledky sú po zaokrúhlení veľmi podobné až rovnaké experimentálnym. Pre zaujímavosť a porovnanie uvádzame v nasledujúcej Tabuľke 12 pre všetky typy optimalizácie výsledky simulácií, kedy uvažujeme aj priemernú dobu vybavenia auta d . Dostávame

výsledky blízke predošlým výsledkom bez uvažovania priemernej doby vybavenia jedného auta.

1.typ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	17	1	16	16	10
	16	1	15	16	12
	13	1	17	17	12
2.typ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	17	1	17	16	9
	18	1	15	19	7
	13	1	17	17	12
3.typ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	16	1	16	14	13
	16	1	16	15	12
	16	1	16	14	13

Tabuľka 12: Výsledky simulácií križovatky IV. s priemernou dobou vybavenia auta d

Pri treťom type optimalizácie možno pozorovať v Tabuľkách 3, 4 – 3. časť, 7, 8 – 3. časť, vyrovnanejšie hodnoty optimálnych dôb svietenia zelených ako pri zvyšných optimalizáciách, okrem hodnoty zbytočnejšej druhej fázy pre križovatku IV. v Tabuľkách 11, 12 – 3. časť (pre zvyšné fázy sú hodnoty znova rovnomerné a podobné ako predošlé križovatky), čo možno odvôvodniť práve spôsobom optimalizácie, ktorý sa snaží minimalizovať maximum, čím stáhuje hodnoty dôb trvania zelených svetiel bližšie k sebe, dlhšie doby svietenia skracaje, kratšie naopak predlžuje.

Numerické výsledky $x_1 = 18,13$ s; $x_2 = 8,19$ s; $x_3 = 12,45$ s; $x_4 = 10,38$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 10,85$ s pre prípad prvého typu optimalizácie pre križovatku IV. pre zmenené parametre λ za účelom potreby druhej fázy porovnáme s experimentálnymi výsledkami:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
18	7	15	8	12
19	8	11	12	10
19	7	14	9	11

Tabuľka 13: Výsledky simulácií pre 1. typ optimalizácie križovatky IV. pre zmenu λ

Numerické výsledky v prípade druhého typu optimalizácie pre križovatku IV. pri zmene parametrov λ $x_1 = 20,47$ s; $x_2 = 15,74$ s; $x_3 = 12,28$ s; $x_4 = 6,84$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 4,67$ s porovnáme s experimentálnymi výsledkami:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
21	18	15	2	4
20	16	7	12	5
19	16	17	3	5

Tabuľka 14: Výsledky simulácií pre 2. typ optimalizácie križovatky IV. pre zmenu λ

Pre tretí typ optimalizácie pre križovatku IV. pri zmene parametrov λ s numerickými výsledkami $x_1 = 15,98$ s; $x_2 = 1,34$ s; $x_3 = 15,90$ s; $x_4 = 14,23$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 12,55$ s sme dostali výsledky simulácií:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
16	1	15	15	13
16	1	15	15	13
16	1	16	14	13

Tabuľka 15: Výsledky simulácií pre 3. typ optimalizácie križovatky IV. pre zmenu λ

Vidíme, že numerické výsledky pre tento typ križovatky dávajú pre druhú fázu nulovú dĺžku svietenia zeleného svetla, kým v dôsledku vnorených for cyklov idúcich od hodnoty 1, sme simuláciami dospeli pre druhú fázu k najnižšej možnej hodnote 1, keďže ani nemáme možnosť dospieť k nule. Výnimočne v tomto prípade, preto urobíme aj simuláciu, kedy vo vnorených cykloch necháme ísť for cyklus pre x_2 od 0.

V iných typoch križovatiek tento krok nemôžeme vykonať, pretože pri vyberaní potrebnej odhadnutej strednej hodnoty by dochádzalo k zlyhaniu, keďže nemožno volať $E[0, i]$ ani počítať odchody áut pre zelenú, ktorá nikdy nesvieti, došlo by k trvalému nahromadeniu áut v danom smere. Z počítania odhadu minimalizovanej funkcie $E[x_1, 1] + E[(x_1 + x_2 + x_5), 2] + E[x_1, 3] + E[(x_1 + x_2 + x_5), 4] + E[x_3, 5] + E[(x_2 + x_3 + x_4), 6] + E[x_3, 7] + E[(x_2 + x_3 + x_4), 8] + E[x_4, 9] + E[x_4, 10] + E[x_5, 11] + E[x_5, 12]$ však vieme, že nikdy nevoláme iba $E[x_2, i]$. Dĺžka svietenia zelenej x_2 môže

byť aj nula, keďže nenastáva nikdy len svietenie zelenej po dobu x_2 , ale vždy dochádza k zlučovaniu dvoch zelených (jednou z nich je práve doba x_2) do jednej dlhšej zelenej.

V nasledujúcej Tabuľke 16 uvádzame výsledky, ktoré možno porovnať s numerickými výsledkami $x_1 = 17,84$ s; $x_2 = 0,00$ s; $x_3 = 16,77$ s; $x_4 = 14,89$ s, a teda $x_5 = T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 10,50$ s. Vidíme, že naše očakávania sa naplnili a pre druhú fázu sme dostali vždy nulu.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
16	0	17	15	12
18	0	13	18	11
16	0	16	16	12

Tabuľka 16: Výsledky simulácií pre 1. typ optimalizácie križovatky IV. pre x_2 od 0

V nasledujúcej Tabuľke 17 uvádzame výsledky pre druhý typ optimalizácie, ktoré možno porovnať s numerickými výsledkami $x_1 = 20,91$ s; $x_2 = 0,00$ s; $x_3 = 18,15$ s; $x_4 = 14,81$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 6,13$ s. Znovu sa naše očakávania naplnili a pre druhú fázu sme dostali vždy nulu.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
20	0	17	15	8
24	0	14	20	2
16	0	17	17	10

Tabuľka 17: Výsledky simulácií pre 2. typ optimalizácie križovatky IV. pre x_2 od 0

Nakoniec Tabuľke 18 uvádzame výsledky pre tretí typ optimalizácie, ktoré možno porovnať s numerickými výsledkami $x_1 = 16,31$ s; $x_2 = 0,00$ s; $x_3 = 16,31$ s; $x_4 = 14,40$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 12,98$ s. Podľa predpokladu sme pre druhú fázu dostali vždy nulu.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
16	0	16	15	13
16	0	16	15	13
16	0	16	15	13

Tabuľka 18: Výsledky simulácií pre 3. typ optimalizácie križovatky IV. pre x_2 od 0

3.5 Križovatka V.

V simulácii križovatky V. postupujeme rovnako ako v prípade križovatky III., jediný rozdiel nastáva pri počítaní súčtu odhadov stredných hodnôt vo volaní políčok matice E, resp. F, vzhľadom k Obr. 5. V tele vnorených for cyklov sčítame príslušné odhadnuté stredné hodnoty v zmysle posúvania intervalov svietenia zeleného svetla do začiatku cyklu so zachovaním dĺžky svietenia a Obr. 5, konkrétne pre prvý typ optimalizácie $E[x_1, 1] + E[(x_1 + x_4), 2] + E[x_2, 3] + E[(x_1 + x_2), 4] + E[x_3, 5] + E[(x_2 + x_3), 6] + E[x_4, 7] + E[(x_3 + x_4), 8]$. Ako pri križovatke IV. aj teraz nastáva prípad, kedy pre niektoré smery (konkrétne smery odbočujúce doprava) svieti zelená viac než raz. V skutočnosti je to však jedna dlhšia zelená, keďže dané fázy svietenia zelených nasledujú za sebou. Keď sa jedná o prvú a poslednú fázu cyklu, možno nadviazať poslednú fázu na prvú fázu ďalšieho cyklu a tak ako doteraz posunúť do začiatku cyklu. Podobne pre ostatné typy optimalizácie.

Numerické výsledky v prípade prvého typu optimalizácie pre križovatku V. $x_1 = 17,36$ s; $x_2 = 14,09$ s; $x_3 = 21,90$ s, a teda $x_4 = T - x_1 - x_2 - x_3 = 6,65$ s porovnáme s Monte Carlo výsledkami pre rôzne nastavenia generátora náhodných čísel:

x_1	x_2	x_3	x_4
18	14	19	9
18	13	23	6
16	15	23	6

Tabuľka 19: Výsledky simulácií pre 1. typ optimalizácie križovatky V.

Numerické výsledky v prípade druhého typu optimalizácie pre križovatku V. $x_1 = 19,25$ s; $x_2 = 12,96$ s; $x_3 = 25,61$ s, a teda $x_4 = T - x_1 - x_2 - x_3 = 2,18$ s porovnáme s experimentálnymi výsledkami:

x_1	x_2	x_3	x_4
18	14	24	4
19	13	24	4
19	11	27	3

Tabuľka 20: Výsledky simulácií pre 2. typ optimalizácie križovatky V.

Pre tretí typ optimalizácie pre križovatku V. s numerickými výsledkami $x_1 = 17,36$ s; $x_2 = 15,75$ s; $x_3 = 17,35$ s, a teda $x_4 = T - x_1 - x_2 - x_3 = 9,54$ s sme dospeli k výsledkom simulácií:

x_1	x_2	x_3	x_4
18	16	17	9
18	16	17	9
17	16	17	10

Tabuľka 21: Výsledky simulácií pre 3. typ optimalizácie križovatky V.

Pozorujeme, že numerické výsledky sú po zaokrúhlení veľmi podobné až rovnaké experimentálnym. Pre zaujímavosť a porovnanie uvádzame v nasledujúcej Tabuľke 22 pre všetky typy optimalizácie výsledky simulácií, kedy uvažujeme aj priemernú dobu vybavenia auta d :

1.typ	x_1	x_2	x_3	x_4
	19	13	21	7
	17	13	23	7
	17	13	22	8
2.typ	x_1	x_2	x_3	x_4
	19	13	21	7
	18	11	25	6
	16	11	27	6
3.typ	x_1	x_2	x_3	x_4
	18	16	17	9
	18	16	18	8
	17	16	18	9

Tabuľka 22: Výsledky simulácií križovatky V. s priemernou dobou vybavenia auta d

3.6 Križovatka VI.

V simulácii križovatky VI. postupujeme ako doteraz pri generovaní časov príchodov, zostavovaní funkcie pre počítanie časov odchodov áut, funkcie pre odhad stredných hodnôt pre všetky typy optimalizácie, zisťovaní

hodnôt matíc E, F . V tomto prípade ostáva 12 smerov ako v prípade križovatky IV. a zároveň dochádza k zvýšeniu počtu fáz, teda zvýši sa počet vnorených for cyklov o jeden narozdiel od križovatky IV.

V križovatke VI. nás zaujíma nastavenie šiestich svietení zelenej, keďže daná križovatka má šesť fáz. Pre tento prípad uvažujeme päť vnorených for cyklov, prvý pre dobu trvania prvej zelenej x_1 idúci od 1 po 55 krokom 1, druhý pre dobu trvania druhej zelenej x_2 idúci od 1 po $56 - x_1$ krokom 1, tretí pre dobu trvania tretej zelenej x_3 idúci od 1 po $57 - x_1 - x_2$ krokom 1, štvrtý pre dobu trvania štvrtej zelenej x_4 idúci od 1 po $58 - x_1 - x_2 - x_3$ krokom 1, piaty pre dobu trvania piatej zelenej x_5 idúci od 1 po $59 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$ krokom 1 a dobu trvania poslednej zelenej vypočítame ako doplnok do dĺžky periódy, teda $x_6 = 60 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$.

V tele vnorených for cyklov sčítame príslušné odhadnuté stredné hodnoty v zmysle Obr. 6 a posúvania intervalov svietenia zeleného svetla do začiatku cyklu so zachovaním dĺžky svietenia, konkrétne pre prvý typ optimalizácie $E[(T - x_2), 1] + E[(T - x_4), 1] + E[(T - x_6), 1] + E[(T - x_2), 2] + E[(T - x_4), 2] + E[(T - x_2), 3] + E[(T - x_4), 3] + E[(T - x_6), 3] + E[(T - x_2), 4] + E[(T - x_4), 4] + E[x_2, 5] + E[x_2, 6] + E[x_4, 7] + E[(T - x_3), 8] + E[(x_2 + x_3 + x_4), 8] + E[x_4, 9] + E[(T - x_3), 10] + E[(x_2 + x_3 + x_4), 10] + E[x_6, 11] + E[x_6, 12]$. Nastáva tu prvýkrát prípad, kedy pre niektoré smery svieti zelená viac než raz a nevieme ju chápať ako jednu dlhšiu zelenú, keďže dané fázy svietenia zelených nenasledujú vždy za sebou. Tento prípad riešime tak, že berieme jednotlivé prípady doby svietenia červenej osobitne a posúvame interval ako doteraz do nuly. Takisto keď sa jedná o prvú a poslednú fázu cyklu, možno nadviazať poslednú fázu na prvú fázu ďalšieho cyklu a posunúť do začiatku cyklu. Podobne ako doteraz zostavíme aj odhad optimalizovanej funkcie aj pre ostatné typy optimalizácie.

Numerické výsledky v prípade prvého typu optimalizácie pre križovatku VI. $x_1 = 0,93$ s; $x_2 = 21,62$ s; $x_3 = 1,16$ s; $x_4 = 18,08$ s; $x_5 = 0,97$ s, a teda $x_6 = T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 17,24$ s porovnáme s Monte Carlo výsledkami pre rôzne nastavenia generátora uvedenými v Tabuľke 23.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	21	1	19	1	17
1	21	1	19	1	17
1	20	1	20	1	17

Tabuľka 23: Výsledky simulácií pre 1. typ optimalizácie križovatky VI.

Numerické výsledky v prípade druhého typu optimalizácie pre križovatku VI. $x_1 = 0,90$ s; $x_2 = 22,43$ s; $x_3 = 1,20$ s; $x_4 = 17,70$ s; $x_5 = 0,95$ s, a teda $x_6 = T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 16,82$ s porovnáme s experimentálnymi výsledkami:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	24	1	17	1	16
1	23	1	17	1	17
1	23	1	17	1	17

Tabuľka 24: Výsledky simulácií pre 2. typ optimalizácie križovatky VI.

Numerické výsledky v prípade tretieho typu optimalizácie pre križovatku VI. $x_1 = 0,91$ s; $x_2 = 21,45$ s; $x_3 = 1,15$ s; $x_4 = 18,59$ s; $x_5 = 1,00$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 16,90$ s porovnáme s experimentálnymi výsledkami:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	22	1	18	1	17
1	21	1	19	1	17
1	21	1	19	1	17

Tabuľka 25: Výsledky simulácií pre 3. typ optimalizácie križovatky VI.

Numerické výsledky v prípade prvého typu optimalizácie pre križovatku VI. pre zmenené parametre λ $x_1 = 2,83$ s; $x_2 = 14,08$ s; $x_3 = 16,88$ s; $x_4 = 12,16$ s; $x_5 = 2,83$ s, a teda $T - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 11,22$ s porovnáme s Monte Carlo výsledkami pre rôzne nastavenia generátora uvedenými v Tabuľke 26.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	14	17	12	6	10
1	14	17	11	6	11
1	14	17	12	5	11

Tabuľka 26: Výsledky simulácií pre 1. typ optimalizácie križovatky VI. pre zmenu λ

Zisťujeme, že numerické výsledky sú po zaokrúhlení veľmi podobné až rovnaké experimentálnym. V dôsledku časovej náročnosti a zložitosti simulácie v poslednom type križovatky nepočítame výsledky s priemernou dobou vybavenia jedného auta. V prípade, že uvažujeme aj priemernú dobu vybavenia auta, nemôžeme brať jednotlivé doby svietenia červenej nezávisle, následne ich posúvať do nuly a osobitne počítat' odhady stredných hodnôt celkových zdržaní pri ich svietení. Pri uvažovaní priemernej doby vybavenia auta totiž záleží nielen na trvaní svietenia zeleného či červeného svetla, ale aj na jeho umiestnení vzhľadom na ďalšiu zelenú.

Záver

Hlavným cieľom práce bolo numericky a experimentálne pomocou Monte Carlo simulácií zistiť optimálne nastavenie dôb svietenia zelených svetiel na križovatke za účelom minimalizácie času stráveného autami na križovatke čakaním na červenej a zároveň eliminácie nevyužitého svietenia zeleného svetla na semafore. Najskôr sme uviedli pravdepodobnostný model svetelenej križovatky z matematického hľadiska, predstavili rôzne zjednodušené typy križovatiek a nakoniec zostavili simulačný model zodpovedajúci matematickému modelu.

Venovali sme sa trom druhom optimalizačných problémov. Snažili sme sa nájsť optimálne trvanie doby svietenia zeleného svetla na semafore tak, aby súčet stredných dôb čakania áut na zasvietenie zeleného svetla na semafore bol minimálny, súčet stredných dôb čakania áut na zasvietenie zeleného svetla na semafore a stredných dôb nevyužitého svietenia zeleného svetla na semafore bol minimálny alebo maximálna hodnota zo stredných dôb čakania áut na zasvietenie zeleného svetla na semafore a stredných dôb nevyužitého svietenia zeleného svetla na semafore bola minimálna. Pre dobu svietenia zeleného svetla na semafore sme stanovili podmienky tak, aby sme zabránili hromadeniu áut na križovatke.

Pri kontrole správnosti simulačných i numerických výsledkov sme si všimli hlavne zachovanie poradia dĺžok svietenia zelenej jednotlivých fáz vzhľadom k parametrom intenzity toku áut v jednotlivých smeroch. Znamená to, že pre smer s najvyššou intenzitou toku áut svieti zelená najdlhšie a tak ďalej až po smer s najnižšou intenzitou príchodu áut, ktorému svieti zelená najkratšie.

Ďalej sme si všimli, že v prípade tretieho typu optimalizácie preukazujú doterajšie výsledky pre rôzne typy križovatiek vzájomne vyrovnanjšie hodnoty. Dôvodom tohto faktu bude práve spôsob optimalizácie, kedy minimalizujeme maximum stredných hodnôt. Možným vysvetlením by mohlo byť, že snahou minimalizovať maximum zo stredných hodnôt dochádza k rovnomernejšiemu vyrovnaniu týchto hodnôt a teda aj doby trvania svietenia optimálnych zelených sú navzájom vyrovnanjšie.

Numerické výsledky sme porovnali s výsledkami simulácii a vždy sme dospeli k veľmi podobným až zhodným výsledkom. Zostavený simulačný model sa ukázal ako vhodný a možno ho ďalej využívať a vylepšovať pre zložitejšie typy križovatiek. Napríklad neskôr sme brali do úvahy aj fakt, že každému autu trvá nejaký čas opustenie križovatky po zasvietení zeleného svetla a pripočítavame tak priemernú dobu vybavenia auta. V práci zvažujeme len konštantnú priemernú dobu vybavenia auta. Ďalej

by sme však mohli model rozšíriť o nekonštantnú priemernú dobu vybavenia jedného auta, napríklad mohli by sme uvažovať postupné zrýchľovanie pri rozbiehaní auta, oneskorené reakcie na pohnutie predchádzajúceho auta a počítat' spomínanú priemernú dobu vybavenia auta zložitejšími spôsobmi zohľadnujúc napríklad poradie auta v rade čakajúcim na zsvietenie zeleného svetla.

Ďalším možným využitím, ktoré už z časových a rozsahových dôvodov nerozoberáme, by mohlo byť napríklad zistenie, ktorý typ križovatky v nejakej danej situácii zostaviť. Ak by sme si označili všetkých 12 smerov rovnako v križovatkách IV., V., VI., napríklad v smere hodinových ručičiek od 1 po 12, potom pre konkrétne parametre intenzity toku áut λ_1 až λ_{12} by sme zisťovali na základe hodnoty nadobudnutého minima pre križovatky IV., V., VI., pre ktorú z križovatiek je hodnota nadobudnutého minima najmenšia a zvolili by sme práve ten typ križovatky pre takto zadané parametre λ .

Zoznam použitej literatúry

- [1] ČERNÝ, J., KLUVÁNEK, P. (1991). *Základy matematickej teórie dopravy*. Veda SAV, Bratislava.
- [2] ČÍŽEK, P., HRDLE, W., WERON, R. (2005). *Statistical Tools for Finance and Insurance*. Springer, Berlin.
- [3] KAUCKY, J. (1975). *Kombinatorické identity*. Veda SAV, Bratislava.
- [4] R Development Core Team (2008). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna. URL <http://www.R-project.org>.
- [5] S original by Berwin A. Turlach R port by Andreas Weingessel Andreas.Weingessel@ci.tuwien.ac.at (2007). *quadprog: Functions to solve Quadratic Programming Problems*. R package version 1.4-11.
- [6] STROOCK, D. W. (2005). *An Introduction to Markov Processes*. Springer, Berlin.