

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE



DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bratislava 2011

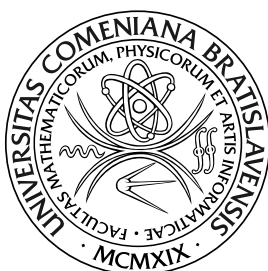
Maroš Komadel

Analýza horných a dolných odhadov na oceňovanie ázijských typov košíkových opcií

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Maroš Komadel

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



9.1.9 Aplikovaná matematika

Ekonomická a finančná matematika

Vedúci diplomovej práce: Prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Bratislava 2011

5525c4ee-27dc-460b-a57c-a2dbccb7e4e4



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Maroš Komadel
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Analýza horných a dolných odhadov na oceňovanie ázijských typov košíkových opcií

Cieľ : Cieľom práce je analyzovať a zovšeobecniť odhady na cenu ázijských typov košíkových opcií metódou aproximácie riešenia pomocou komonotónnych funkcií.

Vedúci : prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.

Dátum zadania: 11.02.2010

Dátum schválenia: 05.04.2011

.....
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som prácu vypracoval samostatne s využitím svojich poznatkov, konzultácií a s použitím uvedenej literatúry.

.....

Maroš Komadel

PodĎakovanie

Chcem sa poĎakovať vedúcemu diplomovej práce Prof. RNDr. Danielovi Ševčovičovi, CSc. za jeho odborné vedenie, pripomienky, návrhy a za množstvo času a trpezlivosti, ktoré mi venoval pri vypracovávaní diplomovej práce.

Abstrakt

V diplomovej práci sa venujeme najmä ázijským košíkovým opciám. Výhodou týchto opcií je eliminácia špekulácií s cenou podkladového aktíva so strany vypisovateľa v čase splatnosti opcie. Presný analytický vzorec bohužiaľ nepoznáme a v tejto práci sa venujeme predovšetkým komonotónnym hraniciam vymedzujúcim interval, v ktorom sa cena opcie nachádza. Odvodíme hornú hranicu pre ázijskú košíkovú opciu so spojitým priemerovaním v čase. Výsledky graficky zobrazíme a pozorujeme ako sa menia hodnoty tejto hranice pri zmene vstupných parametrov. Spomenieme taktiež ako možno oceniť ázijskú košíkovú opciu metódou Monte Carlo.

Kľúčové slová: ázijské košíkové opcie, komonotónne hranice, stop-loss prémia, konvexné usporiadanie.

Abstract

In this master thesis, we will look particularly on Asian basket options. The advantage of these options is the elimination of issuer's speculation with the price of underlying assets at the time of option's maturity. Unfortunately, we do not know the exact analytic formula and in this thesis we pay attention mainly to comonotonic boundaries defining the interval in which the option price is. We derive an upper boundary for the Asian basket option with continuous time averaging. We graphically display the results and see how is the value of this boundary changing with changing input parameters. We also mention how to evaluate the Asian basket option by Monte Carlo method.

Key words: Asian basket options, comonotonic boundaries, stop-loss premium, convex order.

Obsah

Úvod	6
1 Vlastnosti opcí	8
1.1 Opcia a niektoré typy opcí	8
1.2 Cena opcie	10
1.3 Ázijské opcie	12
1.4 Košíkové opcie	14
1.5 Ázijské košíkové opcie	15
1.6 Metóda Monte Carlo	18
2 Komonotónne hranice - teoretické základy	19
2.1 Stop-loss a konvexné usporiadanie	19
2.2 Komonotónnosť	24
2.3 Súčet komonotónnych náhodných veličín	28
2.4 Súčet náhodných premenných s lognormálnym rozdelením	35
2.5 Dolná hranica založená na podmienenosti	39
3 Komonotónne hranice pre Ázijské košíkové opcie s dividendami	42
3.1 Horná hranica pre Ázijské košíkové opcie s dividendami	42
3.2 Dolná hranica pre Ázijské košíkové opcie s dividendami	47
3.3 Modifikácia na ľubovoľnú diskretizáciu	52
3.4 Horná hranica so spojitým časovým priemerovaním	54
3.5 Numerické výsledky a grafické zobrazenie	60

3.5.1	Vstupné parametre	60
3.5.2	Závislosť hornej hranice od realizačnej ceny	63
3.5.3	Závislosť hornej hranice od doby expirácie	65
3.5.4	Závislosť hornej hranice od úrokovej miery	67
3.5.5	Závislosť hornej hranice od dividendovej miery	69
3.5.6	Závislosť hornej hranice od volatility	71
3.5.7	Numerické hodnoty pre dolnú hranicu s diskretným priemerovaním a dividendami	73
Záver		74
Literatúra		75
4 Príloha		77
4.1	Zdrojový kód	77
4.1.1	Horná hranica so spojitým priemerovaním	77
4.1.2	Metóda Monte Carlo pre výpočet ázijskej košíkovej opcie . . .	81
4.2	Dolná hranica so spojitým časovým priemerovaním	84

Úvod

Nestabilný charakter finančných trhov podnietil vznik mnohých finančných inštrumentov, ktorými sa snažíme znížiť riziko investícií. Spomedzi týchto finančných nástrojov sú hlavným objektom nášho záujmu ázijské košíkové opcie. Tieto opcie vznikli najmä preto, aby sme sa vyhli problému bežnému pre európske opcie, a to manipulácii ceny podkladového aktíva v blízkosti dátumu maturity.

Napriek tomu, že s týmito opciami sa bežne obchoduje, na ich ocenenie neexistuje na rozdiel od európskych opcií žiaden jednoduchý analytický vzorec. Existuje však niekoľko spôsobov ako Ázijskú košíkovú opciu oceniť. Jednou z týchto metód je napríklad metóda Monte Carlo. Táto metóda je vcelku jednoduchá, spoľahlivá, avšak náročná na výpočtový čas. V tejto práci sa budeme zaoberať zväčša hranicami pre cenu takejto opcie. Tieto hranice určujú síce len interval, v ktorom sa cena opcie nachádza, zato sú však nenáročné na výpočtový čas.

V prvej kapitole sa venujeme popisu opcie a jej základným vlastnostiam. Spravíme si krátky prehľad rôznych typov opcií a popíšeme v krátkosti Black-Scholesov rámec na oceňovanie opcií. Na záver tejto kapitoly si v stručnosti vysvetlíme princíp metódy Monte Carlo na výpočet hodnoty opčnej prémie.

V ďalšej kapitole si postupne prejdeme teoretickými poznatkami potrebnými pre odvodenie hornej a dolnej komonotónnej hranice pre cenu ázijskej košíkovej opcie. Definujeme konvexné usporiadanie, komonotónnosť, pozrieme sa na vlastnosti súčtu komonotónnych náhodných premenných a podobne.

V poslednej kapitole odvodíme dolnú a hornú hranicu pre hodnotu ázijskej košíkovej opcie európskeho typu tak ako v článku [3], uvažujeme však navyše, že akcie v pozícii

podkladových aktív vyplácajú dividendy. Tento vzorec zovšeobecníme pre ľubovoľné časové priemerovanie. Zo vzťahu pre hornú hranicu s diskretným priemerovaním odvodíme limitným prechodom vzorec pre hornú hranicu so spojitým časovým priemerovaním. Nakoniec sa pozrieme na grafické porovnanie hornej hranice pre cenu ázijskej košíkovej opcie so spojitým priemerovaním a ceny opcie s hustým diskretným časovým priemerovaním vypočítanej metódou Monte Carlo.

Kapitola 1

Vlastnosti opcií

1.1 Opcia a niektoré typy opcií

Najjednoduchším a najpoužívanejším druhom opcií sú takzvané vanilla opcie. Európsky typ vanilla opcie je kontrakt, pri ktorom má jeho vlastník právo, nie povinnosť, kúpiť, resp. predať podkladové aktívum vo vopred stanovenom čase za vopred dohodnutú cenu. Stanovený čas nazývame dátum splatnosti alebo dátum expirácie. Dohodnutú cenu nazývame realizačnou cenou. S týmito označeniami sa môžeme stretnúť aj v [1]. V prípade práva na kúpu podkladového aktíva ide o kúpnu opciu (call option), v prípade práva na predaj podkladového aktíva ide o predajnú opciu (put option). Podkladovými aktívami, na ktoré sa opcie vypisujú, môžu byť akcie, úrokové miery, dlhopisy, menové páry, futurity, opcie ale aj počasie. My, v tejto práci, budeme uvažovať ako podkladové aktívum práve akcie.

Podľa toho kedy môžeme opciu uplatniť, čiže kúpiť alebo predať podkladové aktívum, poznáme dva typy opcií. Opcie európskeho typu môžeme zrealizovať len v dátume splatnosti. Opcie amerického typu môžeme uplatniť kedykoľvek pred ich expiráciou. Americká opcia poskytuje viac možností ako európska opcia, z čoho je zrejmé, že americká opcia má v priebehu životnosti opcie rovnakú alebo väčšiu hodnotu ako európska opcia.

Pozrime sa ešte na niektoré typy opcií, ktoré patria do kategórie takzvaných

exotických finančných derivátov. Bližšie sa s nimi môžeme zoznámiť napríklad v [1, 2].

Binárna opcia predstavuje veľmi jednoduchý druh exotickej opcie. Táto opcia vypláca v čase splatnosti 1, ak sa hodnota podkladového aktíva nachádza vo vopred stanovenom intervale a 0, ak sa v danom intervale nenachádza.

Ak je podkladovým aktívom opcie opcia, hovoríme o zloženej opcii. Kombinovaním call a put opcií dostávame až 4 typy zložených opcií.

Košíkovou opciou označujeme opciu, ktorá sa vzťahuje súčasne na viacero podkladových aktív - na košík aktív.

Ďalšou skupinou opcií v rámci exotických derivátov sú opcie závislé od vývoja ceny podkladového aktíva. Ako už názov napovedá, výplata týchto opcií nezávisí len od hodnoty opcie v čase splatnosti, ale závisí taktiež od pohybu hodnoty podkladového aktíva počas celej životnosti opcie alebo určitého obdobia životnosti opcie.

Azda najjednoduchším typom opcií z tejto skupiny sú bariérové opcie. Sú to vlastne klasické kúpne alebo predajné opcie, avšak ak cena podkladového aktíva dosiahne počas životnosti opcie vopred stanovenú bariéru, opcia stráca platnosť a držiteľ opcie dostane od vypisovateľa vopred dohodnutý rabat.

Ďalším príkladom derivátov závislých od vývoja ceny podkladového aktíva sú lookback opcie. Ich cena závisí od minimálnej alebo maximálnej hodnoty podkladového aktíva počas životnosti opcie.

Ázijské opcie sú kontrakty, ktoré závisia nielen od aktuálnej ceny aktíva, ale aj od vývoja ceny podkladového aktíva, na ktorú je táto opcia vypísaná. Konkrétne výplata týchto opcií závisí od priemeru ceny aktíva počas určitej doby životnosti opcie.

1.2 Cena opcie

Opcia nemá obligatórny charakter a jej držiteľ má právo, nie povinnosť, opciu uplatniť. Toto právo nám prináša výhodu oproti tým, ktorí toto právo nemajú a preto je zrejmé, že toto právo má nejakú cenu. Táto cena sa musí zaplatiť na začiatku pri vypisovaní opcie. Táto cena, ktorú držiteľ opcie platí jej vypisovateľovi sa nazýva opčná prémia. Základnou úlohou oceňovania opcií je určiť hodnotu opčnej premie tak, aby nedošlo k znevýhodneniu vypisovateľa ani držiteľa opcie. Problémom oceňovania opcií sa zaoberá mnoho publikácií. Pozrime sa teraz spolu na najznámejší model, používaný pri oceňovaní finančných derivátov - Black-Scholesov model, s ktorým sa môžeme podrobnejšie zoznámiť napríklad v [1] alebo v [2].

Základnú úlohu v tomto modeli zohráva modelovanie stochasticky sa vyvíjajúcich aktív za pomoci Wienerovho procesu a jeho zovšeobecnenia - Brownovho pohybu. Wienerov proces je vlastne Brownov pohyb s parametrami $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$. Tento model opisuje vývoj ceny opcie v čase ako funkciu ceny podkladového aktíva a času zostávajúceho do expirácie. Pri odvádzaní Black-Scholesovej rovnice sa navyše vychádza z rôznych predpokladov ako nemožnosť arbitrážnej príležitosti na trhu, existencia bezrizikovej úrokovej miery, nemennosť volatility výnosu aktíva v čase, možnosť kúpiť alebo predáť ľubovoľné množstvo podkladového aktíva, zanedbanie transakčných nákladov a akcie nevyplácajúce dividendy.

Samotná Black-Scholesova rovnica má tvar:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (1.1)$$

kde $S > 0$ je súčasná cena podkladového aktíva v čase $t \in [0, T]$,

$V = V(S, t)$ je hodnota opcie,

$T > 0$ je expiračná doba - čas do dátumu splatnosti opcie,

$\sigma > 0$ je volatilita podkladového aktíva,

a $r > 0$ je spojitá miera úročenia bezrizikových dlhopisov.

Túto rovnicu by mali spĺňať všetky deriváty akcií. Na to, aby sme špecifikovali o aký typ derivátu sa jedná, je treba k samotnej Black-Scholesovej rovnici pridať ešte

terminálovú podmienku - hodnotu funkcie $V(S, t)$ v expiračnom čase T .

Terminálová výplatná (*pay - off*) podmienka pre európsku kúpnu opciu je:

$$V(S, T) = \max(S - K, 0).$$

Terminálová výplatná (*pay - off*) podmienka pre európsku predajnú opciu je:

$$V(S, T) = \max(K - S, 0).$$

Riešením Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice s jednou s daných terminálových podmienok dostaneme hodnotu príslušnej opcie. Táto rovnica má tvar parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice a transformáciami sa dá previesť na základný tvar parabolickej parciálnej diferenciálnej rovnice, rovnice vedenia tepla, ktorej riešenie v tvare Greenovej funkcie poznáme z teórie parciálnych diferenciálnych rovníc.

Riešením Black-Scholesovej parciálnej diferenciálnej rovnice s koncovou podmienkou $V(S, T) = \max(S - K, 0)$ získame hodnotu európskej kúpnej opcie:

$$V(S, t) = S\phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\phi(d_2), \quad (1.2)$$

kde $\phi(d)$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia:

$$\phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

a pre d_1, d_2 platí:

$$d_1 = \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \ln \frac{S}{K}}{\sigma\sqrt{T - t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}.$$

Predmetom bádania našej práce budú najmä ázijské košíkové opcie. Keďže tieto opcie sú akousi kombináciou ázijských a košíkových opcií, pozrieme sa najskôr zvlášť na ázijské a zvlášť na košíkové opcie. Podrobnejšiemu popisu týchto opcií sa venovali autori napríklad v [1, 2].

1.3 Ázijské opcie

Ázijské opcie sú opcie, ktorých výplatná funkcia závisí od priemeru hodnôt podkladového aktíva, na ktorú je opcia vypísaná, v rôznych časových okamihoch. Jedná sa teda o špeciálny prípad opcií, závislých na historickom vývoji ceny podkladového aktíva, takzvaných path-dependent opcií. Ich pay-off diagram teda nezávisí len od hodnoty aktíva v čase expirácie, ale aj od jeho vývoja v čase pred expiráciou. Ázijské opcie sú veľmi užitočným finančným nástrojom a používajú sa pri obchodovaní s menami alebo komoditami ako ropa a energie. Priemerovanie má vo všeobecnosti za následok znižovanie variance a teda spôsobuje nižšiu cenu opcie. Zaisťovanie prostredníctvom ázijských opcií je teda vo všeobecnosti lacnejšie ako konštrukcia portfólia obyčajných opcií s rôznymi dátumami splatnosti. Dôležitou výhodou ázijských opcií oproti vanilla opciám je, že ich cena nie je natoľko závislá od okamžitej hodnoty aktíva, keďže závisí od priemeru hodnôt za dané obdobie. Takto sa znižuje riziko plynúce z okamžitých výkyvov ceny aktíva v blízkosti doby expirácie. Tieto výkyvy bývajú často spôsobené manipuláciou ceny aktíva vypisovateľmi opcií. Ázijské opcie boli prvý krát použité v roku 1987 v Tokiu na ocenenie ropných kontraktov a z tejto geografickej lokácie pramení ich názov. Ázijské opcie môžeme klasifikovať z hľadiska viacerých faktorov.

Ázijské opcie klasifikujeme napríklad podľa typu spriemerovania cien podkladového aktíva. Rozoznávame v podstate tri druhy priemerovania - aritmetické, geometrické a s pridelením váh so súčtom rovným jednej. Vyjadrenie spriemerovanej ceny aktíva A_t je rovné:

1. Pre diskretný prípad aritmetického priemerovania:

$$A_{t_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i}.$$

2. Pre diskretný prípad geometrického priemerovania:

$$\ln A_{t_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln S_{t_i}.$$

3. Pre diskretný prípad váženého priemerovania:

$$A_{t_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_{t_i} S_{t_i}, \quad \sum_{i=1}^n b_{t_i} = 1.$$

4. Pre spojitý prípad aritmetického priemerovania:

$$A_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau d\tau.$$

5. Pre spojitý prípad geometrického priemerovania:

$$\ln A_t = \frac{1}{t} \int_0^t \ln S_\tau d\tau.$$

Rozpoznávame taktiež dva spôsoby ako spriemerovaná hodnota vstupuje do pay - off diagramu opcie:

1. Spriemerovaná hodnota je v pozícii ceny podkladového aktíva. Takúto opciu nazývame average rate call (put) opcia. Terminálový výplatný diagram average rate call (put) opcie vyzerá nasledovne:

$$V^{arc}(S, A, T) = \max(A - K, 0); \quad \left(V^{arp}(S, A, T) = \max(K - A, 0) \right).$$

2. Spriemerovaná hodnota je v pozícii expiračnej ceny opcie. Takúto opciu nazývame average strike call (put) opcia. Terminálový výplatný diagram average strike call (put) opcie vyzerá nasledovne:

$$V^{arc}(S, A, T) = \max(S - A, 0); \quad \left(V^{arp}(S, A, T) = \max(A - S, 0) \right).$$

Cena ázijskej opcie sa dá určiť ako riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice pre ázijské opcie. Pre geometrické priemerovanie poznáme riešenie v tvare explicitného vzorca, avšak pre aritmetické priemerovanie explicitný vzorec zatiaľ neexistuje.

1.4 Košíkové opcie

Jednou zo značne rozšírených exotických opcií je košíková opcia, ktorej pay-off diagram závisí od hodnoty portfólia resp. košíka opcií. Košíková kúpna (predajná) opcia vypláca v dobe splatnosti:

$$V(S_1, S_2, \dots, S_n, T) = \max(S_1 + S_2 + \dots + S_n - K, 0),$$

$$\left(V(S_1, S_2, \dots, S_n, T) = \max(K - S_1 - S_2 - \dots - S_n, 0) \right),$$

kde K je dohodnutá expiračná cena.

Typickým podkladovým aktívom košíkových opcií je index - košík pozostávajúci z viacerých akcií. Konkrétnym príkladom košíka akcií je index SP500 do ktorého vstupuje až 500 akcií. Výhodou košíkovej opcie pri zaistovaní je, že je lacnejšia ako použitie príslušného portfólia vanilla opcií. Pre tieto opcie nepoznáme exaktný analytický vzorec, pretože nepoznáme distribučnú funkciu súčtu závislých náhodných premenných z lognormálneho rozdelenia. Pomocou viacrozmerného variantu Itôvej lemy vieme odvodiť PDR pre košíkové opcie, to však následne vedie k počítaniu vysokorozmerných integrálov.

1.5 Ázijské košíkové opcie

Ázijské košíkové opcie sú, ako už z ich názvu vyplýva, kombináciou ázijských opcií a košíkových opcií. Ázijská košíková opcia je opcia závislá od historického vývoja cien košíka podkladových aktív a jej pay-off diagram kombinuje pay-off štruktúru košíkovej opcie s ázijskou. Priemerovanie má za následok znižovanie variancie a preto sú tieto opcie zväčša lacnejšie ako príslušné portfólio vanilla opcií s rôznymi dobami splatnosti. Ázijské košíkové opcie sa využívajú najmä pri obchode s ropnými produktmi a energiami.

V tejto práci nás bude zaujímať ocenenie diskkrétne vážene priemerovaných ázijských košíkových average rate kúpnych opcií európskeho typu v Black-Scholesovom rozhraní tak, ako to môžeme vidieť v článku [3].

Uvažujeme košík s n aktívami, ktorých ceny $S_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, sú opísané pod rizikovo neutrálnou mierou Q a s bezrizikovou úrokovou mierou r stochastickými rovnicami:

$$dS_i(t) = rS_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dW_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ktorej riešeniami sú:

$$S_i(t) = S_i(0)e^{(r - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i W_i(t)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kde $\{W_i(t), t > 0\}$ je štandardný Brownov pohyb spojený s cenou aktíva i . Taktiež predpokladáme, že prírastky Brownovho pohybu vystupujúce vo vyjadrení cien aktív sú navzájom konštantne korelované:

$$\text{corr}(dW_i, dW_j) = \rho_{ij}dt.$$

Cena diskkrétne vážene priemerovanej ázijskej košíkovej average rate opcie európskeho typu s fixnou realizačnou cenou K , dobou splatnosti T , m dátumami priemerovania pred dátumom splatnosti, n podkladovými aktívami v čase $t = 0$ je daná vzťahom :

$$ABC(n, m, K, T) = e^{-rT} \mathbb{E}^Q \left[\left(\sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j S_l(T-j) - K \right)_+ \right], \quad (1.3)$$

kde a_i, b_j sú kladné koeficienty oba v súčte rovné jednej a $(x)_+ = \max(x, 0)$.

S pojmom rizikovo neutrálna miera sa vo finančníctve stretávame veľmi často. To-
muto pojmu sa venuje pozornosť napríklad v [4]. Rizikovo neutrálna miera je pravde-
podobnostná miera, pri ktorej je súčasná hodnota ľubovoľného finančného aktíva
rovná očakávanej budúcej výplate vyplývajúcej z držania daného aktíva, odiskonto-
vanej bezrizikovou úrokovou mierou.

Tak ako pri ostatných typoch opcií aj pri ázijských košíkových opciách nás najviac
zaujíma ich ocenenie, teda čo možno najpresnejšie určenie opčnej prémie vypísanej
opcie. V prípade aritmetického priemerovania, či priemerovania s pridelením váh
podobne ako v prípade ázijských opcií alebo košíkových opcií analytický vzorec
nepoznáme, keďže súčet lognormálne rozdelených náhodných premenných v arit-
metickom priemere nemá lognormálne rozdelenie.

Musíme preto pristúpiť k iným alternatívnym metódam oceňovania týchto opcií.
Jeden z týchto spôsobov je založený na myšlienke, že súčet lognormálnych náhod-
ných veličín má približne lognormálne rozdelenie. Uvažujeme teda, že súčet náhod-
ných premenných vyskytujúcich sa vo vzťahu (1.3) pre hodnotu ázijskej košíkovej
opcie má lognormálne rozdelenie a na základe prvých dvoch momentov odvodíme
jeho parametre. Potom už len jednoducho odvodíme vzorec podobne, ako v prípade
geometrického priemerovania.

Iný spôsob je založený na numerickom riešení parciálnej diferenciálnej rovnice pre
tieto opcie pomocou konečných diferencií. Túto metódu pre ázijské opcie môžeme
vidieť napríklad v článku [5].

Ďalšou numerickou metódou na oceňovanie ázijských košíkových opcií je metóda
Monte Carlo, ktorá nám umožňuje získať presné, spoľahlivé výsledky, avšak táto
metóda je náročná na výpočtový čas. Tejto metóde sa taktiež venuje viacero autorov
a možno si ju priblížiť napríklad v článku [6].

V neposlednom rade by bolo veľmi príhodné, keby bol k dispozícii presný an-
alytický a ľahko spočítateľný odhad, prípadne hranice pre cenu ázijskej košíkovej
opcie. Práve tieto hranice budú pre nás hlavným bodom záujmu v tejto práci. Prob-
lému odvodenia a aplikácie hraníc pre sumu náhodných premenných a opcií sa autori

venují například v článkoch [7, 8, 9].

1.6 Metóda Monte Carlo

Ako možno vidieť zo vzťahu (1.3), pri ohodnocovaní ázijských košíkových opcií sme postavení pred úlohu vypočítať ich cenu ako odiskontovanú strednú hodnotu súčtu náhodných premenných pri rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere. Nemáme však k dispozícii presný analytický vzorec na výpočet tejto hodnoty, preto sa ju snažíme čo najpresnejšie odhadnúť numericky. Jednou z numerických metód je metóda Monte Carlo. Myšlienka tejto metódy vychádza zo zákona veľkých čísiel, z ktorého vyplýva, že aritmetický priemer náhodného výberu konverguje podľa pravdepodobnosti k skutočnej strednej hodnote tohto rozdelenia. Postup pri metóde Monte Carlo si môžeme zhrnúť do nasledujúcich bodov:

1. Simulácia vývojovej cesty cien podkladových aktív.
2. Výpočet hodnoty ázijskej košíkovej opcie pre danú simuláciu.
3. Vyhodnotenie žiadaného počtu simulácií.
4. Výpočet odhadu hodnoty ázijskej košíkovej opcie pomocou aritmetického priemeru hodnôt v jednotlivých simuláciách.

Kapitola 2

Komonotónne hranice - teoretické základy

2.1 Stop-loss a konvexné usporiadanie

V tejto časti sa oboznámime s teoretickými základmi, ktoré nám pomôžu odvodiť odhady pre cenu ázijských košíkových opcí. Konkrétne sa budeme venovať hornej a dolnej komonotónnej hranici. Postupne si teda vysvetlíme základné pojmy a postupy, ktoré vedú k spomínaným hraniciam. Odvodu komonotónnych hraníc sa venujú viacerí autori napríklad v článkoch [7,8,9].

V poisťovníctve a finančníctve je častým bodom záujmu distribučná funkcia sumy náhodných premenných. Predpoklad vzájomnej nezávislosti medzi jednotlivými komponentmi je veľmi vhodný z hľadiska jednoduchosti počítania, ale tento predpoklad nie je občas príliš realistický. Preto budeme predpokladať, že jednotlivé komponenty sumy náhodných premenných nie sú nezávislé. Odvodenie hraníc pre $\mathbb{E}[(S - K)_+]$, kde S je práve suma náhodných premenných, ktoré nie sú navzájom nezávislé sa v jednotlivých článkoch odlišuje. My sa budeme inšpirovať najmä článkom [9].

Budeme predpokladať, že všetky náhodné premenné, s ktorými budeme pracovať

majú konečnú strednú hodnotu, čiže pre každú náhodnú premennú platí:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - F_X(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xF_X(x) = 0,$$

kde $F_X(x) = Pr[X \leq x]$ označuje distribučnú funkciu náhodnej premennej X .

Pre strednú hodnotu náhodnej premennej X platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^0 x dF_X(x) - \int_0^{\infty} x d(1 - F_X(x)) \\ &= \int_{-\infty}^0 -F_X(x) dx + \int_0^{\infty} (1 - F_X(x)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde $f(x)$ je funkcia hustoty náhodnej premennej X a v druhej rovnosti sme využili metódu per partes.

Prvým pojmom, ktorý si predstavíme je pojem stop-loss prémie. Stop-loss prémie so zadržaním (retention) d náhodnej premennej X je definovaná ako $\mathbb{E}[(X - d)_+]$, kde $(x - d)_+ = \max(x - d, 0)$. Využitím vzťahov (2.1) dostaneme pre stop-loss prémiiu:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - d)_+] &= \int_d^{\infty} (1 - F_X(x)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - d)_+ f(x) dx \\ &= \int_d^{\infty} (x - d) f(x) dx, \quad -\infty < d < \infty. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Definícia 2.1.1 *Uvažujme dve náhodné premenné X a Y . Hovoríme, že X predchádza Y v zmysle stop-loss usporiadania, značíme $X \leq_{sl} Y$, vtedy a len vtedy, keď X má menšiu stop-loss prémiiu ako Y :*

$$\mathbb{E}[(X - d)_+] \leq \mathbb{E}[(Y - d)_+], \quad -\infty < d < \infty.$$

Charakterizácia stop-loss usporiadania v zmysle funkcií užitočnosti je ekvivalentná s podmienkou $\mathbb{E}[v(X)] \leq \mathbb{E}[v(Y)]$ pre všetky neklesajúce konvexné funkcie v , pre ktoré existuje stredná hodnota. Preto sa stop-loss usporiadanie nazýva aj rastúce konvexné usporiadanie.

Ak pre dve náhodné premenné X a Y platí $X \leq_{sl} Y$, potom $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$. Ak chceme náhodnú premennú X nahradiť čo možno najpresnejšie náhodnou premennou Y tak, aby platilo stop-loss usporiadanie pre tieto náhodné premenné, potom ideálna situácia nastáva, keď $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$. To nás vedie k pojmu konvexného usporiadania, ktorý si teraz zbežne ozrejmíme. S pojmami konvexného a stop-loss usporiadania a ich interpretáciou sa môžeme zoznámiť podrobnejšie v článku [10].

Definícia 2.1.2 *Uvažujme dve náhodné premenné X a Y . Hovoríme, že X predchádza Y v zmysle konvexného usporiadania, označujeme $X \leq_{cx} Y$ vtedy a len vtedy, keď:*

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y], \quad \mathbb{E}[(X - d)_+] \leq \mathbb{E}[(Y - d)_+], \quad -\infty < d < \infty.$$

Dá sa ukázať, že $X \leq_{cx} Y$ vtedy a len vtedy, keď $\mathbb{E}[v(X)] \leq \mathbb{E}[v(Y)]$ pre všetky konvexné funkcie, pre ktoré existuje stredná hodnota. To vysvetľuje názov konvexné usporiadanie. Extrémne hodnoty sa s väčšou pravdepodobnosťou nadobúdajú pre Y ako pre X . Ak vezmeme za v funkciu $v(x) = x^2$, tak $X \leq_{cx} Y$ implikuje $\text{Var}[X] \leq \text{Var}[Y]$. Konvexné usporiadanie predstavuje v zmysle užitočnosti preferencie rizikovo averzných rozhodujúcich sa medzi náhodnými premennými s rovnakou strednou hodnotou.

Inverzná distribučná funkcia

Distribučná funkcia $F_X(x) = Pr[X \leq x]$ náhodnej premennej X je sprava spojitá neklesajúca funkcia spĺňajúca:

$$F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad F_X(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1.$$

Bežná definícia inverznej distribučnej funkcie je neklesajúca a zľava spojitá funkcia $F_X^{-1}(p)$ definovaná ako:

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in R | F_X(x) \geq p\}, \quad p \in [0, 1].$$

My budeme používať sofistikovanejšiu definíciu inverznej distribučnej funkcie tak ako napríklad autori v článku [9]. Pre ľubovoľné $p \in [0, 1]$ možná voľba inverzie funkcie F_X v bode p je ľubovoľný bod z uzavretého intervalu:

$$\left[\inf\{x \in R | F_X(x) \geq p\}, \sup\{x \in R | F_X(x) \leq p\} \right].$$

Treba ešte dodať, že podľa konvencie platí $\inf \emptyset = +\infty$, $\sup \emptyset = -\infty$.

Keď vezmeme ľavú hranicu tohto intervalu ako inverziu distribučnej funkcie v bode p , dostaneme klasickú inverznú distribučnú funkciu $F_X^{-1}(p)$. Podobne definujeme $F_X^{-1+}(p)$ ako pravú hranicu tohto intervalu:

$$F_X^{-1+}(p) = \sup\{x \in R | F_X(x) \leq p\}, \quad p \in [0, 1].$$

Táto funkcia je sprava spojitá a neklesajúca.

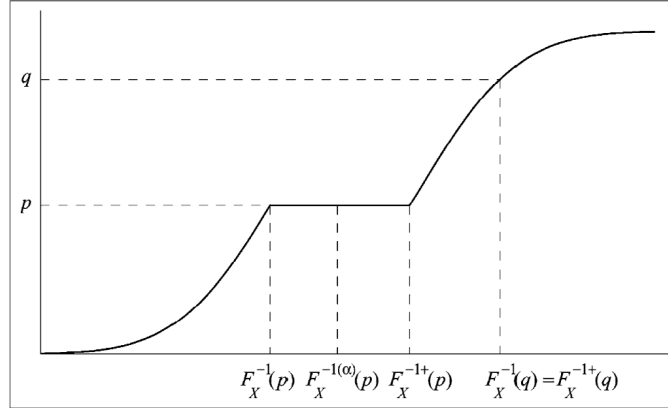
Poznamenanajme, že $F_X^{-1}(0) = -\infty$, $F_X^{-1+}(1) = \infty$ a celý pravdepodobnostný objem náhodnej premennej X leží v intervale $[F_X^{-1+}(0), F_X^{-1}(1)]$.

Pre ľubovoľné $\alpha \in [0, 1]$ definujeme α -kombinovanú inverznú funkciu funkcie F_X nasledovne:

$$F_X^{-1(\alpha)}(p) = \alpha F_X^{-1}(p) + (1 - \alpha) F_X^{-1+}(p), \quad p \in [0, 1].$$

S predchádzajúcimi pojmi inverznej funkcie sa môžeme lepšie oboznámiť na nasledujúcom obrázku, ktorý pochádza z článku [9]. Na tomto príklade možno vidieť ľavý bod intervalu $F_X^{-1}(p)$, predstavujúci klasickú distribučnú funkciu, bod $F_X^{-1(\alpha)}(p)$,

predstavujúci ľubovoľný bod zo spomínaného intervalu a nakoniec i pravý bod $F_X^{-1+}(p)$ daného intervalu. Taktiež si možno všimnúť, že v prípade, že distribučná funkcia je rýdzo-rastúca v bode q , potom $F_X^{-1}(q) = F_X^{-1+}(q)$.



Obr. 2.1: Grafická definícia $F_X^{-1}(p)$, $F_X^{-1(\alpha)}(p)$ a $F_X^{-1+}(p)$.

Uvažujme d také, že $0 \leq F_X(d) \leq 1$. Potom $F_X^{-1}(F_X(d))$ a $F_X^{-1+}(F_X(d))$ sú konečné a $F_X^{-1}(F_X(d)) \leq d \leq F_X^{-1+}(F_X(d))$. Takže pre nejakú hodnotu $\alpha_d \in [0, 1]$ môže byť d vyjadrené ako:

$$d = \alpha_d F_X^{-1}(F_X(d)) + (1 - \alpha_d) F_X^{-1+}(F_X(d)) = F_X^{-1(\alpha_d)}(F_X(d)).$$

Teda pre ľubovoľnú náhodnú premennú X a ľubovoľné d také, že $0 \leq F_X(d) \leq 1$, existuje $\alpha_d \in [0, 1]$ také, že $F_X^{-1(\alpha_d)}(F_X(d)) = d$.

Označenie U budeme ďalej používať pre náhodnú premennú s rovnomerným rozdelením na intervale $(0,1)$. Zrejme $F_U(p) = p$ a $F_U^{-1}(p) = p$ pre všetky $p \in (0, 1)$. Pre všetky $\alpha \in [0, 1]$ platí:

$$X \stackrel{d}{=} F_X^{-1}(U) \stackrel{d}{=} F_X^{-1+}(U) \stackrel{d}{=} F_X^{-1(\alpha)}(U). \quad (2.3)$$

Označenie $\stackrel{d}{=}$ znamená rovnosť distribúcií. Daná rovnosť (2.3) hovorí, že realizácia zo všeobecného rozdelenia s distribučnou funkciou F_X môže byť vygenerovaná ako realizácia z rovnomerného rozdelenia.

2.2 Komonotónnosť

Ako sme už spomínali, vo finančníctve môžeme často naraziť na sumu náhodných premenných $S = \sum_{i=1}^n X_i$, kde členy X_i nie sú navzájom nezávislé. Poznáme marginálne distribúcie, ale združenú distribúciu vektora $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nepoznáme. Jednou z možností ako si pri takomto probléme vo finančnej matematike pomôcť, je nahradenie tohto vektora iným vektorom, ktorý bude mať rovnaké marginálne distribučné funkcie a ktorého združenú distribúciu budeme poznať. Vhodné je, ak poznáme vzťah súčtu členov tohto vektora v zmysle konvexného usporiadania k súčtu členov pôvodného vektora, keďže pri oceňovaní ázijských košíkových opcií nás zaujíma stop loss-prémia sumy náhodných premenných vystupujúca vo vzťahu (1.3). Tieto myšlienky nás privádzajú k použitiu komonotónneho vektora, keďže najväčší súčet členov náhodného vektora s danými marginálnymi distribučnými funkciami v zmysle konvexného usporiadania získame práve vtedy, keď je tento vektor $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ komonotónny. To vlastne znamená, že každé dve možné realizácie tohto vektora $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sú po členoch usporiadané.

Pre n -rozmerný vektor $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zavedieme označenie $\underline{x}$. Označenie $\underline{x} \leq \underline{y}$ pre dva vektory $\underline{x}$ a $\underline{y}$ budeme používať pre usporiadanie po členoch definované ako $x_i \leq y_i$ pre všetky $i = 1, 2, \dots, n$.

Definícia 2.2.1 *Množina $A \subseteq R^n$ je komonotónna ak pre každé $\underline{x}$ a $\underline{y}$ v množine A platí $\underline{x} \leq \underline{y}$ alebo $\underline{x} \geq \underline{y}$.*

Pod pojmom podpora vektora $\underline{X}$ budeme rozumieť najmenšiu možnú množinu $A \subseteq R^n$, pre ktorú platí $Pr[\underline{X} \in A] = 1$. Podpora môže byť taktiež definovaná ako množina všetkých možných realizácií náhodného vektora $\underline{X}$.

Definícia 2.2.2 *Hovoríme, že náhodný vektor $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je komonotónny vtedy a len vtedy, ak má komonotónnu podporu.*

Komonotónnosť náhodného vektora $\underline{X}$ implikuje, že ak sa zväčší hodnota realizácie člena X_j potom sa zväčší, prípadne zostane rovnaká aj hodnota realizácie každého iného člena X_k .

Veta 2.2.1 *Náhodný vektor $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je komonotónny ak je splnená jedna z nasledujúcich ekvivalentných podmienok:*

(1) $\underline{X}$ má komonotónnu podporu.

(2) Pre všetky $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ platí:

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \dots, F_{X_n}(x_n)\}.$$

(3) Pre $U \sim \text{Rovn}(0, 1)$ platí:

$$\underline{X} =^d (F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U)).$$

(4) Existuje náhodná premenná Z a neklesajúce funkcie f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) také, že:

$$\underline{X} =^d (f_1(Z), f_2(Z), \dots, f_n(Z)).$$

Dôkaz tohto tvrdenia môžeme nájsť napríklad v článku [9].

Vidíme, že ak všetky marginálne distribučné funkcie náhodných premenných $X_1, X_2, \dots, X_n$ sú identické, potom komonotónnosť vektora $\underline{X}$ je ekvivalentná s tvrdením, že $X_1 = X_2 = \dots = X_n$ skoro vždy.

Každý komonotónny vektor s danými marginálami ako $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ má rovnakú združenú distribučnú funkciu. Teda vektor $(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U))$ je jediný komonotónny vektor s rovnakými marginálami ako $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Z podmienky (2) vyplýva, že komonotónna združená distribučná funkcia je najväčšia možná s danými marginálnymi distribučnými funkciami. Je to vlastne horná hranica pre všetky združené distribučné funkcie s danými marginálnymi distribučnými funkciami.

Keďže náhodne vektory $(F_{X_1}^{-1}(U), F_{X_2}^{-1}(U), \dots, F_{X_n}^{-1}(U))$ a $(F_{X_1}^{-1(\alpha_1)}(U), F_{X_2}^{-1(\alpha_2)}(U), \dots, F_{X_n}^{-1(\alpha_n)}(U))$ sú rovnaké s pravdepodobnosťou 1, komonotónnosť vektora $\underline{X}$ môže byť charakterizovaná ako:

$$\begin{aligned}\underline{X} &=^d \left(F_{X_1}^{-1(\alpha_1)}(U), F_{X_2}^{-1(\alpha_2)}(U), \dots, F_{X_n}^{-1(\alpha_n)}(U) \right) \\ &=^d \left(F_{X_1}^{-1(\alpha_1)}(1 - U), F_{X_2}^{-1(\alpha_2)}(1 - U), \dots, F_{X_n}^{-1(\alpha_n)}(1 - U) \right),\end{aligned}$$

kde $\alpha \in [0, 1]$ a U aj $(1 - U)$ majú rovnomerné rozdelenie na intervale $(0, 1)$.

Pre ľubovoľný vektor $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, označenie $(X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c)$ budeme používať na označenie komonotónneho duplikátu, to znamená na označenie komonotónneho vektora s rovnakými marginálnymi distribúciami ako $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Pre ľubovoľný vektor $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ realizácia jeho komonotónneho duplikátu $\underline{X}^c = (X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c)$ leží s pravdepodobnosťou 1 v nasledovnej množine:

$$\left\{ \left(F_{X_1}^{-1}(p), F_{X_2}^{-1}(p), \dots, F_{X_n}^{-1}(p) \right) \mid 0 \leq p \leq 1 \right\}.$$

Podpora vektora X^c nie je nevyhnutne spojitá krivka, pretože distribučné funkcie F_{X_i} môžu obsahovať horizontálne segmenty spôsobujúce nespojitosť. Teda horizontálne segmenty distribučnej funkcie náhodnej premennej X_i vedú k chýbajúcim častiam tejto krivky. Takúto podporu si môžeme predstaviť ako množinu zoradených spojitých kriviek. Pospájaním koncov po sebe nasledujúcich kriviek rovnými čiarami dostaneme komonotónnu spojitú krivku v R^n . Túto krivku budeme nazývať spojitou podporou vektora $\underline{X}^c$ a táto krivka môže byť parametrizovaná nasledovne:

$$\left\{ \left(F_{X_1}^{-1(\alpha)}(p), F_{X_2}^{-1(\alpha)}(p), \dots, F_{X_n}^{-1(\alpha)}(p) \right) \mid 0 \leq p \leq 1 \right\}.$$

Parametrizácia pomocou α nie je nutne jediná a niektoré elementy v spojitkej podpore môžu byť charakterizované rozličným parametrom α .

Pripomeňme si, že Pearsonov korelačný koeficient pre dvojicu náhodných premenných (X, Y) je daný ako:

$$r(X, Y) = \frac{Cov[X, Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}},$$

kde

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])],$$

je kovariancia X a Y .

Poznamenajme, že rovnosť $r(X, Y) = 1$ platí vtedy a len vtedy ak existujú reálne čísla $a \geq 0$ a b také, že $Y = aX + b$ s pravdepodobnosťou 1. Teda $r(X, Y) = 1$ implikuje komonotónnosť páru (X, Y) . V takomto prípade je spojitá podpora rovná čiara.

Definícia 2.2.3 *Náhodný vektor $\underline{X}$ má marginálne distribučné funkcie z tej istej Location-Scale triedy distribučných funkcií, ak existujú reálne kladné konštanty a_i a reálne konštanty b_i také, že platí nasledovný vzťah:*

$$X_i =^d a_i Y + b_i,$$

pre $i = 1, 2, \dots, n$.

Veta 2.2.2 *Náhodný vektor $\underline{X}$ s marginálnymi distribučnými funkciami F_{X_i} patriacimi do tej istej Location-Scale triedy je komonotónny vtedy a len vtedy, ak $r(X_i, X_j) = 1$ pre všetky $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Jednoduchý dôkaz tohto tvrdenia nájdeme napríklad v článku [9].

2.3 Súčet komonotónnych náhodných veličín

Označenie S^c budeme používať pre súčet členov komonotónneho duplikátu náhodného vektora $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, čiže:

$$S^c = X_1^c + X_2^c + \dots + X_n^c.$$

Nahradenie sumy $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ komonotónnou sumou S^c je rozumná stratégia, pretože tieto sumy sú konvexne usporiadané - v zmysle konvexného usporiadania pre ne platí nerovnosť $S \leq_{cx} S^c$. Pre naše použitie by bolo aproximovanie touto sumou vhodné obzvlášť vtedy ak vieme poľahky určiť stop-loss prémii sumy S^c . Ukážeme si, že ju vieme určiť z marginálnych distribučných funkcií členov v sume.

Uvažujme náhodný vektor $\underline{X}$ a jeho komonotónny duplikát $(X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c)$. Potom suma $S^c = X_1^c + X_2^c + \dots + X_n^c =^d g(U)$, kde U je náhodná premenná rovnomerne rozdelená na intervale $(0, 1)$ a funkcia g je daná nasledovne:

$$g(u) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(u), \quad 0 < u < 1.$$

Vidíme, že g je neklesajúca a zľava spojitá funkcia a teda platí $F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(p))$. Využitím tejto rovnosti dostávame:

$$F_{S^c}^{-1}(p) = F_{g(U)}^{-1}(p) = g(F_U^{-1}(p)) = g(p), \quad 0 < p < 1,$$

a teda inverznú distribučnú funkciu sumy S^c môžeme vypočítať z:

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(p), \quad 0 < p < 1. \quad (2.4)$$

Podobne možno zistiť, že platí:

$$F_{S^c}^{-1+}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(p), \quad 0 < p < 1. \quad (2.5)$$

Prenásobením rovnosti (2.4) parametrom α , rovnosti (2.5) parametrom $(1 - \alpha)$ a následným sčítaním týchto rovností dostaneme α -inverznú distribučnú funkciu $F_{S^c}^{-1(\alpha)}$

sumy S^c komonotónnych náhodných premenných $(X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c)$, ktorú v takomto tvare používajú i autori v článku [9]:

$$F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i^c}^{-1(\alpha)}(p), \quad 0 < p < 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (2.6)$$

Z predošlých vzťahov vyplýva, že platí:

$$F_{S^c}^{-1+}(0) = \sum_{i=1}^n F_{X_i^c}^{-1+}(0), \quad (2.7)$$

$$F_{S^c}^{-1}(1) = \sum_{i=1}^n F_{X_i^c}^{-1}(1), \quad (2.8)$$

a teda minimálna hodnota komonotónnej sumy je rovná sume minimálnych hodnôt jednotlivých komponentov. Podobne maximálna hodnota komonotónnej sumy je rovná sume maximálnych hodnôt jednotlivých komponentov.

Pre ľubovoľný náhodný vektor $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ platí $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n \geq \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(0)$ s pravdepodobnosťou 1. Z toho vyplýva, že:

$$\sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(0) \leq F_S^{-1+}(0),$$

a podobne

$$\sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(1) \geq F_S^{-1}(1).$$

To znamená, že S má podporu obsiahnutú v intervale

$$\left[\sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1+}(0), \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(1) \right].$$

Ak máme dané inverzné funkcie $F_{X_i}^{-1}$, potom distribučná funkcia sumy S^c sa dá určiť nasledovne:

$$\begin{aligned} F_{S^c}(x) &= \sup \left\{ p \in (0, 1) \mid F_{S^c}(x) \geq p \right\} = \sup \{ p \in (0, 1) \mid F_{S^c}^{-1}(p) \leq x \} \\ &= \sup \left\{ p \in (0, 1) \mid \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(p) \leq x \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

V nasledujúcej časti, pre ľubovoľnú náhodnú premennú X , výraz F_X je rýdzo-rastúca budeme chápať ako F_X je rýdzo-rastúca na intervale $(F_X^{-1+}(0), F_X^{-1}(1))$.

Všimnime si tiež, že pre ľubovoľnú náhodnú premennú X platí:

$$(1) F_X \text{ je rýdzo-rastúca} \Leftrightarrow F_X^{-1} \text{ je spojitá na intervale } (0, 1),$$

a taktiež

$$(2) F_X \text{ je spojitá} \Leftrightarrow F_X^{-1} \text{ je rýdzo-rastúca na intervale } (0, 1).$$

Uvažujme, že marginálne distribučné funkcie F_{X_i} , $i = 1, 2, \dots, n$ komonotónneho náhodného vektora $(X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c)$ sú rýdzo-rastúce a spojité. Potom každá inverzná distribučná funkcia $F_{X_i}^{-1}$ je spojitá na intervale $(0, 1)$, z čoho vyplýva, že $F_{S^c}^{-1}$ je tiež spojitá na intervale $(0, 1)$, keďže je daná ako súčet inverzných marginálnych distribučných funkcií. Z toho vyplýva, že F_{S^c} je rýdzo-rastúca na intervale $(F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$. Podobne $F_{S^c}^{-1}$ je rýdzo-rastúca na intervale $(0, 1)$, z čoho vyplýva, že F_{S^c} je spojitá na intervale $(F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$.

Teda v prípade rýdzo-rastúcich a spojitých marginálnych distribučných funkcií, pre ľubovoľné $x \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$, pravdepodobnosť $F_{S^c}(x)$ je jednoznačne určená podľa $F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x$, alebo ekvivalentne:

$$\sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x, \quad F_{S^c}^{-1+}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1). \quad (2.10)$$

Aby sme dostali distribučnú funkciu sumy komonotónnych náhodných premenných v bode x , t.j. $F_{S^c}(x)$, stačí vyrátať predchádzajúcu rovnicu (2.10).

V nasledujúcom tvrdení si ukážeme, že stop-loss prémia súčtu komonotónnych náhodných premenných môžeme získať zo stop-loss prémie jednotlivých komponentov súčtu. Tvrdenie i dôkaz môžeme nájsť v článkoch [9, 11].

Veta 2.3.1 *Stop-loss prémie sumy S^c komponentov komonotónneho náhodného vek-*

tora $\underline{X}^c = (X_1^c, X_2^c, \dots, X_n^c)$ je daná ako:

$$\mathbb{E}[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - d_i)_+], \quad (F_{S^c}^{-1+}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1)), \quad (2.11)$$

kde d_i je dané nasledovne:

$$d_i = F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.12)$$

kde $\alpha_d \in [0, 1]$ je určené tak, aby platila rovnosť:

$$F_{S^c}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) = d. \quad (2.13)$$

Dôkaz.

Nech $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$, a teda $Pr[X_1^c + X_2^c + \dots + X_n^c \leq d] = F_{S^c}(d) \in (0, 1)$. Vzhľadom na to, že $\underline{X}^c$ je komonotónny, podpora vektora $\underline{X}^c$ má dimenziu 1. Podpora komonotónneho vektora nemôže obsahovať obdĺžnik, pretože ľavý horný a pravý spodný roh by neboli po člene usporiadané. Je to teda vlastne čiara neklesajúca v žiadnej súradnici. Spojitú podporu obsahujúcu pôvodnú podporu získame tak, že najbližšie nespojité body pôvodnej podpory pospájame úsečkami. Spojitá podpora komonotónneho vektora $\underline{X}^c$ má teda práve jeden bod, v ktorom pretína nadrovinu $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 + x_2 + \dots + x_n = d\}$. Tento bod pretínania je jediný, pretože táto nadrovina neobsahuje dva rôzne body, také že $\underline{x} \leq \underline{y}$ alebo $\underline{y} \leq \underline{x}$, pretože nárast jednej súradnice spôsobí pokles ostatných tak, aby súčet súradníc zostal zachovaný.

Teraz si ukážeme, že vektor $\underline{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ definovaný v tvrdení rovnosťou (2.12) je práve týmto jediným bodom pretínania. Keďže $F_{S^c}(d) \in (0, 1)$, vieme, že existuje $\alpha_d \in [0, 1]$, ktoré spĺňa podmienku $F_{S^c}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) = d$. Keďže d_i je definované vzťahom (2.12), z rovnosti (2.6) a (2.13) vyplýva, že:

$$\sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) = F_{S^c}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) = d.$$

Teda vektor $\underline{d}$ s d_i definovanými rovnosťami (2.12) a (2.13) je elementom spojitej podpory vektora $\underline{X}^c$ a nadroviny $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1 + x_2 + \dots + x_n = d\}$. Bod $\underline{d}$ je teda jediným bodom pretínania nadroviny a spojitej podpory.

Ďalej nech $\underline{x}$ je bodom spojitaj podpory vektora $\underline{X}^c$. Potom platí nasledujúca rovnosť:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - d)_+ \equiv (x_1 - d_1)_+ + (x_2 - d_2)_+ + \cdots + (x_n - d_n)_+.$$

Táto identita platí preto, lebo $\underline{x}$ aj $\underline{d}$ sú oba elementy spojitaj podpory vektora $\underline{X}^c$, a teda ak pre nejaké j platí $x_j > d_j$, potom taktiež $x_k \geq d_k$ pre všetky k rôzne od j . Ľavá strana je rovná pravej strane, pretože $\sum_{i=1}^n d_i = d$. Na druhej strane ak pre nejaké j platí $x_j \leq d_j$, potom taktiež $x_k \leq d_k$ pre všetky k a zjavne ľavá i pravá strana je rovná nule.

Nahradením konštánt príslušnými náhodnými premennými a vzatím stredných hodnôt dostaneme rovnosť (2.11), čím je toto tvrdenie dokázané.

Poľahky možno nahliadnuť, že platia taktiež nasledovné vzťahy:

$$\mathbb{E}[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] - d, \quad \text{ak} \quad d \leq F_{S^c}^{-1+}(0), \quad (2.14)$$

$$\mathbb{E}[(S^c - d)_+] = 0, \quad \text{ak} \quad d \geq F_{S^c}^{-1}(1). \quad (2.15)$$

Z rovností (2.7),(2.8),(2.14) a (2.15) a Vety 2.3.1 môžeme vyvodit', že pre každé reálne d , existuje d_i s $\sum_{i=1}^n d_i = d$ také, že platí $\mathbb{E}[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - d_i)_+]$.

Vyjadrenie prémie komonotónnej sumy S^c môže byť taktiež prepísané pomocou bežných inverzných distribučných funkcií. Pre ľubovoľné $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(X_i - F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) \right)_+ \right] &= \mathbb{E} \left[\left(X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)) \right)_+ \right] \\ &\quad - \left(F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)) \right) (1 - F_{S^c}(d)). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Vzhľadom na definíciu α_d , zosumovaním cez i dostávame:

$$\mathbb{E}[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\left(X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)) \right)_+ \right] - \left(d - F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(d)) \right) (1 - F_{S^c}(d)). \quad (2.17)$$

V prípade, že marginálne distribučné funkcie sú rýdzo-rastúce, predchádzajúci vzťah sa redukuje na:

$$\mathbb{E}[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\left(X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)) \right)_+ \right]. \quad (2.18)$$

Z Vety 2.3.1 vidíme, že každá stop-loss prémia sumy komonotónnych náhodných premenných môže byť prepísaná ako suma stop-loss prémie individuálnych náhodných premenných. Tvrdenie poskytuje algoritmus na priamy výpočet stop-loss prémie sumy komonotónnych náhodných premenných, bez toho aby sme museli počítať celú distribučnú funkciu sumy. Na to aby sme vypočítali stop-loss prémiiu so zadržaním (retention) d , stačí ak poznáme $F_{S^c}(d)$, ktoré môžeme priamo vypočítať z (2.10).

Teraz si ukážme ako možno získať konvexné hranice pre sumu $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ náhodných premenných $X_1, X_2, \dots, X_n$, ktorých marginálne distribúcie poznáme. Pod pojmom konvexná hranica pre sumu S máme na mysli sumu náhodných premenných, ktorá je väčšia (alebo menšia) ako S v zmysle konvexného usporiadania.

Nasledujúce tvrdenie, ktoré môžeme nájsť napríklad v článku [11], nám dáva hornú konvexnú hranicu pre sumu náhodných premenných s danými marginálnymi distribučnými funkciami v podobe sumy komonotónnych náhodných premenných s rovnakými distribučnými funkciami, aké má pôvodná suma.

Veta 2.3.2 *Pre ľubovoľný náhodný vektor $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ platí:*

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq_{cx} X_1^c + X_2^c + \dots + X_n^c. \quad (2.19)$$

Dôkaz.

Keďže je zrejmé, že stredné hodnoty týchto dvoch súm sú ekvivalentné, stačí dokázať, že medzi týmito súčtami platí stop-loss usporiadanie. Musíme teda ukázať, že:

$$E[(X_1 + X_2 + \dots + X_n - d)_+] \leq E[(X_1^c + X_2^c + \dots + X_n^c - d)_+]. \quad (2.20)$$

Toto stačí dokázať pre každé $d \in (F_{S^c}^{-1}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$, pretože pre hodnoty d mimo tohto intervalu možno ľahko nahliadnuť, že predchádzajúca nerovnosť (2.20) sa stáva rovnosťou.

Nasledujúce vzťahy platia pre každý vektor $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $d_1 + d_2 + \dots + d_n = d$:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n - d)_+ = \left((x_1 - d_1) + (x_2 - d_2) + \dots + (x_n - d_n) \right)_+ \quad (2.21)$$

$$\leq \left((x_1 - d_1)_+ + (x_2 - d_2)_+ + \dots + (x_n - d_n)_+ \right)_+ \quad (2.22)$$

$$= (x_1 - d_1)_+ + (x_2 - d_2)_+ + \dots + (x_n - d_n)_+. \quad (2.23)$$

V predchádzajúcej nerovnosti nahradíme konštanty príslušnými náhodnými premennými, vezmeme stredné hodnoty, uvažujeme $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ a d_i také, ako vo vete 2.3.1. Takto dostaneme:

$$\mathbb{E}[(X_1 + X_2 + \dots + X_n - d)_+] \leq \mathbb{E}[(X_1 - d_1)_+] + \mathbb{E}[(X_2 - d_2)_+] + \dots + \mathbb{E}[(X_n - d_n)_+]. \quad (2.24)$$

$$= \mathbb{E}[(X_1^c - d_1)_+] + \mathbb{E}[(X_2^c - d_2)_+] + \dots + \mathbb{E}[(X_n^c - d_n)_+] \quad (2.25)$$

$$= \mathbb{E}[(X_1^c + X_2^c + \dots + X_n^c - d)_+]. \quad (2.26)$$

Posledná rovnosť platí vďaka konkrétnej voľbe $d_1, d_2, \dots, d_n$ tak ako vo vete 2.3.1. Týmto je tvrdenie dokázané.

Vektor $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ s danými marginálnymi distribúciami F_{X_i} , má najväčší súčet jeho komponentov v zmysle konvexného usporiadania vtedy, ak má komonotónnu združenú distribúciu, a preto je vhodné pri hľadaní horného odhadu použiť práve komonotónny náhodný vektor. Tento vektor má rovnakú združenú distribučnú funkciu ako vektor $(F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U), \dots, F_n^{-1}(U))$. Komponenty tohto náhodného vektora sú maximálne závislé, všetky komponenty sú neklesajúcimi funkciami tej istej náhodnej premennej. Ak pre dve náhodné premenné X a Y platí, že $X \leq_{cx} Y$ potom $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ a $X \leq_{sl} Y$. Konvexné usporiadanie, je pre našu prácu vhodné, pretože hodnota ázijskej opcie, ako ju máme zadefinovanú vo vzťahu (1.3), je vlastne odiskontovaná stop-loss prémia sumy náhodných premenných. Pri konvexnom usporiadaní je stop-loss usporiadanie splnené a navyše rovnosť stredných hodnôt pri konvexnom usporiadaní nám zaručuje presnejší odhad ako pri samotnom stop-loss usporiadaní.

2.4 Súčet náhodných premenných s lognormálnym rozdelením

Pozrieme sa teraz na to, ako možno v zmysle konvexného ohraničenia zhora ohraničiť sumu lognormálne rozdelených náhodných premenných podobne ako v článku [9]. Tento príklad je z praktického hľadiska veľmi užitočný, pretože v Black-Scholesovom rámci predpokladáme, že cena akcie je náhodná premenná s lognormálnym rozdelením. Uvažujeme náhodný vektor $(\alpha_1 X_1, \alpha_2 X_2, \dots, \alpha_n X_n)$ kde α_i sú kladné reálne čísla a X_i sú lognormálne rozdelené náhodné premenné: $\ln(X_i) \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$.

Pre strednú hodnotu a varianciu náhodnej premennej X_i platí:

$$\mathbb{E}[X_i] = e^{\mu_i + (1/2)\sigma_i^2}, \quad (2.27)$$

$$\text{Var}[X_i] = e^{2\mu_i + \sigma_i^2}(e^{\sigma_i^2} - 1). \quad (2.28)$$

Distribučná funkcia náhodnej premennej X_i je daná:

$$F_{X_i}(x_i) = \phi\left(\frac{\ln x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right). \quad (2.29)$$

Distribučná funkcia pre $\alpha_i X_i$ je daná nasledovne:

$$\begin{aligned} F_{\alpha_i X_i}(x_i) &= \Pr(\alpha_i X_i \leq x_i) = \Pr(X_i \leq x_i/\alpha_i) \\ &= F_{X_i}(x_i/\alpha_i) = \phi\left(\frac{\ln(x_i/\alpha_i) - \mu_i}{\sigma_i}\right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Z predchádzajúceho vzťahu možno nahliadnuť, že pre marginálnu inverznú distribučnú funkciu platí:

$$F_{\alpha_i X_i}^{-1}(p) = \alpha_i e^{\mu_i + \sigma_i \phi^{-1}(p)}, \quad 0 < p < 1. \quad (2.31)$$

Stop-loss prémii lognormálne rozdelenej náhodnej premennej X môžeme vypočítať nasledovne:

$$\mathbb{E}[(X - d)_+] = \mathbb{E}[(e^Y - d)_+], \quad Y \sim N(\mu, \sigma^2). \quad (2.32)$$

Funkcia hustoty rozdelenia náhodnej premennej Y je definovaná vzťahom:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.33)$$

Stredná hodnota rastúcej spojitej funkcie h náhodnej premennej Y je daná ako:

$$\mathbb{E}[h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \cdot f(y) dy. \quad (2.34)$$

Z toho vyplýva, že pre vzťah (2.34) ďalej platí:

$$\mathbb{E}[(e^Y - d)_+] = \int_{-\infty}^{\infty} (e^y - d)_+ f(y) dy. \quad (2.35)$$

Keďže $e^y - d > 0$ pre $y > \ln d$, z predošlého vzťahu dostaneme:

$$\mathbb{E}[(e^Y - d)_+] = \int_{-\infty}^{\ln d} 0 f(y) dy + \int_{\ln d}^{\infty} (e^y - d) f(y) dy. \quad (2.36)$$

Do predošlého vzťahu dosadíme distribučnú funkciu a ďalej dostaneme:

$$\mathbb{E}[(e^Y - d)_+] = \int_{\ln d}^{\infty} (e^y - d) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy. \quad (2.37)$$

Roznásobením dostávame:

$$\mathbb{E}[(e^Y - d)_+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(\int_{\ln d}^{\infty} e^y e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy - d \int_{\ln d}^{\infty} e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \right). \quad (2.38)$$

Upravíme prvý integrál tak aby sme dostali v tomto integráli opäť funkciu hustoty:

$$\mathbb{E}[(e^Y - d)_+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(\int_{\ln d}^{\infty} e^{\frac{-(y-(\mu+\sigma^2))^2}{2\sigma^2}} e^{\mu+\sigma^2/2} dy - d \int_{\ln d}^{\infty} e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy \right). \quad (2.39)$$

Vidíme, že v prvom i druhom člene vystupuje integrál hustoty, ktorý predstavuje pravdepodobnosť, že sa náhodná premenná s danou funkciou hustoty nachádza v intervale vymedzenom hranicami integrálu. Ďalej teda platí:

$$\mathbb{E}[(e^Y - d)_+] = e^{\mu+\sigma^2/2} Pr(Z_1 \geq \ln d) - d Pr(Z_2 \geq \ln d), \quad (2.40)$$

pričom $Z_1 \sim N(\sigma^2 + \mu, \sigma^2)$ a $Z_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Predchádzajúci vzťah ďalej normujeme a využijeme symetrickosť normovaného normálneho rozdelenia:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(e^Y - d)_+] &= e^{\mu+\sigma^2/2} Pr\left(\frac{Z_1 - (\sigma^2 + \mu)}{\sigma} \geq \frac{\ln d - (\sigma^2 + \mu)}{\sigma}\right) \\ &\quad - d Pr\left(\frac{Z_2 - \mu}{\sigma} \geq \frac{\ln d - \mu}{\sigma}\right) \\ &= e^{\mu+\sigma^2/2} \phi\left(\frac{(\sigma^2 + \mu) - \ln d}{\sigma}\right) - d \phi\left(\frac{\mu - \ln d}{\sigma}\right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

kde ϕ je distribučná funkcia náhodnej premennej z normálneho rozdelenia s parametrami $\mu = 0, \sigma^2 = 1$.

Stop-loss prémia lognormálne rozdelenej náhodnej premennej X s parametrami μ, σ^2 je teda daná nasledovne:

$$\mathbb{E}[(X - d)_+] = e^{\mu + (\sigma^2/2)} \phi(C_1) - d\phi(C_2), \quad d > 0, \quad (2.42)$$

kde C_1 a C_2 sú dané nasledovne:

$$C_1 = \frac{\mu + \sigma^2 - \ln(d)}{\sigma}, \quad C_2 = C_1 - \sigma. \quad (2.43)$$

Teraz už možno jednoducho nahliadnuť, že platí taktiež vzťah:

$$\mathbb{E}\left[\left(\alpha_i(X_i - d_i)\right)_+\right] = \alpha_i e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)} \phi(d_{i,1}) - \alpha_i d_i \phi(d_{i,2}), \quad d_i > 0, \quad (2.44)$$

kde

$$d_{i,1} = \frac{\mu_i + \sigma_i^2 - \ln(d_i)}{\sigma_i}, \quad d_{i,2} = d_{i,1} - \sigma_i. \quad (2.45)$$

Nech suma S je daná ako $S = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$, S^c je jej komonotónny duplikát:

$$S^c = F_{\alpha_1 X_1}^{-1}(U) + F_{\alpha_2 X_2}^{-1}(U) + \dots + F_{\alpha_n X_n}^{-1}(U), \quad (2.46)$$

potom $S \leq_{cx} S^c$. Keďže marginálne distribučné funkcie sú rýdzo-rastúce a spojité, z (2.10) vyplýva, že distribučná funkcia $F_{S^c}(x)$ je implicitne definovaná vzťahom $F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x$, alebo ekvivalentne:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\mu_i + \sigma_i \phi^{-1}(F_{S^c}(x))} = x, \quad F_{S^c}^{-1+}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1). \quad (2.47)$$

Z rovnosti (2.18) a (2.31) vyplýva, že pre $F_{S^c}^{-1+}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1)$ je stop-loss prémia súčtu S^c daná nasledovne:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S^c - d)_+] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(\alpha_i X_i - F_{\alpha_i X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))_+] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\left(\alpha_i(X_i - e^{\mu_i + \sigma_i \phi^{-1}(F_{S^c}(d))})\right)_+\right]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Použitím rovnosti (2.44) dostaneme z predchádzajúceho vzťahu vyjadrenie pre stop-loss prémie v nasledovnom tvare:

$$\mathbb{E}[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)} \phi(d_{i,1}) - \alpha_i e^{\mu_i + \sigma_i \phi^{-1}(F_{S^c}(d))} \phi(d_{i,2}). \quad (2.49)$$

Do tohto vzťahu ešte dosadíme $d_{i,1}$ a $d_{i,2}$ definované rovnosťou (2.45):

$$\mathbb{E}[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)} \phi\left(\frac{\mu_i + \sigma_i^2 - \ln(d_i)}{\sigma_i}\right) - \alpha_i e^{\mu_i + \sigma_i \phi^{-1}(F_{S^c}(d))} \phi\left(\frac{\mu_i - \ln(d_i)}{\sigma_i}\right). \quad (2.50)$$

Dosadíme ešte hodnoty za d_i :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S^c - d)_+] &= \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)} \phi\left(\frac{\mu_i + \sigma_i^2 - \ln(e^{\mu_i + \sigma_i \phi^{-1}(F_{S^c}(d))})}{\sigma_i}\right) \\ &\quad - \alpha_i e^{\mu_i + \sigma_i \phi^{-1}(F_{S^c}(d))} \phi\left(\frac{\mu_i - \ln(e^{\mu_i + \sigma_i \phi^{-1}(F_{S^c}(d))})}{\sigma_i}\right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Keďže $\ln(e^x) = x$, z predošlého vzťahu dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(S^c - d)_+] &= \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)} \phi\left(\frac{\mu_i + \sigma_i^2 - \mu_i - \sigma_i \phi^{-1}(F_{S^c}(d))}{\sigma_i}\right) \\ &\quad - \alpha_i e^{\mu_i + \sigma_i \phi^{-1}(F_{S^c}(d))} \phi\left(\frac{\mu_i - \mu_i - \sigma_i \phi^{-1}(F_{S^c}(d))}{\sigma_i}\right). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Vďaka rovnosti (2.47) a rovnosti $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$ môžeme predchádzajúci vzťah prepísať nasledovne:

$$\mathbb{E}[(S^c - d)_+] = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)} \phi\left(\sigma_i - \phi^{-1}(F_{S^c}(d))\right) \right) - d(1 - F_{S^c}(d)). \quad (2.53)$$

Takto sme dostali vzťah pre stop loss prémie súčtu komonotónnych náhodných premenných s lognormálnym rozdelením s $d \in (F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$.

2.5 Dolná hranica založená na podmienenosti

V tejto sekcii sa bližšie pozrieme na odvodenie dolnej hranice pre sumu náhodných premenných podobne ako v článku [9].

Nech $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je vektor náhodných veličín s danými marginálnymi distribučnými funkciami $F_{X_1}, F_{X_2}, \dots, F_{X_n}$. Uvažujeme, že existuje náhodná premenná Λ s danou distribučnou funkciou takou, že poznáme podmienenú distribučnú funkciu náhodných premenných X_i pri ľubovoľnom danom $\Lambda = \lambda$. Ukážeme si, ako môžeme získať spodnú hranicu v zmysle konvexného usporiadania pre sumu $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ podmieňovaním tejto náhodnej premennej. Podstatou tejto časti je pozorovať, že očakávaná hodnota náhodnej premennej je vždy menšia alebo rovná v zmysle konvexného usporiadania ako sama náhodná premenná.

Jensenova nerovnosť hovorí, že pre ľubovoľnú konvexnú funkciu v platí $v(\mathbb{E}(x)) \leq \mathbb{E}(v(x))$ a práve z Jensenovej nerovnosti vyplýva nasledujúca nerovnosť:

$$\mathbb{E}[v(X_1 + X_2 + \dots + X_n)] = \mathbb{E}_\Lambda[\mathbb{E}[v(X_1 + X_2 + \dots + X_n)|\Lambda]] \quad (2.54)$$

$$\geq \mathbb{E}_\Lambda[v(\mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_n|\Lambda])] \quad (2.55)$$

$$= \mathbb{E}_\Lambda[v(\mathbb{E}[X_1|\Lambda] + \mathbb{E}[X_2|\Lambda] + \dots + \mathbb{E}[X_n|\Lambda])]. \quad (2.56)$$

Vidíme teda, že pre ľubovoľný náhodný vektor $\underline{X}$ a ľubovoľnú náhodnú premennú Λ platí:

$$\mathbb{E}[X_1|\Lambda] + \mathbb{E}[X_2|\Lambda] + \dots + \mathbb{E}[X_n|\Lambda] \leq_{cx} X_1 + X_2 + \dots + X_n. \quad (2.57)$$

Definujme sumu S^l ako $S^l = \mathbb{E}[S|\Lambda]$. Ak S a Λ sú navzájom nezávislé, dostávame jednoduchú nerovnosť $\mathbb{E}[S] \leq_{cx} S$. Na druhej strane ak Λ jednoznačne určuje S , potom dolná hranica sa zhoduje s S .

Ďalej poznamenajme, že vždy platí $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i|\Lambda]] = \mathbb{E}[X_i]$, avšak $\text{Var}[\mathbb{E}[X_i|\Lambda]] < \text{Var}[X_i]$ platí, pokiaľ $\mathbb{E}[\text{Var}[X_i|\Lambda]]$ nie je rovné nule. Teda náhodný vektor:

$$(\mathbb{E}[X_1|\Lambda], \mathbb{E}[X_2|\Lambda], \dots, \mathbb{E}[X_n|\Lambda]), \quad (2.58)$$

nebude mať vo všeobecnosti rovnaké marginálne distribučné funkcie ako vektor $\underline{X}$. Avšak ak sa nám podarí nájsť podmieňovaciu premennú Λ s vlastnosťou, že všetky

náhodné premenné $\mathbb{E}[X_i|\Lambda]$ budú nerastúcou funkciou lambdy (alebo neklesajúcou funkciou lambdy), potom dolná hranica S^l bude súčet n komonotónnych náhodných premenných.

Na posúdenie kvality spodnej stochastickej hranice sa stačí pozrieť na jej variáciu. Chceme aby S a S^l mali variancie navzájom čo možno najbližšie. To aby sa variancia S^l čo možno najviac podobala variancii S dosiahneme tak, že ju budeme maximalizovať. Dosiahneme to tak, že budeme minimalizovať priemernú hodnotu $\mathbb{E}[Var[S|\Lambda = \lambda]]$, keďže z konvexného usporiadania vyplýva, že $Var[S^l]$ je rovná alebo menšia ako $Var[S]$ a platí rovnosť:

$$\mathbb{E}[Var[S|\Lambda]] = Var[S] - Var[\mathbb{E}[S|\Lambda]]. \quad (2.59)$$

Inak povedané, aby sme dosiahli čo možno najpresnejšiu dolnú hranicu, S a Λ sa musia čo možno najviac podobáť.

Uvažujme odteraz navyše, že náhodná premenná Λ je taká, že všetky $g_i(\lambda) = \mathbb{E}[X_i|\Lambda = \lambda]$ sú nerastúce a spojité funkcie lambdy. Kvantil dolnej hranice S^l je potom daný nasledovne:

$$F_{S^l}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n F_{\mathbb{E}[X_i|\Lambda]}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n F_{g_i(\Lambda)}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i|\Lambda = F_{\Lambda}^{-1+}(1-p)], \quad p \in (0, 1). \quad (2.60)$$

Využili sme pri tom skutočnosť, že pre nerastúcu spojitú funkciu g platí:

$$F_{f(S)}^{-1}(p) = f(F_S^{-1}(1-p)), \quad p \in (0, 1). \quad (2.61)$$

Distribučná funkcia sumy S^l vychádza z (2.9):

$$F_{S^l}(X) = \sup \left\{ p \in (0, 1) \left| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i|\Lambda = F_{\Lambda}^{-1+}(1-p)] \leq x \right. \right\}. \quad (2.62)$$

Ak teraz navyše uvažujeme, že distribučné funkcie náhodných premenných $\mathbb{E}[X_i|\Lambda]$ sú striktné rastúce a spojité, potom distribučná funkcia sumy S^l je tiež spojitá a rýdzo-rastúca. Z (2.10) vyplýva, že pre všetky $x \in (F_{\mathbb{E}[S|\Lambda]}^{-1+}(0), F_{\mathbb{E}[S|\Lambda]}^{-1}(1))$ platí:

$$\sum_{i=1}^n F_{\mathbb{E}[X_i|\Lambda]}^{-1}(F_{S^l}(x)) = x, \quad (2.63)$$

alebo ekvivalentne:

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i | \Lambda = F_{\Lambda}^{-1+}(1 - F_{S^l}(x))] = x. \quad (2.64)$$

Predchádzajúci vzťah (2.63) alebo (2.64) jednoznačne určuje distribučnú funkciu pre dolnú hranicu $S^l = \mathbb{E}[S | \Lambda]$.

Z (2.18) vyplýva, že pri tých istých predpokladoch pre stop-loss prémie sumy S^l platí pre všetky $d \in (F_{S^l}^{-1+}(0), F_{S^l}^{-1}(1))$:

$$\mathbb{E}[(S^l - d)_+] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{E}[X_i | \Lambda] - \mathbb{E}[X_i | \Lambda = F_{\Lambda}^{-1+}(1 - F_{S^l}(d))] \right)_+ \right]. \quad (2.65)$$

Prípad, keď všetky $\mathbb{E}[X_i | \Lambda]$ sú neklesajúcou funkciou lambda taktiež vedie ku komonotónnemu vektoru $(\mathbb{E}[X_1 | \Lambda], \mathbb{E}[X_2 | \Lambda], \dots, \mathbb{E}[X_n | \Lambda])$ a môžeme s ním narábať obdobne.

Kapitola 3

Komonotónne hranice pre Ázijské košíkové opcie s dividendami

3.1 Horná hranica pre Ázijské košíkové opcie s dividendami

V tejto časti sa pozrieme na to, ako možno odvodiť hornú komonotónnu hranicu pre ázijské košíkové opcie. Porovnanie numerických výsledkov oceňovania ázijských košíkových opcií pomocou tejto hranice s inými metódami môžeme nájsť napríklad v článku [3]. V našej práci navyše uvažujeme, že akcie vyplácajú kladné dividendy $D_i > 0$, a teda odvodíme upravený analytický vzorec pre hornú hranicu.

V prípade, že pri podkladovom aktíve nie sú vyplácané dividendy, je vývoj podkladového aktíva opísaný stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dS_i(t) = rS_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dW_i(t), \quad (3.1)$$

ktorej riešením je:

$$S_i(t) = S_i(0)e^{(r-\sigma_i^2/2)t+\sigma_i W_i(t)}. \quad (3.2)$$

V prípade vyplácania dividend určených dividendovou mierou D_i je vývoj pod-

kladových aktív popísaný stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$dS_i(t) = (r - D_i)S_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dW_i(t), \quad (3.3)$$

ktorej riešením je:

$$S_i(t) = S_i(0)e^{(r-D_i-\sigma_i^2/2)t+\sigma_i W_i(t)} \quad (3.4)$$

Predpokladáme, že dvojitá suma:

$$S = \sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j S_l(T-j), \quad (3.5)$$

je suma náhodných premenných s lognormálnou distribučnou funkciou a môže byť prepísaná v tvare:

$$S = \sum_{i=1}^{mn} X_i = \sum_{i=1}^{mn} \alpha_i e^{Y_i}, \quad (3.6)$$

kde

$$\alpha_i = a_{\lceil i/m \rceil} b_{(i-1) \bmod(m)} S_{\lceil i/m \rceil}(0) e^{(r-D_{\lceil i/m \rceil}-(1/2)\sigma_{\lceil i/m \rceil}^2)(T-(i-1) \bmod(m))}, \quad (3.7)$$

a pre všetky $i = 1, 2, \dots, mn$ platí:

$$Y_i = \sigma_{\lceil i/m \rceil} W_{\lceil i/m \rceil}(T - (i-1) \bmod(m)), \quad (3.8)$$

pričom $\lceil x \rceil$ je najmenšie celé číslo menšie alebo rovné ako x a $y \bmod(m) = y - \lfloor y/m \rfloor m$, kde $\lfloor y \rfloor$ predstavuje najväčšie celé číslo menšie alebo rovné y .

Tento prepis sme spravili len preto, aby sme dvojitú sumu previedli na jednoduchú. Vďaka tomu môžeme pracovať priamo s výsledkami odvodenými v predchádzajúcej kapitole.

Poľahky možno nahliadnuť, že Y_i je náhodná premenná z normálneho rozdelenia pre všetky $i = 1, 2, \dots, mn$ platí:

$$Y_i \sim N\left(\mu_{Y_i} = 0, \sigma_{Y_i}^2 = \sigma_{\lceil i/m \rceil}^2 (T - (i-1) \bmod(m))\right) \quad (3.9)$$

Ako môžeme vidieť v rovnosti (1.3), cena ázijskej košíkovej opcie je daná ako odiskontovaná stop-loss prémia dvojitej sumy náhodných premenných S s lognormálnym

rozdelením. Túto sumu môžeme prepísať v tvare jednoduchej sumy tak ako v (3.6). Na získanie hornej hranice pre odhad tejto sumy nahradíme pôvodnú sumu komonotónnou sumou:

$$S^c = \sum_{i=1}^{mn} F_{X_i}^{-1}(U), \quad U \sim \text{Rovn}(0, 1), \quad (3.10)$$

ktorej členy majú rovnaké marginálne distribučné funkcie ako členy pôvodnej sumy a s ktorou vieme pracovať. Na získanie stop-loss prémie s nahradenou sumou aplikujeme výsledok (2.53), čím získame hornú hranicu pre cenu ázijskej košíkovej kúpnej opcie (CUB):

$$\begin{aligned} CUB &= e^{-rT} \mathbb{E}[(S^c - K)_+] = e^{-rT} \sum_{i=1}^{mn} \alpha_i e^{\mu_{Y_i} + (\sigma_{Y_i}^2/2)} \phi\left(\sigma_{Y_i} - \phi^{-1}(F_{S^c}(K))\right) \\ &\quad - K(1 - F_{S^c}(K)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Do predchádzajúceho vzťahu dosadíme podľa (3.7) a (3.9) za α_i , μ_{Y_i} a za $\sigma_{Y_i}^2$:

$$\begin{aligned} CUB &= e^{-rT} \sum_{i=1}^{mn} a_{\lceil i/m \rceil} b_{(i-1) \bmod(m)} S_{\lceil i/m \rceil}(0) \\ &\quad \times \exp\left((r - D_{\lceil i/m \rceil} - (1/2)\sigma_{\lceil i/m \rceil}^2)(T - (i-1) \bmod(m))\right) \\ &\quad \times \exp\left(0 + (1/2)\sigma_{\lceil i/m \rceil}^2(T - (i-1) \bmod(m))\right) \\ &\quad \times \phi\left(\sqrt{\sigma_{\lceil i/m \rceil}^2(T - (i-1) \bmod(m))} - \phi^{-1}(F_{S^c}(K))\right) \\ &\quad - K(1 - F_{S^c}(K)) \\ &= e^{-rT} \sum_{i=1}^{mn} a_{\lceil i/m \rceil} b_{(i-1) \bmod(m)} S_{\lceil i/m \rceil}(0) \\ &\quad \times \exp\left((r - D_{\lceil i/m \rceil})(T - (i-1) \bmod(m))\right) \\ &\quad \times \phi\left(\sqrt{\sigma_{\lceil i/m \rceil}^2(T - (i-1) \bmod(m))} - \phi^{-1}(F_{S^c}(K))\right) \\ &\quad - K(1 - F_{S^c}(K)). \end{aligned}$$

Predchádzajúci vzťah prepíšeme opäť do podoby dvojitej sumy:

$$\begin{aligned}
CUB &= e^{-rT} \sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j S_l(0) \exp(-D_l(T-j) + r(T-j)) \\
&\times \phi\{\sigma_l \sqrt{T-j} - \phi^{-1}(F_{S^c}(K))\} - K(1 - F_{S^c}(K)) \\
&= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} e^{-D_l(T-j)} \\
&\times \phi\{\sigma_l \sqrt{T-j} - \phi^{-1}(F_{S^c}(K))\} - e^{-rT} K(1 - F_{S^c}(K)).
\end{aligned}$$

Hodnotu $F_{S^c}(K)$ kumulatívnej distribučnej funkcie pre S^c môžeme nájsť riešením rovnice (2.47):

$$K = \sum_{i=1}^{mn} \alpha_i e^{\mu_{Y_i} + \sigma_{Y_i} \phi^{-1}(F_{S^c}(K))}, \quad F_{S^c}^{-1+}(0) < x < F_{S^c}^{-1+}(1). \quad (3.12)$$

Do predošlého vzťahu dosadíme podľa (3.7) a (3.9) za α_i , μ_{Y_i} a za $\sigma_{Y_i}^2$:

$$\begin{aligned}
K &= \sum_{i=1}^{mn} a_{\lceil i/m \rceil} b_{(i-1) \bmod(m)} S_{\lceil i/m \rceil}(0) \\
&\times \exp\left((r - D_{\lceil i/m \rceil} - (1/2)\sigma_{\lceil i/m \rceil}^2)(T - (i-1) \bmod(m))\right) \\
&\times \exp\left(\sigma_{\lceil i/m \rceil} \sqrt{(T - (i-1) \bmod(m))} \phi^{-1}(F_{S^c}(K))\right).
\end{aligned} \quad (3.13)$$

Predchádzajúci vzťah prepíšeme spätne na dvojitú sumu:

$$\begin{aligned}
K &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \\
&\times \exp\left((r - D_l - (1/2)\sigma_l^2)(T - j) + \sigma_l \sqrt{T-j} \phi^{-1}(F_{S^c}(K))\right).
\end{aligned} \quad (3.14)$$

Takto sa dostávame k odvodeniu hornej hranice pre cenu ázijskej košíkovej kúpnej opcie s dividendami. Tento výsledok si zhrnieme v nasledujúcom tvrdení.

Veta 3.1.1 *Predpokladajme, že suma S je daná vzťahmi (3.6) až (3.8). Komonotónna horná hranica pre cenu ázijskej košíkovej opcie (s podkladovým aktívami vyplácajúcimi kladné dividendy) $ABC(n, m, K, T)$ danej vzťahom (1.3) je vyjadrená nasledovne:*

$$\begin{aligned}
CUB &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-rj} e^{-D_l(T-j)} \\
&\times \phi\left(\sigma_l \sqrt{T-j} - \phi^{-1}(F_{S^c}(K))\right) - e^{-rT} K(1 - F_{S^c}(K)),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

kde hodnotu $F_{S^c}(K)$ kumulatívnej distribučnej funkcie komonotónnej sumy S^c môžeme nájsť riešením rovnice:

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \exp\left((r - D_l - (1/2)\sigma_l^2)(T-j) + \sigma_l \sqrt{T-j} \phi^{-1}(F_{S^c}(K))\right) = K, \tag{3.16}$$

pričom $\phi(\cdot)$ je distribučná funkcia normálneho normovaného rozdelenia.

3.2 Dolná hranica pre Ázijské košíkové opcie s dividendami

Myšlienky z článku [12] a [9] aplikujeme pre prípad ázijských košíkových opcií a navyše oproti článku [3] uvažujeme, že akcie vyplácajú kladné dividendy.

Pripomeňme si, že cena diskretné vážené priemerovanej average rate ázijskej košíkovej opcie európskeho typu s fixnou realizačnou cenou K , dobou splatnosti T , m dátumami priemerovania, n podkladovými aktívami, v čase $t = 0$, je daná nasledovne:

$$ABC(n, m, K, T) = e^{-rT} \mathbb{E}^Q \left[\left(\sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j S_l(T-j) - K \right)_+ \right]. \quad (3.17)$$

Dvojitú sumu akcií S , vystupujúcu vo vzťahu (3.17) môžeme prepísať ako jednoduchú sumu lognormálnych náhodných premenných:

$$\sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j S(T-j) = \sum_{i=1}^{mn} X_i = \sum_{i=1}^{mn} \alpha_i e^{Y_i}. \quad (3.18)$$

Uvažujme podmieňováciu náhodnú premennú Λ takú, že pre všetky i má vektor (Y_i, Λ) dvojrozmerné normálne rozdelenie.

Označme μ_Λ , σ_Λ parametre náhodnej premennej Λ , označme μ_{Y_i} , σ_{Y_i} parametre náhodnej premennej Y_i a označme r_i korelačný koeficient premenných Y_i a Λ . Pozrime sa teraz na náhodnú premennú $Y_i|\Lambda$. Pre jej podmienenú hustotu platí:

$$\begin{aligned} f(y_i|\lambda) &= \frac{f(y_i, \lambda)}{f(\lambda)} \\ &= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_{Y_i}\sigma_\Lambda\sqrt{1-r_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r_i^2)} \left[\frac{(y_i-\mu_{Y_i})^2}{\sigma_{Y_i}^2} - 2r_i \frac{(y_i-\mu_{Y_i})(\lambda-\mu_\Lambda)}{\sigma_{Y_i}\sigma_\Lambda} + \frac{(\lambda-\mu_\Lambda)^2}{\sigma_\Lambda^2} \right] \right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Lambda} \exp\left(-\frac{(\lambda-\mu_\Lambda)^2}{2\sigma_\Lambda^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{Y_i}\sqrt{1-r_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r_i^2)} \right. \\ &\quad \times \left. \left[\frac{(y_i-\mu_{Y_i})^2}{\sigma_{Y_i}^2} - 2r_i \frac{(y_i-\mu_{Y_i})(\lambda-\mu_\Lambda)}{\sigma_{Y_i}\sigma_\Lambda} + \frac{(\lambda-\mu_\Lambda)^2}{\sigma_\Lambda^2} - (1-r_i^2) \frac{(\lambda-\mu_\Lambda)^2}{\sigma_\Lambda^2} \right] \right). \end{aligned}$$

Upravíme členy v zátvorke a vyjmeme $\sigma_{Y_i}^2$ v exponente pred zátvorku:

$$f(y_i|\lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma_{Y_i}\sqrt{1-r_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{Y_i}^2(1-r_i^2)} \times \left[(y_i - \mu_{Y_i})^2 - 2(y_i - \mu_{Y_i})r_i\frac{\sigma_{Y_i}}{\sigma_\Lambda}(\lambda - \mu_\Lambda) + r_i^2\frac{\sigma_{Y_i}^2}{\sigma_\Lambda^2}(\lambda - \mu_\Lambda)^2\right]\right).$$

Následne zátvorku v exponente upravíme na štvorec:

$$f(y_i|\lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma_{Y_i}\sqrt{1-r_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_{Y_i}^2(1-r_i^2)} \left[y_i - \mu_{Y_i} - r_i\frac{\sigma_{Y_i}}{\sigma_\Lambda}(\lambda - \mu_\Lambda)\right]^2\right). \quad (3.19)$$

Z predchádzajúceho vzťahu vidíme, že podmienená náhodná premenná $y_i|\lambda$ má normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\left(\mu_{Y_i} + r_i\frac{\sigma_{Y_i}}{\sigma_\Lambda}(\lambda - \mu_\Lambda)\right)$ a disperziou $\sigma_{Y_i}^2(1-r_i^2)$.

Zo vzťahu (3.4) vidíme, že v prípade akcie vyplácajúcej dividendy je Y_i daná ako $Y_i = (r - D_i - \sigma_i^2/2)t + \sigma_i W_i(t)$ a má normálne rozdelenie, tak ako aj vektor (Y_i, Λ) . Taktiež vektor $(\sigma_i W_i(t), \Lambda)$ má normálne rozdelenie, pretože sa dá prepísať ako lineárna kombinácia vektora (Y_i, Λ) . Podmienená náhodná premenná $\sigma_i W_i(t)|\Lambda$ má teda taktiež normálne rozdelenie s parametrami odvodenými analogicky. Stredná hodnota tejto náhodnej premennej je $r_i\sqrt{T}\frac{\sigma_i}{\sigma_\Lambda}(\lambda - \mu_\Lambda)$ a disperzia je rovná $T\sigma_i^2(1-r_i^2)$.

Ľahko teraz spočítame:

$$\mathbb{E}[S_i(T)|\Lambda] = \mathbb{E}[S_i(0)e^{(r-D_i-\sigma_i^2/2)T+\sigma_i W_i(T)}|\Lambda] = S_i(0)e^{(r-D_i-\sigma_i^2/2)T}\mathbb{E}[e^{\sigma_i W_i(T)}|\Lambda]. \quad (3.20)$$

Podmienená náhodná premenná $e^{\sigma_i W_i(T)}|\Lambda$ má lognormálne rozdelenie. Stredná hodnota lognormálne rozdelenej náhodnej premennej $Z = e^X$, kde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ je daná ako $E[Z] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$. Z toho bezprostredne vidíme, že platí:

$$\mathbb{E}[S_i(T)|\Lambda] = S_i(0)e^{(r-D_i-\sigma_i^2/2)T} \exp\left(r_i\frac{\sqrt{T}\sigma_i}{\sigma_\Lambda}(\Lambda - \mu_\Lambda) + \frac{T\sigma_i^2(1-r_i^2)}{2}\right). \quad (3.21)$$

Predchádzajúci vzťah môžeme zjednodušiť na tvar:

$$\mathbb{E}[S_i(T)|\Lambda] = S_i(0) \exp\left(\sqrt{T}r_i\sigma_i\frac{\Lambda - \mu_\Lambda}{\sigma_\Lambda} + T(r - D_i - \frac{\sigma_i^2}{2}r_i^2)\right). \quad (3.22)$$

Označíme $U = \phi(\frac{\Lambda - \mu_\Lambda}{\sigma_\Lambda})$ a dostaneme tak:

$$\mathbb{E}[S_i(T)|\Lambda] = S_i(0) \exp\left(\sqrt{T}r_i\sigma_i\phi^{-1}(U) + T(r - D_i - \frac{\sigma_i^2}{2}r_i^2)\right), \quad (3.23)$$

kde U je náhodná premenná rovnomerne rozdelená na jednotkovom intervale a $\phi^{-1}(U) = \frac{\Lambda - \mu_\Lambda}{\sigma_\Lambda}$ je náhodná premenná s normovaným normálnym rozdelením $N(0, 1)$.

Teraz už možno ľahko nahliadnuť, že pre sumu S^l platí:

$$S^l = \mathbb{E}^Q\left[\sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j S_l(T-j) \middle| \Lambda\right] = S_l(0) \sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j \quad (3.24)$$

$$\times \exp\left((r - D_i - \frac{\sigma_l^2}{2}r_{l,j}^2)(T-j) + \sigma_l r_{l,j} \sqrt{T-j} \phi^{-1}(U)\right), \quad (3.25)$$

pričom korelačné koeficienty $r_{l,j}$ sú dané vzťahom:

$$r_{l,j} = \frac{\text{cov}(W_l(T-j), \Lambda)}{\sigma_\Lambda \sqrt{T-j}}. \quad (3.26)$$

Korelačné koeficienty $r_{l,j}$ by mali mať všetky rovnaké znamienko, aby platila komonotónnosť. Uvažujeme prípad, keď sú korelačné koeficienty $r_{l,j}$ pre každé l a j kladné. Je zrejmé, že S^l je komonotónna suma náhodných premenných z lognormálnym rozdelením. Túto dvojitú Sumu S^l prepíšeme do tvaru jednoduchšej sumy, aby sme pri hľadaní jej stop-loss prémie mohli priamo aplikovať výsledky z predošlých častí:

$$S^l = \sum_{i=1}^{m \cdot n} \alpha_i e^{Y_i}, \quad (3.27)$$

kde

$$\begin{aligned} \alpha_i &= a_{\lceil i/m \rceil} b_{(i-1) \bmod(m)} S_{\lceil i/m \rceil}(0) \\ &\times \exp\left(\left(r - D_{\lceil i/m \rceil} - (\sigma_{\lceil i/m \rceil}^2/2)r_{\lceil i/m \rceil, (i-1) \bmod(m)}^2\right)(T - (i-1) \bmod(m))\right), \\ Y_i &= \sigma_{\lceil i/m \rceil} r_{\lceil i/m \rceil, (i-1) \bmod(m)} \sqrt{T - (i-1) \bmod(m)} \phi^{-1}(U). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Pre rozdelenie a parametre náhodnej premennej Y_i platí:

$$Y_i \sim N\left(\mu_{Y_i} = 0, \sigma_{Y_i}^2 = \sigma_{\lceil i/m \rceil}^2 r_{\lceil i/m \rceil, (i-1) \bmod(m)}^2 (T - (i-1) \bmod(m))\right). \quad (3.29)$$

Teraz využijeme vzťah (2.53), z ktorého dostaneme dolnú komonotónnu hranicu pre ázijskú košíkovú opciu:

$$LB\lambda = e^{-rT} \sum_{i=1}^{m.n} \alpha_i e^{\mu_{Y_i} + (\sigma_{Y_i}^2/2)} \phi\left(\sigma_{\lceil i/m \rceil Y_i} - \phi^{-1} F_{S^l}(K)\right) - K(1 - F_{S^l}(K)). \quad (3.30)$$

Teraz dosadíme vzťahy pre α_i , μ_{Y_i} a σ_{Y_i} zo vzťahov (3.40), (3.41) a dostávame:

$$\begin{aligned} LB\lambda &= e^{-rT} \sum_{i=1}^{m.n} a_{\lceil i/m \rceil} b_{(i-1) \bmod(m)} S_{\lceil i/m \rceil}(0) \\ &\quad \times \exp\left(\left(r - D_{\lceil i/m \rceil} - \frac{\sigma_{\lceil i/m \rceil}^2 r_{\lceil i/m \rceil, (i-1) \bmod(m)}^2}{2}\right) (T - (i-1) \bmod(m))\right) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{\sigma_{\lceil i/m \rceil}^2 r_{\lceil i/m \rceil, (i-1) \bmod(m)}^2 (T - (i-1) \bmod(m))}{2}\right) \\ &\quad \times \phi\left(\sigma_{\lceil i/m \rceil} r_{\lceil i/m \rceil, (i-1) \bmod(m)} \sqrt{T - (i-1) \bmod(m)} - \phi^{-1} F_{S^l}(K)\right) \\ &\quad - K(1 - F_{S^l}(K)). \end{aligned}$$

Upravíme členy v exponente a dostávame:

$$\begin{aligned} LB\lambda &= e^{-rT} \sum_{i=1}^{m.n} a_{\lceil i/m \rceil} b_{(i-1) \bmod(m)} S_{\lceil i/m \rceil}(0) e^{r(T - (i-1) \bmod(m))} e^{-D_{\lceil i/m \rceil} (T - (i-1) \bmod(m))} \\ &\quad \times \phi\left(\sigma_{\lceil i/m \rceil} r_{\lceil i/m \rceil, (i-1) \bmod(m)} \sqrt{T - (i-1) \bmod(m)} - \phi^{-1} F_{S^l}(K)\right) \\ &\quad - K(1 - F_{S^l}(K)). \end{aligned}$$

Dvojitú sumu opäť prepíšeme do podoby jednoduchšej sumy a dostávame tak hodnotu dolnej komonotónnej hranice pre ázijské košíkové opcie s dividendami.

$$\begin{aligned} LB\lambda &= \sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j S_l(0) e^{-D_l(T-j)} e^{-rj} \phi[\sigma_l r_{l,j} \sqrt{(T-j)} - \phi^{-1}(F_{S^l}(K))] \\ &\quad - e^{-rT} K(1 - F_{S^l}(K)). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Hodnota $F_{S^l}(K)$ distribučnej funkcie komonotónnej sumy S^l sa dá vypočítať z rovnosti (2.47):

$$K = \sum_{i=1}^{m.n} \alpha_i e^{\mu_{Y_i} + \sigma_{Y_i} \phi^{-1}(F_{S^l}(K))}. \quad (3.32)$$

Do predošlého vzťahu dosadíme vzťahy pre α_i , μ_{Y_i} a σ_{Y_i} a dostaneme:

$$K = \sum_{i=1}^{m,n} a_{\lceil i/m \rceil} b_{(i-1) \bmod(m)} S_{\lceil i/m \rceil}(0) \exp \left(\left(r - D_{\lceil i/m \rceil(T-(i-1) \bmod(m))} - (\sigma_{\lceil i/m \rceil}^2/2) r_{\lceil i/m \rceil, (i-1) \bmod(m)}^2 \right) (T - (i-1) \bmod(m)) \right) \times \exp \left(0 + \sigma_{\lceil i/m \rceil} r_{\lceil i/m \rceil, (i-1) \bmod(m)} \sqrt{(T - (i-1) \bmod(m))} \phi^{-1}(F_{S^i}(K)) \right). \quad (3.33)$$

Dvojitú sumu prepíšeme do tvaru jednoduchšej sumy a z nasledujúceho vzťahu môžeme hodnotu $F_{S^i}(K)$ priamo dorátať napríklad metódou bisekcie:

$$\sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j S_l(0) \exp \left(\left(r - D_l - (\sigma_l^2/2) r_{l,j}^2 \right) (T - j) + \sigma_l r_{l,j} \sqrt{T - j} \phi^{-1}(F_{S^l}(K)) \right) = K. \quad (3.34)$$

Tieto výsledky si zhrnieme v nasledovnom tvrdení:

Veta 3.2.1 *Predpokladajme, že suma S je daná vzťahmi (3.6) až (3.8). Ďalej predpokladajme, že podmieňovacia premenná Λ je z normálneho rozdelenia taká, že pre všetky l a j je vektor $(W_l(T - j), \Lambda)$ je z dvojrozmerného normálneho rozdelenia a korelačné koeficienty:*

$$r_{l,j} = \frac{\text{Cov}(W_l(T - j), (\Lambda))}{\sigma_\Lambda \sqrt{T - j}}$$

sú kladné. Potom komonotónna dolná hranica pre cenu ázijskej košíkovej average rate kúpnej opcie s diskretným priemerovaním (s podkladovým aktívami vyplácajúcimi kladné dividendy) $ABC(n, m, K, T)$ danej vzťahom (1.3) je vyjadrená nasledovne:

$$LB\lambda = \sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j S_l(0) e^{-D_l(T-j)} e^{-rj} \phi[\sigma_l r_{l,j} \sqrt{(T-j)} - \phi^{-1}(F_{S^l}(K))] - e^{-rT} K (1 - F_{S^l}(K)),$$

kde hodnota $F_{S^l}(K)$ sa vypočíta ako riešenie rovnosti:

$$\sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_j S_l(0) \exp \left(\left(r - D_l - (\sigma_l^2/2) r_{l,j}^2 \right) (T - j) + \sigma_l r_{l,j} \sqrt{T - j} \phi^{-1}(F_{S^l}(K)) \right) = K.$$

3.3 Modifikácia na ľubovoľnú diskretizáciu

Predchádzajúce vzorce pre hornú i spodnú hranicu umožňujú priemerovanie podkladového aktíva iba v čase $(T - j)$, kde j nadobúda celé hodnoty z intervalu $(0, T)$. Takéto priemerovanie je z praktického hľadiska často nepoužiteľné.

Vzorec pre hornú hranicu modifikujeme tak, aby sme mohli použiť ľubovoľnú časovú diskretizáciu. Toto dosiahneme jednoducho tak, že každé j v pôvodnom vzorci vymeníme za τ_j , ktoré nadobúda hodnoty v intervale $[0, T]$. Príkladom možnej voľby časovej diskretizácie je $\tau_j = \frac{T \cdot j}{m}$. Táto voľba predstavuje rovnomerne zvolené hodnoty časového kroku na intervale $[0, T]$. Modifikovaný vzorec pre hornú hranicu ázijskej košíkovej opcie s dividendami umožňujúci ľubovoľný časový krok vyzerá teda nasledovne:

$$CUB = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_{\tau_j} S_l(0) e^{-r\tau_j} e^{-D_l(T-\tau_j)} \phi\left(\sigma_l \sqrt{T-\tau_j} - \phi^{-1}(F_{S^c}(K))\right) - e^{-rT} K(1 - F_{S^c}(K)), \quad (3.35)$$

kde hodnotu $F_{S^c}(K)$ kumulatívnej distribučnej funkcie pre komonotónnu sumu S^c môžeme nájsť riešením rovnice:

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_{\tau_j} S_l(0) \exp\left((r - D_l - (1/2)\sigma_l^2)(T - \tau_j) + \sigma_l \sqrt{T-\tau_j} \phi^{-1}(F_{S^c}(K))\right) = K. \quad (3.36)$$

S vzorcom pre spodnú hranicu môžeme narábať obdobne a modifikovaný vzorec pre dolnú hranicu vyzerá nasledovne:

$$LBA = \sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_{\tau_j} S_l(0) e^{-D_l(T-\tau_j)} e^{-r\tau_j} \phi\left(\sigma_l r_{l,\tau_j} \sqrt{T-\tau_j} - \phi^{-1}(F_{S^l}(K))\right) - e^{-rT} K(1 - F_{S^l}(K)). \quad (3.37)$$

Hodnotu $F_{S^l}(K)$ dostaneme z rovnosti:

$$K = \sum_{l=1}^n a_l \sum_{j=0}^{m-1} b_{\tau_j} S_l(0) \times \exp \left(\left(r - D_l - (\sigma_l^2/2) r_{l,\tau_j}^2 \right) (T - \tau_j) + \sigma_l r_{l,\tau_j} \sqrt{T - \tau_j} \phi^{-1} \left(F_{S^l}(K) \right) \right). \quad (3.38)$$

Pri práci s týmto vzorcom treba dávať pozor, v akých jednotkách používame časový krok. Dividendová miera, úrok i volatilita bývajú zväčša uvádzané v hodnotách za rok. Preto ak napríklad časový krok uvádzame v dňoch, treba aj hodnotu dividend, úrokovej miery i variancie upraviť na dennú bázu. Dosiahneme to tak, že tieto hodnoty podelíme počtom dní v roku. Teda vzorec upravíme koeficientom κ , reprezentujúcim počet, koľko krát sa nová časová jednotka nachádza v pôvodnej časovej jednotke - napríklad spomínaných $\kappa = 365$ pri prechode z ročnej bázy na dennú. Ukážme si, že takouto úpravou sa hodnota výsledku nezmení. Pri prechode z jednej časovej bázy na druhú vstupné parametre upravíme nasledovne:

$$\sigma^2 \rightarrow \frac{\sigma^2}{\kappa}, \quad D_l \rightarrow \frac{D_l}{\kappa}, \quad r \rightarrow \frac{r}{\kappa}, \quad T \rightarrow T\kappa, \quad j \rightarrow j\kappa,$$

Dosadíme upravené parametre do vzorca pre hornú hranicu:

$$CUB = \sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) e^{-\frac{r}{\kappa} j \kappa} e^{-\frac{D_l}{\kappa} (T-j)\kappa} \phi \left\{ \frac{\sigma_l}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{T-j\kappa} - \phi^{-1}(F_{S^c}(K)) \right\} - e^{-\frac{r}{\kappa} T \kappa} K (1 - F_{S^c}(K)), \quad (3.39)$$

kde hodnotu $F_{S^c}(K)$ kumulatívnej distribučnej funkcie pre S^c môžeme nájsť riešením rovnice:

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} a_l b_j S_l(0) \exp \left(\left(\frac{r}{\kappa} - \frac{D_l}{\kappa} - (1/2) \frac{\sigma_l^2}{\kappa} \right) (T-j)\kappa + \frac{\sigma_l}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{T-j\kappa} \phi^{-1}(F_{S^c}(K)) \right) = K. \quad (3.40)$$

Všetky koeficienty κ sa navzájom zrušia a výsledok vzorca pre hornú hranicu zostane nezmenený. Táto vlastnosť platí rovnako aj pre vzorec pre dolnú hranicu.

3.4 Horná hranica so spojitým časovým priemerovaním

Na predchádzajúcich stranách sme rozprávali o hornej hranici pre ázijské košíkové opcie s dividendami uvažujúc iba diskretný typ priemerovania. Čo ak by sme však potrebovali získať túto hranicu pre prípad spojitého priemerovania? V nasledujúcich riadkoch sa pokúsime ukázať, ako možno z diskretného prípadu prejsť do spojitého. Uvažujeme, že veľkosť časového kroku v diskretnom priemerovaní sa postupne do nekonečna zmenšuje $\tau_j \rightarrow 0$ a váha prislúchajúca jednotlivým krokom je priamo úmerná veľkosti kroku. Príkladom voľby takéhoto kroku a príslušnej váhy je ekvidištančné delenie $\tau_j = \frac{T \cdot j}{m}$, $b_j = 1/m$. Počet delení intervalu rastie do nekonečna, teda $m \rightarrow \infty$. Následne pre hornú hranicu platí:

$$CUB = \sum_{l=1}^n a_l \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_{\tau_j} S_l(0) e^{-r\tau_j} e^{-D_l(T-\tau_j)} \phi \left[\sigma_l \sqrt{T - \tau_j} - \phi^{-1} \left(F_{S^c}(K) \right) \right] - e^{-rT} K \left(1 - F_{S^c}(K) \right). \quad (3.41)$$

Túto limitu sumy nahradíme integrálom. Keďže suma časových váh b_{τ_j} musela byť rovná jednej, taktiež integrál týchto váh musí byť rovný jednej a teda pre hornú hranicu platí:

$$CUB = \sum_{l=1}^n a_l S_l(0) \frac{1}{T} \int_0^T e^{-r\tau} e^{-D_l(T-\tau)} \phi \left[\sigma_l \sqrt{T - \tau} - \phi^{-1} \left(F_{S^c}(K) \right) \right] d\tau - e^{-rT} K (1 - F_{S^c}(K)), \quad (3.42)$$

Integrál vystupujúci v predchádzajúcom vzťahu označíme I_1 a skúsime ho vypočítať:

$$I_1 = \int_0^T e^{-r\tau} e^{-D_l(T-\tau)} \phi \left[\sigma_l \sqrt{T - \tau} - \phi^{-1} \left(F_{S^c}(K) \right) \right] d\tau. \quad (3.43)$$

Označme $\phi^{-1}(F_{S^c}(K))$ písmenkom C a vyjmime pred integrál členy nevstupujúce do integrovania:

$$I_1 = e^{-D_l T} \int_0^T e^{-(r-D_l)\tau} \phi \left(\sigma_l \sqrt{T - \tau} - C \right) d\tau. \quad (3.44)$$

Označme integrál bez vyňatého členu $e^{-D_l T}$ z predchádzajúceho vzťahu ako I_2 . Na tento integrál použijeme metódu per partes, kde $u' = e^{-(r-D_l)\tau}$ a $v = \phi(\sigma_l \sqrt{T-\tau} - C)$. Základné pravidlo tejto metódy je $\int u' v dx = uv - \int uv' dx$. Ďalej teda pre I_2 platí:

$$I_2 = \left[-\frac{e^{-(r-D_l)\tau}}{(r-D_l)} \phi(\sigma_l \sqrt{T-\tau} - C) \right]_0^T - \int_0^T \frac{e^{-(r-D_l)\tau}}{(r-D_l)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sigma_l \sqrt{T-\tau} - C)^2}{2}} \frac{\sigma_l}{2\sqrt{T-\tau}} d\tau. \quad (3.45)$$

Teraz dosadíme hranice a upravíme členy v integráli. Takto dostaneme:

$$I_2 = -\frac{e^{-(r-D_l)T}}{(r-D_l)} \phi(-C) + \frac{1}{r-D_l} \phi(\sigma_l \sqrt{T} - C) - \frac{\sigma_l}{2(r-D_l)\sqrt{2\pi}} \int_0^T \frac{e^{-(r-D_l)\tau} e^{-\frac{\sigma_l^2}{2}(T-\tau) + C\sigma_l \sqrt{T-\tau} - \frac{C^2}{2}}}{\sqrt{T-\tau}} d\tau. \quad (3.46)$$

Ďalej si z predošlého vzťahu všimame opäť len integrál - označíme ho I_3 . Upravíme ho do nasledovnej podoby:

$$I_3 = e^{-(r-D_l)T - \frac{C^2}{2}} \int_0^T \frac{e^{-(D_l - r + \frac{\sigma_l^2}{2})(T-\tau) + C\sigma_l \sqrt{T-\tau}}}{\sqrt{T-\tau}} d\tau. \quad (3.47)$$

Integrál z predošlého vzťahu bez vyňatých členov označíme ako I_4 a použijeme substitúciu $s = T - \tau$:

$$I_4 = \int_0^T \frac{e^{-(D_l - r + \frac{\sigma_l^2}{2})s + C\sigma_l \sqrt{s}}}{\sqrt{s}} ds. \quad (3.48)$$

Člen $D_l - r + \sigma_l^2/2$ označíme ako A_l , ak je väčší ako nula. Platí:

$$R_1 =: \int_0^T \frac{e^{-A_l s + C\sigma_l \sqrt{s}}}{\sqrt{s}} ds = \frac{e^{\frac{C^2 \sigma_l^2}{4A_l}} \sqrt{\pi} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{C\sigma_l}{2\sqrt{A_l}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{-C\sigma_l + 2A_l \sqrt{T}}{2\sqrt{A_l}}\right) \right)}{\sqrt{A_l}}, \quad (3.49)$$

kde $\operatorname{erf}(x)$ je zvyšková funkcia normálneho rozdelenia a je definovaná pomocou Eulerovho integrálu nasledovne:

$$\frac{1 - \operatorname{erf}(x)}{2} = \frac{1}{2\sqrt{(2\pi)}} \int_x^\infty e^{-\xi} d\xi.$$

V prípade, že $D_l - r + \sigma_l^2/2$ je menšie ako nula, označíme $-(D_l - r + \sigma_l^2/2)$ ako A_l .
V takomto prípade platí:

$$R_2 =: \int_0^T \frac{e^{A_l s + C\sigma_l \sqrt{s}}}{\sqrt{s}} s = \frac{e^{\frac{-c^2 \sigma_l^2}{4A_l}} \sqrt{\pi} \left(-\operatorname{erfi}\left(\frac{C\sigma_l}{2\sqrt{A_l}}\right) + \operatorname{erfi}\left(\frac{C\sigma_l + 2A_l \sqrt{T}}{2\sqrt{A_l}}\right) \right)}{\sqrt{A_l}}, \quad (3.50)$$

kde $\operatorname{erfi}(x)$ je imaginárna zvyšková funkcia definovaná:

$$\operatorname{erfi}(x) = \frac{1}{i} \operatorname{erf}(x)(ix),$$

kde i je imaginárna jednotka.

V prípade, že $D_l - r + \sigma_l^2/2$ je rovné nule, platí:

$$R_3 =: \int_0^T \frac{e^{C\sigma_l \sqrt{s}}}{\sqrt{s}} ds = \left[2 \frac{e^{C\sigma_l \sqrt{s}}}{C\sigma_l} \right]_0^T = 2 \frac{e^{C\sigma_l \sqrt{T}}}{C\sigma_l} - \frac{2}{C\sigma_l}. \quad (3.51)$$

Teraz spojíme predchádzajúce čiastočné výsledky a pre hornú hranicu so spojitým priemerovaním dostávame nasledujúci vzťah:

$$\begin{aligned} CUB &= \sum_{l=1}^n a_l S_l(0) e^{-D_l T} \frac{1}{T(r - D_l)} \\ &\times \left(-e^{-(r-D_l)T} \phi(-C) + \phi(\sigma_l \sqrt{T} - C) - \frac{\sigma_l}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(r-D_l)T - \frac{c^2}{2}} R \right) \\ &- e^{-rT} K(1 - F_{S^c}(K)), \end{aligned} \quad (3.52)$$

kde

$$R = R_1 \quad \text{ak} \quad (D_l - r + \sigma_l^2/2) > 0,$$

$$R = R_2 \quad \text{ak} \quad (D_l - r + \sigma_l^2/2) < 0,$$

$$R = R_3 \quad \text{ak} \quad (D_l - r + \sigma_l^2/2) = 0.$$

Hodnotu $F_{S^c}(K)$ môžeme nájsť riešením rovnice:

$$\sum_{l=1}^n a_l \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{m-1} b_j S_l(0) \exp \left((r - D_l - \frac{\sigma_l^2}{2})(T - \tau_j) + \sigma_l \sqrt{T - \tau_j} \phi^{-1}(F_{S^c}(K)) \right) = K. \quad (3.53)$$

Prechodom na integrál dostávame:

$$\sum_{l=1}^n a_l S_l(0) \frac{1}{T} \int_0^T e^{(r-D_l-\frac{\sigma_l^2}{2})(T-\tau)+\sigma_l\sqrt{T-\tau}\phi^{-1}(F_{Sc}(K))} d\tau = K. \quad (3.54)$$

Integrál vystupujúci v predchádzajúcej rovnici označíme I_5 a upravíme. Použijeme opäť substitúciu $s = T - \tau$. Takto dostaneme:

$$I_5 = \int_0^T e^{(r-D_l-\frac{\sigma_l^2}{2})s+\sigma_l\sqrt{s}\phi^{-1}(F_{Sc}(K))} ds \quad (3.55)$$

Označíme $\phi^{-1}(F_{Sc}(K))$ ako C .

V prípade, že člen $\frac{\sigma_l^2}{2} + D_l - r$ je väčší ako nula, označíme tento člen ako A_l a celý integrál ako Q_1 . Dostávame integrál tvaru:

$$Q_1 =: \int_0^T e^{-A_l s + C\sigma_l\sqrt{s}} ds, \quad (3.56)$$

pre riešenie ktorého platí:

$$Q_1 = \frac{1}{2A_l^{3/2}} \left[e^{\frac{C^2\sigma_l^2}{4A_l}} C\sigma_l\sqrt{\pi} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{C\sigma_l}{2\sqrt{A_l}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{-C\sigma_l + 2A_l\sqrt{T}}{2\sqrt{A_l}}\right) \right) \right]. \quad (3.57)$$

V prípade, že $D_l - r + \sigma_l^2/2$ je menšie ako nula, označíme $-(D_l - r + \sigma_l^2/2)$ ako A_l a platí:

$$\begin{aligned} Q_2 &=: \int_0^T e^{A_l s + C\sigma_l\sqrt{s}} ds \\ &= \frac{1}{2A_l^{3/2}} \left(e^{-\frac{C^2\sigma_l^2}{4A_l}} \left(2\sqrt{A_l} e^{\frac{C^2\sigma_l^2}{4A_l}} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left(-1 + e^{C\sigma_l\sqrt{T} + A_l T} \right) + C\sqrt{\pi}\sigma_l \left(\operatorname{erfi}\left(\frac{C\sigma_l}{2\sqrt{A_l}}\right) - \operatorname{erfi}\left(\frac{C\sigma_l + 2A_l\sqrt{T}}{2\sqrt{A_l}}\right) \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

V prípade, že $D_l - r + \sigma_l^2/2$ je rovné nule, platí:

$$Q_3 =: \int_0^T e^{C\sigma_l\sqrt{s}} ds = \left[\frac{2e^{C\sigma_l\sqrt{s}}(C\sigma_l\sqrt{s} - 1)}{C^2\sigma_l^2} \right]_0^T = \frac{2e^{C\sigma_l\sqrt{T}}(C\sigma_l\sqrt{T} - 1)}{C^2\sigma_l^2} + \frac{2}{C^2\sigma_l^2}. \quad (3.59)$$

Hodnotu $F_{Sc}(K)$ v spojitom prípade teda možno vypočítať z rovnosti:

$$\sum_{l=1}^n a_l S_l(0) \frac{1}{T} Q = K, \quad (3.60)$$

kde

$$Q = Q_1 \quad ak \quad (D_l - r + \sigma_l^2/2) > 0,$$

$$Q = Q_2 \quad ak \quad (D_l - r + \sigma_l^2/2) < 0,$$

$$Q = Q_3 \quad ak \quad (D_l - r + \sigma_l^2/2) = 0.$$

Podobne aj pri tomto vzorci by mala platiť vlastnosť, že pri prechode z jednej časovej bázy, napríklad z ročnej na mesačnú, sa po úprave koeficientom κ reprezentujúcim počet, koľkokrát sa novo použitá časová jednotka nachádza v pôvodnej časovej jednotke výsledok nezmení. Ukážme si, že takouto úpravou sa naozaj hodnota výsledku nezmení. Pri prechode z jednej časovej bázy na inú sa vstupné parametre zmenia nasledovne:

$$\sigma^2 \rightarrow \frac{\sigma^2}{\kappa}, \quad D_l \rightarrow \frac{D_l}{\kappa}, \quad r \rightarrow \frac{r}{\kappa}, \quad T \rightarrow T\kappa, \quad \tau \rightarrow \tau\kappa, \quad A_l \rightarrow \frac{A_l}{\kappa},$$

Hodnoty R_1, R_2, R_3 sa prechodom na inú časovú bázu zmenia nasledovne:

$$R_1 \rightarrow \kappa R_1, \quad R_2 \rightarrow \kappa R_2, \quad R_3 \rightarrow \kappa R_3,$$

a teda

$$R \rightarrow \kappa R.$$

Dosadíme upravené parametre do hornej hranice so spojitým priemerovaním:

$$\begin{aligned} CUB \rightarrow & \sum_{l=1}^n a_l S_l(0) e^{-\frac{D_l}{\kappa} T \kappa} \frac{1}{T \kappa \left(\frac{r}{\kappa} - \frac{D_l}{\kappa} \right)} \\ & \times \left(-e^{-\left(\frac{r}{\kappa} - \frac{D_l}{\kappa} \right) T \kappa} \phi(-C) + \phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{\kappa}} \sqrt{T} \sqrt{\kappa} - C \right) + \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{\kappa}}}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{r}{\kappa} - \frac{D_l}{\kappa} \right) T \sqrt{\kappa} - \frac{C^2}{2}} \kappa R \right) \\ & - e^{-\frac{r}{\kappa} T \kappa} K(1 - F_{Sc}(K)). \end{aligned} \tag{3.61}$$

Ľahko možno nahliadnuť, že všetky koeficienty κ sa nám navzájom zrušia.

Podobne pre Q platí, že:

$$Q \rightarrow \kappa Q.$$

a teda hodnotu $F_{Sc}(K)$ môžeme nájsť riešením rovnice:

$$\sum_{l=1}^n a_l S_l(0) \frac{1}{T \kappa} Q \kappa = K.$$

Tu sa nám opäť koeficienty κ navzájom zrušili a teda časová škálová invariantnosť pre hornú hranicu so spojitým priemerovaním zostala zachovaná.

3.5 Numerické výsledky a grafické zobrazenie

3.5.1 Vstupné parametre

Pozrime sa teraz na grafické výsledky pre hornú hranicu so spojitým priemerovaním. Budeme si všímať, ako sa mení hodnota tejto hranice v závislosti od vstupných parametrov, pričom najzaujímavejšia pre nás bude závislosť od realizačnej ceny a maturity, keďže ostatné hodnoty ako volatilita, úroková miera a dividendová miera nemôže vypisovateľ, prípadne kupujúci príliš ovplyvňovať.

Hodnotu hornej hranice so spojitým priemerovaním porovnáme graficky s hodnotou ázijskej košíkovej opcie vypočítanej metódou Monte Carlo s hustým diskretným priemerovaním - 360 krát do roka. Taktiež porovnáme hornú hranicu s diskretným priemerovaním, takým ako v článku [3] (5 krát vždy na konci mesiaca pred maturitou), s príslušnou hodnotou vypočítanou metódou Monte Carlo. Následne ešte porovnáme hodnoty ázijskej košíkovej opcie so spomínanými 2 spôsobmi priemerovania vypočítanými metódou Monte Carlo. Pre zaujímavosť porovnáme i hodnotu $F_{Sc}(K)$ vstupujúco do výpočtu hornej hranice pri spojitom priemerovaní a diskretnom priemerovaní podľa článku [3].

Aby sme vedeli posúdiť rozdiel medzi hranicami a hodnotou vypočítanou metódou Monte Carlo, zadefinujeme si teraz odchýlky. Absolútnu odchýlku označíme AO a platí pre ňu vzťah:

$$AO = \text{Hornahranica} - \text{Hodnota vypočítaná metódou MC} \quad (3.62)$$

Relatívnu odchýlku označíme RO a platí pre ňu vzťah:

$$RO = \frac{\text{Hornahranica} - \text{Hodnota vypočítaná metódou MC}}{\text{Hodnota vypočítaná metódou MC}} \quad (3.63)$$

Vstupné parametre použijeme rovnaké ako v článku [3], pretože si takto môžeme overiť aspoň čiastočne správnosť našich výpočtov. Tieto parametre uvádzame v nasledujúcej tabuľke:

Hodnota realizačnej ceny K je 50. Z tabuľky vidíme, že hodnota košíka na počiatku je rovná 42, 55×0 , $25 + 48$, 21×0 , $20 + 34$, 3×0 , $3 + 100 \times 0$, $10 + 66$, 19×0 , $15 =$

Tabuľka 3.1: Vstupné parametre

Aktívum	Počiatočná cena	Váhy v %	Volatilita v %	Miera dividend v %
BASF	42,55	25	33,34	2,59
Bayer	48,21	20	31,13	2,63
Degussa-Huls	34,30	30	33,27	3,32
FMC	100,00	10	35,12	0,69
Schering	66,19	15	36,36	1,24

50.498. Z toho vyplýva, že naša kúpna opcia je v pozícii in the money. Úroková miera r je rovná 6% doba expirácie je 1 rok.

Korelačnú štruktúru aktív potrebnú napríklad pri výpočte hodnoty opcie metódou Monte Carlo uvádzame v nasledovnej tabuľke:

Tabuľka 3.2: Korelačná štruktúra aktív

	BASF	Bayer	Degussa-Huls	FMC	Schering
BASF	1,00	0,84	-0,07	0,45	0,43
Bayer	0,84	1,00	0,08	0,62	0,57
Degussa-Huls	-0,07	0,08	1,00	-0,54	-0,59
FMC	0,45	0,62	-0,54	1,00	0,86
Schering	0,43	0,57	-0,59	0,86	1,00

Hodnoty pri takýchto parametroch uvádzame v nasledovnej tabuľke, pričom v metóde Monte Carlo sme generovali 100 000 realizácií a pri Monte Carle s hustým priemerovaním sme priemerovali 360 krát do roka:

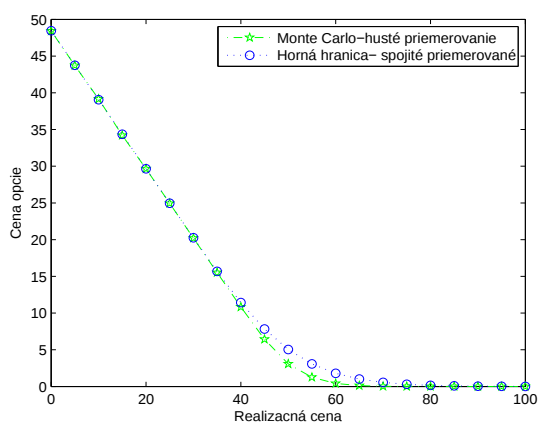
Tabuľka 3.3: Korelačná štruktúra aktív

	Monte Carlo	Horná hranica	AO	RO
Spojité (husté) priemerovanie	3,1529	5,0379	1,8850	0,5978
Diskrétno (riedke) priemerovanie	4,7547	6,9693	2,2146	0,4658

Hodnota opcie je v prípade hustého priemerovania nižšia ako v prípade riedkeho diskretného priemerovania. Absolútna odchýlka, rozdiel hornej hranice a hodnoty vypočítanej metódou Monte Carlo, je v prípade hornej hranice so spojitým priemerovaním menšia, ale v prípade relatívnej odchýlky je tomu naopak.

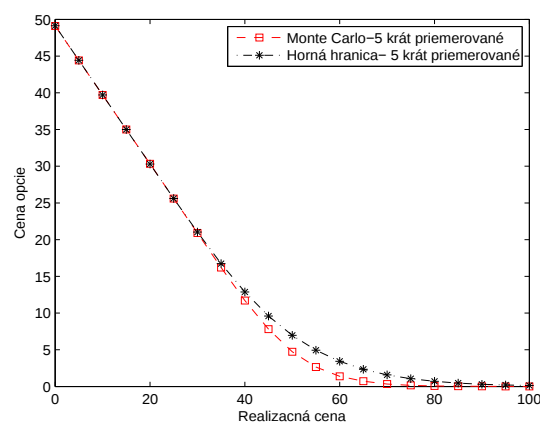
3.5.2 Závislosť hornej hranice od realizačnej ceny

Pozrime sa, ako sa mení hodnota hornej hranice v závislosti od zmeny realizačnej ceny K , pričom všetky ostatné parametre ako počiatočné ceny aktív, váhy aktív, volatilita, miera dividend, úroková miera, doba expirácie, korelačná štruktúra zostávajú nezmenené.



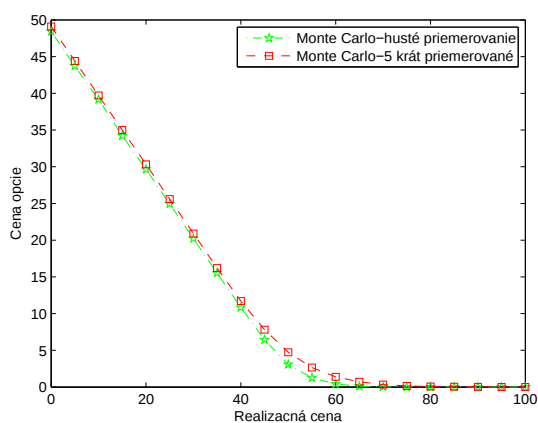
Obr. 3.1: Porovnanie hranice a ceny opcie (spojité priemerovanie).

Priemerná $AO = 0,4622$.

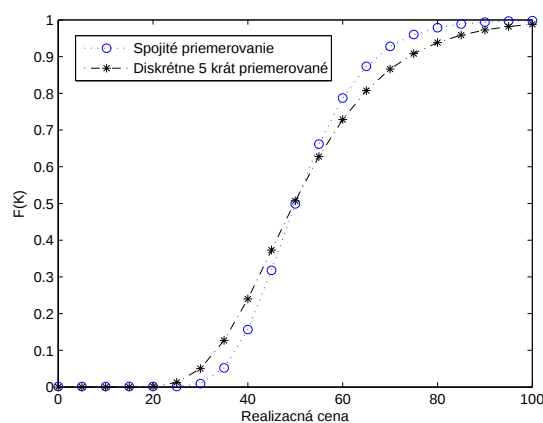


Obr. 3.2: Porovnanie hranice a ceny opcie (diskrétné priemerovanie).

Priemerná $AO = 0,7449$.



Obr. 3.3: Porovnanie ceny opcie pri rôznych priemerovaniach.

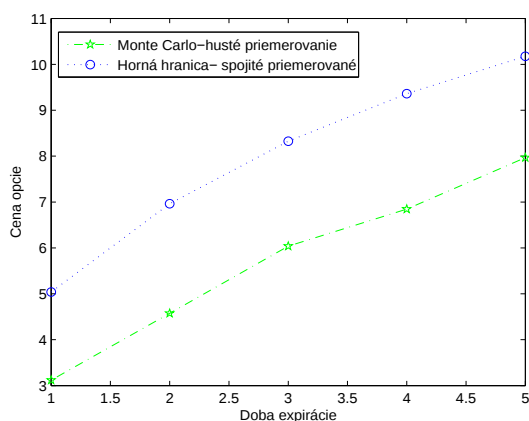


Obr. 3.4: Porovnanie $F_{Sc}(K)$ pri rôznych priemerovaniach.

Z obrázkov vidíme, že hodnota opcie s rastúcim K narastá. Tento fakt je pochopiteľný, pretože s narastajúcim K sa opcia čoraz viac vzdďaľuje od pozície in the money. Z obrázku 3.4 vidíme, že hodnota $F_{Sc}(K)$ narastá s rastúcim K a hodnoty v oboch prípadoch priemerovania sa od seba príliš nelíšia. Z obrázku 3.3 vidíme, že hodnota opcie je pre hustejšie priemerovanie nižšia. Na obrázku 3.1 a 3.2 vidíme že hodnoty hornej hranice sa nachádzajú nad hodnotami opcie. Priemerná hodnota AO je pri spojitom priemerovaní hornej hranice menšia ako pri diskretnom priemerovaní a zdá sa teda že horný odhad pre spojité priemerovanie lepšie aproximuje hodnotu opcie. Avšak v tomto prípade metóda Monte Carlo je vypočítaná pri hustom diskretnom priemerovaní, ktorým sa snažíme aproximovať spojité priemerovanie. Pri zmenšení intervalu delenia, teda pri hustejšom priemerovaní lepšie aproximujúcom spojité priemerovanie, by hodnota opcie ešte mierne klesla a AO by v tomto prípade mierne narástla. Priemerná hodnota relatívnej odchýlky nám vyšla nekonečno kvôli nulovým hodnotám opcie pri vysokej realizačnej cene. Keď sme tieto hodnoty vynechali, RO pre spojité priemerovanie bola o čosi väčšia ako pre prípad diskretného priemerovania. Horná hranica v oboch prípadoch aproximuje cenu opcie lepšie, keď sa realizačná cena nachádza ďalej od hodnoty košíka.

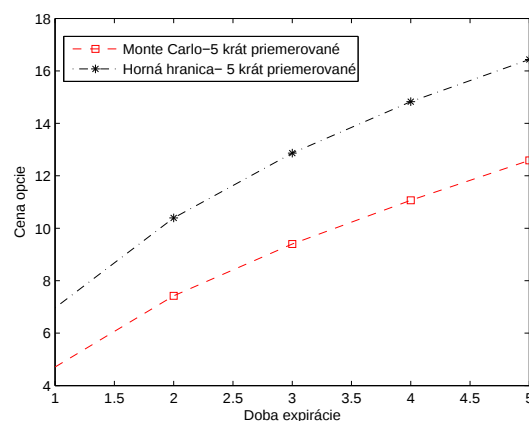
3.5.3 Závislosť hornej hranice od doby expirácie

Pozrime sa, ako sa mení hodnota hornej hranice v závislosti od zmeny doby expirácie T , pričom všetky ostatné parametre zostávajú nezmenené.



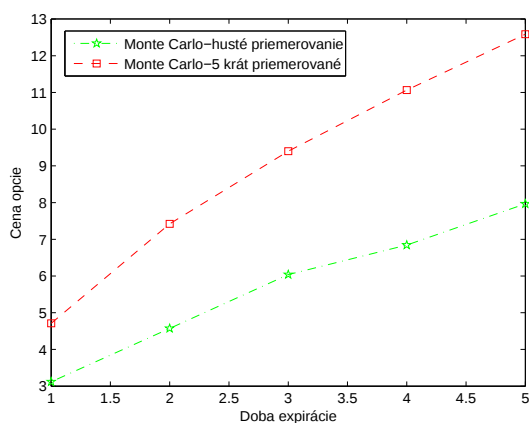
Obr. 3.5: Porovnanie hranice a ceny opcie (spojité priemerovanie).

Priemerná $AO = 2,2643$, $RO = 0,4324$.

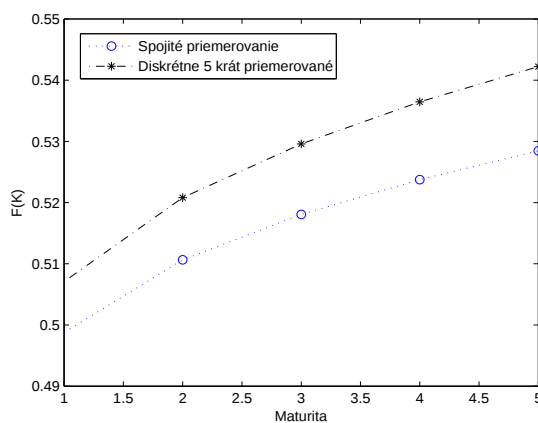


Obr. 3.6: Porovnanie hranice a ceny opcie (diskrétné priemerovanie).

Priemerná $AO = 3,2610$, $RO = 0,3788$.



Obr. 3.7: Porovnanie ceny opcie pri rôznych priemerovaniach.

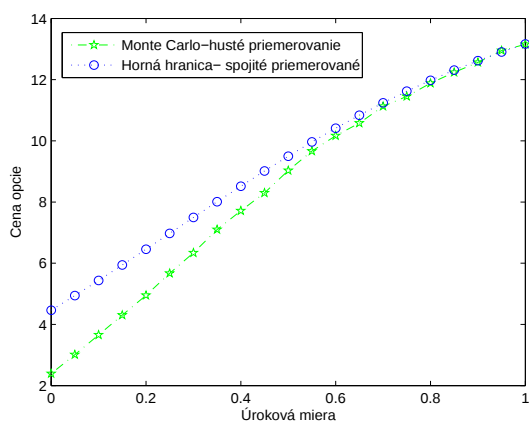


Obr. 3.8: Porovnanie $F_{Sc}(K)$ pri rôznych priemerovaniach.

Hodnota ázijskej košíkovej opcie sa s narastajúcou dobou expirácie zväčšuje. Hodnota opcie pri hustom priemerovaní je pochopiteľne opäť nižšia ako pri riedkom priemerovaní. Absolútna odchýlka AO hodnoty opcie od hornej hranice je pri spojitom priemerovaní väčšia ako pri riedkom diskrétnom priemerovaní. Relatívna odchýlka je však pri spojitom priemerovaní väčšia. Hodnoty $F_{Sc}(K)$ v oboch prípadoch narastajú.

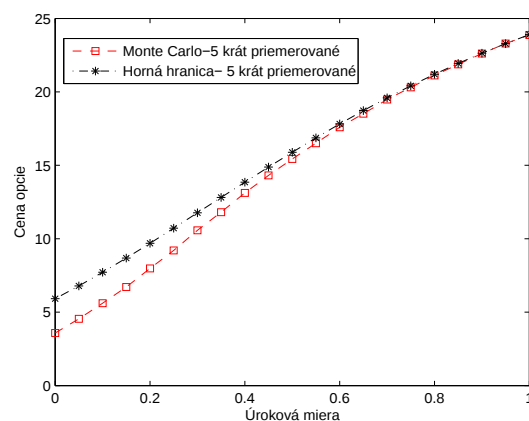
3.5.4 Závislosť hornej hranice od úrokovej miery

Pozrime sa, ako sa mení hodnota hornej hranice v závislosti od zmeny úrokovej miery r , pričom všetky ostatné parametre zostávajú nezmenené.



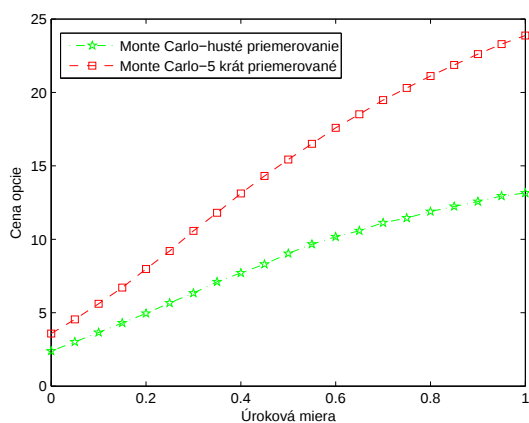
Obr. 3.9: Porovnanie hranice a ceny opcie (spojité priemerovanie).

Priemerná $AO = 0,7449$, $RO = 0,1708$.

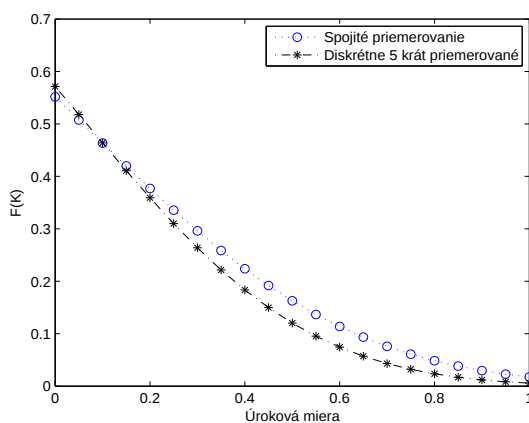


Obr. 3.10: Porovnanie hranice a ceny opcie (diskrétné priemerovanie).

Priemerná $AO = 0,8114$, $RO = 0,1229$.



Obr. 3.11: Porovnanie ceny opcie pri rôznych priemerovaniach.

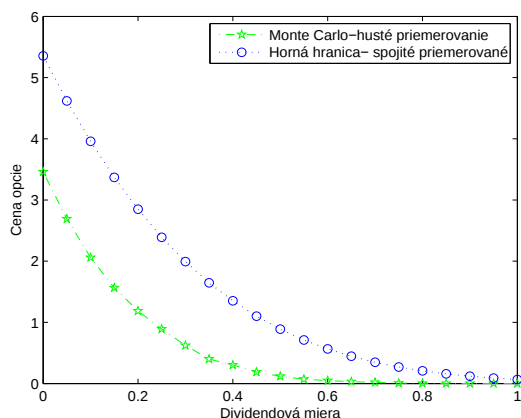


Obr. 3.12: Porovnanie $F_{Sc}(K)$ pri rôznych priemerovaniach.

Hodnota opcie s narastajúcou úrokovou mierou narastá. Z obrázku 3.5 a 3.6 vidíme, že horná hranica presnejšie aproximuje hodnotu opcie s narastajúcou úrokovou mierou. I keď sme si pre lepšiu predstavu vykreslili obrázok na intervale od 0 po 1, zaujíma nás hlavne časť grafu z úrokovou mierou do 10%, keďže v praxi sa s väčšou úrokovou mierou často nestretneme. Absolútna odchýlka je v prípade diskrétného priemerovania väčšia, avšak kvôli vyšším hodnotám opcie s riedkym diskrétnym priemerovaním je relatívna odchýlka v konečnom dôsledku menšia. Hodnoty $F_{Sc}(K)$ majú s narastajúcou úrokovou mierou klesajúci trend.

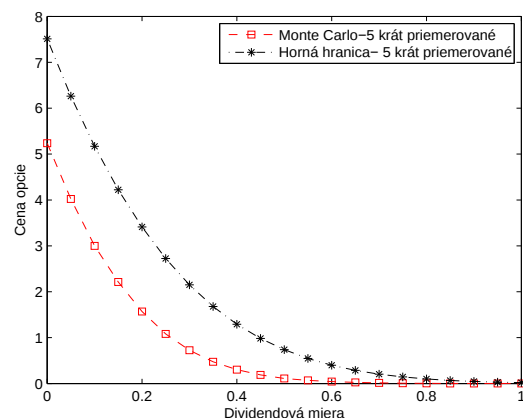
3.5.5 Závislosť hornej hranice od dividendovej miery

Pozrime sa, ako sa mení hodnota hornej hranice v závislosti od zmeny dividendovej miery, pričom uvažujeme že $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5$ a všetky ostatné parametre zostávajú nezmenené.



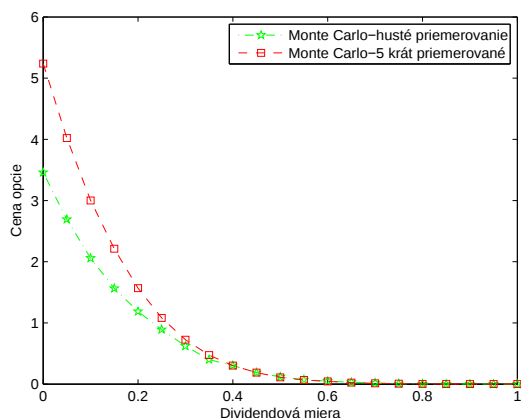
Obr. 3.13: Porovnanie hranice a ceny opcie (spojité priemerovanie).

Priemerná $AO = 0,8971$.

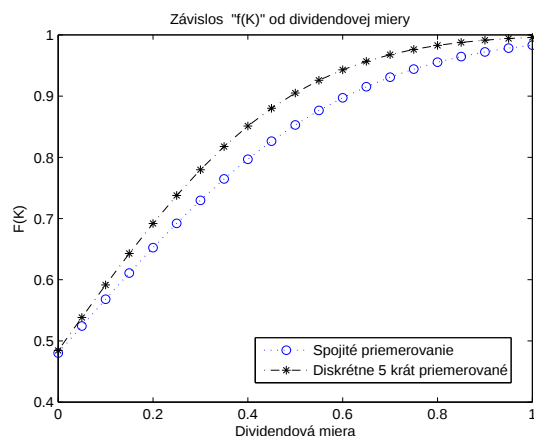


Obr. 3.14: Porovnanie hranice a ceny opcie (diskrétné priemerovanie).

Priemerná $AO = 0,9001$.



Obr. 3.15: Porovnanie ceny opcie pri rôznych priemerovaniach.

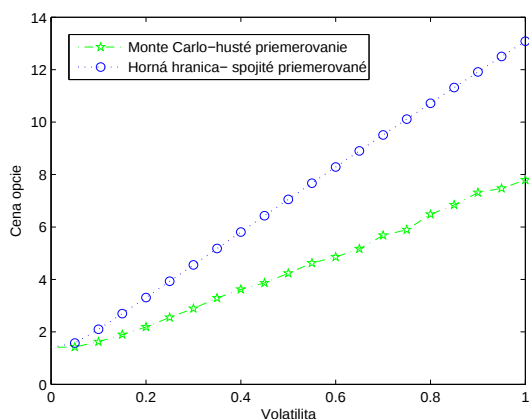


Obr. 3.16: Porovnanie $F_{Sc}(K)$ pri rôznych priemerovaniach.

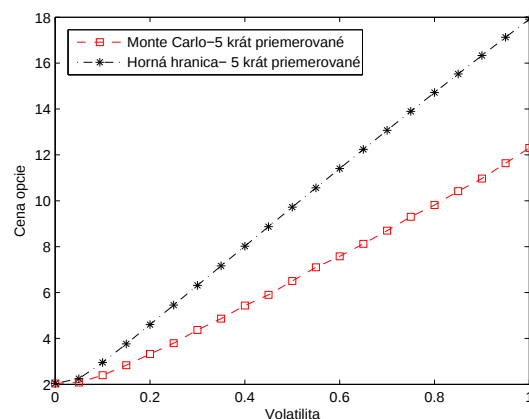
Cena ázijskej košíkovej opcie s narastajúcou mierou dividend rastie. Ako možno vidieť na obrázku 3.15, rozdiel medzi hodnotami opcie s rôznymi spôsobmi priemerovania sa s narastajúcou dividendou znižuje, keďže obe hodnoty klesajú k nule. Priemerná hodnota absolútnej odchýlky je menšia pre spojité priemerovanie. Priemerná hodnota reálnej odchýlky nám vyšla nekonečno, keďže hodnota opcie je pre vysoké hodnoty dividendovej miery rovná nule. Ak sme však tieto hodnoty vynechali, RO pre spojité priemerovanie bola o čosi vyššia ako v prípade diskrétného priemerovania. Z obrázkov 3.14 a 3.15 vidíme, že pre veľké hodnoty miery dividend horná hranica aproximuje cenu opcie presnejšie, bohužiaľ v praxi sú obvyklejšie skôr nižšie hodnoty dividendovej miery, zväčša do 10%. Hodnota $F_{Sc}(K)$ vstupujúca do výpočtu hranice v oboch prípadoch priemerovania narastá.

3.5.6 Závislosť hornej hranice od volatility

Pozrime sa, ako sa mení hodnota hornej hranice v závislosti od zmeny volatility, pričom uvažujeme že $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5$ a všetky ostatné parametre zostávajú nezmenené.



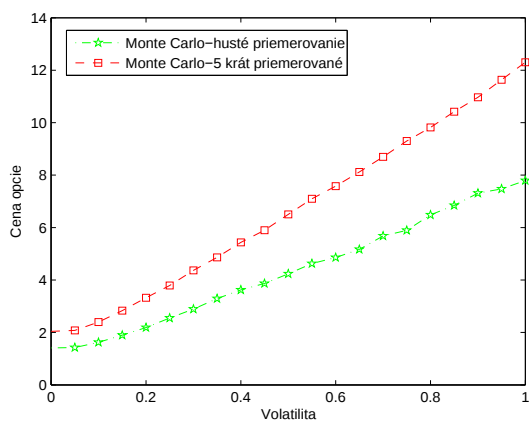
Obr. 3.17: Porovnanie hranice a ceny opcie (spojité priemerovanie).



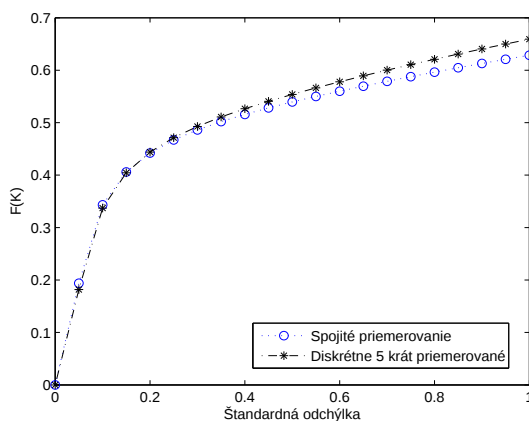
Obr. 3.18: Porovnanie hranice a ceny opcie (diskrétné priemerovanie).

Priemerná $AO = 2,7106$, $RO = 0,5580$.

Priemerná $AO = 3,0701$, $RO = 0,4173$.



Obr. 3.19: Porovnanie ceny opcie pri rôznych priemerovaniach.



Obr. 3.20: Porovnanie $F_{Sc}(K)$ pri rôznych priemerovaniach.

Hodnota opcie s narastajúcou volatilitou rastie. Horná hranica aproximuje cenu opcie lepšie pre nižšie hodnoty volatility a s rastúcou volatilitou sa odchýlka hranice od hodnoty opcie zväčšuje. Absolútna odchýlka je v prípade diskrétného priemerovania väčšia ako v prípade spojitého priemerovania, avšak s priemernou hodnotou relatívnej odchýlky je to naopak. Hodnota $F_{Sc}(K)$ vstupujúca do výpočtu hranice v oboch prípadoch priemerovania narastá s rastúcou volatilitou.

3.5.7 Numerické hodnoty pre dolnú hranicu s diskretným priemerovaním a dividendami

Predchádzajúce výsledky ukázali, že horná hranica aproximuje cenu košíkovej opcie s relatívne veľkou odchýlkou. V prípade spojitého priemerovania bola relatívna odchýlka dokonca väčšia ako v prípade diskretného priemerovania. Táto prílišná odchýlka je spôsobená pravdepodobne faktom, že táto hranica nezohľadňuje korelačnú štruktúru podkladových aktív. Do výpočtu dolnej hranice vstupuje i korelačná štruktúra, a preto táto hranica aproximuje cenu opcie o mnoho presnejšie. Numerické výsledky pre dolnú hranicu s diskretným priemerovaním a aktívami vyplácajúcimi kladné dividendy uvádzame v nasledovnej tabuľke, pričom všetky vstupné parametre z tabuliek 3.1 a 3.2 okrem hodnôt v ľavom stĺpci zostávajú rovnaké:

Tabuľka 3.4: Numerické výsledky pre dolnú hranicu s diskretným priemerovaním

	Dolná Hranica	Monte Carlo	AO	RO
K=40	11,6680	11,7212	0,0532	0,0045
K=50	4,5290	4,7399	0,2109	0,0445
K=60	1,1936	1,4198	0,2262	0,1593
t=0,5	2,6706	2,7882	0,1176	0,0422
t=1	4,5290	4,7399	0,2109	0,0445
t=5	11,9024	12,6026	0,7002	0,0556
r=0,05	4,3213	4,3537	0,0324	0,0074
r=0,10	5,4062	5,5349	0,1287	0,0233
r=0,15	6,5918	6,7286	0,1368	0,0203
D=0,05	3,8275	4,0268	0,1993	0,0495
D=0,10	2,8000	3,0074	0,2074	0,0690
D=0,15	1,9878	2,1966	0,2088	0,0951
σ =0,10	2,3444	2,3890	0,0446	0,0187
σ =0,20	3,2081	3,2946	0,9737	0,2955
σ =0,30	4,1649	4,3289	0,1640	0,0379

Záver

V tejto práci sme sa bližšie zoznámili s jedným druhom finančných derivátov - opciami. Konkrétnejšie sme sa venovali hlavne ázijským košíkovým opciám a problematike ich oceňovania, ktorá je stále veľmi aktuálna, pretože zatiaľ ešte nepoznáme jednoduchý vzorec na výpočet hodnoty takejto opcie.

Hlavným cieľom tejto práce bolo oboznámenie s odvodením hornej a dolnej komonotónnej hranice, ktoré určujú interval, v ktorom sa cena danej opcie nachádza. V tejto práci sme navyše pri odvodení týchto hraníc uvažovali, že podkladové aktívum, v našom prípade akcia, vypláca dividendy. Vzorec pre dolnú i hornú hranicu sme jemne upravili, tak aby bolo možné priemerovať v ľubovoľnom časovom okamihu.

Zo vzorca pre hornú hranicu s diskretným časovým priemerovaním sme limitným prechodom odvodili vzorec pre hornú hranicu so spojitým časovým priemerovaním. Na záver sme graficky porovnali hodnotu tejto hranice s hranicou s diskretným priemerovaním a hodnotou opcie vypočítanej metódou Monte Carlo pri zmene vstupných parametrov ako doba splatnosti, realizačná cena, úroková miera, štandardná odchýlka a dividendová miera.

V problematike Ázijských košíkových opcií ostáva ešte mnoho otázok a problémov, ako napríklad spresnenie hraníc vymedzujúcich cenu tejto opcie, alebo dokonca nájdenie jednoduchého analytického vzorca pre cenu ázijskej košíkovej opcie využiteľného každodenne vo finančnom svete.

Literatúra

- [1] Mikula, K., Stehlíková, B., Ševčovič, D., *Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov*, Vydavateľstvo STU, Bratislava, (2009), 200 str.
- [2] KWOK, Y.-K. *Mathematical Models of Financial Derivatives*, 2.vyd. Berlin: Springer. 2008.
- [3] Deelstra, G., Diallo, I., Vanmaele, M., *Bounds for Asian basket options*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 218 (2008), 215- 228.
- [4] Melicherčík, I., Olšárová, L., Úradníček, V., *Kapitoly z finančnej matematiky*, Bratislava: Epos. 2005.
- [5] Rogers, L.C.G., Shi, Z., *The value of an Asian option*, J. Appl. Prob. 32 (1995), 1077-1088.
- [6] Boyle, P.P., *Options: A Monte Carlo approach*, Journal of Financial Economics, 1977. č. 4, 323 - 338.
- [7] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R., Vyncke, D., *The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications*. Insurance Math. Econom. 31 (2) 2002, 133-161.
- [8] Dhaene, J., Goovaerts, M.J., Simon, S., *An easy computable upper bound for the price of an arithmetic Asian option* Insurance: Mathematics and Economics. 26, 2-3 (May) 2000, 175-183.

- [9] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R., Vyncke, D., *The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory*, Insurance Math. Econom. 31 (1) 2002, 3-33.
- [10] Shaked, M., Shanthikumar, J.G., *Stochastic Orders and their Applications*, Academic Press, New York, 1994, 545 pp.
- [11] Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R., Vyncke, D., *A simple geometric proof that comonotonic risks have the convex-largest sum*, ASTIN Bulletin, Vol. 32, No. 1, 2002, pp. 71-80,
- [12] Deelstra, G., Liinev, J., Vanmaele, M., *Pricing of arithmetic basket options by conditioning*, Insurance: Mathematics and Economics Volume 34, Issue 1, 20 February 2004, Pages 55-77

Kapitola 4

Príloha

4.1 Zdrojový kód

4.1.1 Horná hranica so spojitým priemerovaním

Funkcia č.1

```
function [cub]=CUB_spojite_priemerovanie(r,D,T,sigma,K)
%výpočet hornej hranice so spojitým časovým priemerovaním
%r - uroková miera
%D - dividendová miera
%T - maturita
%sigma - štandardná odchýlka
%K - realizačná cena

n=5; %počet aktív
S=[42.55,48.21,34.30,100.00,66.19]; %začiatočné ceny podkladových aktív
a=[1/4,1/5,3/10,1/10,15/100]; %váhy vzťahujúce sa k jednotlivým aktívam

fsck=fsknula_spojite_priemerovanie(K,r,sigma,D,S,a,T); %koreň rovnice (3.60)
```

```
%výpočet hornej hranice CUB
cub=0; %Hornú hranicu nastavíme na začiatku na nulovú hodnotu
C=norminv(fsck); %označenie

for l=1:n
A(l)=D(l)+((sigma(l)^2)/2) -r; %označenie
if A(l)==0 %prípád, keď A(l) je rovné nula
R(l)=2*((exp(C*sigma(l)*sqrt(T)))/(C*sigma(l)))-(2/(C*sigma(l)));
elseif A(l)>0 %prípád, keď A(l) je väčšie ako nula
R(l)=( exp((((C^2)*(sigma(l)^2))/(4*A(l)))* sqrt(pi)*...
( erf((C*sigma(l))/(2*sqrt(A(l)))) + erf((-C*sigma(l) ...
+ 2*A(l)*sqrt(T))/(2*sqrt(A(l)))) ) )/sqrt(A(l));
else %prípád, keď A(l) je menšie ako nula
A(l)=-A(l);
R(l)=( exp(-(((C^2)*(sigma(l)^2)))/(4*A(l)))* sqrt(pi)*...
( -erfi((C*sigma(l))/(2*sqrt(A(l)))) + erfi((C*sigma(l)...
+ 2*A(l)*sqrt(T))/(2*sqrt(A(l)))) ) )/sqrt(A(l));
end
cub=cub+a(l)*S(l)*(1/T)*exp(-D(l)*T)*(1/(r-D(l)))*( -exp(-((r-D(l))*T))...
*normcdf(-C) + normcdf(sigma(l)*sqrt(T)-C) - (sigma(l)/(2*sqrt(2*pi))))*...
exp(-((C^2)/2) - (r-D(l))*T)*R(l) );%vzorec pre sumu v hornej hranici
end

cub=cub-exp(-r*T)*K*(1-fsck);% odčítame člen mimo sumy ->horná hranica
end
```

Funkcia č.2 - metóda bisekcie na výpočet vzťahu (3.60)

```
function x = fsknula_spojite_priemerovanie(K,r,sigma,D,S,a,T)
% metóda delenia intervalu - bisekcia
```

```
a1=0;
b1=1;
x=10;
iter=0; %nastavíme počet iterácií na nulu
while(abs(x)>0.00000000000001 && iter<100)
iter=iter+1;
c=(a1+b1)/2;
x=fsk_spojite_priemerovanie(c,K,r,sigma,D,S,a,T);%rozdiel strán rovnice (3.60)
if x>0 %ak je rozdiel strán väčší ako nula, posunieme horný bod intervalu
b1=c;
end
if x<0 %ak je rozdiel strán väčší ako nula, posunieme spodný bod intervalu
a1=c;
end
end
x=(a1+b1)/2; %bod, v ktorom má funkcia takmer nulovú hodnotu -> koreň
end
```

Funkcia č.3 - rozdiel strán rovnice (3.60)

```
function y = fsk_spojite_priemerovanie(c,K,r,sigma,D,S,a,T)
%rozdiel ľavej a pravej strany vzťahu (3.60)

y=0; %pomocná premenná
n=5; %počet podkladových aktív

C=norminv(c);%pomocné označenie

%ľavá strana rovnosti
for l=1:n
U(l)=C*sigma(l);%pomocné označenie
```

```

A(1)=D(1)+((sigma(1)^2)/2) -r; %pomocné označenie
if A(1)==0 %prípad, keď A(1) je rovné nula
Q(1)=((exp(U(1)*sqrt(T))*(U(1)*sqrt(T)-1))/(U(1)^2))+ (2/(U(1)^2));
elseif A(1)>0 %prípad, keď A(1) je väčšie ako nula
Q(1)=(1-exp(U(1)*sqrt(T)-A(1)*T))/A(1) + 1/(2*(A(1)^(1.5)))*...
( U(1)*sqrt(pi)*exp((U(1)^2)/(4*A(1)))* ( erf(U(1)/(2*sqrt(A(1)))))...
+ erf((-U(1) + 2*A(1)*sqrt(T))/(2*sqrt(A(1)))) ) );
else %prípad, keď A(1) je menšie ako nula
A(1)=-A(1);
Q(1)=(1/(2*(A(1)^1.5)))* (exp((-U(1)^2)/(4*A(1))) *(2*sqrt(A(1)))*...
exp((U(1)^2)/(4*A(1))) * ( -1+exp( U(1)*sqrt(T)+A(1)*T) )...
+U(1)*sqrt(pi)* ( erfi(U(1)/(2*sqrt(A(1)))) - erfi((U(1) +...
2*A(1)*sqrt(T))/(2*sqrt(A(1)))) ) ));
end
y=y+a(1)*(S(1)/T)*Q(1);%ľavá strana rovnosti
end

y=y-K; %rozdiel strán rovnosti (3.60)
end

```

4.1.2 Metóda Monte Carlo pre výpočet ázijskej košíkovej opcie

```
function [mc]=CUB_Monte_Carlo(m,K,sigma,r,D,T)
%výpočet ázijskej košíkovej opcie metódou Monte Carlo
%m - počet delení
%K - realizačná cena
%sigma - štandardná odchýlka
%r - úroková miera
%D - dividendová miera
%T - maturita

a=[1/4,1/5,3/10,1/10,15/100];%váhy prislúchajúce jednotlivým aktívam
b=ones(m,1)*(1/m);%váhy prislúchajúce jednotlivým časom
n=5;%počet aktív
dt=T/m; %dĺžka kroku časového delenia
t=(dt:dt:T); % vektor časových delení
d=length(t) ;%počet delení časového priemerovania
SS=[42.55,48.21,34.30,100.00,66.19];%počiatočné hodnoty podkladových aktív
%korelačná štruktúra podkladových aktív
ro=[1.00,0.84,-0.07,0.45,0.43;
0.84,1.00,0.08,0.62,0.57;
-0.07,0.08,1.00,-0.54,-0.59;
0.45,0.62,-0.54,1.00,0.86;
0.43,0.57,-0.59,0.86,1.00];

Lt=chol(ro); %choleského rozklad
L = Lt';

p=1000; %počet realizácií
```

```
%generovanie prírastkov wienerovho procesu
for j=1:n
    for i=1:d
        for k=1:p
            dw=randn;
            u(j,k,i)=dw*(sqrt(dt));
        end;
    end
end;

%prírastky so správnu korelačnou štruktúrou
for i=1:n
    for l=1:p
        for j=1:d
            ww(i,l,j)=0;
            for k=1:n
                ww(i,l,j)=ww(i,l,j)+L(i,k)*u(k,l,j);
            end
        end
    end
end

%z prírastkov urobíme wienerov proces
for i=1:n
    for l=1:p
        W(i,l,1)=0;
        for j=1:d
            W(i,l,j+1)= W(i,l,j)+ww(i,l,j);
        end
    end
end
```

```

end
end

%cena aktíva
for i=1:n
for l=1:p
for j=0:m-1
S(i,l,j+1)=SS(i)*exp((r-D(i)-1/2*sigma(i)*...
sigma(i))*((j+1)/m)+sigma(i)*W(i,l,j+1));
end
end
end

%vážená cena aktíva
abc=zeros(1,p);
for l=1:p
for i=1:n
for j=0:m-1
abc(l)=abc(l)+a(i)*b(j+1)*S(i,l,j+1);
end
end
end

for l=1:p
abc(l)=max(abc(l)-K,0)*exp(-r*T);
end

mc=0;
mc=mean(abc);%Priemer zrealizovaných hodnôt cien ázijských košíkových opcií
end

```

4.2 Dolná hranica so spojitým časovým priemerovaním

V tejto časti skúsime odvodiť spodnú hranicu so spojitým priemerovaním. V prípade spojitého priemerovania je podmieňovacia premenná, pri ktorej majú všetky korelačné koeficienty rovnaké znamienka, daná ako:

$$\Lambda = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_k \sigma_k b_i W_k(T - \tau_i)}{\sqrt{\text{Var}(\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{m-1} a_k b_i \sigma_k W_k(T - \tau_i))}} \quad (4.1)$$

Táto podmieňovacia premenná má normované normálne rozdelenie. Uvažujeme ekvidištancné časové delenie a do nekonečna sa zmenšujúci krok v časovom delení. Nahradíme preto priemer vzťahujúci sa k časovému deleniu príslušným integrálom a z predošlého vzťahu dostaneme:

$$\Lambda = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T a_k \sigma_k W_k(T - \tau_1) d\tau_1}{\sqrt{\text{Var}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T a_k \sigma_k W_k(T - \tau_1) d\tau)}}. \quad (4.2)$$

Výraz $\sum_{k=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T a_k \sigma_k W_k(T - \tau_1) d\tau$ označíme ako X . Keďže stredná hodnota Wienerovho procesu je rovná 0, pre $\text{Var}(X)$ platí:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X^2] - 0 \quad (4.3)$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{k_1=0}^n a_k \sigma_k a_{k_1} \sigma_{k_1} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T W_k(T - \tau_1) W_{k_1}(T - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (4.4)$$

V nasledujúcom kroku využijeme vzťah:

$$\mathbb{E}(W_l(t_1) W_k(t_2)) = \rho_{l,k} \min(t_1, t_2). \quad (4.5)$$

Pre vzťah (3.65) teda platí:

$$\text{Var}(X) = \sum_{k=1}^n \sum_{k_1=0}^n a_k \sigma_k a_{k_1} \sigma_{k_1} \rho_{k,k_1} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \min((T - \tau_1), (T - \tau_2)) d\tau_1 d\tau_2. \quad (4.6)$$

Dosadením do vzťahu (3.63) dostávame pre Λ :

$$\Lambda = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T a_k \sigma_k W_k(T - \tau_1) d\tau_1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{k_1=0}^n a_k \sigma_k a_{k_1} \sigma_{k_1} \rho_{k,k_1} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \min((T - \tau_1), (T - \tau_2)) d\tau_1 d\tau_2}}. \quad (4.7)$$

Menovateľ tohto výrazu označíme ako p . Podmieňovacia premenná Λ vstupuje do výpočtu dolnej hranice cez korelačné koeficienty $r_{l,j}$, ktoré môžeme vypočítať ako:

$$r_{l,\tau} = \frac{\text{Cov}(W_l(T - \tau), \Lambda)}{\sqrt{T - \tau} \sigma_\Lambda}. \quad (4.8)$$

Keďže $\Lambda \sim N(0, 1)$ a kovarianciu možno vyjadriť ako rozdiel strednej hodnoty súčinu a súčinu stredných hodnôt, z predošlého vzťahu dostávame:

$$\begin{aligned} r_{l,\tau} &= \frac{\mathbb{E}(W_l(T - \tau)\Lambda) - \mathbb{E}(W_l(T - \tau))\mathbb{E}(\Lambda)}{\sqrt{T - \tau} \cdot 1} \\ &= \frac{\mathbb{E}(W_l(T - \tau)\Lambda)}{\sqrt{T - \tau} \cdot 1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dosadíme hodnotu Λ zo vzťahu (3.68):

$$\begin{aligned} r_{l,\tau} &= \frac{1}{\sqrt{T - \tau}} \mathbb{E} \left(\frac{W_l(T - \tau) \sum_{k=1}^n \frac{1}{T} \int_0^T a_k \sigma_k W_k(T - \tau_1) d\tau_1}{p} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{T - \tau} p} \sum_{k=1}^n a_k \sigma_k \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}(W_k(T - \tau_1) W_l(T - \tau)) d\tau_1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Opäť využijeme vzťah (3.66):

$$r_{l,\tau} = \frac{1}{\sqrt{T - \tau} p} \sum_{k=1}^n a_k \sigma_k \rho_{l,k} \frac{1}{T} \int_0^T \min((T - \tau_1), (T - \tau)) d\tau_1. \quad (4.11)$$

Dosadením hodnoty p dostávame:

$$r_{l,\tau} = \frac{1}{\sqrt{T - \tau}} \frac{\sum_{k=1}^n a_k \sigma_k \rho_{l,k} \frac{1}{T} \int_0^T \min((T - \tau_1), (T - \tau)) d\tau_1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{k_1=0}^n a_k \sigma_k a_{k_1} \sigma_{k_1} \rho_{k,k_1} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \min((T - \tau_1), (T - \tau_2)) d\tau_1 d\tau_2}}. \quad (4.12)$$

Integrál v čitateli označíme ako I_1 . Pre tento integrál platí:

$$I_1 = \int_0^T \min((T - \tau_1), (T - \tau)) d\tau_1 \quad (4.13)$$

$$= \int_0^\tau (T - \tau) d\tau_1 + \int_\tau^T (T - \tau_1) d\tau_1 \quad (4.14)$$

$$= \frac{T^2 - \tau^2}{2}. \quad (4.15)$$

Integrál v menovateli označíme ako I_2 :

$$I_2 = \int_0^T \int_0^T \min((T - \tau_1), (T - \tau_2)) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.16)$$

$$= \int_0^{\tau_1} \int_0^{\tau_2} (T - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^{\tau_1} \int_{\tau_2}^T (T - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.17)$$

$$+ \int_{\tau_1}^T \int_0^{\tau_2} (T - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_{\tau_1}^T \int_{\tau_2}^T (T - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (4.18)$$

$$= \frac{T^3}{3}. \quad (4.19)$$

Hodnoty I_1 a I_2 dosadíme do vzťahu (3.73) a pre korelačné koeficienty dostávame:

$$r_{l,\tau} = \frac{T^2 - \tau^2}{\sqrt{T - \tau}} \frac{\sum_{k=1}^n a_k \sigma_k \rho_{l,k} \frac{1}{2T}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{k_1=0}^n a_k \sigma_k a_{k_1} \sigma_{k_1} \rho_{k,k_1} \frac{T}{3}}}. \quad (4.20)$$

Výraz $\frac{\sum_{k=1}^n a_k \sigma_k \rho_{l,k} \frac{1}{2T}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sum_{k_1=0}^n a_k \sigma_k a_{k_1} \sigma_{k_1} \rho_{k,k_1} \frac{T}{3}}}$ označíme ako B_l a predošlý vzťah prepíšeme na tvar:

$$r_{l,\tau} = \frac{T^2 - \tau^2}{\sqrt{T - \tau}} B_l. \quad (4.21)$$

Dolná hranica je daná v diskretnom prípade rovnosťou (3.37). Pri prechode na spojité priemerovanie sa daná rovnosť zmení na tvar:

$$LB\lambda = \sum_{l=1}^n a_l S_l(0) \frac{1}{T} \int_0^T e^{-D_l(T-\tau)} e^{-r\tau} \phi\left(\sigma_l r_{l,\tau} \sqrt{T - \tau} - \phi^{-1}(F_{S^l}(K))\right) d\tau \quad (4.22)$$

$$- e^{-rT} K(1 - F_{S^l}(K)).$$

Dosadíme $r_{l,\tau}$ zo vzťahu (3.82):

$$LB\lambda = \sum_{l=1}^n a_l S_l(0) \frac{1}{T} \int_0^T e^{-D_l(T-\tau)} e^{-r\tau} \phi\left(\sigma_l B_l (T^2 - \tau^2) - \phi^{-1}(F_{S^l}(K))\right) d\tau \quad (4.23)$$

$$- e^{-rT} K(1 - F_{S^l}(K))$$

$$= \sum_{l=1}^n a_l S_l(0) \frac{1}{T} e^{-D_l T} \int_0^T e^{(D_l - r)\tau} \phi\left(\sigma_l B_l (T^2 - \tau^2) - \phi^{-1}(F_{S^l}(K))\right) d\tau$$

$$- e^{-rT} K(1 - F_{S^l}(K)).$$

Výraz $\phi^{-1}(F_{S^l}(K))$ označíme ako C . Integrál z predchádzajúceho vzťahu označíme ako I_3 . Pri výpočte tohto integrálu použijeme metódu integrovania po častiach, kde $u' = e^{(D_l-r)\tau}$ a $v = \phi(\sigma_l B_l(T^2 - \tau^2) - C)$:

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[\frac{e^{(D_l-r)\tau}}{D_l-r} \phi(\sigma_l B_l(T^2 - \tau^2) - C) \right]_0^T + \int_0^T \frac{e^{(D_l-r)\tau}}{D_l-r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sigma_l B_l(T^2 - \tau^2) - C)^2}{2}} 2\sigma_l B_l \tau d\tau \\ &= \frac{e^{(D_l-r)T}}{D_l-r} \phi(-C) - \frac{\phi(\sigma_l B_l T^2 - C)}{D_l-r} + \frac{2\sigma_l B_l}{D_l-r} \int_0^T \tau e^{(D_l-r)\tau} e^{-\frac{(\sigma_l B_l(T^2 - \tau^2) - C)^2}{2}} d\tau. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Integrál v predchádzajúcom vzťahu označíme ako I_4 . Tento integrál ďalej upravíme a vyjmeme členy, ktoré nevstupujú do integrovania:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^T \tau e^{(D_l-r)\tau} \exp\left(-\frac{\sigma_l^2 B_l^2 (T^4 - 2T^2 \tau^2 + \tau^4)}{2} + \sigma_l B_l (T^2 - \tau^2) C - \frac{C^2}{2}\right) d\tau \\ &= e^{\sigma_l B_l C T^2 - \frac{C^2}{2} - \frac{\sigma_l^2 B_l^2 T^4}{2}} \int_0^T \tau e^{(D_l-r)\tau} \exp\left((\sigma_l^2 B_l^2 T^2 - \sigma_l B_l C) \tau^2 - \frac{\sigma_l^2 B_l^2}{2} \tau^4\right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Označíme $(D_l - r)$ ako α , $(\sigma_l^2 B_l^2 T^2 - \sigma_l B_l C)$ ako β a $\frac{\sigma_l^2 B_l^2}{2}$ ako γ . Pre dolnú hranicu so spojitým priemerovaním teda platí:

$$\begin{aligned} LBA &= \sum_{l=1}^n \frac{a_l S_l(0)}{T\alpha} \left(e^{\alpha T} \phi(-C) - \phi(\sigma_l B_l T^2 - C) \right. \\ &\quad \left. + 2\sigma_l B_l e^{\sigma_l B_l C T^2 - \frac{C^2}{2} - \frac{\sigma_l^2 B_l^2 T^4}{2}} \int_0^T \tau e^{\alpha\tau + \beta\tau^2 - \gamma\tau^4} d\tau \right) - e^{-rT} K(1 - F_{S^l}(K)). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Pre integrál $\int_0^T e^{\alpha\tau + \beta\tau^2 - \gamma\tau^4} d\tau$ bohužiaľ neexistuje analytické vyjadrenie. Takže jednoduchý analytický vzorec pre dolnú hranicu sme takýmto spôsobom nenašli. Tento vzorec sa dá využiť pre výpočet dolnej hranice so spojitým priemerovaním, ak by sme spomínaný integrál riešili numericky, čo však môže spôsobiť väčšiu časovú náročnosť a numerické nepresnosti.

Podobne i pri výpočte hodnoty $F_{S^l}(K)$ pri spojitom prípade by sme sa dostali k integrálu, ktorý nemá explicitné analytické vyjadrenie, preto by sme ho tiež museli riešiť numericky.