

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



Riadenie portfólia pomocou zaistených stratégií

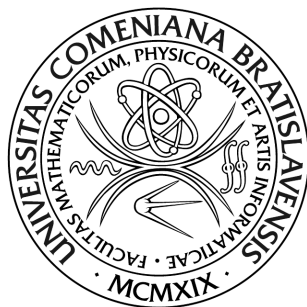
DIPLOMOVÁ PRÁCA

EVIDENČNÝ KÓD: 17FA2530-530F-49F3-A045-865646B97D8A

Bc. Zuzana Krajčovičová

Bratislava 2011

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky



Riadenie portfólia pomocou zaistených stratégií

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bc. Zuzana Krajčovičová

9.1.9 Aplikovaná matematika

EKONOMICKÁ A FINANČNÁ MATEMATIKA

Vedúci diplomovej práce

Doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2011



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Zuzana Krajčovičová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Riadenie portfólia pomocou zaistených stratégií

Cieľ : Zaistená stratégia je založená na stanovaní určitej hranice, ktorú má ambíciu dosiahnuť. Úlohou práce bude formulácia a testovanie možných zaistených stratégií. Dôraz bude kladený na LEL (Limited expected loss) stratégiu.

Vedúci : doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 28.01.2010

Dátum schválenia: 09.04.2011

.....
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

Krajcovicova

.....
študent

Melicherčík

.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

15.11.2011

Melicherčík

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne vyhlasujem, že túto diplomovú prácu som vypracovala samostatne s použitím uvedenej literatúry a s odbornou pomocou diplomového vedúceho.

Bratislava, 19. apríla 2011

.....

Zuzana Krajčovičová

Pod'akovanie

Úprimne ďakujem diplomovému vedúcemu Doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za všestrannú pomoc, množstvo podnetných nápadov a ochotu prejavenu pri vedení diplomovej práce.

Súčasne ďakujem aj svojim rodičom, ktorí mi umožnili štúdium na vysokej škole a za ich nepretržitú podporu počas celého štúdia.

Abstrakt

Krajčovičová, Zuzana: *Riadenie portfólia pomocou zaistených stratégií*, Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky, Diplomová práca, 2011.

Školiteľ: Doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Diplomová práca je zameraná na zaistené stratégie, ktoré sú založené na dosiahnutí vopred stanovenej určitej hranice, väčšinou definovanej ako percento z počiatočnej investície. Uvádzame formuláciu a porovnanie rôznych investičných stratégií poistovania portfólia. Hlavná časť práce je zameraná na optimálnu dynamickú alokáciu majetku pomocou LEL stratégie, ktorá rieši hlavné nedostatky spojené s optimalizáciou portfólia pomocou Value-at-risk stratégie rizikového manažmentu. V prvej časti podávame riešenie optimalizačného dynamického systému pre LEL-RM a skúmame citlivosť optimálnej hodnoty majetku a vystavenia vzhľadom na zmenu základných parametrov stratégie. Druhá časť práce je zameraná na testovanie stratégie na reálnych dátach a zároveň výsledky porovnávame s alternatívnymi investičnými stratégiami.

Kľúčové slová: *zaistené stratégie, poistenie portfólia, dynamická optimalizácia, Value-at-risk (VaR), ohraničená očakávaná strata (LEL)*

Abstrakt

Krajčovičová, Zuzana: *Portfolio regulation with insurance strategies*, Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics, Master's thesis, 2011

Supervisor: Doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Master's thesis focuses on the portfolio insurance strategies that are based on guarantee predetermined certain threshold mostly defined as a percentage of initial investment. We introduce formulation and comparison of different portfolio investment strategies. The main part of our work is focused on optimal dynamic allocation using LEL strategy that remedies the shortcoming of portfolio optimization under VaR-based risk management strategy. In the first part, we solve the dynamic optimization problem of LEL-RM and we analyse the sensitivity of the LEL-RM optimal portfolio wealth and the exposure to risky assets to varying levels of the basic parameters of the strategy. The second part focuses on testing this strategy on real data and we also compare our results with alternative investment strategies.

Key words: *investment strategies, portfolio insurance, dynamic optimization, Value-at-Risk (VaR), limited expected loss (LEL)*

Obsah

Úvod	1
1 Zaistené stratégie	3
1.1 Constant Proportion Portfolio Insurance	4
1.2 Option-based Portfolio Insurance	6
1.3 Porovnanie CPPI a OBPI stratégie	7
2 Všeobecné predpoklady a nastavenia	9
2.1 Dynamický vývoj aktív	9
2.2 Výpočet Value-at-risk	11
3 Optimalizácia pomocou VaR-RM	12
3.1 Formulácia modelu	12
4 Optimalizácia pomocou LEL-RM	18
4.1 LEL rizikový manažment	18
4.2 Optimalizácia pri LEL-RM	19
4.3 Vlastnosti LEL-RM	21
4.3.1 Výpočet kritických hodnôt	22
4.3.2 Optimálna hodnota portfólia v čase t	25
4.4 Vystavenie do rizikových aktív	27
4.4.1 Reakcia vystavenia do rizikových aktív v závislosti od zmeny LEL parametrov	29
5 Aplikácia LEL-RM na simulovaný vývoj portfólia	34
5.1 Jednoročné držanie portfólia	35

5.2	Predĺženie investičného horizontu	36
5.3	Zníženie hodnoty dna	37
5.4	Výraznejšie zníženie dna	38
5.5	Zvýšenie averzie voči riziku	39
5.6	Zníženie averzie voči riziku	40
6	Historické simulácie	41
6.1	Ročné držanie portfólia	41
6.1.1	Zníženie hodnoty dna o 3%	45
6.2	Predĺženie pozorovaného obdobia na dobu $T = 2$	46
6.2.1	Zníženie dna \underline{W}_a zvýšenie parametra ϵ	49
6.2.2	Zvýšenie averzie voči riziku	51
6.3	Reakcia LEL-RM na prudký pokles cien akcií	52
7	Straty pri LEL-RM a VaR-RM	56
7.1	Porovnanie strát	58
8	Dynamická vs. statická stratégia	61
8.1	Optimalizačný problém pri alokácii majetku pomocou put opcie	62
8.2	Porovnanie stratégií	63
8.2.1	Participácia na raste podkladových aktív	63
8.2.2	Historická simulácia a prudký pokles rizikového aktíva	65
8.3	Simulovaný vývoj aktív	67
9	Záver	70
10	Príloha	72
10.1	Výpočet kritických hodnôt pre LEL-RM	72
10.1.1	Riešenie systému	76
10.2	Výpočet kritickej hodnoty pre benchmark	80
10.3	Výpočet kritickej hodnoty pre úplne poistené portfólio	82
	Literatúra	84

Úvod

Investičné stratégie poisťovania portfólia sú definované ako stratégie, ktoré poskytujú čiastočné alebo úplné poistenie proti stratám, pričom garantujú minimálnu hodnotu majetku vo vopred stanovenom čase nezávisle od správania trhu. Zároveň umožňujú participáciu pri pozitívnom vývoji na finančných trhoch, ktorá je však, ako uvádza [2], menšia ako v prípade nepoisteného portfólia. Pri rastúcej volatilitate trhov bolo do dnešnej doby definované veľké množstvo investičných stratégií, ktorých hlavným cieľom je poistenie portfólia. Medzi najpoužívanejšie patria zaistené stratégie a stratégie založené na dynamickom riadení rizika. Mnohé finančné inštitúcie a firmy využívajú čoraz vo väčšej miere stratégie rizikového manažmentu pri riadení portfólia. Ako hlavnú mieru rizika najčastejšie využívajú Value-at-risk (VaR), ktorej hlavnou výhodou je fakt, že pri jej výpočte nie je potrebné v plnej miere poznať hustotu výnosov a strát. Navyše je jednoducho interpretovateľnou mierou rizika, ktorú využívajú investori ako účinný nástroj pri kontrole a riadení rizika.

Basak a Shapiro (2001) odvodili optimálnu investičnú stratégiu pre investorov maximalizujúcich funkciu užitočnosti pri VaR ohraničeniach a dokázali niekoľko prekvapivých dôsledkov využitia rizikového manažmentu založeného na VaR. Zistili, že investor riadiaci sa VaR-RM dosahuje v extrémne zlých stavoch väčšie straty ako nepoistený investor. Ukázali, že VaR stratégia redukuje straty v stavoch, v ktorých sa vyskytujú s $(100 - \alpha)\%$ pravdepodobnosťou, ale prehliada $\alpha\%$ stavov, ktoré nezhrňa VaR odhad. Navyše vo veľmi zlých stavoch optimálna VaR stratégia zvyšuje vystavenie do rizikových aktív, čím zvyšuje riziko strát. V niektorých špeciálnych prípadoch dokonca stratégia zvyšuje pravdepodobnosť extrémnych záporných výnosov. Tento efekt je výraznejší pre ekonomiky, v ktorých investori spotrebúvajú veľký podiel svojho majetku, pre ekonomiky s vysokou maximálnou pravdepodobnosťou straty α a pre ekonomiky s vysokou hodnotou dna \underline{W} .

Na základe zistených nedostatkov VaR-RM odvodili Basak a Shapiro (2001) alternatívnu formu rizikového manažmentu LEL-RM (Limited-expected-losses risk management), ktorá rieši hlavné problémy spojené z využitím VaR-RM.

Cieľom diplomovej práce je podať podrobnú analýzu alternatívnej dynamickej stratégie, LEL-RM k dnes veľmi rozšírenej stratégii rizikového manažmentu založenej na odhade VaR. Konkrétne budeme sledovať vplyv zmeny investorových preferencií a exogénnych parametrov na správanie sa LEL-RM. Definujeme a uvedieme riešenie dynamickej optimalizačnej úlohy pri riadení portfólia pomocou LEL-RM, ktorá v sebe zahŕňa aj prípad nepoisteného portfólia, t.j. benchmarku ($\epsilon = \infty$) a úplne poisteného portfólia ($\epsilon = 0$). Ukážeme, že na rozdiel od VaR-RM sú straty v prípade LEL-RM menšie ako pri nepoistenom portfóliu a niekoľko krát menšie ako v prípade VaR-RM. Vďaka optimálnej dynamickej alokácii majetku počas investičného horizontu poisťuje stratégia portfólio vo všetkých stavoch a redukuje všetky prípadné straty. Následne ukážeme, že prednostné využívanie dynamickej stratégie na riadenie portfólia pri dnešnej zvyšujúcej sa volatilitate finančných trhov je opodstatnené ako v prípade pozitívneho vývoja, tak aj negatívneho vývoja finančných trhov.

Štruktúra diplomovej práce je nasledovná: Prvá kapitola je zameraná na stručnú charakterizáciu zaistených stratégií, z ktorých najvyužívanejšími sú CPPI (Constant proportion portfolio insurance) a OBPI (Option based portfolio insurance). V kapitole 2 popisujeme základné predpoklady a nastavenia, ktoré sú základom pre definovanie stratégie rizikového manažmentu. V kapitole 3 definujeme dynamickú optimalizačnú úlohu pri riadení portfólia pomocou VaR-RM a poukážeme na hlavné nedostatky stratégie. Štvrtá kapitola je zameraná na podrobný popis a definíciu LEL-RM. Ponúka riešenie dynamickej optimalizačnej úlohy a analýzu citlivosti vystavenia na zmenu základných parametrov stratégie. Kapitola 5 poskytuje analýzu citlivosti stratégie na zmenu parametrov pri simulovanom vývoji portfólia a porovnáva výsledky s portfóliom pri naivnej diverzifikácii. V kapitole 6 aplikujeme LEL-RM na reálny vývoj aktív a ukážeme správanie stratégie pri rôznych trhových podmienkach. V siedmej kapitole porovnáваме potenciálne straty pri riadení portfólia pomocou VaR-RM a LEL-RM. Kapitola 8 poskytuje porovnanie dynamickej a statickej investičnej stratégie a poukazuje na významnú úlohu dynamickej stratégie pri vysokej volatilitate trhu.

Kapitola 1

Zaistené stratégie

Zaistené stratégie (PI) patria medzi najpoužívanéjšie investičné stratégie na finančnom trhu. Medzi dve najvyužívanéjšie stratégie môžeme zaradiť Option based portfolio insurance (OBPI) a Constant proportion portfolio insurance (CPPI). OBPI vznikla krátko po uverejnení vplyvného článku Blackom a Scholesom (1973), keď Leland a Rubinstein (1976) ako prví navrhli využitie put opcie ako nástroj na hedging portfólii. OBPI stratégia je založená na kombinácii pozície v rizikovom aktíve a v prislúchajúcej put opcií. Hlavnou nevýhodou OBPI stratégie je, že v mnohých prípadoch opcie na dané aktíva nie sú na trhu dostupné. CPPI bola uvedená Peroldom (1986) pre bezrizikové aktíva a Blackom a Jonesom (1987) pre rizikové akcie. Táto stratégia je založená na pojme *vankúša*, ktorý je definovaný ako rozdiel medzi hodnotou investície a dnom. Podiel majetku úmerný vankúšu je investovaný do rizikových aktív - prevažne do indexov alebo akcií - zvyšok je využitý na kúpu bezrizikového dlhopisu. Vystavenie do rizikových aktív je tak zredukované v prípade poklesu finančných trhov a hodnota portfólia je rovná dnu. Kým CPPI metóda je dynamickou investičnou stratégiou, ktorá vyžaduje neustálu opätovnú alokáciu portfólia, OBPI metóda predstavuje statickú metódu, pri ktorej po počiatočnej kúpe zaistovacej put opcie nie je nutné žiadne ďalšie rebalancovanie portfólia.

V nasledujúcom texte uvedieme stručnú charakterizáciu dvoch najpoužívanjších stratégií, CPPI a OBPI, predstavíme ich hlavnú myšlienku a uvedieme ich porovnanie.

1.1 Constant Proportion Portfolio Insurance

CPPI metóda je samofinancovanou stratégiou, ktorej hlavným cieľom je prostredníctvom dynamického obchodovania participovať na výnose rizikových aktív (väčšinou obchodovateľné akcie alebo indexy) a zároveň garantuje stanovené percento z počiatočnej investície v dobe splatnosti portfólia T . Na dosiahnutie tohto cieľa je potrebné, aby investor počas investičného horizontu dynamicky prerozdieval svoj majetok medzi rizikové a bezrizikové aktíva. Ako bezrizikové aktívum budeme uvažovať bezkupónový dlhopis, B_t , ktorého cena sa vyvíja podľa nasledujúceho vzťahu

$$dB_t = B_t r dt$$

kde r je bezriziková úroková miera. Cena rizikového aktíva nevyplácajúceho dividendy, S_t , sa vyvíja sledujúc geometrický Brownov pohyb ako

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

kde $W = (W_t)_{0 \leq t \leq T}$ predstavuje štandardný Brownov pohyb a $\mu > 0$ a $\sigma > 0$ sú kladné konštanty, ktoré popisujú drift a volatilitu ceny rizikového aktíva S_t . Potom vychádzajúc z Itôvej lemy logaritmy výnosov rizikového aktíva sú normálne rozdelené

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$$

Hlavným cieľom CPPI stratégie je udržanie hodnoty portfólia V_T^{CPPI} na konci investičného horizontu T nad vopred stanovenou hodnotou dna F_T , ktoré je dané ako percento $\alpha_T \geq 0$ z počiatočnej investície V_0^{CPPI} , t.j.

$$F_T = \alpha_T V_0^{CPPI}$$

Poznamenajme, že v prípade trhu bez arbitrážnej príležitosti nie je možné nájsť investíciu, ktorej výnos bude pri nulovom riziku vyšší ako výnos z bezrizikovej úrokovej miery r . Preto maximálna garantovaná hodnota portfólia v čase T je ohraničená s

$$\alpha_T \leq e^{rT}$$

Nech $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$ je súčasná hodnota garantovanej hodnoty, ktorú nazývame dnom. Po diskontácii bezrizikovou úrokovou mierou r sa hodnota dna vyvíja nasledovne

$$F_t = \alpha_t V_0^{CPPI}, \quad \alpha_t = \alpha_T e^{-r(T-t)}$$

Rozdiel medzi hodnotou portfólia a dnom sa nazýva vankúš C_t a jeho hodnota v čase $t \in [0, T]$ je daná ako

$$C_t = \max\{V_t^{CPPI} - F_t, 0\}$$

Za účelom poistenia minimálnej hodnoty portfólia $V_T^{CPPI} \geq F_T$ investuje stratégia konštantný podiel m vankúša C_t do rizikových aktív. Investícia do rizikových aktív sa nazýva vystavenie $(E_t)_{0 \leq t \leq T}$ a je dané

$$E_t = mC_t = m \max\{V_t^{CPPI} - F_t, 0\}$$

Zvyšná časť majetku

$$B_t = V_t^{CPPI} - E_t$$

je investovaná do bezrizikového dlhopisu.

V každom čase t platí

- ak $V_t^{CPPI} > F_t$, vystavenie do rizikových aktív je dané ako $mC_t = m(V_t^{CPPI} - F_t)$, kde $m \geq 1$ je konštantný multiplikátor
- ak $V_t^{CPPI} \leq F_t$, celé portfólio je zaistené v bezkupónovom dlhopise

Poznamenajme, že výplatná funkcia je konvexná práve vtedy, keď multiplikátor m spĺňa $m \geq 1$. Po využití Itôvej lemy vieme hodnotu CPPI portfólia V_t^{CPPI} v každom čase t počas investičného horizontu $[0, T]$ vyjadriť ako

$$\begin{aligned} V_t^{CPPI} &= F_t + C_t = \alpha_t V_0^{CPPI} + C_t \\ &= \alpha_T e^{-r(T-t)} V_0^{CPPI} + C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} \right)^m e^{(1-m)(r + \frac{1}{2}m\sigma^2)t} \end{aligned}$$

Potom parametrami CPPI metódy sú úroveň poistenia α_T a multiplikátor m . Treba si uvedomiť, že hodnota majetku sa nachádza nad hodnotou dna počas celého investičného obdobia ak $C_t > 0$. Preto hodnota dna F_t vyjadruje dynamicky poistenú hodnotu portfólia.

Uvedieme si ešte očkávanú hodnotu a volatilitu portfólia v čase maturity T :

$$\begin{aligned} \mu(V_T^{CPPI}) &= E[V_T^{CPPI}] = \alpha_T V_0^{CPPI} + C_0 e^{[r+m(\mu-r)]T} \\ \sigma^2(V_T^{CPPI}) &= C_0^2 e^{2[r+m(\mu-r)]T} (e^{m^2\sigma^2T} - 1) \end{aligned}$$

kde $C_0 = V_0^{CPPI}(1 - \alpha e^{-rT})$. Dôkaz je uvedený v [3].

Vidíme, že očakávaná hodnota pri CPPI je nezávislá od volatility ceny akcie. Na rozdiel od toho volatilita stratégie exponenciálne rastie s trhovou volatilitou σ a pri vysokej hodnote multiplikátora m je tento rast ešte intenzívnejší. Je očividné, že rastúca úroveň požadovaného poistenia α_T znižuje riziko stratégie $\sigma^2(V_T^{CPPI})$, hoci očakávaná hodnota pri vyšom α_T klesá. Opačný efekt pozorujeme pri výbere hodnoty multiplikátora m , ktorý predstavuje participáciu portfólia na akciových trhoch.

1.2 Option-based Portfolio Insurance

Na rozdiel od CPPI stratégie je OBPI statickou investičnou stratégiou, ktorá garantuje minimálnu hodnotu portfólia v čase maturity $V_T^{OBPI} = \alpha_T V_0^{OBPI}$ pre portfólio zložené z q podielu akcie S_t a rovnakého podielu na ňu vypísanej put opcie s maturitou T a realizačnou cenou X . Pre jednoduchosť budeme uvažovať normalizovaný podiel q a nastavíme ho na hodnotu rovnú 1. Ďalej predpokladáme, že put opcia je v čase $t = 0$ financovaná bezrizikovou úrokovou mierou r . Prislúchajúca pôžička bude vrátená na konci investičného obdobia T . V čase $t = 0$ je hodnota portfólia rovná

$$V_0^{OBPI} = S_0 + Put(S_0, X, r, \sigma^i, 0, T) - Put(S_0, X, r, \sigma^i, 0, T) = S_0$$

kde $Put(S_0, X, r, \sigma^i, 0, T)$ je Black-Scholesova hodnota európskej put opcie (hodnota podkladového aktíva S_t , realizačná cena X , bezriziková úroková miera r , implikovaná volatilita σ^i , doba oceňovania $t \leq T$ a maturita T). Keďže OBPI je statickou stratégiou, obchodovanie počas investičného horizontu $(0, T)$ nie je možné. Preto konečná hodnota portfólia V_T^{OBPI} v čase maturity T je rovná

$$\begin{aligned} V_T^{OBPI} &= S_0 + Put(S_0, X, r, \sigma^i, T, T) - Put(S_0, X, r, \sigma^i, 0, T)e^{rT} \\ &= \max\{X, S_T\} - Put(S_0, X, r, \sigma^i, 0, T)e^{rT} \end{aligned}$$

Za účelom garancie minimálnej hodnoty portfólia $V_T^{OBPI} = \alpha_T V_0^{OBPI}$ musí realizačná cena opcie X splňať

$$X = Put(S_0, X, r, \sigma^i, 0, T)e^{rT} + \alpha_T V_0 \quad \text{kde } S_0 = V_0^{OBPI}$$

Poznamenajme, že podobne ako pri ohraničení úrovne poistenia α_t v prípade CPPI stratégie, realizačná cena put opcie pokrýva maximálnu garantovanú hodnotu portfólia pre OBPI. Vo

všeobecnosti na rozdiel od CPPI stratégie, realizačná cena X hedžovacej put opcie (ktorá závisí na požadovanej úrovni poistenia α_T) predstavuje jediný parameter OBPI stratégie.

Rovnako pri CPPI, aj v tomto prípade uvediem očakávanú hodnotu a volatilitu portfólia v čase maturity

$$\begin{aligned}\mu(V_T^{OBPI}) &= E[V_T^{OBPI}] = E[\max\{S_T - X, 0\}] + \alpha_T V_0^{OBPI} \\ \sigma^2(V_T^{OBPI}) &= E[\max\{S_T - X, 0\}] - E[\max\{S_T - X, 0\}]^2\end{aligned}$$

Dôkaz je uvedený v 3.

Vidíme, že rastúca požadovaná hodnota poistenia α_T , alebo rastúca realizačná cena opcie X vedie k poklesu výplatnej funkcie call opcie $\max\{S_T - X, 0\}$ a tým očakávaná hodnota $\mu(V_T^{OBPI})$ klesá a zároveň klesá aj variancia stratégie $\sigma^2(V_T^{OBPI})$.

1.3 Porovnanie CPPI a OBPI stratégie

Analýzou oboch stratégií poisťovania portfólia sa zaoberali už mnohí ako napríklad Black a Rouhani (1989), Black a Perold (1992) (pre CPPI stratégiu), Bookstaber a Langsam (2000) a Zagst a Kraus (2009). Bertrand a Prigent (2002) porovnávali stratégie podľa rôznych kritérií, pričom definovali distribučnú funkciu pravdepodobnosti oboch stratégií. Ukázali, že žiadna zo stratégií štatisticky nedominuje druhú v prvom momente. Zagst a Kraus sledovali druhú aj tretiu stochastickú dominanciu a dokázali, že pri určitých podmienkach CPPI metóda dominuje v druhom aj v treťom momente nad OBPI. Presnejšie ukázali, že CPPI metóda s väčšou pravdepodobnosťou dominuje OBPI v treťom momente pre vyššie hodnoty implikovanej volatility σ^i , ktorá parametrizuje finančný trh.

Hlavnou nevýhodou OBPI metódy je, že v mnohých prípadoch nie je na trhu opcia na dané aktíva dostupná. Rovnako nie je vždy zaistený rovnaký investičný horizont pre poistenie a maturitu opcie. V týchto prípadoch sa opcia syntetizuje. Bertrand a Prigent (2002) vo svojej štúdií dokázali, že v tomto prípade majú obe stratégie (CPPI a OBPI) dynamický charakter. Ukázali, že OBPI metóda je zovšeobecnením CPPI metódy.

Ak predpokladáme rovnaké počiatočné hodnoty portfólií V_0^{CPPI} a V_0^{OBPI} a rovnakú garantovanú hodnotu X na konci investičného horizontu T v hodnote percenta z počiatočnej investície V_0 , môžeme pre OBPI definovať multiplikátor charakteristický pre CPPI.

Tvrdenie 1.1. *OBPI stratégia je ekvivalentnou metódou k CPPI, v ktorej multiplikátor závisí od času t a ceny rizikového aktíva S_t . Multiplikátor pre OBPI je daný ako*

$$m^{OBPI}(t, S_t) = \frac{S_t \mathcal{N}(d_1(t, S_t))}{C(t, S_t, X)}$$

kde $S_t \mathcal{N}(d_1(t, S_t))$ je celková hodnota investovaná do rizikových aktív.

Zovšeobecnený multiplikátor pre OBPI, m^{OBPI} je klesajúcou funkciou ceny rizikového aktíva S_t v každom čase t . Multiplikátor nadobúda vyššie hodnoty ako multiplikátor pre CPPI, okrem prípadov keď prislúchajúca call opcia je in-the-money.

CPPI metóda je založená na dynamickom riadení portfólia, ktorej výkonnosť závisí od hodnoty multiplikátora, ktorý pre zaistenie dna nesmie byť príliš vysoký. OBPI vykazuje lepšie výsledky pri prudkom poklese a následnom raste cien aktív, keďže v tomto prípade vankúš pri CPPI zostáva nulový a preto nie je možná následná participácia na akciových trhoch. Na druhej strane CPPI vykazuje vyššie výnosy pri nízkych cenách rizikového aktíva. Každá z dvoch metód má preto opodstatnené využitie pri rôznych trhových podmienkach.

Kapitola 2

Všeobecné predpoklady a nastavenia

V tejto kapitole upresníme ekonomický aparát, ktorý je základom pri analýze optimálnej alokácie majetku pomocou VaR-RM a LEL-RM.

2.1 Dynamický vývoj aktív

Uvažujeme konečný interval, $[0, T]$ a ekonomiku s jedným spotrebným tovarom (numeraire). Neistota je opísaná filtrovaným pravdepodobnostným priestorom $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, kde Ω je množina všetkých možných udalostí, \mathcal{F} je σ -algebra merateľných množín, \mathcal{F}_t je filtrácia a P je pravdepodobnostná miera na Ω . Na pravdepodobnostnom priestore definujeme N -dimenzionálny Brownov pohyb

$$\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_N(t))^\top, \quad t \in [0, T]$$

Všetky stochastické procesy predpokladáme, že sú adaptované vzhľadom k rozšírenej filtrácii, $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$, generovanej Brownovým pohybom a všetky rovnosti, prip. nerovnosti obsahujúce náhodné premenné platia skoro všade.

Predpokladáme, že každý investor si volí portfólio zložené z $N+1$ cenných papierov; jedného bezrizikového dlhopisu a N rizikových aktív, ktoré vyplácajú dividendy δ_j , $j = 1, \dots, N$. Cena dlhopisu, B a rizikového aktíva, S_j je definovaná

$$dB(t) = B(t)r(t)dt \tag{2.1}$$

$$dS_j(t) + \delta_j(t)dt = S_j(t)[\mu_j(t)dt + \sigma_j(t)dw(t)], \quad j = 1, \dots, N \tag{2.2}$$

kde

r je úroková miera

$\mu \equiv (\mu_1, \dots, \mu_N)^\top$ sú koeficienty driftu

$\sigma \equiv (\sigma_{jk}, j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N)$ je matica volatilit

Ak uvažujeme trh bez arbitrážnej príležitosti, potom dynamika trhu nám jednoznačne určuje hustotu stavovej funkcie

$$d\xi(t) = -\xi(t)[r(t)dt + \kappa(t)^\top d\omega(t)] \quad (2.3)$$

kde $\kappa(t) = \sigma^{-1}(t)(\mu(t) - r(t)\bar{1})$ je trhová cena rizika (alebo Sharpe ratio) a $\bar{1} \equiv (1, \dots, 1)^\top$. Sharpe ratio predstavuje vzťah medzi rizikom a výnosom investície, meria priemerný výnos za jednotku rizika pri investovaní do rizikových aktív namiesto do bezrizikového dlhopisu. Prevažne sa využíva na meranie výkonnosti portfólia.

Hodnotu $\xi(T, \omega)$ môžeme chápať ako Arrow-Debreu cenu za jednotku pravdepodobnosti P jednej jednotky spotreby daného aktíva, ktorý sa nachádza v stave $\omega \in \Omega$ a čase T .

Ďalej predpokladáme, že každý investor i má na začiatku investičného obdobia, t.j. v čase $t = 0$, k dispozícii e_{ij} jednotiek rizikového aktíva j . Do každého aktíva j je investovaný podiel z počiatočného majetku vo veľkosti $W_i(0) = e_i^\top S(0)$, kde $S(0)$ predstavuje počiatočnú cenu aktíva. Investor drží svoje portfólio do času T , v ktorom sa snaží maximalizovať hodnotu svojho majetku $W(T)$.

Vzhľadom na rozhodovanie investora pri maximalizácii svojej počiatočnej investície je definovaný tzv. rozhodovací proces $\theta(t) \equiv (\theta_1(t), \dots, \theta_N(t))^\top$, ktorý predstavuje podiel majetku investovaného do jednotlivých rizikových aktív.

Hodnota majetku v čase t je definovaná stochastickou diferenciálnou rovnicou

$$dW(t) = W(t)[r(t) + \theta(t)^\top(\mu(t) - r(t)\bar{1})]dt + W(t)\theta(t)^\top\sigma(t)d\omega(t)$$

Preferencie investora sú vyjadrené pomocou funkcie užitočnosti $u(W(T))$, ktorá závisí od hodnoty konečného majetku $W(T)$ a je nezávislá od stavu, v ktorom sa investor nachádza. Funkciu užitočnosti predpokladáme dvakrát spojitely diferencovateľnú, striktnie rastúcu, striktnie konkávnou a zároveň predpokladáme, že platí

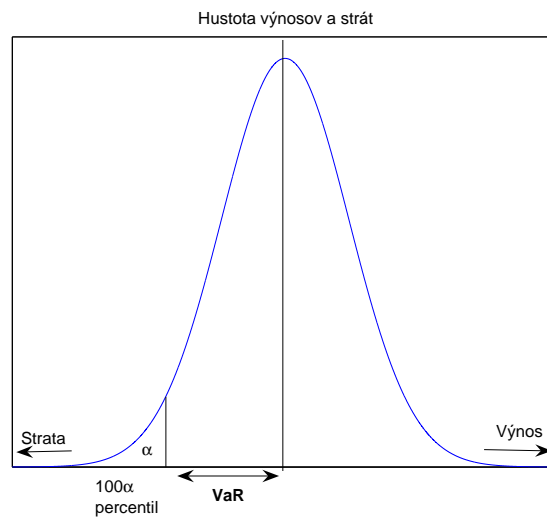
$$\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0$$

2.2 Výpočet Value-at-risk

Value-at-risk (VaR) sa stal štandardnou mierou rizika, ktorá je vďaka svojej jednoduchosti a ľahkej aplikovateľnosti využívaná pri optimálnom riadení portfólia.

VaR je väčšinou definovaný ako "maximálna možná strata za určité obdobie v rámci stanoveného konfidenčného intervalu". Teda VaR s $100(1 - \alpha)$ percentným konfidenčným intervalom je definovaný ako spodný 100α percentil hustoty výnosov a strát, t.j.

$$VaR_\alpha(X) = -\inf\{x | P(X \leq x) > \alpha\}$$



Ak predpokladáme, že doba držania portfólia je zhodná s VaR horizontom, potom môžeme VaR definovať nasledovne

$$P(W(0) - W(T) \leq VaR(\alpha)) \equiv 1 - \alpha \quad (2.4)$$

Poznamenajme, že VaR predstavuje najväčšiu možnú stratu za určité stanovené obdobie.

Kapitola 3

Optimalizácia pomocou VaR-RM

V tejto kapitole si stručne objasníme podstatu alokácie majetku v prípade využívania rizikového manažmentu založeného na odhade Value-at-risk (VaR) a poukážeme na jeho hlavné nedostatky.

Vzhľadom na jednoduchosť a široké uplatnenie sa VaR odhad stal štandardnou mierou rizika. Jedným z hlavných nedostatkov VaR odhadu je, že neberie do úvahy extrémne straty, ktoré nastávajú za α -kvantilom. Bolo dokázané, že VaR nie je vo všeobecnosti konzistentný s hlavnou myšlienkou rizikového manažmentu, ktorou je redukcia rizika prostredníctvom diverzifikácie: nie je vylúčené, že VaR hodnota portfólia bude väčšia ako súčet VaR jeho jednotlivých komponentov. To je spôsobené tým, že $VaR_\alpha(x)$ nie je konvexnou funkciou v x . VaR_α nie je spojitá vzhľadom ku konfidenčnému intervalu α , čo znamená, že malá zmena v hodnote α môže viesť k signifikantnej zmene odhadu rizika pomocou VaR.

3.1 Formulácia modelu

Hlavným cieľom Basaka a Shapira v článku [1] je spojenie rizikového manažmentu založeného na odhade VaR s úlohou maximalizácie funkcie užitočnosti. Za týmto účelom vyžadujeme aby $VaR(\alpha)$ nepresiahla nami požadovanú hodnotu, t.j.

$$VaR(\alpha) \leq W(0) - \underline{W} \tag{3.1}$$

kde \underline{W} je "dno", ktoré je zadané exogénne. Spolu s definíciou VaR tvorí táto podmienka (3.1) tzv. VaR ohraničenie, ktoré je definované ako

$$P(W(T) \geq \underline{W}) \geq 1 - \alpha \quad (3.2)$$

Ohraničenie (3.2) nám zaručuje, že maximálne s pravdepodobnosťou α bude investorova strata väčšia ako $W(0) - \underline{W}$. Ak v prípade benchmarku (\mathbf{B}), kde nie sú žiadne ohraničenia ($\alpha = 1$), platí

$$P(W^B(T) \geq \underline{W}) > 1 - \alpha$$

potom VaR ohraničenie (3.2) nie je nikdy dosiahnuté, t.j.

$$VaR(\alpha) < W(0) - \underline{W}$$

V opačnom prípade platí rovnosť

$$VaR(\alpha) = W(0) - \underline{W}$$

Investor, ktorý riadi svoje portfólio pomocou VaR-RM rieši dynamický optimalizačný problém, kde účelovou funkciou je maximalizácia investorovej funkcie užitočnosti. Všeobecnú formuláciu problému vieme pomocou teórie martingalov definovať ako nasledujúcu variáčnú úlohu

$$\max_{W(T)} E[u(W(T))] \quad (3.3)$$

pri podmienkach

$$\begin{aligned} E[\xi(T)W(T)] &\leq \xi(0)W(0) \\ P(W(T) \geq \underline{W}) &\geq 1 - \alpha \end{aligned}$$

Poznamenajme, že VaR ohraničenie (3.2) zavádza do maximalizačnej úlohy nekonkávnosť a tým komplikuje riešenie. Nasledujúce tvrdenie uvedené v [1] popisuje optimálnu hodnotu majetku v čase maturity T .

Tvrdenie 3.1. *Optimálna hodnota majetku v čase T pri VaR-RM je*

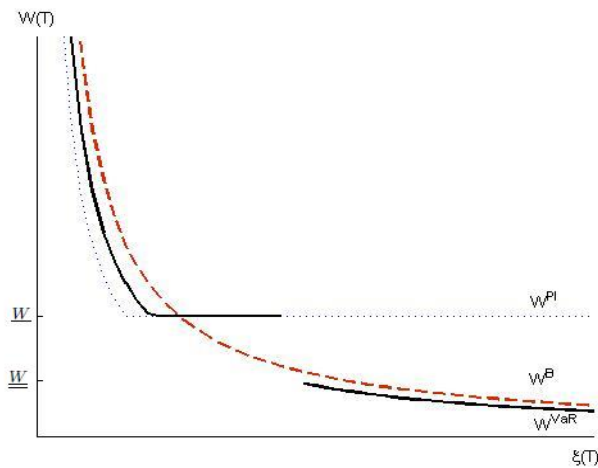
$$W^{VaR}(T) = \begin{cases} I(y\xi(T)) & \text{ak } \xi(T) < \underline{\xi} \\ \underline{W} & \text{ak } \underline{\xi} \leq \xi(T) < \bar{\xi} \\ I(y\xi(T)) & \text{ak } \bar{\xi} \leq \xi(T) \end{cases} \quad (3.4)$$

kde $I(\cdot)$ je inverzná funkcia k derivácii funkcie užitočnosti $u'(\cdot)$, $\underline{\xi} \equiv \frac{u'(W)}{y}$, $\bar{\xi}$ spĺňa $P(\xi(T) > \bar{\xi}) \equiv \alpha$ a $y \geq 0$ je riešením $E[\xi(T)W^{VaR}(T, y)] = \xi(0)W(0)$. VaR ohraničenie (3.2) je aktívne práve vtedy, keď $\underline{\xi} < \bar{\xi}$. Naviac, Langraengov multiplíkátor y je v α klesajúci a patrí $y \in [y^B, y^{PI}]$.

Dôkaz tvrdenia je uvedený v [1].

Optimálnu hodnotu majetku si znázorníme aj graficky na nasledujúcom obrázku (Obr. 3.1), kde hodnota \underline{W} je definovaná vzťahom

$$\underline{W} = \begin{cases} I(y\bar{\xi}) & \text{ak } \underline{\xi} < \bar{\xi} \\ \underline{W} & \text{inak} \end{cases}$$



Obr. 3.1: **Optimálna hodnota majetku pri VaR-RM ako funkcia $\xi(T)$.** Optimálna hodnota majetku v prípade VaR-RM je porovnaná s nepoisteným portfóliom ($\alpha = 1$), t.j. benchmarkom B a úplne poisteným portfóliom PI ($\alpha = 0$). Vidíme, že v závislosti od stavovej funkcie nadobúda optimálna hodnota majetku tri rôzne správania. Pre nízke hodnoty $\xi(T)$ tzv. dobré stavy je správanie stratégie podobné benchmarku B. V prechodných stavoch ($\underline{\xi} \leq \xi(T) < \bar{\xi}$) je portfólio poistené proti stratám a správanie stratégie je rovné úplne poistenému portfóliu PI. Vysoké hodnoty $\xi(T)$ predstavujú zlé stavy, v ktorých nastávajú straty. Voči týmto stavom nie je portfólio vôbec poistené a hodnota majetku nadobúda najmenšie hodnoty zo všetkých troch uvažovaných stratégií.

Jedným z hlavných nedostatkov VaR-RM je práve správanie sa v prípade zlých stavov, $\bar{\xi} \leq \xi(T)$, kde nie je portfólio riadiace sa VaR-RM vôbec poistené a optimálna hodnota majetku v porovnaní s uvažovanými stratégiami nadobúda najmenšie hodnoty, $W^{VaR} < W^B < W^{PI}$. VaR-RM je považovaný za nástroj, ktorý chráni investora pred vysokými stratami, ktoré môžu spôsobiť nesolventnosť a kreditné problémy. Avšak ako môžeme pozorovať, v zlých stavoch sú straty pri VaR-RM ešte oveľa väčšie. To je spôsobené tým, že v prechodných stavoch VaR stratégia poistuje portfólio a udržuje jeho hodnotu na úrovni vopred stanoveného dna \underline{W} , no zaujíma sa iba o pravdepodobnosť s akou strata nastane a nehľadí na jej prípadný rozsah. Preto v zlých stavoch sa už kvôli príliš drahému poisteniu hodnota majetku neudrží ani na úrovni benchmarku.

Nasledujúce tvrdenie (3.2) explicitne popisuje, že pri VaR-RM sú očakávané straty naozaj väčšie ako straty, ktoré nastávajú pri nepoistenom portfóliu.

Tvrdenie 3.2. *Predpokladajme $u(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, $\gamma > 0$ a r a κ sú konštanty. Pre optimálnu hodnotu majetku v čase T definujeme veľkosti strát*

$$\begin{aligned} L_1(W) &= E[(\underline{W} - W(T))1_{\{W(T) \leq \underline{W}\}}] \\ L_2(W) &= E\left[\frac{\xi(T)}{\xi(0)}(\underline{W} - W(T))1_{\{W(T) \leq \underline{W}\}}\right] \end{aligned}$$

Potom platí

1. $L_1(W^{VaR}) \geq L_1(W^B)$
2. $L_1(W^{VaR}) \geq L_2(W^B)$

Dôkaz tvrdenia je uvedený v [1].

L_1 predstavuje očakávanú hodnotu straty v budúcnosti a L_2 meria jej súčasnú hodnotu. Tvrdenie (3.2) poukazuje na nedostatky VaR-RM. Stratégia VaR-RM je navrhnutá tak, aby predchádzala častým stratám, ktoré spôsobujú investorom vážne problémy. Je síce pravda, že pri vedení portfólia pomocou VaR-RM sa straty nevyskytujú často, ale výraznejšie straty sú oveľa väčšie ako bez VaR-RM.

Nasledujúce tvrdenie (3.3) vyjadruje optimálnu hodnotu majetku a vystavenia do rizikových aktív v čase $t \in [0, T]$.

Tvrdenie 3.3. *Predpokladajme $u(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, $\gamma > 0$ a r a κ sú konštanty. Potom*

1. *Optimálna hodnota majetku v čase t je definovaná*

$$W^{VaR}(t) = \frac{e^{\Gamma(t)}}{(y\xi(t))^{\frac{1}{\gamma}}} - \left[\frac{e^{\Gamma(t)}}{(y\xi(t))^{\frac{1}{\gamma}}} \mathcal{N}(-d_1(\underline{\xi})) - \underline{W}e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2(\underline{\xi})) \right] \\ + \left[\frac{e^{\Gamma(t)}}{(y\xi(t))^{\frac{1}{\gamma}}} \mathcal{N}(-d_1(\bar{\xi})) - \underline{W}e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2(\bar{\xi})) \right]$$

kde \mathcal{N} je kumulatívna distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia a

$$\underline{\xi} = \frac{1}{y\underline{W}^\gamma} \\ \Gamma(t) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(r + \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T-t) + \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^2 \frac{\|\kappa\|^2}{2} (T-t) \\ d_2(x) = \frac{\ln\left(\frac{x}{\xi(t)}\right) + \left(r - \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T-t)}{\|\kappa\| \sqrt{T-t}} \\ d_1(x) = d_2(x) + \frac{1}{\gamma} \|\kappa\| \sqrt{T-t}$$

2. *podiel investovaný do rizikových aktív*

$$\theta^{VaR}(t) = q^{VaR}(t) \theta^B(t)$$

kde θ^B je hodnota v prípade benchmarku a q^{VaR} je vystavenie, ktoré spĺňa nasledujúce vzťahy

$$\theta^B(t) = \frac{1}{\gamma} [\sigma(t)^\top]^{-1} \kappa \\ q^{VaR}(t) = 1 - \frac{\underline{W}e^{-r(T-t)} (\mathcal{N}(-d_2(\underline{\xi})) - \mathcal{N}(-d_2(\bar{\xi})))}{W^{VaR}(t)} + \frac{\gamma(\underline{W} - \underline{W})e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(\bar{\xi}))}{W^{VaR}(t) \|\kappa\| \sqrt{T-t}}$$

kde Φ je distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia.

3. *Vystavenie do rizikových aktív je vždy nezáporné $q^{VaR} \geq 0$ a spĺňa*

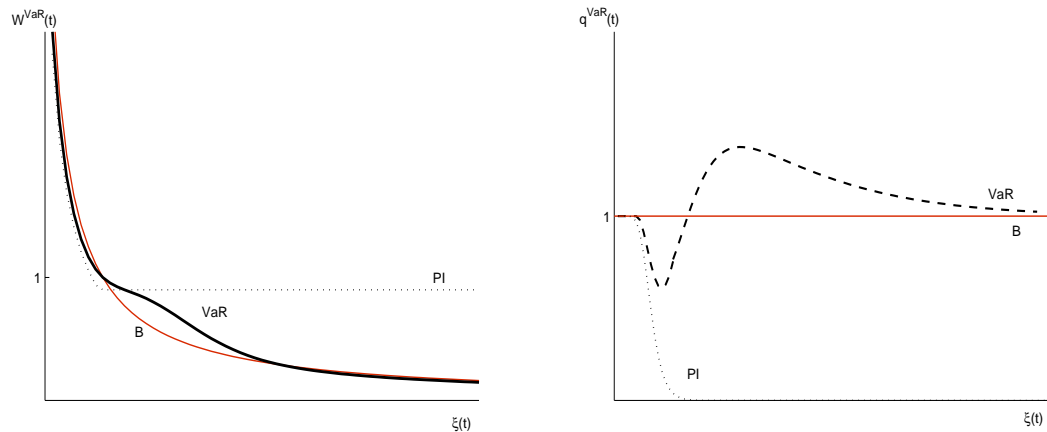
$$\lim_{\xi(t) \rightarrow 0} q^{VaR}(t) = \lim_{\xi(t) \rightarrow \infty} q^{VaR}(t) = 1$$

4. *Ak platí $\underline{\xi} < \bar{\xi}$, potom $q^{VaR}(t) > 1$ práve vtedy, keď $\xi(t) > \xi^*(t)$, kde $\xi^*(t)$ je dané ako*

$$\sqrt{\bar{\xi} \underline{\xi}} e^{(r - \frac{\|\kappa\|^2}{2})(T-t)} \leq \xi^*(t) \leq \bar{\xi} e^{(r - \frac{\|\kappa\|^2}{2})(T-t)} e^{\frac{\|\kappa\|^2}{\gamma}(T-t)}$$

Tvrdenie je dokázané v [1].

Porovnanie optimálnej hodnoty majetku a vystavenia v čase t s benchmarkom B a úplne poisteným portfóliom PI si uvedieme aj graficky ako funkciu stavovej veličiny $\xi(t)$. Pribeh je znázornený na obrázku (Obr. 3.2)



Obr. 3.2: Hodnota majetku a vystavenia pre VaR-RM, B a PI v čase t

Z obrázku je zrejmé, že hodnota majetku sa v dobrých stavoch vyvíja podobne ako úplne poistené portfólio, kým v zlých stavoch, t.j. pre vysoké hodnoty $\xi(t)$ sa správa podobne ako benchmark. V zvyšných stavoch nadobúda funkcia majetku konkávny charakter, ktorý nastáva práve preto, že stratégia sa v prechodných stavoch sama poisťuje.

Vystavenie je v dobrých stavoch podobné ako pre poistené portfólio, kedy s rastúcim $\xi(t)$ je väčšia časť majetku investovaná do bezrizikového aktíva. S ďalším rastom $\xi(t)$ rastie aj podiel investovaný do rizikových aktív a tým sa správanie približuje skôr benchmarku.

Podľa Basaka a Shapira (2001) [1] vedie riadenie portfólia pomocou VaR-RM k nasledujúcim hlavným problémom:

- informácia získaná na základe VaR môže investora priviesť k zlým rozhodnutiam, keďže neberie do úvahy veľkosť možnej straty
- racionálny investor, ktorý berie VaR ako jedinou mieru svojho rizika sa môže dostať do stavu, v ktorom utrpí výrazne väčšiu stratu ako očakával

Za účelom odstránenia nedostatkov VaR-RM zaviedli Basak a Shapiro alternatívnu stratégiu LEL-RM, ktorú budeme analyzovať v nasledujúcom texte.

Kapitola 4

Optimalizácia pomocou LEL-RM

V tejto kapitole sa budeme zaoberať LEL-RM (limited-expected-losses-based risk management) ako alternatívnou stratégiou k VaR-RM. Uvedieme riešenie dynamického optimalizačného systému, ktorý rieši LEL manažér a budeme analyzovať vlastnosti tohto riešenia.

4.1 LEL rizikový manažment

Hlavným nedostatkom optimalizácie pomocou VaR-RM je, že pri tejto stratégii sa zameriavame len na pravdepodobnosť prípadnej straty s akou nastáva a neanalyzujeme jej veľkosť. V zlých stavoch, v ktorých sa očakávajú rozsiahle straty, je očakávaná strata pri VaR-RM oveľa väčšia ako v prípade neriadeného portfólia. Podľa Basaka a Shapira (2001) [1] je potrebné pri kontrole rozsahu straty analyzovať všetky momenty distribučnej funkcie strát. V tejto časti sa zameriame na kontrolu prvého momentu a ukážeme, ako sa vyhnúť nevýhodám VaR-RM.

Pre LEL-RM je súčasná hodnota očakávanej straty ohraničená a platí

$$E[\xi(T)(\underline{W} - W(T))1_{W(T) \leq \underline{W}}] \geq \epsilon \quad (4.1)$$

kde $\epsilon \geq 0$ je konštantné.

Keďže platí

$$E[\xi(T)(\underline{W} - W(T))1_{W(T) \leq \underline{W}}] = E[\xi(T)(\underline{W} - W)|W(T) \leq \underline{W}]P(W(T) \leq \underline{W})$$

vidíme, že ohraničenie (4.1) zahŕňa v sebe pravdepodobnosť aj hodnotu očakávanej straty v prípade, že strata nastane. Ohraničenie (4.1) taktiež vyjadruje mieru rizika strát v čase T .

Táto miera spĺňa subaditívnosť (t.j. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$), kladnú homogenitu (funkcia $f: V \setminus \{0\} \rightarrow R$ je kladne homogénna stupňa k ak $f(\alpha x) = \alpha^k f(x)$ pre všetky $\alpha > 0$) a je monotónna (no nespĺňa translačnú invariantnosť, t.j. $f(x, y) = f(x + a, y + a)$). Vďaka týmto vlastnostiam odstraňuje hlavný nedostatok VaR miery rizika. Hlavná kritika VaR-RM podľa Artzner, Delbaen, Eber a Heath (1999) spočíva v tom, že VaR nespĺňa subaditívnosť pri kombinácií viacerých portfólií (VaR celého portfólia môže byť väčší ako súčet hodnôt VaR jednotlivých portfólií).

Formulácia ohraničenia (4.1) zahŕňa aj prípad nepoisteného portfólia tzv. benchmarku \mathbf{B} ($\epsilon = \infty$) a úplne poisteného portfólia \mathbf{PI} ($\epsilon = 0$), v ktorom ohraničenie zaručuje hodnotu majetku v dobe maturity nad hodnotou dna \underline{W} pre všetky stavy.

4.2 Optimalizácia pri LEL-RM

Na základe teórie martingálov môžeme dynamickú optimalizačnú úlohu LEL-manažéra, ktorý sa v čase maturity T snaží cez hodnotu svojej investície maximalizovať svoju užitočnosť prepísať na variačnú úlohu, ktorá je definovaná ako

$$\max_{W(T)} E[u(W(T))] \quad (4.2)$$

pri podmienkach

$$\begin{aligned} E[\xi(T)W(T)] &\leq \xi(0)W(0) \\ E[\xi(T)(\underline{W} - W(T))1_{W(T) \leq \underline{W}}] &= 0 \end{aligned}$$

Nasledujúce tvrdenie (4.1) nám definuje optimálne riešenie variačnej úlohy v prípade, že existuje.

Tvrdenie 4.1. *Optimálna hodnota majetku v čase T pre portfólio riadiace sa LEL-RM je*

$$W^{LEL}(T) = \begin{cases} I(z_1 \xi(T)) & \text{ak } \xi(T) < \underline{\xi}_\epsilon \\ \underline{W} & \text{ak } \underline{\xi}_\epsilon \leq \xi(T) < \bar{\xi}_\epsilon \\ I((z_1 - z_2)\xi(T)) & \text{ak } \bar{\xi}_\epsilon \leq \xi(T) \end{cases} \quad (4.3)$$

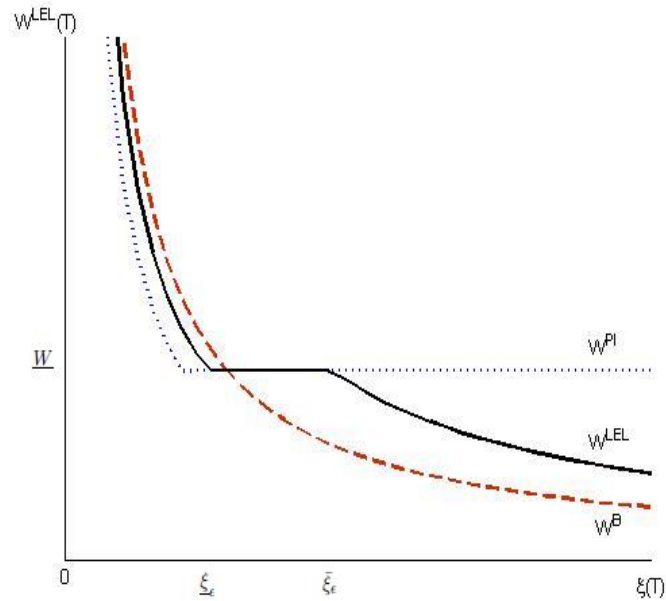
kde $I(\cdot)$ je inverzná funkcia k $u'(\cdot)$, $\underline{\xi}_\epsilon \equiv \frac{u'(\underline{W})}{z_1}$, $\bar{\xi}_\epsilon \equiv \frac{u'(\underline{W})}{z_1 - z_2}$, a ($z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$) sú riešením nasledujúceho systému:

$$\begin{cases} E[\xi(T)W^{LEL}(T; z_1, z_2)] = \xi(0)W(0) \\ E[\xi(T)(\underline{W} - W^{LEL}(T; z_1, z_2))1_{W^{LEL}(T; z_1, z_2) \leq \underline{W}}] = \epsilon \quad \text{alebo } z_2 = 0 \end{cases}$$

LEL ohraničenie (4.1) je splnené práve vtedy, keď platí $\underline{\xi}_\epsilon < \bar{\xi}_\epsilon$. Navyše, Lagrangeov multiplikátor z_1 je v ϵ klesajúci a patrí do intervalu $z_1 \in [z_1^B, z_1^{PI}]$. Preto platí $z_1 - z_2 \leq z_1^B$.

Dôkaz tvrdenia je uvedený v [1].

Na obrázku (Obr. 4.1) je znázornené porovnanie optimálnej hodnoty majetku LEL-manažéra v čase T s benchmarkom ($\epsilon = \infty$) a úplne poisteným portfóliom ($\epsilon = 0$)



Obr. 4.1: **Optimálna hodnota majetku pri LEL-RM.** Obrázok zachytáva optimálnu hodnotu majetku pri LEL-RM ako funkciu stavovej veličiny $\xi(T)$ a jej porovnanie s benchmarkom (B) a úplne zaisteným portfóliom (PI). Správanie sa optimálnej hodnoty majetku pre LEL-manažéra môžeme rozdeliť do troch oblastí, ktoré prislúchajú zodpovedajúcemu sa správaniu ekonomiky. V dobrých stavoch ($\underline{\xi}_\epsilon < \xi(T)$) sa LEL-manažér správa podobne ako benchmark. V prechodných stavoch ($\underline{\xi}_\epsilon \leq \xi(T) < \bar{\xi}_\epsilon$) sa stratégia sama poisťuje proti stratám a preto svoje správanie prispôsobuje úplne zaistenému portfóliu, kým v zlých stavoch ($\xi(T) \geq \bar{\xi}_\epsilon$) je poistenie len čiastočné. Na rozdiel od VaR-RM, ktorý sa v zlých stavoch nepoisťuje vôbec a tým je vystavený rozsiahlym stratám, sú straty pri LEL-RM len čiastočné a hodnota majetku sa nachádza nad benchmarkom.

Z obrázka je zrejmé, že na rozdiel od VaR-RM sa hodnota optimálneho majetku v zlých stavoch nachádza medzi benchmarkom a úplne poisteným portfóliom $W^B(T) < W^{LEL}(T) <$

$W^{PI}(T)$, čo je jednou z hlavných výhod optimalizácie pomocou LEL-RM. V prípade VaR-RM je hodnota majetku menšia ako benchmark $W^{VaR}(T) < W^B(T) < W^{PI}(T)$. LEL-manažér endogénne rozdeľuje nepriaznivé stavy na dve podskupiny: zlé stavy, v ktorých sa čiastočne poisťuje a prechodné stavy, v ktorých má úplné poistenie proti stratám. Poistenie v zlých stavoch, v ktorých nastávajú straty, je najdrahšie, no aj napriek tomu sa LEL-manažér čiastočne poisťuje. Poistenie konečnej hodnoty majetku na úrovni dna \underline{W} je však príliš drahé, preto volí nižšiu hodnotu majetku, ktorá ale stále sľúha LEL ohraničenie (4.1). Poznamenajme, že hodnoty $\underline{\xi}_\epsilon$ a $\bar{\xi}_\epsilon$ sú dané endogénne, preto ich hodnota závisí od investorových preferencií. V prípade VaR-RM je $\bar{\xi}$ zadané exogénne. Ďalšou odlišnosťou od VaR-RM je spojitosť optimálnej hodnoty majetku vo všetkých stavoch.

Optimálnu hodnotu majetku (4.3) môžeme vyjadriť aj nasledovne ako

$$\begin{aligned}
 W^{LEL}(T; z_1(W(0)), z_2(W(0))) &= \min[W^{PI}(T; y^B(W_\epsilon)), W^B(T; y^B(W_\epsilon) - z_2(W(0)))] \\
 &= \max[W^B(T; y^B(W_\epsilon)), \min[\underline{W}, W^B(T; y^B(W_\epsilon) - z_2(W(0)))]
 \end{aligned}$$

kde W_ϵ je riešením $y^B(W_\epsilon) = z_1(W(0))$. Táto reprezentácia vyjadruje hodnotu majetku pre LEL-RM, ktorá je s prispôbeným počiatočným imaním rovná opcií na minimálne dve podkladové aktíva (z toho jedno bezrizikové aktívum), kde realizačná cena opcie je náhodná. Prispôbená hodnota majetku, ktorá je rovná realizačnej cene opcie je definovaná ako

$$W_\epsilon = W(0) - E \left[\frac{\xi(T)}{\xi(0)} \max[\min[\underline{W}, W^B(T; y^B(W_\epsilon - z_2(W(0))))] - W^B(T; y^B(W_\epsilon)), 0] \right]$$

4.3 Vlastnosti LEL-RM

V tejto podkapitole sa budeme venovať analýze optimálneho správania LEL-RM a výpočtu kritických hodnôt stavovej funkcie $\xi(t)$.

Pre investora maximalizujúceho očakávanú užitočnosť budeme predpokladať CRRA (constant relative risk aversion) preferencie. Funkcia užitočnosti je definovaná ako

$$u(W) = \begin{cases} \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \text{pre } \gamma > 0 \text{ a } \gamma \neq 1 \\ \ln(W) & \text{pre } \gamma = 1 \end{cases}$$

Ďalej predpokladáme log-normálne rozdelenie stavovej funkcie $\xi(t)$ s konštantnou bezrizikovou úrokovou mierou r a trhovou cenou rizika κ .

Stavová funkcia je definovaná ako

$$d\xi(t) = -\xi(t)[r(t)dt + \kappa^T dw(t)]$$

kde trhová cena rizika je $\kappa(t) = \sigma^{-1}[\mu(t) - r(t)\bar{1}]$ a $\bar{1} = (1, \dots, 1)^T$. Riešením diferenciálnej rovnice dostávame

$$\xi(t) = \xi(0)e^{-rt - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 t - \|\kappa\|\sqrt{t}V_t}$$

kde V_t je štandardný Brownov pohyb, $V_t \sim N(0, 1)$.

Ako sme uviedli už vysšie správanie LEL stratégie mozeme rozdeliť do troch oblastí v závislosti od hodnoty stavovej funkcie $\xi(T)$: dobré stavy ($\underline{\xi}_\epsilon < \xi(T)$), prechodné ($\underline{\xi}_\epsilon \leq \xi(T) < \bar{\xi}_\epsilon$) a zlé stavy ($\bar{\xi}_\epsilon \leq \xi(T)$). V nasledujúcom texte si stručne popišme vypočet kritických hodnot $\underline{\xi}_\epsilon$ a $\bar{\xi}_\epsilon$. Znenie celého výpočtu je uvedené v prílohe.

4.3.1 Vypočet kritických hodnot

Vypočet $\underline{\xi}_\epsilon$ a $\bar{\xi}_\epsilon$

Pre optimálnu hodnotu majetku v ˇase T (4.3) sú kritické hodnoty definované ako

$$\begin{aligned}\underline{\xi}_\epsilon &\equiv \frac{u'(W)}{z_1} \\ \bar{\xi}_\epsilon &\equiv \frac{u'(W)}{(z_1 - z_2)}\end{aligned}$$

a sú riešením nasledujúceho systému

$$\begin{cases} E[\xi(T)W^{LEL}(T; z_1, z_2)] = \xi(0)W(0) \\ E[\xi(T)(W - W^{LEL}(T; z_1, z_2))\mathbf{1}_{W^{LEL}(T; z_1, z_2) \leq W}] = \epsilon \quad \text{alebo } z_2 = 0 \end{cases}$$

V prílohe uvedených vypotch (10.1) sme systém upravili na nasledujúci tvar

$$\begin{aligned}\xi(0)W(0) &= \underline{W} \underline{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) \right) \\ &+ \underline{W} e^{-rT} \left[\Phi\left(\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) - \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) \right] \\ &+ \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) \\ \epsilon &= \underline{W} e^{-rT} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) \\ &- \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)\end{aligned}$$

kde $H_1 = -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T - \ln(\underline{\xi}_\epsilon)$ a $H_2 = -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T - \ln(\bar{\xi}_\epsilon)$.

Vidíme, že druhá rovnica systému obsahuje len jednu premennú $\bar{\xi}_\epsilon$, ktorú si vieme jednoducho numericky vyjadriť napr. pomocou numerickej metódy polenia intervalov.

Uvažujeme nasledujúcu funkciu

$$\begin{aligned} F(\bar{\xi}_\epsilon) &= \underline{W}e^{-rT}\Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) \\ &- \underline{W}\bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}}e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T)\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2T\|\kappa\|^2}{2\gamma^2}}\Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) - \epsilon \end{aligned}$$

kde $H_2 = -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T - \ln(\bar{\xi}_\epsilon)$. Budeme hľadať numerické riešenie rovnice $F(\bar{\xi}_\epsilon) = 0$. Riešenie je jednoznačné a jediné, čo vyplýva z toho, že funkcia $F(\bar{\xi}_\epsilon)$ je v $\bar{\xi}_\epsilon$ klesajúca.

Tvrdenie 4.2. *Funkcia $F(\bar{\xi}_\epsilon)$ je v premennej $\bar{\xi}_\epsilon$ monotónne klesajúca.*

Dôkaz 4.2.1. *Dôkaz tvrdenia je uvedený v prílohe (10.1.1).*

Prvú kritickú hodnotu $\bar{\xi}_\epsilon$ vieme numericky vyjadriť vďaka monotónnosti a klesajúcemu charakteru funkcie F . Druhá kritická hodnota stavovej funkcie $\underline{\xi}_\epsilon$ sa nachádza v intervale $[\underline{\xi}_{PI}, \underline{\xi}_B]$ medzi kritickou hodnotou úplne poisteného portfólia a hodnotou stavovej funkcie pre benchmark, v ktorej je hodnota majetku nepoisteného portfólia rovná hodnote dna. Preto si na výpočet $\underline{\xi}_\epsilon$ potrebujeme najskôr vyjadriť hodnoty $\underline{\xi}_B, \underline{\xi}_{PI}$.

Výpočet $\underline{\xi}_B$

Základný systém, z ktorého budeme vychádzať je

$$E[\xi(T)W(T)] \leq \xi(0)W(0)$$

Hodnota majetku v prípade benchmarku je

$$W(T) = I(z_1\xi(T)) = (z_1\xi_B(T))^{-\frac{1}{\gamma}}$$

kde I je inverzná funkcia derivácie funkcie užitočnosti.

Hodnotu stavovej funkcie $\underline{\xi}_B$ vyjadríme z rovnice

$$E[\xi(T)W(T)] = \xi(0)W(0)$$

ktorú vieme postupne upraviť a analyticky vyjadriť kritickú hodnotu pre benchmark:

$$\begin{aligned}
 E[\xi(T)I(z_1\xi(T))] &= \xi(0)W(0) \\
 E[\xi(T)I(\frac{1}{\xi_B W^\gamma}\xi(T))] &= \xi(0)W(0) \\
 E[\xi(T)(\frac{\xi(T)}{\xi_B W^\gamma})^{-\frac{1}{\gamma}}] &= \xi(0)W(0) \\
 E[\xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\xi_B^{\frac{1}{\gamma}}W] &= \xi(0)W(0) \\
 E[\xi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}] &= \xi(0)W(0)\frac{1}{W}\xi_B^{-\frac{1}{\gamma}} \\
 \xi_B^{\frac{1}{\gamma}} &= \xi(0)\frac{W(0)}{W}\frac{1}{E[\xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}]}
 \end{aligned}$$

Po vyjadrení strednej hodnoty dostávame

$$\xi_B = \left(\frac{W(0)\xi(0)}{W}\right)^\gamma \exp\left((rT + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T)(\gamma - 1) - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T\frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma}\right)$$

Celý postup pri výpočte je uvedený v prílohe (10.2).

Výpočet ξ_{PI}

V prípade úplne poisteného portfólia je optimálna hodnota majetku v čase maturity rovná

$$W(T) = \begin{cases} I(z_1\xi(T)) & \text{ak } \xi(T) < \xi_{PI} \\ \underline{W} & \text{ak } \xi(T) \geq \xi_{PI} \end{cases}$$

Na vyjadrenie ξ_{PI} budeme vychádzať z rovnakej rovnosti ako pri benchmarku

$$E[\xi(T)W(T)] = \xi(0)W(0)$$

ktorú si vieme prepísať na tvar

$$\begin{aligned}
 E[\xi(T)W(T)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi(T)W(T)f(\xi(T)W(T))d\xi W \\
 &= E[\xi(T)\underline{W}] + E[\xi(T)I(z_1\xi(T))] \\
 &= E[\xi(T)\underline{W}] + E[\xi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\underline{W}\xi_{PI}^{\frac{1}{\gamma}}]
 \end{aligned}$$

Po úpravách, ktoré sú uvedené v (10.3) sa rovnica dá vyjadriť ako

$$\begin{aligned}
 E[\xi(T)W(t)] &= \underline{W} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T) + \frac{\|\kappa\|^2T}{2}} \phi\left(\frac{H}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) \\
 &+ \underline{W} \xi_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T)\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2T\|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \left[1 - \phi\left(\frac{H}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)\right]
 \end{aligned}$$

kde $H := -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T - \ln \underline{\xi}_{PI}$. Kritickú hodnotu $\underline{\xi}_{PI}$, ktorá leží v intervale $[0, \underline{\xi}_B]$, už vieme numericky vypočítať.

V prípade, že poznáme interval $[\underline{\xi}_{PI}, \underline{\xi}_B]$, v ktorom sa nachádza druhá kritická hodnota pre LEL stratégiu, vieme $\underline{\xi}_\epsilon$ numericky dopočítať vychádzajúc z prvej rovnice systému

$$\begin{aligned} \xi(0)W(0) &= \underline{W} \underline{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) \right) \\ &+ \underline{W} e^{-rT} \left[\Phi\left(\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) - \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) \right] \\ &+ \underline{W} \underline{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) \end{aligned}$$

Podrobný postup vyjadrenia kritických hodnôt je uvedený v prílohe (10).

4.3.2 Optimálna hodnota portfólia v čase t

V tejto časti si definujeme dynamickú zmenu hodnoty portfólia a dynamickú alokáciu majetku pri LEL-RM.

Tvrdenie 4.3. *Predpokladajme $u(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, $\gamma > 0$, a r a κ konštantné. Potom*

- *optimálna hodnota majetku v čase t*

$$\begin{aligned} W^{LEL}(t) &= \frac{e^\Gamma}{(z_1 \xi(t))^{\frac{1}{\gamma}}} - \left[\frac{e^{\Gamma(t)}}{(z_1 \xi(t))^{\frac{1}{\gamma}}} \Phi(-d_1(\underline{\xi}_\epsilon)) - \underline{W} e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\underline{\xi}_\epsilon)) \right] \\ &+ \left[\frac{e^{\Gamma(t)}}{((z_1 - z_2)^{\frac{1}{\gamma}} \xi(t))^{\frac{1}{\gamma}}} \Phi(-d_1(\bar{\xi}_\epsilon)) - \underline{W} e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2(\bar{\xi}_\epsilon)) \right] \end{aligned}$$

kde $\Phi(\cdot)$ je kumulatívna distribučná funkcia štandardného normalného rozdelenia a

$$\Gamma(t) \equiv \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(r + \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T-t) + \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^2 \frac{\|\kappa\|^2}{2} (T-t)$$

$$d_2(x) \equiv \frac{\ln \frac{x}{\xi(t)} + \left(r - \frac{\|\kappa\|^2}{2} \right) (T-t)}{\|\kappa\| \sqrt{T-t}}$$

$$d_1(x) \equiv d_2(x) + \frac{1}{\gamma} \|\kappa\| \sqrt{T-t}$$

$$\underline{\xi}_\epsilon = \frac{1}{z_1 \underline{W}^\gamma}, \quad \bar{\xi}_\epsilon = \frac{1}{(z_1 - z_2) \underline{W}^\gamma}$$

- podiel majetku investovaný do rizikových aktív je

$$\theta^{LEL}(t) = q^{LEL}(t)\theta^B(t)$$

kde $\theta^B(t) = \frac{1}{\gamma}[\sigma(t)^T]^{-1}\kappa$ a vystavenie do rizikových aktív $q^{LEL}(t)$ je

$$q^{LEL}(t) = 1 - \frac{We^{-r(T-t)}(\Phi(-d_2(\underline{\xi}_\epsilon)) - \Phi(-d_2(\bar{\xi}_\epsilon)))}{W^{LEL}(t)}$$

- vystavenie do rizikových aktív je ohraničené $0 \leq q^{LEL}(t) \leq 1$, a

$$\lim_{\xi(t) \rightarrow 0} q^{LEL}(t) = \lim_{\xi(t) \rightarrow \infty} q^{LEL}(t) = 1$$

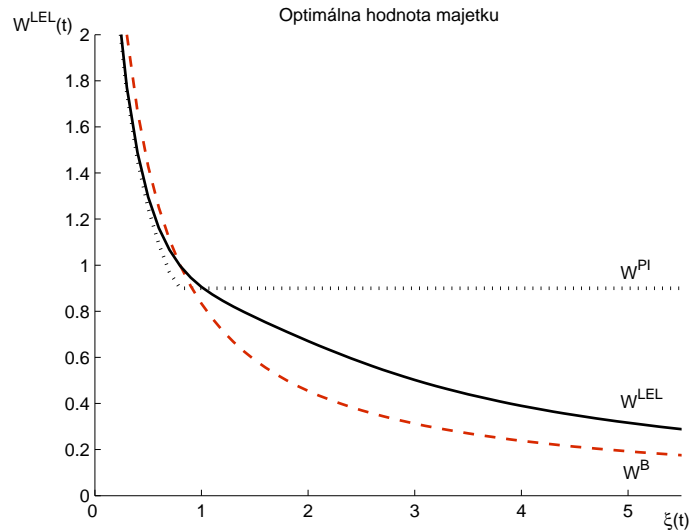
Trhová cena rizika κ je daná nasledujúcim vzťahom

$$\kappa(t) \equiv \sigma(t)^{-1}(\mu(t) - r(t)\bar{1})$$

kde $\bar{1} \equiv (1, \dots, 1)^T$.

Pre dôkaz viď [1].

Graficky (Obr. 4.2) porovnáme optimálnu hodnotu majetku $W(t)$ v prípade LEL-RM, benchmarku (B) a úplne zaisteného portfólia (PI).



Obr. 4.2: Porovnanie optimálnej hodnoty majetku pre LEL ($\epsilon \in (0, \infty)$), benchmark ($\epsilon = \infty$) a poistené portfólio ($\epsilon = 0$).

Predpokladáme CRRA preferencie a log-normálne rozdelenie stavovej funkcie. Fixné parametre sme nastavili nasledovne: $T = 1$, $t = 0.5$, $W(0) = 1$, $\underline{W} = 0.9$, $\gamma = 1$, $\epsilon = 0.01$, $\xi(0) = 1$, $r = 0.05$, $\|\kappa\| = 0.4$ Potom kritické hodnoty stavovej premennej sú: $\xi_B = 1.1111$, $\xi_{PI} = 0.9701$, $\bar{\xi}_\epsilon = 1.8297$, $\underline{\xi}_\epsilon = 0.9801$.

Hodnota portfólia riadeného LEL-RM spadá do troch rozličných oblastí, ktoré predstavujú rôzne ekonomické vlastnosti. V prípade nízkych a stredných hodnôt stavovej funkcie $\xi(t)$ sa hodnota majetku správa skôr ako úplne zaistené portfólio než ako benchmark. Pre stredné hodnoty stavovej veličiny ($\underline{\xi}(t) \leq \xi(t) < \bar{\xi}(t)$) investor zaistuje všetky možné stavy, ktoré si môže dovoliť, avšak pre vyššie hodnoty $\xi(t)$ prispôsobuje svoje správanie benchmarku. Hodnota majetku je však pre tieto hodnoty väčšia ako majetok v prípade benchmarku.

4.4 Vystavenie do rizikových aktív

Počiatočný kapitál je prerozdelený medzi rizikové a bezrizikové aktíva. Časť kapitálu investovaná do rizikových aktív je vyjadrená parametrom q^{LEL} . Vystavenie do rizikových aktív je dané nasledujúcim vzťahom

$$q^{LEL}(t) = 1 - \frac{We^{-r(T-t)}(\Phi(-d_2(\underline{\xi}_\epsilon)) - \Phi(-d_2(\bar{\xi}_\epsilon)))}{W^{LEL}(t)}$$

pričom je ohraničené $0 \leq q^{LEL}(t) \leq 1$ a platí

$$\lim_{\xi(t) \rightarrow 0} q^{LEL}(t) = \lim_{\xi(t) \rightarrow \infty} q^{LEL}(t) = 1$$

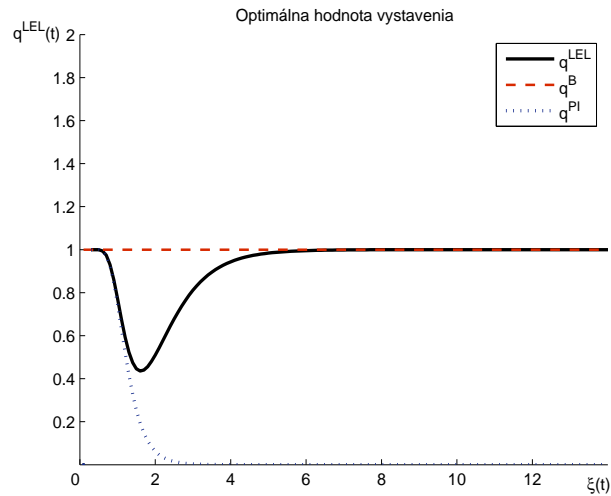
Vzhľadom k benchmarku je vystavenie pri LEL-RM dané ako

$$q^{LEL}(t) = \frac{\theta_j^{LEL}(t)}{\theta^B(t)} \quad \forall j$$

kde θ_j je podiel majetku investovaný do rizikového aktíva j .

V nasledujúcom texte budeme analyzovať citlivosť a správanie sa vystavenia na zmenu jednotlivých parametrov. Podobnú analýzu citlivosti vystavenia pri riadení portfólia VaR-RM vypracovali Basak a Shapiro vo svojom článku [1].

Na obrázku (Obr. 4.3) graficky porovnáme vystavenia do rizikových aktív $q(t)$ v prípade LEL-RM, benchmarku a úplne zaisteného portfólia.



Obr. 4.3: Porovnanie optimálnej hodnoty vystavenia do rizikových aktív pre LEL, PI a B manažéra. Vystavenie do rizikových aktív vo vzťahu k benchmarku je dané ako $q^{LEL} = \frac{\theta_j^{LEL}(t)}{\theta_j^B(t)}$, kde θ_j vyjadruje podiel majetku investovaný do rizikového aktíva j , pre všetky j . Predpokladáme CRRA preferencie a log-normálne rozdelenie stavovej funkcie. Fixné parametre sme nastavili nasledovne: $T = 1$, $t = 0.5$, $W(0) = 1$, $\underline{W} = 0.9$, $\gamma = 1$, $\epsilon = 0.01$, $\xi(0) = 1$, $r = 0.05$, $\|\kappa\| = 0.4$ Potom kritické hodnoty stavovej premennej sú: $\xi_B = 1.1111$, $\xi_{PI} = 0.9701$, $\bar{\xi}_\epsilon = 1.8297$, $\underline{\xi}_\epsilon = 0.9801$.

Investor, riadiaci sa LEL-RM, udržiava vystavenie do rizikových aktív medzi benchmarkom a úplne zaisteným portfóliom. Nikdy neinvestuje väčší podiel majetku do akcií v porovnaní s benchmarkom. V prípade portfólia zaisteného LEL stratégiou môžeme pozorovať štyri rôzne správania v závislosti od stavovej funkcie $\xi(t)$. V oboch extrémnych prípadoch prevažuje správanie podobné benchmarku. Avšak pre stredné hodnoty môžeme pozorovať dve rôzne správania: Najskôr sa investor správa podobne ako v prípade úplne poisteného portfólia, následne pre rastúce hodnoty $\xi(t)$ sa vracia k benchmarku. Namiesto toho, aby investoval do bezrizikových aktív investor zväčšuje vystavenie do rizikových aktív, avšak nikdy nie viac ako v prípade benchmarku. V prípade LEL-RM neznamena malá zmena $\xi(t)$ pre t bližšie k T nutne financovanie úplne odlišnej úrovne majetku. Preto investor riadiaci sa LEL-RM nikdy nepotrebuje robiť rizikové a špekulatívne opatrenia ako v prípade investora, ktorý nepoistuje svoje portfólio.

4.4.1 Reakcia vystavenia do rizikových aktív v závislosti od zmeny LEL parametrov

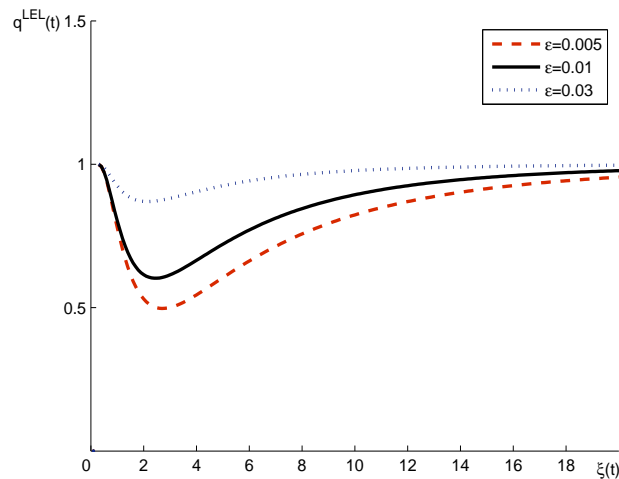
V tejto časti budeme analyzovať citlivosť vystavenia v prípade LEL-RM na zmeny základných parametrov.

Citlivosť vystavenia na parameter ϵ

Fixné parametre:

$$\|\kappa\| = 0.6; W(0) = 1; \xi(0) = 1; \underline{W} = 0.9; T = 2; t = 0; \gamma = 3$$

a meniaci sa parameter ϵ , ktorý postupne nadobúda hodnoty $\epsilon = \{0.005, 0.01, 0.03\}$, potom stavová premenná nadobúda nasledujúce hodnoty: $\bar{\xi}_\epsilon = \{5.2578, 4.0282, 2.4438\}$, $\underline{\xi}_\epsilon = \{1.6601, 1.7001, 1.8501\}$. Citlivosť vystavenia je znázornená na Obr. 4.4



Obr. 4.4: Citlivosť vystavenia $q^{LEL}(t)$ na parameter ϵ

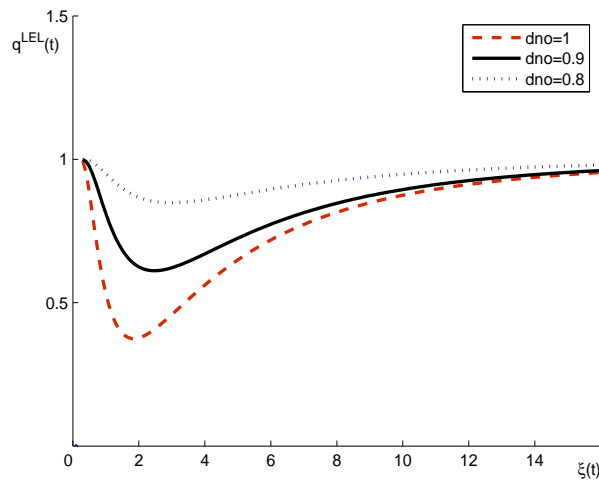
Parameter ϵ vyjadruje veľkosť straty, ktorú investor očakáva. Čím je očakávaná strata väčšia, tým sa správanie investora približuje k benchmarku, t.j. investor investuje viac do rizikových aktív. Tiež si môžeme všimnúť, že zvyšovaním parametra sa znižuje aj vzdialenosť medzi tzv. dobrými a zlými stavmi a zvyšuje sa počet zlých stavov, v ktorých je portfólio poistené len čiastočne.

Citlivosť vystavenia na posun hodnoty dna \underline{W}

Ako fixné parametre sme uvažovali:

$$\|\kappa\| = 0.6; W(0) = 1; \xi(0) = 1; \epsilon = 0.01; T = 2; t = 0; \gamma = 3$$

Potom hodnoty stavovej veličiny sú nasledovné: $\bar{\xi} = \{4.2029; 4.0282; 3.8377\}$ a $\underline{\xi} = \{0.9301; 1.7001; 2.7001\}$. Obrázok 4.5 zachytáva porovnanie vývojev vystavenia pri zmene hodnoty dna.



Obr. 4.5: Citlivosť vystavenia $q^{LEL}(t)$ pre optimálnu hodnotu majetku \underline{W} v čase t v závislosti od stavovej funkcie $\xi(t)$ na dno, ktoré nadobúda postupne hodnoty $\underline{W} = \{1; 0.9; 0.8\}$

Čím nižšiu hodnotu dna pripúšťame, tým sa vystavenie približuje k benchmarku. V prípade nižšej hodnoty dna investor nepotrebuje vynaložiť veľké množstvo majetku na zabezpečenie dna a teda investuje do rizikových aktív, na ktorých v prípade pozitívneho vývoja profituje.

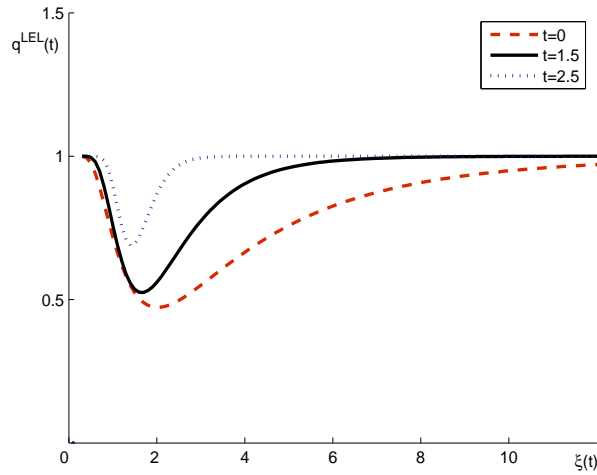
Citlivosť na čas t

Fixné parametre:

$$\|\kappa\| = 0.4; W(0) = 1; \xi(0) = 1; \epsilon = 0.01; T = 3; \underline{W} = 0.95; \gamma = 2$$

a parameter t , ktorý postupne nadobúda hodnoty $t = \{0; 1.5; 2.5\}$. Pre dané parametre stavová funkcia nadobúda nasledujúce hodnoty: $\bar{\xi} = \{3.0318; 1.9977; 1.3677\}$, $\underline{\xi} =$

$\{1.1201; 1.0701; 1.0901\}$. Vystavenie pre jednotlivé hodnoty času t je znázornené na Obr. 4.6



Obr. 4.6: Citlivosť vystavenia $q^{LEL}(t)$ pre optimálnu hodnotu majetku W v závislosti od stavovej funkcie $\xi(t)$ na posun parametra $t = \{0, 1.5, 2.5\}$

Čím vyššia hodnota parametra t , tým menšia doba zostávajúca do maturity. Vidíme, že investor s kratšou dobou do maturity zvyšuje vystavenie do rizikových aktív. Ďalej si môžeme všimnúť, že s kratším časom do maturity sa znižuje počet prechodných stavov, t.j. znižuje sa rozdiel medzi $\bar{\xi}$ a $\underline{\xi}$. To znamená, že stratégia krátko pred maturitou už nie je schopná efektívne zareagovať na prípadné zmeny na finančných trhoch na rozdiel od stratégie s dlhšou dobou do maturity, ktorá túto možnosť má. Na úkor prechodných stavov sa so zvyšujúcim t zvyšuje počet zlých stavov

Citlivosť na trhovú cenu rizika κ

Teraz sa pozrieme na citlivosť voči zmene veľkosti trhovej ceny rizika. Poznamenajme, že pri zmene trhovej ceny rizika sa mení aj podiel investovaný do rizikových aktív v prípade benchmarku θ^B , ktorý je definovaný

$$\theta^B = \frac{1}{\gamma} [\sigma(t)^T]^{-1} \kappa$$

a tým nastáva zmena aj pre podiel investovaný do rizikových aktív pre LEL-manažéra

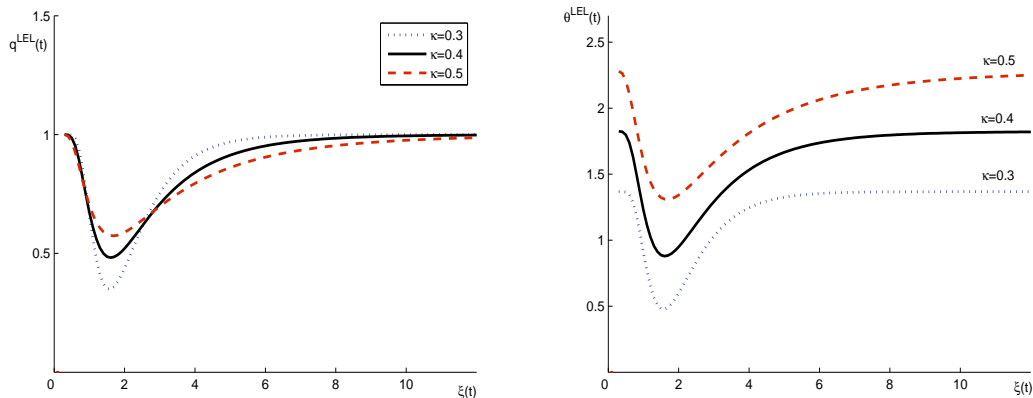
$$\theta^{LEL}(t) = q^{LEL}(t) \theta^B(t)$$

Preto si uvedieme popri vystavení aj citlivosť $\theta^{LEL}(t)$ na zmenu parametra κ pre portfólio s jedným rizikovým aktívom.

Fixné parametre:

$$t = 0; W(0) = 1; \xi(0) = 1; \epsilon = 0.01; T = 2; \underline{W} = 0.95; \gamma = 1$$

a parameter κ , ktorý postupne nadobúda hodnoty $\kappa = \{0.3; 0.4; 0.5\}$. Potom kritické hodnoty stavovej funkcie sú: $\bar{\xi}_\epsilon = \{1.9294; 2.7090; 3.9167\}$, $\underline{\xi}_\epsilon = \{0.8701; 0.7801; 0.6901\}$ a optimálny podiel investovaný do akcií pre benchmark nadobúda v závislosti od zmeny κ postupne hodnoty $\theta^B = \{1.3680, 1.8240, 2.2800\}$. Vývoj vystavenia a podielu investovaného do rizika popisuje nasledujúci obrázok (Obr. 4.7)



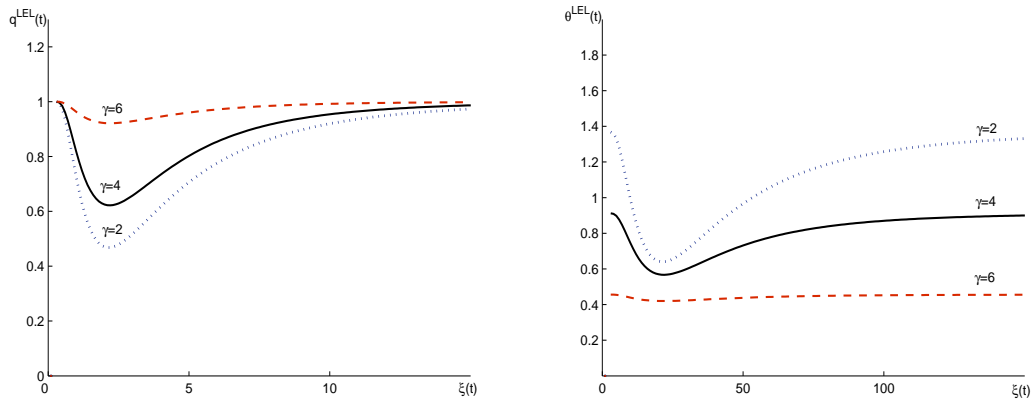
Obr. 4.7: Citlivosť vystavenia $q^{LEL}(t)$ a $\theta^{LEL}(t)$ na parameter κ pre $\theta^B = \{1.3680, 1.8240, 2.2800\}$

Parameter κ vyjadruje trhovú cenu rizika. Môžeme si všimnúť, že s rastúcim parametrom sa zväččuje aj interval medzi $\bar{\xi}$ a $\underline{\xi}$, t.j. rastie počet tzv. prechodných stavov, v ktorých investor investuje väčší podiel do rizikových aktív, a v ktorých udržiava hodnotu majetku na úrovni nastaveného dna. S rastúcou hodnotou Sharpe ratio investor reaguje na zmeny stavovej funkcie výraznejšie, aby v čase maturity si zaistil hodnotu svojho majetku nad hodnotou dna $W^{LEL} \geq \underline{W}$.

Citlivosť na parameter γ

Rovnako ako v predchádzajúcom prípade uvažujeme portfólio s jedným rizikovým aktívom a uvádzame aj citlivosť parametra γ na $\theta^{LEL}(t)$, keďže θ^B sa v závislosti od γ mení.

Fixné parametre: $\kappa = 0.4$; $W(0) = 1$; $\xi(0) = 1$; $\underline{W} = 0.9$; $T = 1$; $t = 0.5$; $\epsilon = 0.01$; $r = 0.03$ a parameter γ , ktorý nadobúda postupne hodnoty $\gamma = \{2, 4, 6\}$. Hodnoty stavovej funkcie sú potom $\bar{\xi}_\epsilon = \{3.5786, 3.1598, 2.4804\}$, $\underline{\xi}_\epsilon = \{1.1701, 1.5301, 2.1301\}$ a $\theta^B = \{1.3680, 0.9120, 0.4560\}$. Vývoj je zaznamenaný na Obr. 4.8



Obr. 4.8: Citlivosť $q^{LEL}(t)$ a $\theta^{LEL}(t)$ na parameter γ , kde $\theta^B = \{1.3680, 0.9120, 0.4560\}$

Parameter γ vyjadruje averziu investora voči riziku. So zvyšujúcou sa hodnotou parametra je investor konzervatívnejší, čo si môžeme všimnúť aj na správaní $\theta^{LEL}(t)$. Rizikovo averzný investor nevyhľadáva natoľko rizikové pozície a preto do rizikových aktív so zvyšujúcou sa hodnotou γ investuje menší podiel svojho majetku. Pre vyššie hodnoty averzie voči riziku v závislosti od $\xi(t)$ nadobúda $\theta^{LEL}(t)$ menšie hodnoty a svoje správanie výraznejšie nemení za účlom dosiahnutia $W^{LEL}(T) > \underline{W}$.

Kapitola 5

Aplikácia LEL-RM na simulovaný vývoj portfólia

V tejto časti budeme analyzovať správanie sa portfólia riadeného LEL-RM pre rôzne hodnoty exogénnych parametrov, ktoré sú dané investorovou funkciou užitočnosti. Uvažujeme portfólio zložené z troch reálnych rizikových aktív a jedného bezrizikového dlhopisu. Podkladové aktíva sme použili zo stránky <http://finance.yahoo.com> a to konkrétne:

- Fidelity Balanced (FBALX)
- AFLAC Inc. (AFL)
- Enterprise Products Partners LP (EPD)

Poznamenajme, že so zvyšujúcou koreláciou medzi aktívami, rastie aj riziko portfólia, preto sme v nami zvolenom portfóliu zastúpili rastové, vyvážené aj konzervatívne aktívum. Denné výnosy sme pozorovali za obdobie od 1.1.2005 – 1.1.2007, keďže neskorší vývin je ovplyvnení finančnou krízou, počas ktorej akcie dosahujú záporné výnosy a trhovú cenu rizika je taktiež vysoká. Odhadnutý ročný výnos pre nami zvolené aktíva za určené obdobie je $\mu = \{0.052270542, 0.089187476, 0.080038445\}$ a trhovú cenu rizika pre uvažovanú úrokovú mieru $r = 0.03$ je $\|\kappa\| = 0.4351$. Variačno-kovariačnú maticu sme odhadovali z rovnakého časového obdobia.

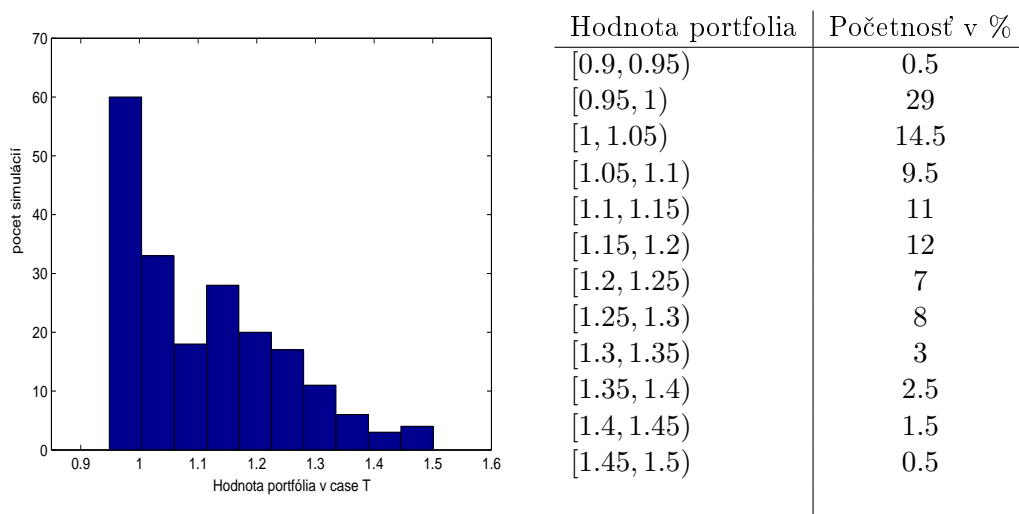
Analýzu robíme pomocou 200 simulovaných vývojev portfólia riadeného LEL-RM, ktoré následne porovnáme aj s 200 simuláciami portfólia pri naivnej diverzifikácii.

5.1 Jednoročné držanie portfólia

Základné parametre sme nastavili nasledovne:

$$\|\kappa\| = 0.4351, W(0) = 1, \gamma = 3, T = 1, \xi(0) = 1, \underline{W} = 1, \epsilon = 0.01, t = 0$$

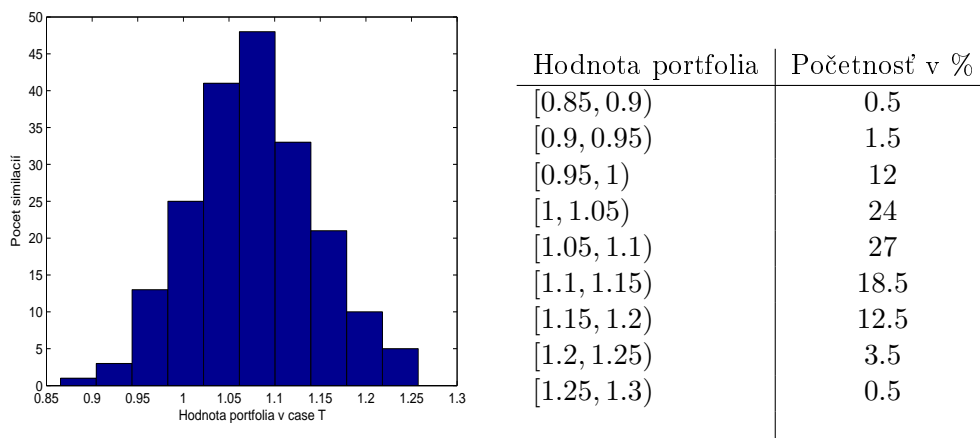
Konečné hodnoty portfólií sú znázornené na nasledujúcom histograme a tabuľke (Obr. 5.1)



Obr. 5.1: Histogram hodnôt portfólia v čase $T = 1$ riadených LEL-RM pre dno rovné počiatocnému kapitálu

V tomto prípade uvažujeme hodnotu dna rovnú počiatocnému kapitálu $\underline{W} = W(0)$, t.j. nepripúšťame na konci investičného obdobia žiadnu stratu. Vidíme však, že konečná hodnota portfólia klesla pod stanovené dno v 29.5% prípadoch. Avšak minimálna hodnota portfólia v čase T je 0.9485, čo predstavuje stratu len 5.15% z počiatocného kapitálu. LEL stratégia udržuje hodnotu majetku v dobe maturity väčšinou v intervale $[1, 1.4)$, kde sa nachádza okolo 67.5% hodnôt všetkých simulácií. Priemerná hodnota majetku je 1.112 a maximálne zhodnotenie je o 50.1% z počiatocnej investície.

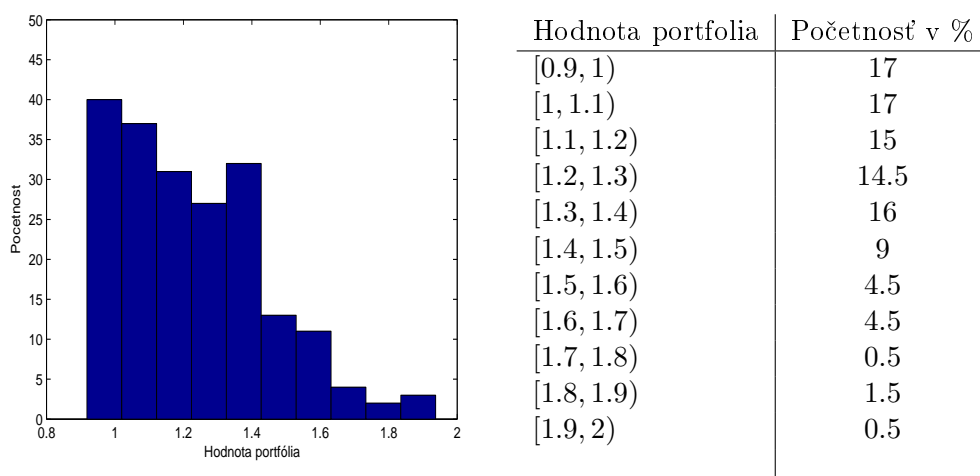
Pre porovnanie uvažujeme nezaistené portfólio s nezmenenými parametrami pri naivnej diverzifikácii, t.j. do každého aktíva investujeme 25% z počiatocného kapitálu. Pre 200 simulácií vývoja portfólia sú výsledky nasledovné (Obr. 5.2)


 Obr. 5.2: Histogram a tabulové hodnoty nezaisteného portfólia v čase $T = 1$

Z daných výsledkov vidíme, že strata nastáva v 14% prípadov, avšak maximálna strata je až 13.47%, čo je 2.62 krát väčšia ako v prípade LEL-RM. Maximálne zhodnotenie majetku je 25.74%, čo je takisto v porovnaní s LEL-RM nižšie.

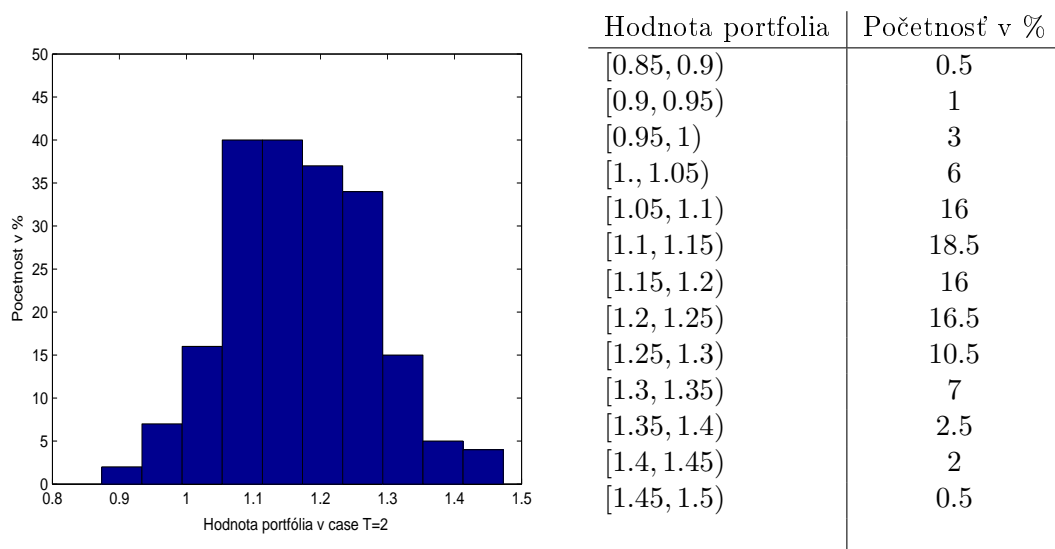
5.2 Predĺženie investičného horizontu

Vysoká početnosť strát v predchádzajúcom prípade môže byť spôsobená požadovanou vysokou hodnotou dna vzhľadom na relatívne krátke obdobie držania portfólia. Preto sme zvýšili dobu do maturity na $T = 2$, no ostatné parametre sme ponechali nezmenené. Simulácie vykazujú nasledovné výsledky (Obr. 5.3):


 Obr. 5.3: Histogram a tabulové hodnoty portfólia riadeným LEL-RM v čase $T = 2$

Vidíme, že zvýšením doby do maturity dosahujeme výrazne lepšie výsledky. Zvýšením doby do maturity sme znížili straty až o 12%, t.j. len v 17% prípadoch poklesla hodnota majetku pod počiatočné imanie a zároveň maximálna strata bola len vo výške 8.2% z počiatočnej investície. Rovnako zhodnotenie majetku pre dlhšie obdobie dostáva väčší priestor. Maximálna hodnota majetku sa dosiahla na úrovni 193.72% z počiatočného imania. Avšak konečná hodnota väčšiny portfólií sa nachádza v rámci intervalu $[1, 1.7)$, v ktorom zaznamenávame 80.5% prípadov. Priemerná hodnota je 1.232, čo predstavuje priemerné zhodnotenie o 23.2%.

Ak porovnáme LEL-RM s nezaisteným portfóliom, ktoré vykazuje nasledujúce výsledky (Obr. 5.4)

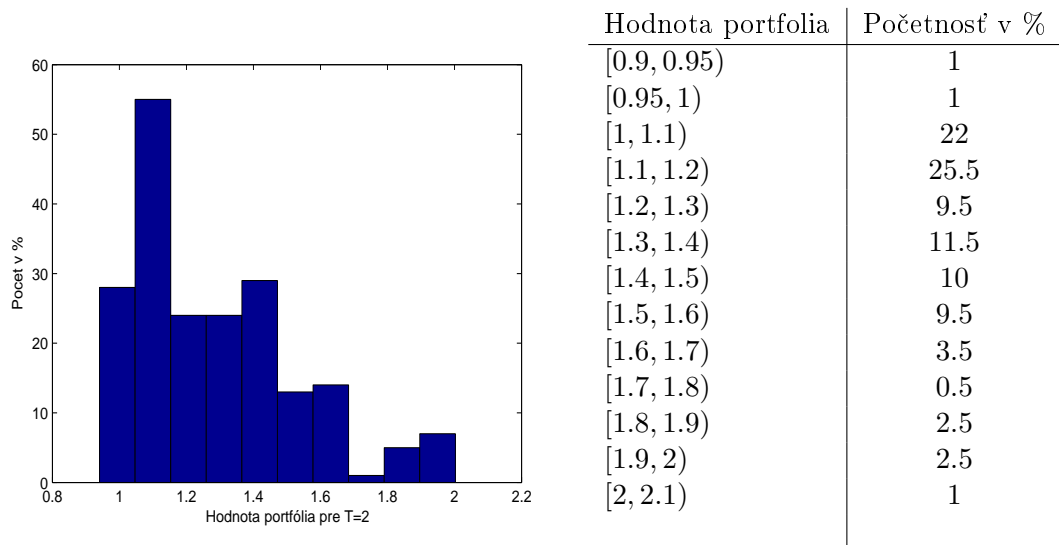


Obr. 5.4: Histogram a tabulové hodnoty nezaisteného portfólia pre $T = 2$

Vidíme, že portfólia riadené LEL-RM dosahujú vyššie výnosy a prípadné straty sú menšie ako v prípade benchmarku.

5.3 Zníženie hodnoty dna

Keďže stále dosahujeme straty pomerne vo veľkom percente prípadov znížime hodnotu dna na úroveň $\underline{W} = 0.95$. Ostatné parametre nechávame rovnaké ako v prípade 2.. Výsledky simulácií sú nasledovné (Obr. 5.5):



Obr. 5.5: Histogram a tabulové hodnoty portfólia riadeným LEL-RM v čase $T = 2$ pre znížené dno $\underline{W}=0.95$

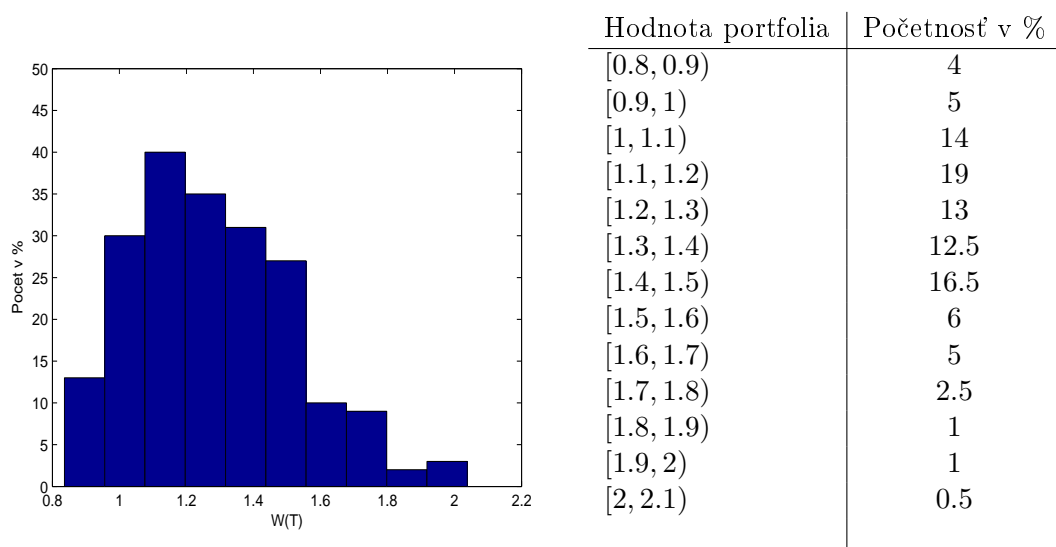
Vidíme, že znížením dna o 5% sme znížili straty, ktoré nastávajú iba v 1% všetkých prípadoch, t.j. len v dvoch prípadoch. Maximálna strata je 5.92% z počiatočnej investície. Je zrejme, že znížením hodnoty dna a tým zvyšovaním hodnoty vankúša medzi počiatočnou hodnotou portfólia a dnom, zväčšujeme priestor pre zhodnotenie investícií a pravdepodobnosť, že hodnota portfólia bude väčšia teda tiež rastie. Hodnoty portfólia sa nachádzajú v 88% prípadov v intervale $[1, 1.6)$. Priemerná hodnota portfólia v čase maturity je 1.289.

Ak porovnáme dané výsledky s nezaisteným portfóliom, kde priemerná hodnota portfólia dosahuje hodnotu 1.169, vidíme, že v prípade portfólia riadeného LEL-RM dosahujeme výrazne vyššie zhodnotenie.

5.4 Výraznejšie zníženie dna

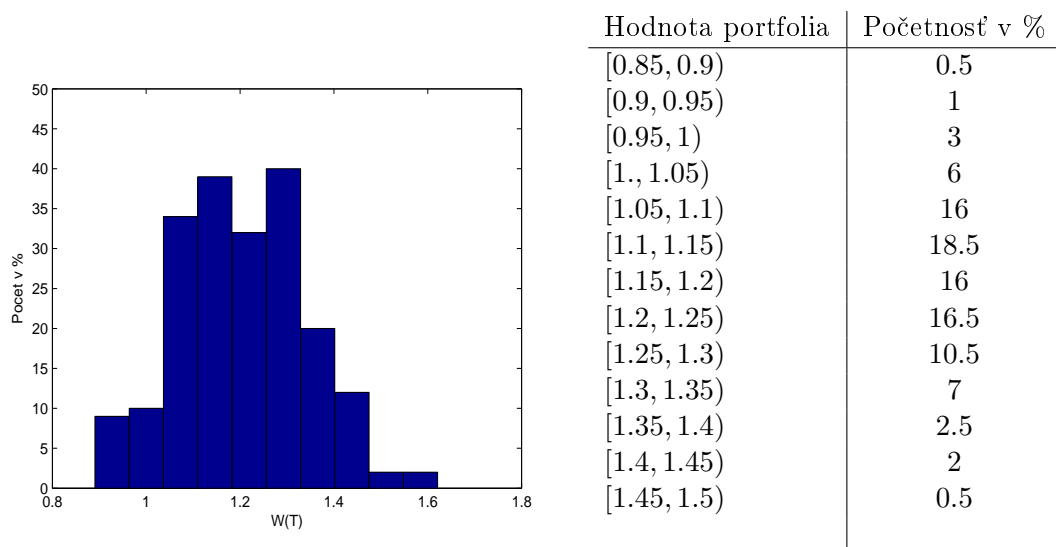
Ak hodnotu vankúša zvýšime ešte výraznejšie znížením dna až na hodnotu $\underline{W} = 0.9$. Výsledky sú zachytené histograme a v tabuľke (Obr. 5.6)

Vidíme, že hodnoty sa pohybujú prevažne v intervale $[1, 1.8)$ a priemerná hodnota portfólia dosahuje hodnotu 1.286. Maximálne zhodnotenie je až do výšky 203.8% z počiatočnej investície. Avšak stratu zaznamenávame už v 4% zo všetkých prípadov, čo vyplýva z výraznejšieho investovania do rizikových aktív.


 Obr. 5.6: Histogram a tabulové hodnoty portfólia v čase $T = 2$ pre znížené dno $\underline{W}=0.9$

5.5 Zvýšenie averzie voči riziku

V tomto prípade sa zameriame na hodnotu averzie voči riziku a konkrétne zvýšime parameter γ na hodnotu 5. Ostatné parametre nechávame rovnaké ako v prípade 3.. Výsledné hodnoty sú nasledovné (Obr. 5.7):

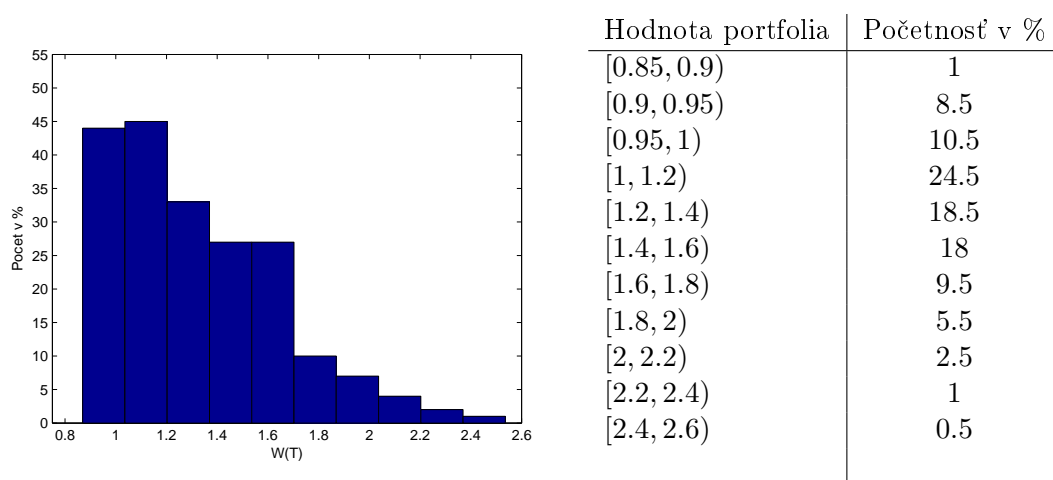

 Obr. 5.7: Hodnoty portfólia v čase $T = 2$ pre parametre $\underline{W} = 0.95$, $\gamma = 5$

Vidíme, že pri zvýšenej averzii voči riziku sa znižuje možnosť výraznejšieho zisku, keďže investor sa stáva konzervatívnejší. Hodnoty sa pohybujú prevažne v intervale $[1, 1.5)$ a

priemerná hodnota dosahuje 1.203, čo sú v porovnaní s predchádzajúcim prípadom nižšie hodnoty.

5.6 Zníženie averzie voči riziku

Ak však znížime averziu voči riziku na hodnotu $\gamma = 2$, portfólia dosahujú nasledovné hodnoty (Obr. 5.8)



Obr. 5.8: Hodnoty portfólia v čase $T = 2$ pre $\underline{W} = 0.95$ a $\gamma = 2$

Investor s nízkou averziou voči riziku investuje väčší podiel majetku do rizikových akcií a tým výraznejšie participuje na ich vývoji. To sa odzrkadlilo aj na širokej škále hodnôt majetku na konci držania portfólia. Tým, že investor vyhľadáva rizikovejšie pozície zvyšuje pravdepodobnosť výraznejšieho zisku, ale zároveň aj pravdepodobnosť potenciálnej straty. Vidíme, že až v 9.5% prípadoch nedosiahla hodnota portfólia ani úroveň dna. Na druhej strane zaznamenávame vyššie percento výraznejších ziskov. V 76% prípadov sa hodnota portfólia pohybovala v intervale $[1, 2)$ a priemerná dosiahnutá hodnota je 1.3269.

Na základe dosiahnutých výsledkov vidíme, že zvyšovaním veľkosti vankúša, t.j. znížením hodnoty dna dosahuje LEL stratégia lepšie výsledky. Pri zmene parametra vyjadrujúceho averziu voči riziku vidíme, že investor s nižšou averziou voči riziku dosahuje výraznejšie zisky ako averznejší investor, no pravdepodobnosť potenciálnej straty je v prípade menej averznejšieho investora vyššia. To je spôsobené tým, že rizikovo averznejší investor investuje väčší podiel do bezrizikového dlhopisu a teda natoľko neparticipuje na vývoji aktív.

Kapitola 6

Historické simulácie

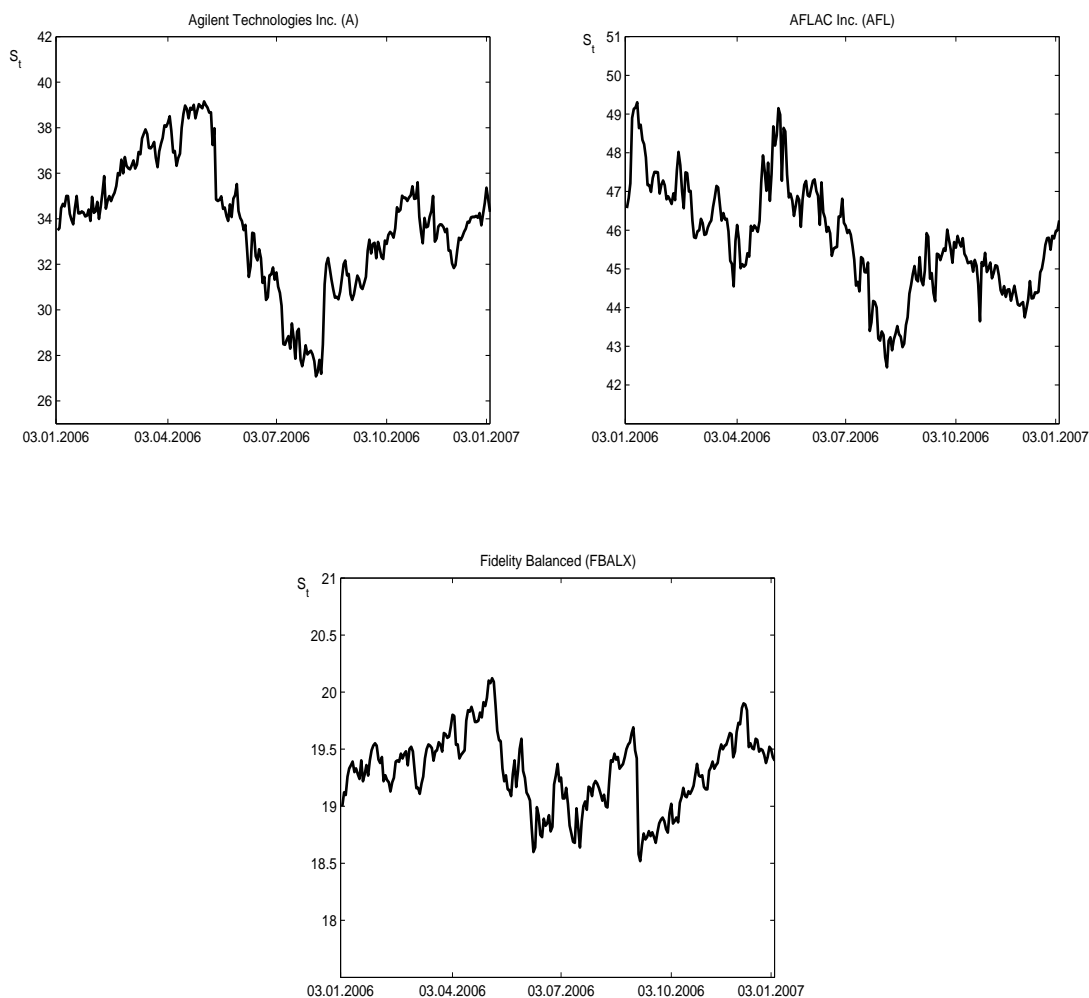
V nasledujúcom texte budeme pozorovať reakciu a správanie sa portfólia riadeného LEL-RM v prípade skutočného vývoja aktív. Opäť uvažujeme portfólio zložené z troch rizikových aktív a jedného bezrizikového dlhopisu. Historický vývoj aktív sme použili zo stránky <http://finance.yahoo.com>. Konkrétne aktíva sú nasledovné:

- Agilent Technologies Inc. (A)
- AFLAC Inc. (AFL)
- Fidelity Balanced (FBALX)

Variačno-kovariančnú maticu a ročné výnosy sme odhadovali za obdobie od 02.01.2004 – 03.01.2006. Odhadnutý ročný výnos za dané obdobie bol $\mu = \{0.127566172, 0.089187476, 0.061426657\}$ a trhová cena rizika $\|\kappa\| = 0.4295$. Vývoj aktív za obdobie od 03.01.2006 – 02.01.2008 sme použili na simuláciu stratégie. Pohyb aktív nebude simulovaný náhodne, avšak bude sledovať skutočné denné výnosy, ktoré aktíva reálne dosahovali za pozorované obdobie. Variačno-kovariančnú maticu sme uvažovali konštantnú. Portfólio riadené LEL stratégiou budeme analyzovať pre rôzne hodnoty parametrov.

6.1 Ročné držanie portfólia

Najskôr sa pozrieme na ročný priebeh portfólia riadeného LEL-RM. Budeme sledovať vývoj akcií za obdobie od 03.1.2006 – 03.01.2007, ktorý je pre ilustráciu zaznamenaný na nasledujúcom obrázku (Obr. 6.1)


 Obr. 6.1: Vývoj rizikových aktív $A(t)$, $AFL(t)$, $FBALX(t)$

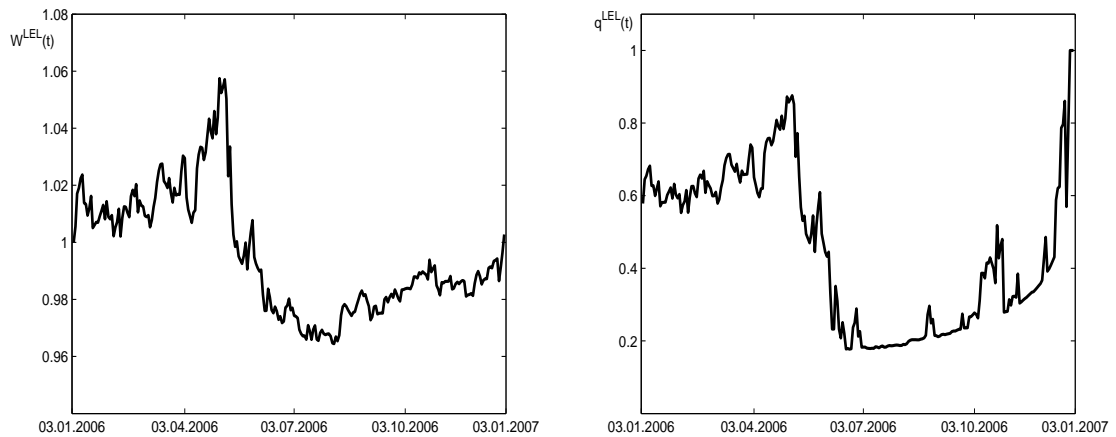
Vývoj prvého rizikového aktíva (A) má z počiatku prevažne rastúci charakter. Od 12.05.2006 do 07.08.2006 hodnota akcie postupne klesla z hodnoty 39.15 na 27.08, čo predstavuje pokles až o 30.83%. Maximálny denný pokles bol zaznamenaný práve počas tohto obdobia a to vo výške 8.574% dňa 16.05.2006. Prevažne rastúcu tendenciu si vývoj ceny akcie udržuje od 15.08.2006 do konca sledovaného obdobia. Maximálny denný výnos, ktorý vývoj akcie dosiahol bol vo výške 8.90% dňa 15.08.2006. Vývoj ceny druhého aktíva (AFL) má prevažne klesajúci charakter, výraznejší rast ceny akcie nadobúda od 06.04.2006 – 05.05.2006, 17.08.2006–04.10.2006 a posledný mesiac pozorovaného obdobia od 01.12.2006. Maximálny denný výnos bol 3.52%. V zvyšnom období mala cena akcie v priemere klesajúci charakter, pričom maximálny denný pokles bol zaznamenaný dňa 26.07.2006 vo výške 3.98%. Posledné

tretie aktívum (FBALX) zaznamenáva výraznejšie výkyvy v období od 08.05.2006 do 11.09.2006, v ktorom dosiahla maximálne denné zhodnotenie vo výške 1.95% dňa 29.06.2006 a maximálny denný pokles 4.422% dňa 08.09.2006. Zvyšný vývoj si udržiava prevažne rastúci charakter. Vývoj tretieho vyváženého aktíva je v porovnaní s druhými dvoma vyrovnaný a jeho volatilita je najnižšia.

V nasledujúcom texte budeme sledovať vývoj portfólia riadeného LEL-RM a vystavenia do rizikových aktív a ich reakciu na zmeny v hodnotách cien akcií. Trhová cena rizika pre dané aktíva je $\|\kappa\| = 0.4295$. Ostatné parametre sme na začiatku nastavili nasledovne:

$$\epsilon = 0.01 \quad W(0) = 1 \quad \gamma = 3 \quad T = 1 \quad \xi(0) = 1 \quad \underline{W} = 1 \quad t = 0$$

Obrázok (Obr. 6.2) zaznamenáva vývoj hodnoty portfólia a vystavenia do rizikových aktív:



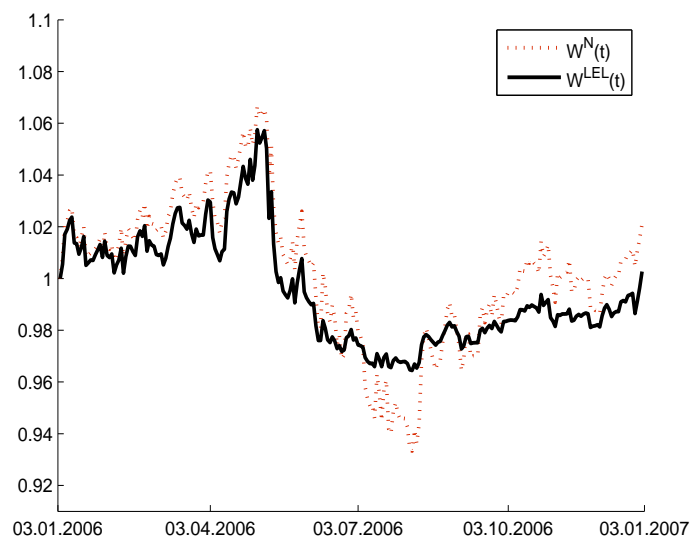
Obr. 6.2: Vývoj hodnoty portfólia $W^{LEL}(t)$ a vystavenia do rizikových aktív $q^{LEL}(t)$

Podiel investovaný do rizikových aktív pre nastavené parametre v prípade benchmarku je $\theta^B = \{0.2958, 0.3737, 0.5769\}$. Vidíme, že najväčší podiel majetku investuje stratégia do rovnovážneho aktíva (FBALX) a preto aj participácia na vývoji cien akcií bude v najväčšej miere ovplyvnená vývojom tohto aktíva.

Konečná hodnota majetku v čase maturity dosiahla hodnotu 1.0027, čo predstavuje zhodnotenie len o 0.27%. Vidíme, že počas poklesu cien akcií klesla aj hodnota majetku pod stanovené dno a vystavenie do rizikových aktív sa držalo na výrazne nízkej úrovni. V prí-

pade rastu cien akcií sa zvyšuje vystavenie a tým aj hodnota majetku rastie. Ku koncu obdobia dosiahlo vystavenie maximálnu hodnotu rovnú 1 za účelom vyššieho zhodnotenia počiatkovej investície. Vystavili sme sa síce vyššiemu riziku, avšak o to viac sme mohli participovať na raste cien podkladových aktív. Maximálna hodnota majetku dosiahnutá počas sledovaného obdobia bola 1.0575. Dno, ktoré bolo v tomto prípade rovné počiatkovému kapitálu, nebolo dosiahnuté v 61.5% obdobia. Minimálna hodnota však neklesla pod hodnotu 0.9645, teda maximálny pokles z počiatkovej investície bol len o 3.55%. Keďže hodnota dna je na relatívne krátke obdobie príliš vysoká, stratégia neriskuje prudkú zmenu v cenách aktív, ktorá by viedla k poklesu hodnoty portfólia pod stanovené dno a poisťuje výrazný podiel investície v bezrizikovom dlhopise. Preto sme aj ku koncu investičného obdobia nezažnamenali výrazné zhodnotenie vloženého kapitálu.

Na obrázku (Obr. 6.3) porovnávame portfólio riadené LEL stratégiou s portfóliom pri naivnej diverzifikácii, t.j. do každého aktíva sme vložili štvrtinu majetku.



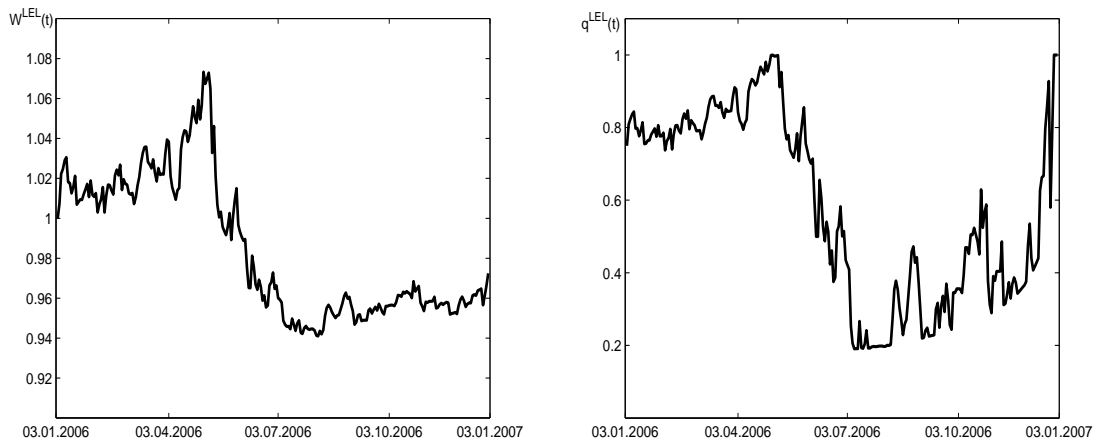
Obr. 6.3: Vývoj hodnoty portfólia $W^{LEL}(t)$ a nezaisteného portfólia $W^N(t)$

Vidíme, že nezaistené portfólio síce vykazuje vyššie zhodnotenie majetku ako riadené portfólio, v prípade poklesu cien akcií je však pokles hodnoty majetku výrazne vyšší. Pri LEL stratégii bol maximálny pokles vo výške 3.6% z počiatkovej investície a pri naivnej diverz-

ifikácii bol takmer dvojnásobný a to o 6.7% z počiatočného imania. Nižšie zhodnotenie v prípade LEL stratégie je spôsobené tým, že pri vysokej hodnote dna je podiel investovaný do rizikových aktív menší ako pri naivnej diverzifikácii a preto aj participácia na raste cien aktív nie je taká výrazná.

6.1.1 Zníženie hodnoty dna o 3%

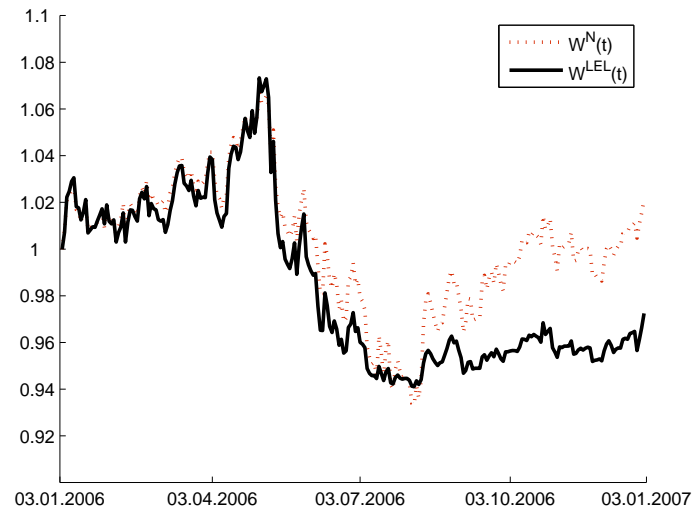
Znížením hodnoty dna zvýšime rozdiel medzi dnom a počiatočnou investíciou, vďaka čomu budeme môcť výraznejšie participovať na vývoji akcií. Zvyšné parametre okrem dna sme ponechali nezmenené. Ročný vývoj portfólia riadeného LEL stratégiou a vystavenie pre zníženú hodnotu dna je nasledovný (Obr. 6.4):



Obr. 6.4: Vývoj hodnoty portfólia a vystavenia do rizikových aktív pre znížené dno

Konečná hodnota portfólia len mierne prekročila stanovené dno rovné $\underline{W} = 0.97$ a dosiahla hodnotu 0.9725. Zvýšením rozdielu medzi dnom a počiatočným imaním sme vytvorili väčší priestor na investovanie do rizika. To sa odzrkadlilo aj na vývoji vystavenia, ktoré sa udržuje na vysokej úrovni v prípade rastu podkladových aktív a výrazne poklesne v období negatívneho vývoja cien akcií, v ktorom si investor prevažnú časť svojho majetku poisťuje v bezrizikovom dlhopise. Podobné správanie zaznamenávame aj pri vývoji hodnoty portfólia, ktoré dosahuje jednak väčšie zhodnotenie ale aj výraznejší pokles pod stanovené dno. Počas sledovaného obdobia nadobudla hodnota majetku maximálnu hodnotu rovnú 1.0733 a minimálnu hodnotu 0.9410.

V porovnaní s nepoisteným portfóliom je vývoj majetku LEL stratégie nasledovný (Obr. 6.5):

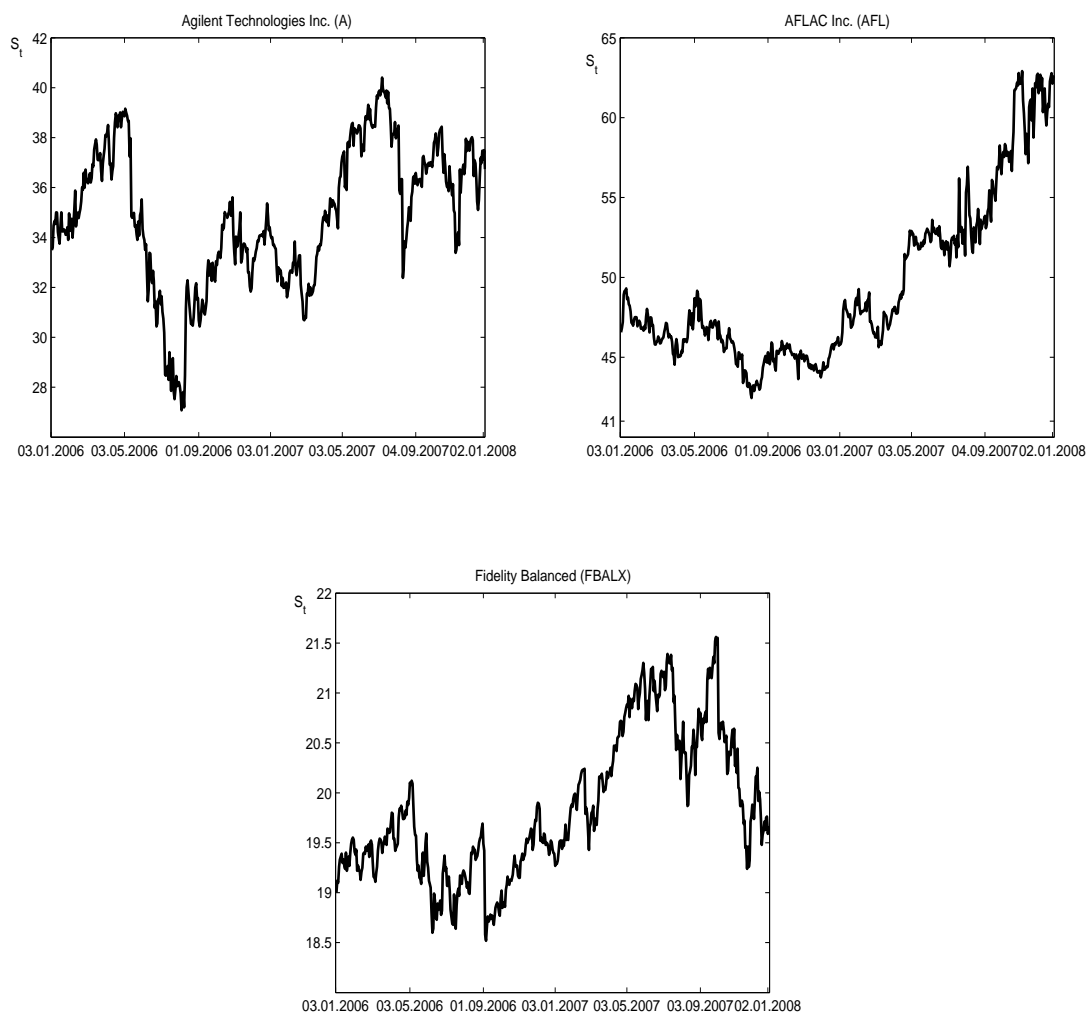


Obr. 6.5: Porovnanie vývoja riadeného $W^{LEL}(t)$ a nezaisteného portfólia $W^N(t)$

Portfólio pri naivnej diverzifikácii investuje do rizikových aktív 75% svojho majetku nezávisle od nastavania parametrov. Vidíme, že v tomto prípade je konečné zhodnotenie portfólia pri naivnej diverzifikácii vyššie ako pri LEL-RM aj napriek tomu, že LEL stratégia pri zníženom dne zvyšuje vystavenie do rizikových aktív a tým zvyšuje participáciu na vývoji akcií. Najväčší podiel majetku však investuje do akcie (FBALX), ktorá však pri svojom vyváženom vývoji neumožňuje LEL stratégii výraznejšie zhodnotiť majetok, no na druhej strane znižuje riziko poklesu pri prudkej zmene na finančných trhoch. Vidíme, že nepoistené portfólio vykazuje väčšiu stratu a aj nižšie maximálne zhodnotenie.

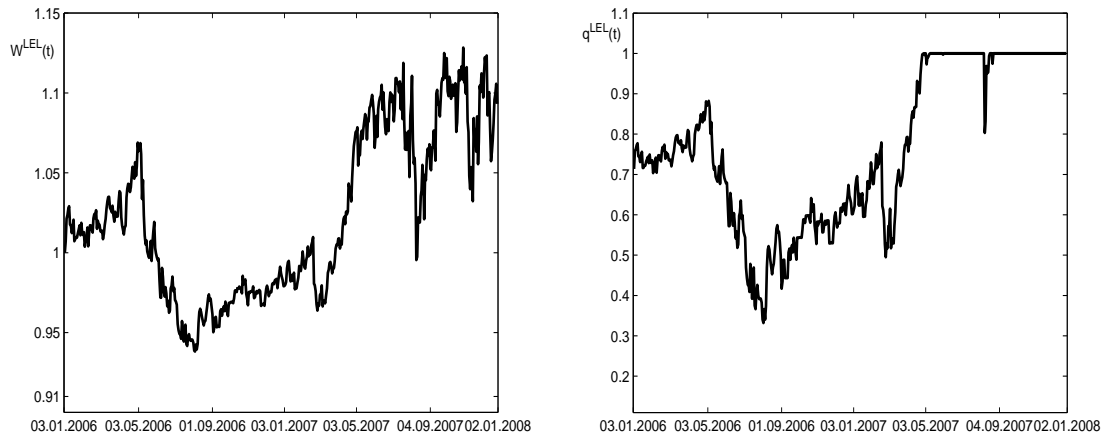
6.2 Predĺženie pozorovaného obdobia na dobu $T = 2$

V nasledujúcej časti budeme uvažovať dvojročný vývoj od 03.01.2006 – 02.01.2008 daných aktív, ktorý je zobrazený na nasledujúcich grafoch (Obr. 6.6)


 Obr. 6.6: Dvojročný vývoj rizikových aktív $A(t)$, $AFL(t)$, $FBALX(t)$

Prvé aktívum (A) v druhom roku sledovaného vývoja vykazuje až do maturity striedavo rast a následne pokles ceny. V období od 06.03.2007 – 12.07.2007 si udržiava prevažne rastúci charakter a následne cena akcie prudko klesá, pričom dňa 15.08.2007 dosiahla akcia maximálny denný pokles až vo výške 11.479%. Od 16.08.2007 až do konca pozorovaného obdobia má akcia striedavo rastúci a klesajúci charakter. Vývoj druhého aktíva (AFL) môžeme považovať v druhom roku sledovania v priemere za rastúci, pričom maximálne denné zhodnotenie zaznamenala akcia dňa 25.07.2007 vo výške 7.942%. Tretie aktívum ($FBALX$) má z počiatku rastúci charakter a ku koncu obdobia vykazuje pokles. Maximálny denný pokles 4.51% utrpela cena akcie dňa 05.10.2007 a maximálne zhodnotenie 18.09.2007 vo výške 2.055%.

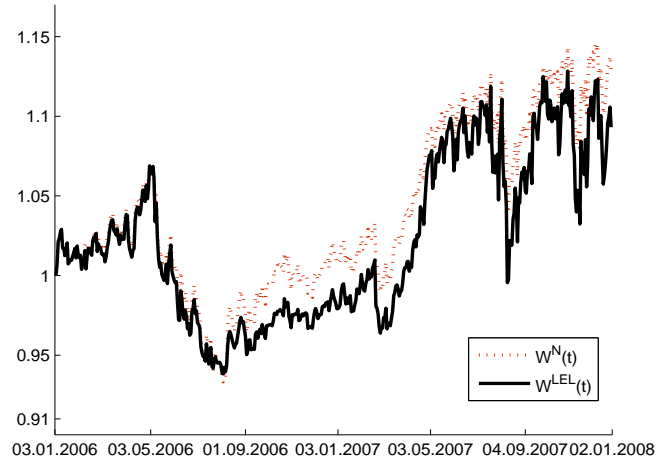
Pozrieme sa teraz na vývoj portfólia s dvojročnou dobou maturity a dnom rovným 0.97. Vývoj hodnoty majetku a vystavenia pre nezmenené ostatné parametre je graficky znázornený na nasledujúcom obrázku (Obr. 6.7)



Obr. 6.7: Vývoj hodnoty portfólia a vystavenia do rizikových aktív pre $T = 2$ s dnom \underline{W}

Stratégia dosiahla v čase maturity zhodnotenie počiatočnej investície o 9.31%, t.j. konečná hodnota portfólia bola na úrovni 1.0931. Maximálna hodnota majetku vo výške 1.1283 bola dosiahnutá dňa 31.10.2007, kedy všetky tri ceny rizikových aktív vykazovali rast a vystavenie sa v tomto období držalo na maximálnej možnej úrovni rovnej 1. Správanie vystavenia je podobné ako v predchádzajúcich prípadoch, keďže pri poklese cien akcií klesá aj vystavenie a rastie v prípade pozitívneho vývoja za účelom zhodnotenia investície. Na rozdiel od kratšieho investičného horizontu vidíme, že v tomto prípade dosahuje vystavenie celkovo vyššie hodnoty a ku koncu investičného obdobia sa udržiava na maximálnej hodnote rovnej 1. Maximálnu hodnotu dosahuje až v 3/10 celkového obdobia a tým umožňuje stratégii participovať na raste cien aktív. Na druhej strane kvôli vyššiemu vystaveniu poklesla hodnota majetku počas sledovaného obdobia výraznejšie ako pri jednoročnom držaní portfólia a minimálnu hodnotu dosiahla vo výške 0.9383, čo predstavuje prekročenie dna o 3.27%.

Porovnanie s portfóliom pri naivnej diverzifikácii zaznamenáva nasledujúci obrázok (Obr. 6.8)



Obr. 6.8: Porovnanie vývoja riadeného $W^{LEL}(t)$ a nezaisteného portfólia $W^N(t)$

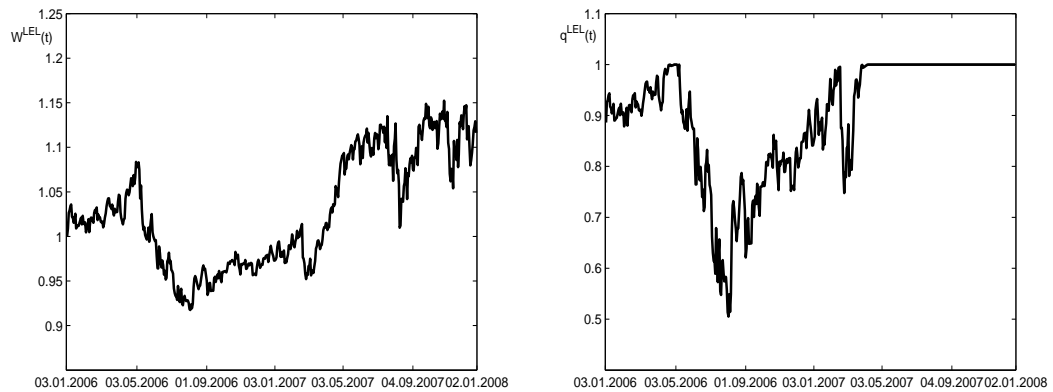
Môžeme si všimnúť, že hodnota majetku pri LEL-RM sa udržuje prevažne pod alebo je rovná majetku pri naivnej diverzifikácii, keďže vývoj portfólia pri LEL stratégii je výraznejšie ovplyvnený rizikovými aktívami, no na druhej strane stratégia poisťuje portfólio a preto je hodnota majetku nižšia ako pri neriadenom portfóliu. Minimálna hodnota majetku však bola nižšia pre neriadené portfólio, kde poklesla na hodnotu 0.9333.

6.2.1 Zníženie dna \underline{W} a zvýšenie parametra ϵ

Teraz sa pozrieme na vývoj portfólia so zníženým dnom rovným 0.95 a $\epsilon = 0.02$. Pri tejto zmene parametrov dostáva stratégia väčší priestor na participáciu vo vývoji rizikových aktív. Teda parametre stratégie sú nasledovné

$$\|\kappa\| = 0.4295 \quad W(0) = 1 \quad \gamma = 3 \quad T = 2 \quad \xi(0) = 1 \quad \underline{W} = 0.95 \quad \epsilon = 0.02 \quad t = 0$$

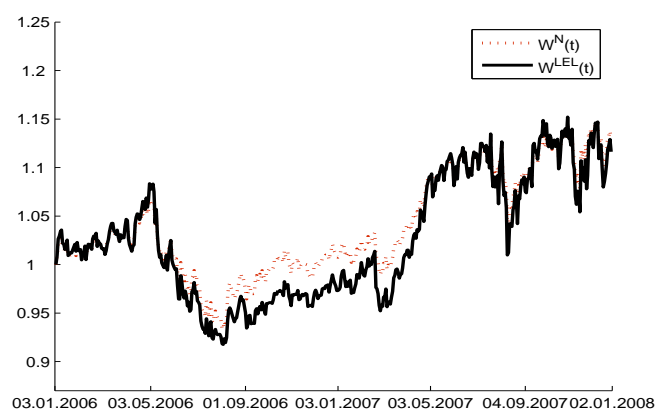
Vývoj hodnoty majetku a vystavenia je zaznamenaný na Obr. 6.9



Obr. 6.9: Vývoj hodnoty portfólia a vystavenia do rizikových aktív pre $T = 2$ a znížené dno

Vidíme, že vystavenie do rizikových aktív dosahuje počas celého pozorovaného obdobia hodnoty väčšie ako jedna polovica a skoro tretinu obdobia je rovný maximálnej možnej hodnote. Do rizika investujeme výrazne viac a to aj v prípade poklesov cien rizikových aktív. Na druhej strane sa však vďaka tomu vo väčšej miere podielame na pozitívnom vývoji akcií. Vidíme, že maximálne zhodnotenie počas držania portfólia bolo až o 15.22% z počiatkovej investície a konečná hodnota sa udržala na hodnote 1.1163. Hodnota majetku sa ale pohybuje vo väčšom intervale ako v predchádzajúcich prípadoch. Minimálna hodnota bola len na úrovni 0.9176.

V porovnaní s naívnou diverzifikáciou je vývoj portfólia nasledovný (Obr. 6.10)

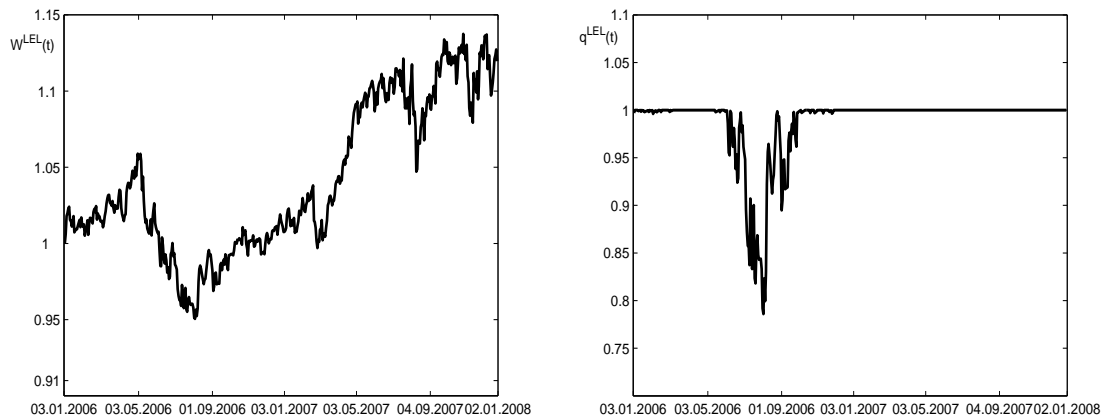


Obr. 6.10: Porovnanie vývoja riadeného $W^{LEL}(t)$ a nezaisteného portfólia $W^N(t)$

Vidíme, že vďaka vyšším hodnotám vystavenia dosahuje LEL stratégia zhodnotenie majetku podobné neriadenému portfóliu a dokonca maximálna hodnota bola pri LEL stratégii vyššia a to na úrovni 1.1522, pričom neriadené portfólio zhodnotilo počiatočnú investíciu maximálne o 14.56%.

6.2.2 Zvýšenie averzie voči riziku

Pozrieme sa ešte na vývoj stratégie pre rizikovo averznejšieho investora a zvýšime parameter averzie voči riziku γ na hodnotu 5. Dno je rovné 0.95 a $\epsilon = 0.01$, ostatné parametre zostávajú nezmenené. Obrázok 6.11 znázorňuje vývoj optimálnej hodnoty majetku a vystavenia

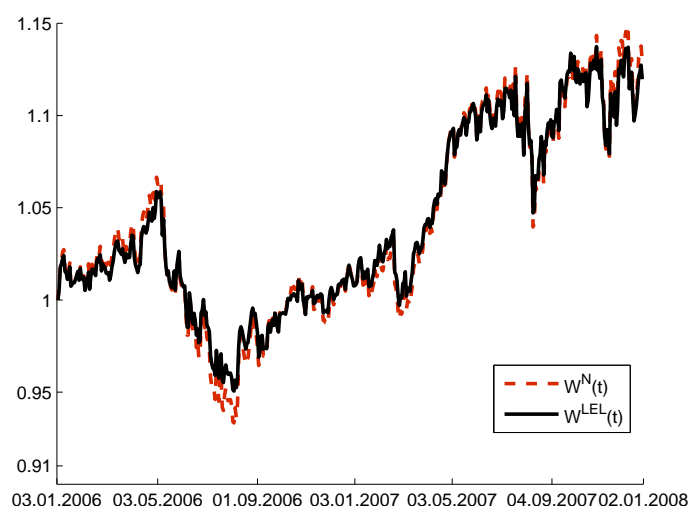


Obr. 6.11: Vývoj hodnoty portfólia a vystavenia do rizikových aktív pre $T = 2$ a $\gamma = 5$

S vyššou averziou k riziku sa znižuje podiel investovaný do rizikových aktív v prípade benchmarku a nadobúda hodnoty $\theta^B = \{0.1775, 0.2242, 0.3461\}$. Pri vyššej hodnote parametra γ sa stratégia stáva konzervatívnejšou a o to výraznejšie sa snaží udržať hodnotu majetku nad stanoveným dnom, čo dosahuje pomocou vystavenia, ktoré počas celého obdobia nadobúda vysoké hodnoty. Okrem obdobia, v ktorom sa súčasne držali všetky ceny aktív na najnižšej úrovni, hodnota vystavenia dosahuje maximálnu hodnotu rovnú 1. Tým sa stratégia poisťuje pred prípadným poklesom hodnoty majetku pod stanovené dno. Hodnota portfólia sa počas celého investičného obdobia nedostala pod stanovené dno, ktoré bolo v tomto prípade rovné 0.95. Minimálne hodnota portfólia klesla na 0.9506. Maximálna

hodnota majetku bola 1.1374 a konečná hodnota je rovná 1.1197.

Na obrázku (Obr. 6.12) je znázornené porovnanie s portfóliom pri naivnej diverzifikácii



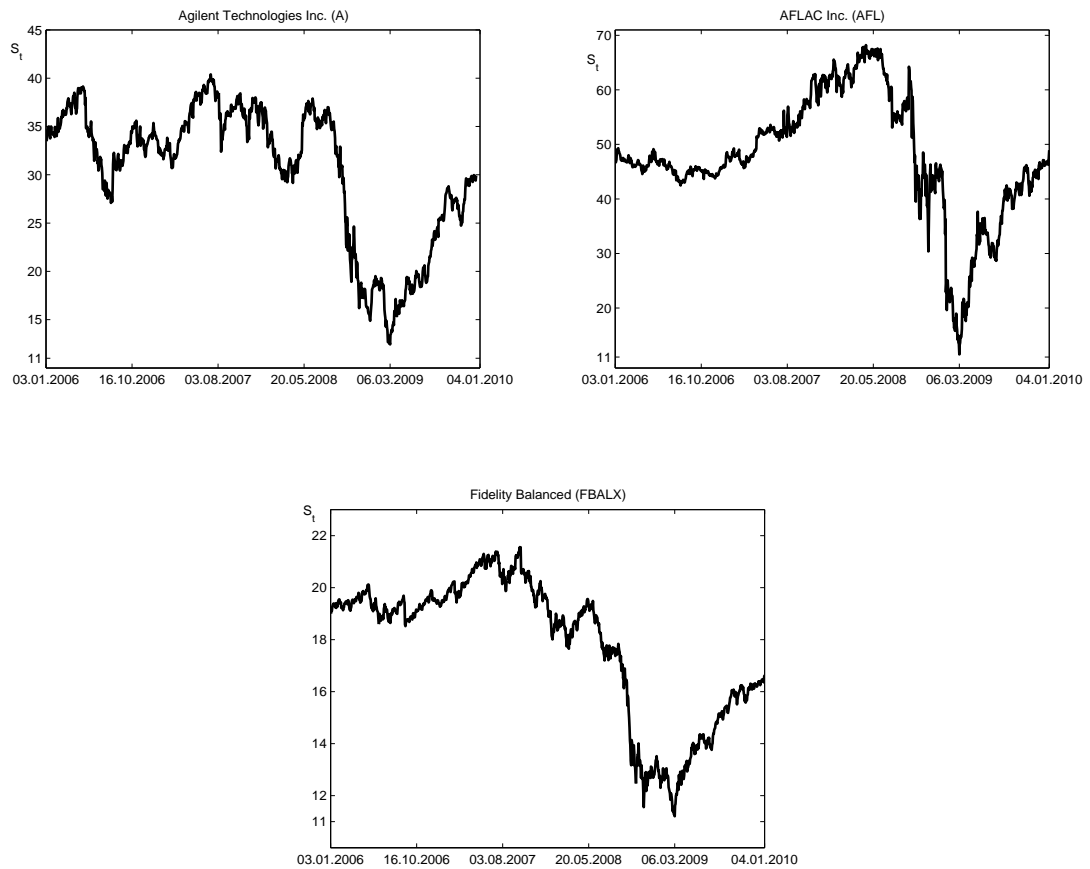
Obr. 6.12: Porovnanie vývoja riadeného $W^{LEL}(t)$ a nezaisteného portfólia $W^N(t)$

Síce portfólio s neoptimálnou alokáciou majetku dosahuje maximálnu hodnotu rovnú 1.1456, čo je vyššia hodnota ako v prípade portfólia riadeného LEL-RM, kde maximálna hodnota bola 1.1374, pokles v prípade neriadeného portfólia je v niektorých prípadoch väčší ako pre LEL-RM až o 1.73%.

6.3 Reakcia LEL-RM na prudký pokles cien akcií

V tejto časti sa pozrieme na významnú úlohu LEL-RM v prípade prudkého poklesu na finančnom trhu. Predĺžime investičný horizont a budeme sledovať vývoj aktív až do 04.01.2010, ktorý v sebe zahŕňa aj obdobie finančnej krízy na akciových trhoch. Vývoj rizikových aktív za obdobie od 03.01.2006 – 04.01.2010 je zaznamenaný na Obr. 6.13.

Vidíme, že všetky aktíva zaznamenali prudký pokles počas finančnej krízy v roku 2008 – 2009. Cena prvého aktíva (A) klesla z maximálnej dosiahnutej hodnoty 40.4 až na hodnotu 12.44, pričom maximálny denný pokles bol vo výške 11.48%. Po prudkom páde vývoj akcie ku koncu obdobia opäť nadobúda rastúci charakter a z minimálnej hodnoty sa do



Obr. 6.13: Vývoj rizikových aktív $A(t)$, $AFL(t)$, $FBALX(t)$ počas štyroch rokov

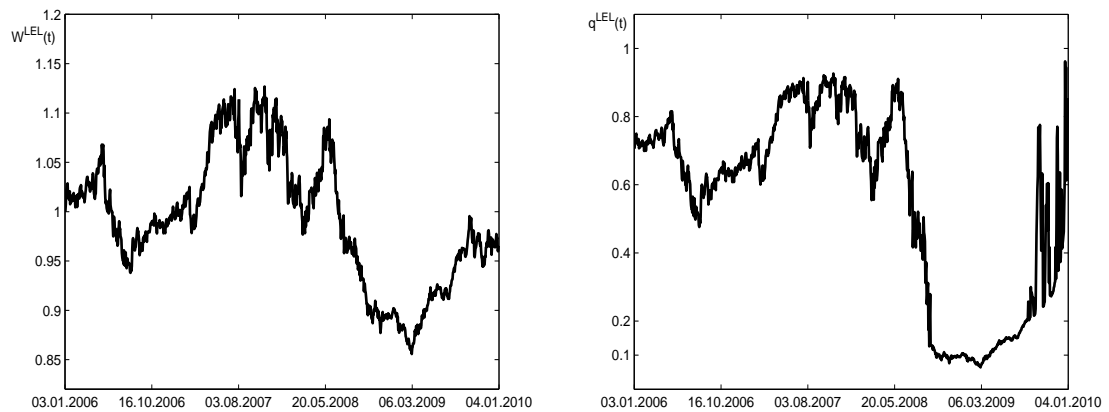
04.01.2010 dostalo na úroveň 30.96. Maximálny denný výnos počas celého obdobia bol až 13%. Druhé aktívum (AFL) zaznamenalo maximálny denný pokles vo výške 11.48%. Jeho hodnota počas sledovaného obdobia klesla z maximálnej ceny rovnej 68.22, ktorú dosiahlo dňa 28.04.2008, až na minimálnu dosiahnutú hodnotu 11.49 dňa 09.03.2009. Po dosiahnutí svojho minima rovnako ako prvé aktívum nadobúda rastúci charakter a ku koncu investičného obdobia sa dostala cena akcie na úroveň 48.95. Maximálny denný výnos zaznamenala akcia rovný 0.2645. Posledné tretie aktívum (FBALX) zaznamenalo najnižší denný pokles 6.03% a cena akcie počas sledovaného obdobia klesla z maximálnej hodnoty 21.56 na 11.21. Vývoj tretieho aktíva mal najnižšiu volatilitu.

Správanie LEL-RM budeme sledovať počas štyroch rokov, pričom základné parametre sú nasledovné

$$W(0) = 1 \quad \gamma = 3 \quad T = 4 \quad \xi(0) = 1 \quad \underline{W} = 0.98 \quad \epsilon = 0.01 \quad t = 0$$

Vývoj hodnoty majetku a vystavenia počas tohto obdobia zachytáva obrázok Obr. 6.14

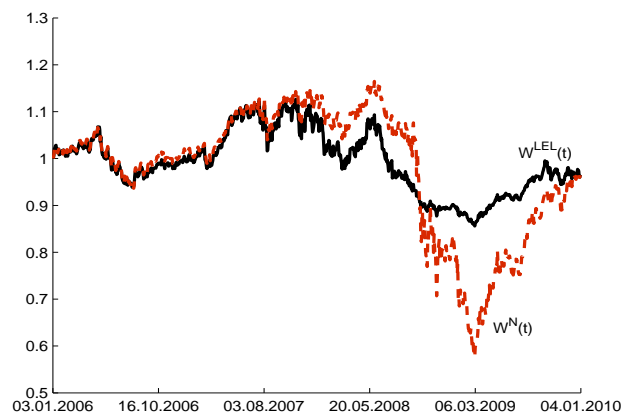
Vidíme, že počas prudkého poklesu cien akcií klesla aj hodnota portfólia, ktorá sa dostala



Obr. 6.14: Vývoj hodnoty portfólia a vystavenia do rizikových aktív pre $T = 4$

na minimálnu hodnotu rovnú 0.8558. Vystavenie sa počas tohto obdobia poklesu držalo na veľmi nízkej úrovni a teda stratégia poisťovala výrazne väčšiu časť v bezrizikovom dlhopise, vďaka čomu hodnota majetku neklesla proporcionálne k výške poklesu cien aktív. Ku koncu obdobia, počas ktorého ceny akcií rástli, LEL stratégia zvyšuje vystavenie a tým zhodnocuje majetok. Konečná hodnota portfólia dosiahla úroveň 0.9654, čo je len mierne pod hodnotou dna.

V porovnaní s naivnou diverzifikáciou je vývoj LEL stratégie nasledovný (Obr. 6.15)



Obr. 6.15: Porovnanie LEL-portfólia $W^{LEL}(t)$ a portfólia $W^N(t)$ pri naivnej diverzifikácii

Vidíme, že participácia na raste cien aktív je pri LEL-RM nižšia ako pri neriadenom portfóliu a hodnota portfólia pri LEL-RM rastie pomalšie, keďže najväčší podiel investuje do tretieho aktíva, ktoré má relatívne vyvážený charakter. Avšak v období prudkých poklesov cien akcií hodnota portfólia pri LEL-RM dosahuje výrazne vyššie hodnoty ako neriadené portfólio, kde klesla hodnota majetku až na 0.5756 a len vďaka následnému pozitívnemu vývoju aktív do konca obdobia neutrpela stratégia pri naivnej diverzifikácii výraznejšiu stratu z počiatočnej hodnoty investície ako LEL-RM.

Z výsledkov sme zistili, že LEL-RM zohráva významnú úlohu pri negatívnom vývoji na finančných trhoch a vďaka optimálnej dynamickej alokácii portfólia medzi rizikové a bezrizikové aktíva je účinným nástrojom pre poistenie proti prudkým poklesom v cenách akcií. Zároveň však umožňuje pri minimálnom riziku participovať na raste cien akcií a tým zhodnotiť vloženú investíciu. Dosiahnutie potenciálneho výnosu je možnosťou, a nie istotou pri riadení portfólia pomocou LEL-RM, avšak táto možnosť s poistením portfólia proti stratám a garanciou návratu investície v hodnote stanoveného dna je hlavnou výhodou LEL rizikového manažmentu.

Kapitola 7

Straty pri LEL-RM a VaR-RM

Basak a Shapiro (2001) ukázali, že straty pri VaR-RM sú výrazne väčšie ako pri optimálnej alokácii pomocou LEL-RM. V tejto kapitole budeme rovnako analyzovať potenciálne straty, ktoré nastávajú pri vysokých hodnotách stavovej funkcie $\xi(T)$. Zameráme sa na vyššiu trhovú cenu rizika, dlhší investičný horizont a vyššie hodnoty parametra γ , ktorý vyjadruje averziu investora voči riziku. Porovnáme straty, s ktorými investor musí počítať ak svoje portfólio riadi LEL-RM alebo VaR-RM. Ukážeme, že straty pri LEL stratégii sú výrazne menšie ako pre VaR-RM.

Pre detailnú analýzu optimálneho správania pri VaR-RM a LEL-RM stratégii, budeme uvažovať CRRA preferencie, $u(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, $\gamma > 0$, a log-normálne rozdelenie stavovej funkcie s konštantnou bezrizikovou úrokovou mierou a trhovou cenou rizika.

Najprv si uvedieme optimálnu hodnotu majetku v čase maturity pre obe stratégie v závislosti od hodnôt stavovej funkcie $\xi(T)$.

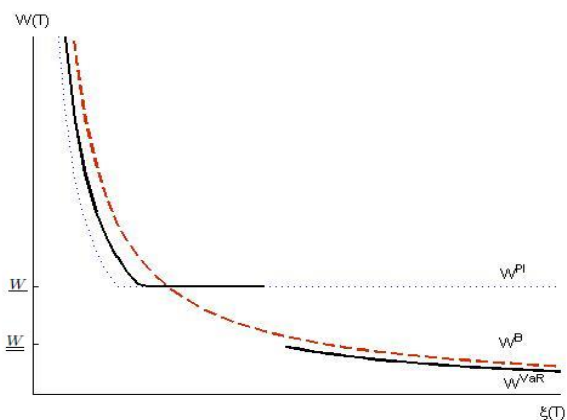
VaR-RM

Optimálna hodnota majetku v čase T pre VaR je

$$W^{VaR}(T) = \begin{cases} I(y\xi(T)) & \text{ak } \xi(T) < \underline{\xi} \\ \underline{W} & \text{ak } \underline{\xi} \leq \xi(T) < \bar{\xi} \\ I(y\xi(T)) & \text{ak } \bar{\xi} \leq \xi(T) \end{cases}$$

Graficky je optimálna hodnota znázornená na obrázku Obr. 7.1.

Ako si môžeme všimnúť, pre vysoké hodnoty stavovej funkcie, t.j. zlé stavy sú straty pri



Obr. 7.1: Optimálna hodnota majetku pri VaR-RM $W^{VaR}(T)$ ako funkcia $\xi(T)$

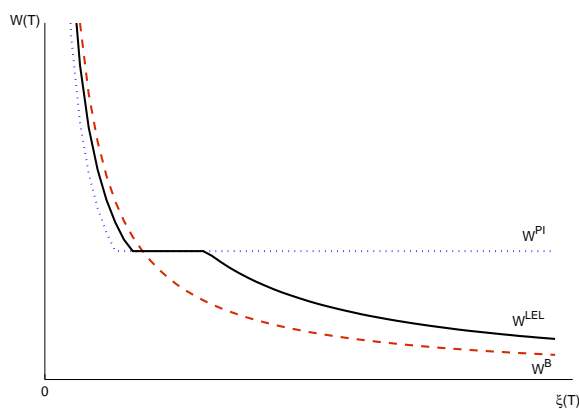
VaR stratégii väčšie nanejvýš rovné stratám v prípade benchmarku, keďže pre tieto hodnoty stavovej veličiny nie je portfólio vôbec poistené.

LEL-RM

Optimálna hodnota majetku v čase maturity v prípade LEL stratégie je

$$W^{LEL}(T) = \begin{cases} I(z_1\xi(T)) & \text{ak } \xi(T) < \underline{\xi}_\epsilon \\ \underline{W} & \text{ak } \underline{\xi}_\epsilon \leq \xi(T) < \bar{\xi}_\epsilon \\ I((z_1 - z_2)\xi(T)) & \text{ak } \bar{\xi}_\epsilon \leq \xi(T) \end{cases}$$

Priebeh optimálneho majetku v závislosti od $\xi(T)$ je znázornený na obrázku Obr. 7.2



Obr. 7.2: Optimálna hodnota majetku pri LEL-RM $W^{LEL}(T)$ ako funkcia $\xi(T)$

Vidíme, že straty v prípade LEL stratégie sú menšie nanajvýš rovné tým, ktoré nastávajú pre benchmark. Na rozdiel od VaR-RM, LEL stratégia v zlých stavoch čiastočne poisťuje portfólio a preto sú straty výrazne menšie.

7.1 Porovnanie strát

Zameriame sa na tzv. zlé stavy, v ktorých sa vyskytujú rozsiahle straty. Aby sme ukázali, že straty v prípade LEL-RM sú ekonomicky signifikantne menšie ako pre VaR-RM, budeme testovať nasledujúci podiel strát

$$E[\xi(T)(\underline{W} - W^{VaR}(T))1_{\xi(T) \geq \bar{\xi}}] \setminus E[\xi(T)(\underline{W} - W^{LEL}(T))1_{\xi(T) \geq \bar{\xi}}] \quad (7.1)$$

Veľkosť strát investora počítame pomocou vzťahu, ktorým je definovaná súčasná hodnota straty pre LEL stratégiu a to

$$E[\xi(T)(\underline{W} - W^{LEL}(T))1_{\xi(T) \geq \bar{\xi}}]$$

Táto hodnota sa vzťahuje na veľkosť dna \underline{W} . Tzv. zlé stavy však budeme uvažovať v súvislosti s VaR stratégiou. Tieto zlé stavy predstavujú výnimočne nepriaznivé podmienky, voči ktorým nie je VaR-RM vôbec poistená, na rozdiel od LEL-RM, ktorá ich čiastočne poisťuje.

Nasledujúca tabuľka 7.1 zachytáva podiel strát pre meniace sa parametre rizikovej averzie γ , VaR pravdepodobnosti α , LEL parameteru ϵ vzhľadom na počiatočnú investíciu $W(0)$ a dobu držania portfólia T .

Tabuľka 7.1: Podiel strát pri VaR-RM a LEL-RM

1. $\gamma = 2$

	$\alpha=0.01$			$\alpha=0.025$			$\alpha=0.05$		
	ϵ			ϵ			ϵ		
Čas	0.5	1	2	0.5	1	2	0.5	1	2
T=0.25	196.39	152.35	122.2	236.51	166.47	125.57	303.64	182.47	126.8
T=0.5	247.8	183.68	143.88	336.23	212.4	152.4	572.85	255.72	160.66
T=1	331.05	221.97	165.52	629.39	289.61	185.8	108.63	453.87	216.06
T=2	621.16	297.73	196.08	1944	567.26	248.69	106.25	106.25	368.79

2. $\gamma = 3$

	$\alpha=0.01$			$\alpha=0.025$			$\alpha=0.05$		
	€			€			€		
Čas	0.5	1	2	0.5	1	2	0.5	1	2
T=0.25	149.65	117.76	108.4	161.31	117.93	106.35	182.3	119.97	105.38
T=0.5	189.24	143.93	113.81	227.44	154.85	114.46	296.9	167.41	112.95
T=0.1	247.78	175.73	133.89	353.45	202.86	139.14	775.41	252.71	146.54
T=2	379.74	222.94	155.88	1256.43	310.94	174.3	104.42	650.81	207.01

 3. $\gamma = 4$

	$\alpha=0.01$			$\alpha=0.025$			$\alpha=0.05$		
	€			€			€		
Čas	0.5	1	2	0.5	1	2	0.5	1	2
T=0.25	115.73	105.19	105.19	117.98	104.31	104.31	120.63	102.63	102.63
T=0.5	150.94	116.37	107.08	167.12	117.9	106.06	193.49	119.25	104.12
T=1	195.29	142.41	109.71	245.4	153.42	108.6	369.99	169.66	106.3
T=2	275.74	175.39	126.22	513.16	212.03	130.24	102.48	304.5	137.86

Pravdepodobnosť straty, α , a ϵ uvažujeme v percentuálnych bodoch a dobu T v ročných jednotkách. Podiel strát počítame pre rôzne hodnoty averzie voči riziku a to konkrétne 2, 3 a 4. Pre každú hodnotu γ sme menili parametre $\alpha \in \{1\%, 2.5\%, 5\%\}$, $\epsilon \in \{0.5\%, 1\%, 2\%\}$ a $T \in \{0.25, 0.5, 1, 2\}$. Fixné hodnoty sme uvažovali nasledovné: $\underline{W} = 0.95$, $r = 0.03$, $\|\kappa\| = 0.5295$, $\xi(0) = 1$. Pre všetky hodnoty je VaR podmienka splnená. LEL podmienka nie je splnená pre $\gamma = 3$, $T = 0.25$ a $\epsilon = 2\%$ a pre $\gamma = 4$, $\epsilon \in \{1, 2\}$ a $T = 0.25$ a pre $\gamma = 4$, $\epsilon = 2$ a $T = 0.5$. LEL stratégia nezaznamenáva stratu pre $\gamma \in \{2, 3, 4\}$, $T = 2$, $\epsilon = 0.5\%$, $\alpha = 5\%$ a pre $\gamma = 2$, $T = 2$, $\epsilon = 1\%$, $\alpha = 5\%$ a $\gamma = 2$, $T = 1$, $\epsilon = 0.5\%$, $\alpha = 5\%$. V týchto prípadoch sme počítali pomer strát medzi VaR-RM a benchmarkom.

Parametre sú nastavené tak, aby predstavovali realistické kombinácie a tým poskytl empiricky významný odhad podielu strát medzi dvomi uvažovanými stratégiami rizikového manažmentu. Hodnoty ϵ , ktoré sme použili $\{0.5\%, 1\%, 2\%\}$, sú zvolené vzhľadom na straty pri VaR-RM. Napríklad pre nezmenené fixné parametre a rizikovú averziu rovnú $\gamma = 3$, $T = 0.5$ a VaR pravdepodobnosť $\alpha = 1\%$; 2.5% a 5%, dosahuje súčasná hodnota straty pri VaR-RM, t.j.

$$E[\xi(T)(\underline{W} - W^{VaR}(T))1_{\xi(T) \geq \bar{\xi}}]$$

hodnoty 0.54%, 1% a 1.48% z počiatočnej investície. Preto pre nastavené LEL parametre, investor riadiaci portfólio LEL-RM je vystavený podobným očakávaným stratám ako pri VaR-RM.

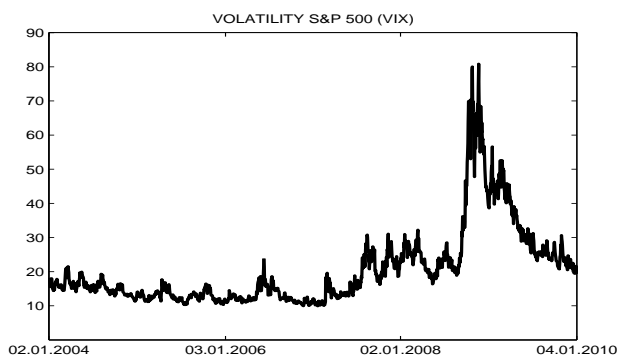
Na základe dosiahnutých výsledkov vidíme, že v nepriaznivých stavoch sú straty pri VaR-RM nielen väčšie ako pri riadení portfólia LEL stratégiou, no navyše sa vyskytujú pre všetky parametre. Pre väčšinu kombinácií sa podiel strát nachádza v rozsahu 200%–1000%. Napríklad pre investora s dobou držania portfólia 3 mesiace a s VaR pravdepodobnosťou $\alpha = 5\%$ je súčasná hodnota straty takmer dvakrát väčšia ako pri LEL-RM s $\epsilon = 0.5\%$, a podiel rastie s nižšou averziou voči riziku, s dlhšou dobou držania portfólia a s nižšou očakávanou stratou. Pomer strát medzi VaR-RM a benchmarkom sa pohybuje medzi 101%–110%.

Kapitola 8

Dynamická vs. statická stratégia

Hlavným cieľom investičných stratégií zabezpečovania portfólia je kontrola rizika a výnosov. Snažia sa o participáciu na raste podkladových aktív a obmedzujú stratu v prípade klesajúcich trhov. Patria medzi základné metódy, ktoré využívajú investori pri riadení svojich investícií. Investor si môže zvoliť medzi statickou a dynamickou investičnou stratégiou. Statická investičná stratégia je charakteristická tým, že počiatočná alokácia majetku a prijaté jednorázové riešenie sa už v priebehu času nekoriguje. Naopak, dynamická stratégia je založená na dynamickom prerozdeľovaní investície medzi rizikové a bezrizikové aktíva v závislosti od podmienok trhu a investorových preferencií.

Volatilita, ako dobre známa miera rizika zvyšuje riziko straty. Obrázok [Obr. 8.1] zobrazuje vývoj aktíva *VIX*, ktoré meria volatilitu indexu *S&P 500* za obdobie od 01.01.2004 – 04.01.2010.



Obr. 8.1: Priebeh VIX za obdobie od 01.01.2004 – 04.01.2010

Vidíme, že ak investor nechce dosiahnuť portfólio, ktorého riziko sa v čase nekontrolovateľne mení, je potrebná dynamická alokácia. V opačnom prípade bude riziko rásť a klesať v závislosti od rizika na trhu. Investor, ktorý kontroluje riziko portfólia bude v čase rastúcej volatility zvyšovať vystavenie do bezrizikových aktív. Investor riadiaci sa statickou stratégiou predpokladá určité vystavenie do rizikových aktív, ktoré v čase nemení a preto v prípade rastu volatility rastie aj riziko straty. Ak chceme kontrolovať riziko portfólia je potrebné sledovať riziko počas celého investičného obdobia a podľa toho dynamicky pre-rozdeľovať portfólio.

V nasledujúcej časti si porovnáme statickú stratégiu poisťovania portfólia, ktorá na zaistenie proti stratám využíva put opciu, s dynamickou alokáciou majetku pomocou LEL-RM.

8.1 Optimalizačný problém pri alokácii majetku pomocou put opcie

Pre jednoduchosť predpokladáme diverzifikáciu počiatočnej investície medzi jedno rizikové S_t a jedno bezrizikové B_t aktívum, ktorých priebeh je popísaný nasledujúcimi diferenciálnymi rovnicami

$$dB(t) = B(t)r(t)dt$$

$$dS(t) = S(t)[\mu dt + \sigma d\omega(t)]$$

kde r je spojitá úroková miera bezrizikového dlhopisu, μ drift, σ^2 variancia a $\omega(t)$ je štandardný Brownov pohyb.

Pri statickej investičnej stratégii určíme počiatočnú alokáciu majetku do rizikového aktíva pomocou ceny put opcie, pričom opcia slúži na hedging portfólia. Definujeme dnešnú ($t=0$) trhovú cenu put opcie $P(S_t, X, r, T, \sigma)$ s maturitou T , kde X je realizačná cena opcie. Pričom predpokladáme, že cena put opcie je daná Black-Scholesovým oceňovacím modelom:

$$P(S_t, X, r, T, \sigma) = Xe^{-rT}\Phi(d_1) - S_t\Phi(d_2)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{X}{S}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$
$$d_2 = \frac{\ln(\frac{X}{S}) - (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

kde $\Phi(\cdot)$ je kumulatívna disrtibučná funkcia normálneho rozdelenia. Cena put opcie v závislosti od ceny podkladového aktíva vyjadruje stratu alebo zisk. Ohraničením ceny put opcie percentom z počiatočnej investície $\epsilon W(0)$ v čase maturity limituje prípadnú stratu.

Na získanie počiatočnej alokácie majetku budeme riešiť nasledujúcu optimalizačnú úlohu:

$$\max S(0) \tag{8.1}$$

pri podmienkach

$$P(S_t, X, r, T, \sigma) \leq \epsilon W(0)$$

$$W(0) = S(0) + B(0)$$

Zároveň predpokladáme, že realizačná cena put opcie X je daná vzťahom

$$X = \underline{W} - B(T)$$

kde \underline{W} je vopred stanovené dno. Zvyšná časť majetku je investovaná do bezrizikového dlhopisu. Počiatočné vystavenie do rizikového aktíva zostáva konštantné počas celého investičného obdobia. Pri nižšej realizačnej cene X poskytuje opcia menšie poistenie, no jej cena je nižšia. Preto pri nižšej hodnote dna \underline{W} a tým pádom pri menšej X je podiel investovaný do rizikového aktíva vyšší.

V nasledujúcej časti porovnáme poistenie portfólia pomocou opčného kontraktu s LEL-RM riadeným portfóliom.

8.2 Porovnanie stratégií

Porovnaním oboch stratégií ukážeme, že dynamická alokácia s optimálnym prerozdeľovaním majetku výrazne zvyšuje výkon portfólia a statická stratégia je prijateľná len v prípade predpokladaného konštantného rizika počas investičného obdobia.

8.2.1 Participácia na raste podkladových aktív

V tejto časti sa pozrieme na simulovaný vývoj rizikového aktíva súčasne pre obe stratégie. Uvažujeme portfólio zložené z jedného bezrizikového dlhopisu a jednej akcie. Základné parametre sme odhadovali pre akciu Invesco Ltd. (IVZ) za obdobie od 02.01.2004–02.01.2006,

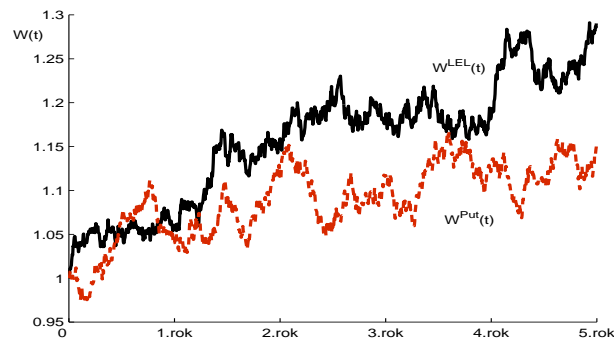
KAPITOLA 8. DYNAMICKÁ VS. STATICKÁ STRATÉGIA

počas ktorého dosahovala ročný výnos $\mu = 0.071511029$ a volatilitu $\sigma^2 = 0.103748626$. Na základe týchto odhadov sme vypočítali trhovú cenu rizika, ktorá je rovná $\kappa = 0.4001$.

Budeme pozorovať päťročný simulovaný vývoj portfólia súčasne pre obe stratégie. Základné parametre sú:

$$W(0) = 1 \quad T = 5 \quad \xi(0) = 1 \quad \underline{W} = 1 \quad \epsilon = 0.01 \quad t = 0 \quad r = 0.03$$

Počiatkový podiel majetku investovaný do rizikového aktíva je v prípade opčnej zaistovacej stratégie rovný 64.40% z počiatkovej investície. Pri LEL-RM nám počiatková alokácia závisí od averzie investora voči riziku. Pri rizikovej averzii investora, ktorého parameter γ je rovný 6, je do rizika investované porovnateľné počiatkové množstvo a to 63.18%. Pre $\gamma = 7$ je podiel rovný 55.09% a pre $\gamma = 5$ je 70.01%, preto v nasledujúcej simulácii uvažujeme $\gamma = 6$. Vývoj oboch stratégií je znázornený na nasledujúcom obrázku (Obr. 8.2)



Obr. 8.2: 5-ročný simulovaný vývoj portfólia pre LEL-RM, $W^{LEL}(t)$ a pre opčnú investičnú stratégiu, $W^{Put}(t)$.

Hlavné charakteristiky vývoja pre obe stratégie zaznamenáva nasledujúca tabuľka

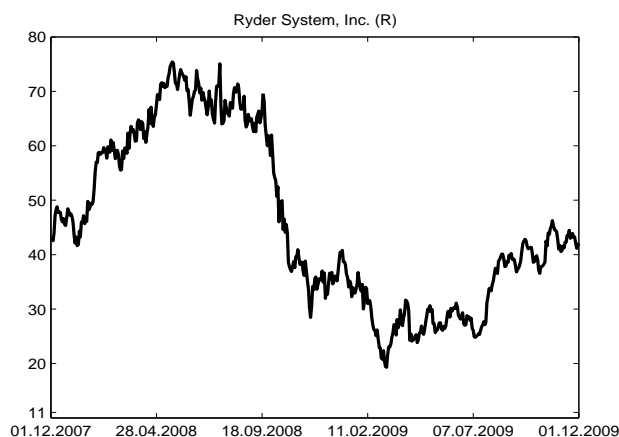
	LEL-RM	Opčná stratégia
Priemerná dosiahnutá hodnota	1.15779	1.08895
Maximálny výnos	1.5475%	1.0887%
Maximálny pokles	-1.381%	-1.428%
Volatilita	4.591%	4.798%
Výnos	5.3745%	3.0568%

Môžeme si všimnúť, že historická volatilita oboch stratégií je porovnateľná, ale miera rastu

pri LEL-RM je väčšia o 2.3177%. Táto vyššia miera rastu sa prejavila aj na signifikantne väčšom dosiahnutom konečnom majetku, ktorý bol pre LEL-RM 1.2902, pričom pri opčnej zaisťovacej stratégii bola dosiahnutá hodnota majetku rovná 1.1576. Dynamická LEL-RM nadobudla lepšie zhodnotenie vďaka kontrole rizika a pomocou udržiavania efektívneho portfólia, t.j. pri vyššom očakávanom výnose predpokladá vyššie riziko.

8.2.2 Historická simulácia a prudký pokles rizikového aktíva

Budeme sledovať vývoj portfólia oboch stratégií pri reálnych výnosoch akcie Ryder System, Inc. (R) za obdobie od 01.12.2007 – 01.12.2009. Vývoj počas tohto obdobia akcie (R) je znázornený na nasledujúcom obrázku (Obr. 8.3)



Obr. 8.3: Dvojročný vývoj akcie Ryder System, Inc. (R)

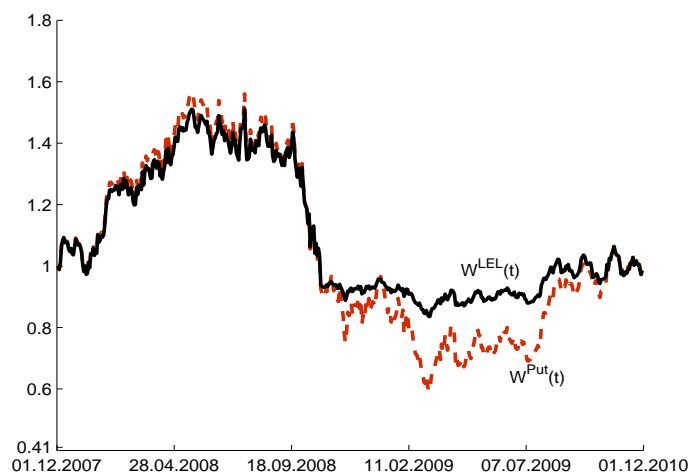
Rizkové aktívum dosiahlo maximálny denný výnos vo výške 12.48% a maximálny denný pokles 19.80%. Volatilita aktíva počas tohto obdobia je 0.3677 a priemerný ročný výnos 0.157572.

Pre simuláciu sme ročný výnos a volatilitu aktíva odhadovali za obdobie od 01.12.2005 – 01.12.2007, v ktorom dosahovali hodnoty $\mu = 0.046682$ a $\sigma = 0.075148$. Základné parametre rovnaké pre obe stratégie sme nastavili nasledovne:

$$\kappa = 0.2220 \quad W(0) = 1 \quad T = 2 \quad \xi(0) = 1 \quad \underline{W} = 1 \quad \epsilon = 0.01 \quad t = 0 \quad r = 0.03$$

Počiatočná alokácia majetku do rizikových aktív pri statickej investičnej stratégii, ktorá na zaistenie používa put opciu je pri daných parametroch 75.40% z počiatočnej investície rovnej $W(0) = 1$. Porovnateľné množstvo v hodnote 73.51% z počiatočného majetku investuje pri LEL-RM investor do rizikových aktív, ak parameter γ vyjadrujúci jeho averziu je rovný 4. Pre vyššie hodnoty γ je podiel menší, napr. pri $\gamma = 5$ je podiel rovný 59.08% a pri nižšie hodnoty je podiel investovaný do rizika vyšší, napr. pre $\gamma = 3$ je 85.19%. Preto budeme pozorovať správanie LEL-RM pre investora s $\gamma = 4$. Zvyšný majetok je investovaný do bezrizikového dlhopisu.

Vývoj oboch stratégií je znázornený na nasledujúcom grafe (Obr. 8.4)



Obr. 8.4: Vývoj dynamickej W^{LEL} a statickej stratégie W^{Put}

Vidíme, že statická stratégia má zmysel len v prípade konštantného rizika počas investičného horizontu a pri pozitívnom vývoji cien akcií. V opačnom prípade riziko straty rastie s voaltilitou portfólia a zaistenie minimálnej garantovanej hodnoty nie je zaručené. Dynamická stratégia LEL-RM vďaka optimálnemu prerozdeleniu majetku medzi rizikové a bezrizikové aktíva výrazne znižuje straty aj v prípade prudkého poklesu na finančných trhoch. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené hlavné charakteristiky oboch stratégií počas sledovaného vývoja

	LEL-RM	Opčná stratégia
Volatilita	0.084206	0.190595
Maximálny výnos	0.05774	0.08295
Maximálny pokles	-0.096028	-0.127806

Vidíme, že historická volatilita pri LEL-RM je o 10.4% nižšia ako pri statickej opčnej stratégii, čo vyplýva z dynamickej kontroly rizika a udržiavania optimálneho portfólia počas investičného horizontu. Konečná hodnota portfólia pre obe stratégie je síce vyrovnaná, avšak len z dôvodu prudkého rastu ceny rizikového aktíva ku koncu obdobia a o 1.89% vyššieho podielu investovaného do rizikového aktíva v prípade opčnej stratégie. Pri vyrovnanom podiele by opčná stratégia dosahovala nižšiu konečnú hodnotu ako LEL-RM.

8.3 Simulovaný vývoj aktív

V tejto časti štatisticky porovnáme rozdiely medzi tromi stratégiami poisťovania portfólia: statickou opčnou stratégiou, dynamickou stratégiou LEL-RM a dynamickou stratégiou založenou na delta hedgingu. Delta hedging portfólia je založený na rebalancovaní portfólia počas celého investičného horizontu, pričom vystavenie do rizikového aktíva je dané ako absolútna hodnota delty put opcie. Delta opcie vyjadruje mieru rastu ceny opcie v závislosti od ceny podkladového aktíva a v prípade put opcie je daná vzťahom

$$\Delta = -\Phi(-d_1) = \Phi(d_1) - 1$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{X}{S}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Pre počiatočnú alokáciu majetku do rizikového aktíva riešime rovnakú optimalizačnú úlohu (8.1) ako pri statickej opčnej stratégii. Zvyšná časť majetku je investovaná do bezrizikového dlhopisu. Hodnota majetku v čase t je potom daná ako

$$W(t) = |\Delta|S(t) + B(t)$$

pre všetky t .

Opäť uvažujeme akciu Invesco Ltd. (IVZ). Základné parametre za obdobie od 02.01.2004 – 02.01.2006 sú: ročný výnos $\mu = 0.071511029$, volatilita $\sigma^2 = 0.103748626$ a trhová cena

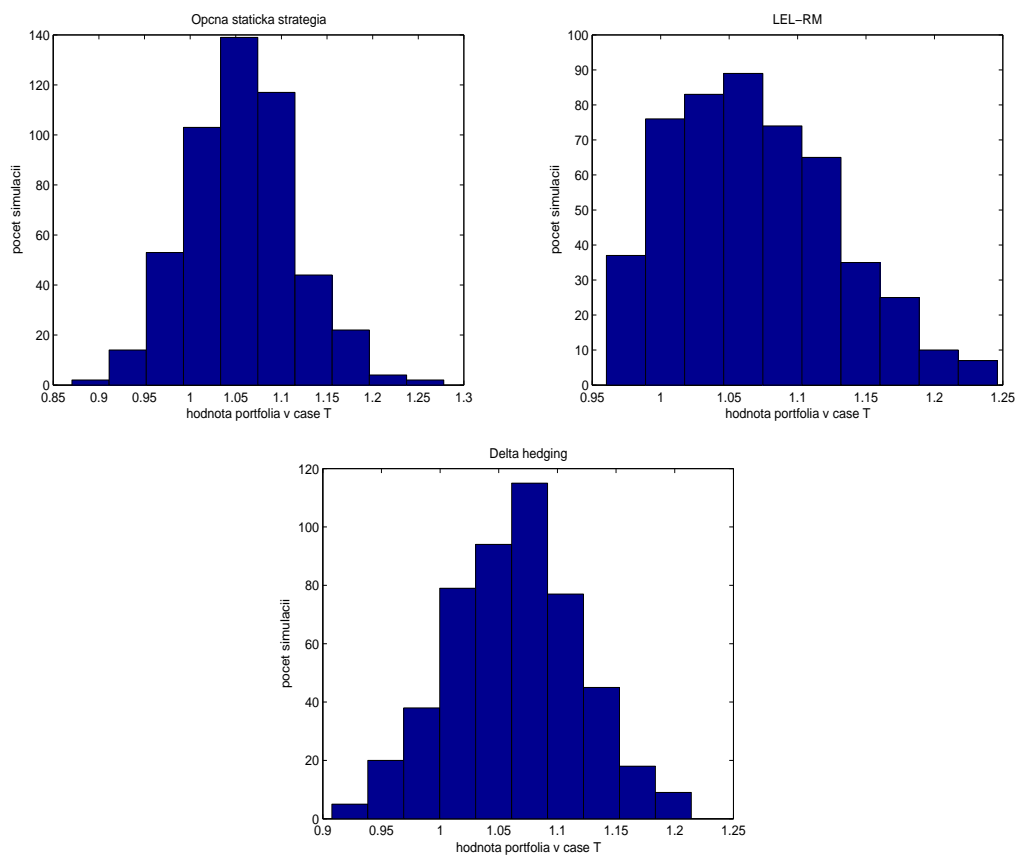
KAPITOLA 8. DYNAMICKÁ VS. STATICKÁ STRATÉGIA

rizika $\kappa = 0.4001$. Ostatné parametre sú zvolené nasledovne

$$W(0) = 1 \quad T = 1 \quad \xi(0) = 1 \quad \underline{W} = 1 \quad \epsilon = 0.01 \quad t = 0 \quad r = 0.03$$

Pri opčných stratégiách vyšla počiatočná alokácia do rizikových aktív 53.70% z počiatočnej investície. Pre LEL-RM investuje porovnateľné množstvo do rizika investor, ktorého parameter vyjadrujúci averziu voči riziku je rovný $\gamma = 7$. Pri tejto hodnote parametra je podiel investovaný do rizikových aktív rovný 53.82%, pre $\gamma = 6$ by bol 57.60% a pre $\gamma = 8$ 48.15% z počiatočného kapitálu.

Pri nastavených parametroch sme simulovali 500 náhodných vývojev portfólia a zamerali sme sa na analýzu dosiahnutia garantovanej minimálnej hodnoty a zhodnotenia investície v dobe maturity T pre všetky stratégie. Výsledky sú zaznamenané na nasledujúcom obrázku (Obr. 8.5)



Obr. 8.5: Porovnanie konečných hodnôt portfólia pri 500 simulovaných vývojev portfólia

KAPITOLA 8. DYNAMICKÁ VS. STATICKÁ STRATÉGIA

Nasledujúca tabuľka porovnáva základné vlastnosti jednotlivých simulácií

	LEL-RM	Opčná statická stratégia	Delta hedging
Priemerná dosiahnutá hodnota	1.0693	1.0565	1.0621
Maximálna hodnota	1.2460	1.2779	1.2142
Minimálna hodnota	0.9604	0.8704	0.9077
Početnosť strát	12.33%	18.8%	13.2%

Vidíme, že pri LEL-RM je priemerná ako aj minimálna dosiahnutá hodnota portfólia najvyššia spomedzi všetkých troch stratégií. Taktiež pri LEL-RM v najmenšom percente prípadov poklesla konečná hodnota pod úroveň dna. Statická stratégia dosiahla navyššie maximálne zhodnotenie, ale počet poklesov pod hodnotu dna je výrazne vyšší v porovnaní s dynamickými stratégiami. Obe dynamické stratégie vďaka optimálnej alokácii majetku do rizikových aktív počas celého investičného obdobia vykazujú lepšie výsledky ako statická stratégia.

Zo získaných výsledkov sme zistili, že LEL-RM stratégia má význam nielen pri znižovaní rizika, ale aj pri participácii na raste podkladových aktív. Definovaním rizikovej averzie investora a minimálnej garantovanej hodnoty je dynamická stratégia LEL-RM vhodná pre trhy s nepredvídateľným rizikom. Pri statickej stratégii sa riziko mení v závislosti od trhových podmienok a preto pri vysokej volatilitě trhov nie je vhodnou metódou.

Kapitola 9

Záver

V diplomovej práci analyzujeme investičné stratégie poisťovania portfólia, pričom hlavný dôraz je kladený na LEL-RM (Limited-expected-losses risk management), ktorá odstraňuje hlavné nedostatky dnes veľmi využívanej metódy rizikového manažmentu VaR-RM.

Prvá časť diplomovej práce je zameraná na charakterizáciu zaistených stratégií a investičnej stratégie rizikového manažmentu VaR-RM, ktorá je založená na odhade VaR (Value-at-risk). Na základe riešenia optimalizačného systému, ktorý rieši investor maximalizujúci očakávanú užitočnosť a riadiaci svoje portfólio pomocou VaR-RM, sme uviedli hlavné problémy stratégie, medzi ktoré patrí najmä skutočnosť, že rozsiahle straty, ktoré nastávajú v tzv. zlých stavoch, sú pri VaR-RM väčšie ako pri neriadenom portfóliu.

Druhá časť sa zaoberá alternatívnou stratégiou rizikového manažmentu, LEL-RM, pri ktorej je pravdepodobnosť ako aj veľkosť straty limitovaná. LEL-RM je založená na optimálnej dynamickej diverzifikácii majetku medzi rizikové a bezrizikové aktíva počas celého investičného horizontu. Ponúkame definíciu a riešenie optimalizačného dynamického systému pre investora riadiaceho svoje portfólio pomocou LEL-RM. Analyzujeme vplyv stratégie na optimálnu hodnotu majetku a vplyv zmeny parametrov na vystavenie do rizikových aktív. Ukázali sme, že stratégia rieši hlavné problémy spojené s použitím VaR-RM. Konkrétne, že očakávané straty pri VaR-RM sú vo väčšine prípadov dva až desať krát väčšie ako v prípade LEL-RM.

Nakoniec, aplikáciou stratégie na reálne dáta sme porovnali optimalitu riadenia portfólia pomocou LEL-RM s neriadeným portfóliom pri naivnej diverzifikácii a so statickou investičnou stratégiou využívajúcou na poistenie put opciu. Na základe dosiahnutých výsledkov sme zistili, že LEL-RM ako dynamická stratégia zohráva významnú úlohu pri negatívnom vývoji na finančnom trhu a zároveň ponúka participáciu na raste cien aktív pri minimálnom riziku pre investorov s rôznymi preferenciami.

Kapitola 10

Príloha

10.1 Výpočet kritických hodnôt pre LEL-RM

Optimálna hodnota majetku v čase maturity v prípade LEL je

$$W^{LEL}(T) = \begin{cases} I(z_1\xi(T)) & \text{ak } \xi(T) < \underline{\xi}_\epsilon \\ W & \text{ak } \underline{\xi}_\epsilon \leq \xi(T) < \bar{\xi}_\epsilon \\ I((z_1 - z_2)\xi(T)) & \text{ak } \bar{\xi}_\epsilon \leq \xi(T) \end{cases}$$

kde

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_\epsilon &\equiv \frac{u'(W)}{z_1} \\ \bar{\xi}_\epsilon &\equiv \frac{u'(W)}{(z_1 - z_2)} \end{aligned}$$

Vyjadríme jednotlivé multiplikátory

1. multiplikátor z_1

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_\epsilon &\equiv \frac{u'(W)}{z_1} \\ z_1 &= \frac{1}{\underline{\xi}_\epsilon W^\gamma} \end{aligned}$$

2. multiplikátor z_2

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_\epsilon &= \frac{u'(W)}{(z_1 - z_2)} \\ z_2 &= z_1 - \frac{u'(W)}{\bar{\xi}_\epsilon} \\ &= z_1 - \frac{1}{\bar{\xi}_\epsilon W^\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\underline{\xi}_\epsilon \underline{W}^\gamma} - \frac{1}{\bar{\xi}_\epsilon \underline{W}^\gamma} \\
&= \frac{\bar{\xi}_\epsilon - \underline{\xi}_\epsilon}{\underline{\xi}_\epsilon \underline{W}^\gamma \bar{\xi}_\epsilon}
\end{aligned}$$

Potrebujeeme ešte poznať body zlomu:

$$\begin{aligned}
\xi(T) &< \underline{\xi}_\epsilon \\
e^{-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \|\kappa\|\sqrt{T}V_T} &< \underline{\xi}_\epsilon \\
-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \|\kappa\|\sqrt{T}V_T &< \ln(\underline{\xi}_\epsilon) \\
-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \ln(\underline{\xi}_\epsilon) &< \|\kappa\|\sqrt{T}V_T
\end{aligned}$$

kde $\|\kappa\|\sqrt{T}V_T \sim N(0, \|\kappa\|^2 T)$ a označme $H_1 = -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \ln(\underline{\xi}_\epsilon)$

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_\epsilon &\leq \xi(T) \\
\bar{\xi}_\epsilon &\leq e^{-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \|\kappa\|\sqrt{T}V_T} \\
\ln(\bar{\xi}_\epsilon) &\leq -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \|\kappa\|\sqrt{T}V_T \\
\|\kappa\|\sqrt{T}V_T &\leq -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \ln(\bar{\xi}_\epsilon)
\end{aligned}$$

označme $H_2 = -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \ln(\bar{\xi}_\epsilon)$

Premenné $\underline{\xi}_\epsilon$ a $\bar{\xi}_\epsilon$ riešia nasledujúci systém

$$\begin{cases} E[\xi(T)W^{LEL}(T; z_1, z_2)] = \xi(0)W(0) \\ E[\xi(T)(\underline{W} - W^{LEL}(T; z_1, z_2))\mathbf{1}_{W^{LEL}(T; z_1, z_2) \leq \underline{W}}] = \epsilon \text{ alebo } z_2 = 0 \end{cases}$$

- $E[\xi(T)W^{LEL}(T; z_1, z_2)] = \xi(0)W(0)$

$$\begin{aligned}
E[\xi(T)W(T)] &= E[\xi(T)I(z_1\xi(T))] + E[\underline{W}\xi(T)] + E[\xi(T)I((z_1 - z_2)\xi(T))] \\
&= \int_{H_1}^{\infty} \underline{W} \underline{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} \xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} da \\
&+ \int_{H_2}^{H_1} \underline{W} \xi(T) \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} da \\
&+ \int_{-\infty}^{H_2} \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} \xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} da
\end{aligned}$$

Vyjadríme jednotlivé integrály

$$\begin{aligned}
T_1 &= \int_{H_1}^{\infty} \underline{W} \underline{\xi}_{\epsilon}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} \xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} da \\
&= \underline{W} \underline{\xi}_{\epsilon}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} \int_{H_1}^{\infty} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - a)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} da \\
&= \underline{W} \underline{\xi}_{\epsilon}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \int_{H_1}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T} - a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} da \\
&= \underline{W} \underline{\xi}_{\epsilon}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \int_{H_1}^{\infty} e^{-\left(\frac{a}{\sqrt{2T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\sqrt{2}\gamma}\right)^2 + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} da \\
&= \underline{W} \underline{\xi}_{\epsilon}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \int_{H_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2} da \\
&= \underline{W} \underline{\xi}_{\epsilon}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \int_{\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= \underline{W} \underline{\xi}_{\epsilon}^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi\left(-\left(\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)\right) \\
&= \underline{W} \underline{\xi}_{\epsilon}^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2 &= \int_{H_2}^{H_1} \underline{W} \xi(T) \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} da \\
&= \int_{H_2}^{H_1} \underline{W} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - a)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} da \\
&= \underline{W} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} \int_{H_2}^{H_1} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} e^{-a} da \\
&= \underline{W} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} \int_{H_2}^{H_1} e^{-\left(\frac{a}{2\|\kappa\|^2 T} + \frac{\|\kappa\|\sqrt{T}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\|\kappa\|^2 T}{2}} da \\
&= \underline{W} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{\frac{\|\kappa\|^2 T}{2}} \int_{H_2}^{H_1} e^{-\left(\frac{a}{2\|\kappa\|^2 T} + \frac{\|\kappa\|\sqrt{T}}{\sqrt{2}}\right)^2} da \\
&= \underline{W} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\|\kappa\|^2 T}{2}} \int_{\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}}^{\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= \underline{W} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) + \frac{\|\kappa\|^2 T}{2}} \left[\Phi\left(\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) - \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3 &= \int_{-\infty}^{H_2} \underline{W} \bar{\xi}_{\epsilon}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} \xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} da \\
&= \underline{W} \bar{\xi}_{\epsilon}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} \int_{-\infty}^{H_2} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - a)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} da \\
&= \underline{W} \bar{\xi}_{\epsilon}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \int_{-\infty}^{H_2} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T} - a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} da \\
&= \underline{W} \bar{\xi}_{\epsilon}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \int_{-\infty}^{H_2} e^{-\left(\frac{a}{\sqrt{2T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\sqrt{2}\gamma}\right)^2 + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} da
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \int_{-\infty}^{H_2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma} \right)^2} da \\
&= \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi \left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma} \right)
\end{aligned}$$

Potom stredná hodnota sa rovná

$$\begin{aligned}
E[\xi(T)W(T)] &= \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \left(1 - \Phi \left(\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma} \right) \right) \\
&+ \underline{W} e^{(-rT)} \left[\Phi \left(\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T} \right) - \Phi \left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T} \right) \right] \\
&+ \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi \left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma} \right) \\
&= \xi(0)W(0)
\end{aligned}$$

- $E[\xi(T)(\underline{W} - W^{LEL}(T; z_1, z_2))\mathbf{1}_{W^{LEL} \leq \underline{W}}] = \epsilon$ alebo $z_2 = 0$

$$\bar{\xi}_\epsilon \leq \xi(T)$$

$$\bar{\xi}_\epsilon \leq e^{-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \|\kappa\|\sqrt{T}V_T}$$

$$\ln(\bar{\xi}_\epsilon) \leq -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \|\kappa\|\sqrt{T}V_T$$

$$\|\kappa\|\sqrt{T}V_T \leq -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \ln(\bar{\xi}_\epsilon)$$

teda $H_2 = -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \ln(\bar{\xi}_\epsilon)$

$$E[\xi(T)(\underline{W} - W^{LEL}(T; z_1, z_2))\mathbf{1}_{W^{LEL} \leq \underline{W}}] = E[\xi(T)(\underline{W} - I((z_1 - z_2)\xi(T)))\mathbf{1}_{W^{LEL} \leq \underline{W}}]$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{H_2} \xi(T)(\underline{W} - I((z_1 - z_2)\xi(T))) \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} da \\
&= \int_{-\infty}^{H_2} \xi(T)(\underline{W} - \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} \underline{W} \xi(T)^{-\frac{1}{\gamma}}) \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} da \\
&= \int_{-\infty}^{H_2} \xi(T) \underline{W} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} da - \int_{-\infty}^{H_2} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} \underline{W} \xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2 T}} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2 T}} da \\
&= \underline{W} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) + \frac{\|\kappa\|^2 T}{2}} \Phi \left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T} \right) \\
&- \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi \left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma} \right)
\end{aligned}$$

Pôvodný systém potom vyzerá nasledovne:

$$\begin{aligned}
\xi(0)W(0) &= \underline{W} \xi_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) \right) \\
&+ \underline{W} e^{-rT} \left[\Phi\left(\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) - \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) \right] \\
&+ \underline{W} \xi_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) \\
\epsilon &= \underline{W} e^{-rT} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) \\
&- \underline{W} \xi_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)
\end{aligned}$$

10.1.1 Riešenie systému

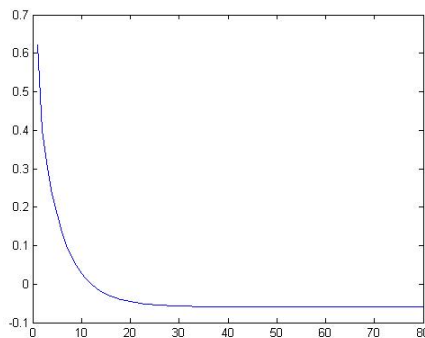
Z druhej rovnice systému najskôr numericky vyjadríme stavovú premennú $\bar{\xi}_\epsilon$.

Nech

$$\begin{aligned}
F &= \underline{W} e^{-rT} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) \\
&- \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) - \epsilon
\end{aligned}$$

kde $H_2 = -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \ln(\bar{\xi}_\epsilon)$

Keďže riešime rovnicu numericky je potrebné vyšetriť vlastnosti danej funkcie.



Tvrdenie 1. Funkcia $F(\bar{\xi}_\epsilon)$ je v premennej $\bar{\xi}_\epsilon$ monotónne klesajúca.

Dôkaz:

Ukážeme, že derivácia funkcie F je záporná.

$$\begin{aligned}
F' &= -\underline{W}e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} \frac{1}{\bar{\xi}_\epsilon} \\
&+ \underline{W}\bar{\xi}_\epsilon^{-\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} \frac{1}{\bar{\xi}_\epsilon} \\
&- \underline{W} \frac{1}{\gamma} \bar{\xi}_\epsilon^{-\frac{1}{\gamma}-1} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\bar{\xi}_\epsilon \rightarrow \infty} F' &= -\lim_{\bar{\xi}_\epsilon \rightarrow \infty} \underline{W}e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} \frac{1}{\bar{\xi}_\epsilon} \\
&+ \lim_{\bar{\xi}_\epsilon \rightarrow \infty} \underline{W}\bar{\xi}_\epsilon^{-\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} \frac{1}{\bar{\xi}_\epsilon} \\
&- \lim_{\bar{\xi}_\epsilon \rightarrow \infty} \underline{W} \frac{1}{\gamma} \bar{\xi}_\epsilon^{-\frac{1}{\gamma}-1} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) \\
&= -\underline{W}e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} \lim_{\bar{\xi}_\epsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\bar{\xi}_\epsilon} \\
&+ \underline{W}e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|} \lim_{\bar{\xi}_\epsilon \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2} \bar{\xi}_\epsilon^{-\frac{1}{\gamma}-1} \\
&- \underline{W} \frac{1}{\gamma} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \lim_{\bar{\xi}_\epsilon \rightarrow \infty} \bar{\xi}_\epsilon^{-\frac{1}{\gamma}-1} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) \\
&= -0 + 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\bar{\xi}_\epsilon \rightarrow 0} F' &= -\lim_{\bar{\xi}_\epsilon \rightarrow 0} \underline{W}e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} \frac{1}{\bar{\xi}_\epsilon} \\
&+ \lim_{\bar{\xi}_\epsilon \rightarrow 0} \underline{W}\bar{\xi}_\epsilon^{-\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} \frac{1}{\bar{\xi}_\epsilon} \\
&- \lim_{\bar{\xi}_\epsilon \rightarrow 0} \underline{W} \frac{1}{\gamma} \bar{\xi}_\epsilon^{-\frac{1}{\gamma}-1} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) \\
&= -\underline{W}e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|} \lim_{\bar{\xi}_\epsilon \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right)^2} \frac{1}{\bar{\xi}_\epsilon} \\
&- \underline{W}e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \lim_{\bar{\xi}_\epsilon \rightarrow 0} \bar{\xi}_\epsilon^{-\frac{1}{\gamma}-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\gamma} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)\right) \\
&= -\infty - \infty = -\infty
\end{aligned}$$

Zostáva ešte dokázať, že prvá derivácia je rastúcou funkciou. Preto vyšetříme druhú deriváciu funkcie F .

$$\begin{aligned}
F'' &= -\underline{W}e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right)^2} \left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) \frac{1}{T\|\kappa\|^2 \bar{\xi}_\epsilon^2} \\
&+ \underline{W}e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{T}\|\kappa\| \bar{\xi}_\epsilon^2} \\
&- \underline{W} \frac{(1-\gamma)}{\gamma^2} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}-2} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) \\
&+ \underline{W} \frac{1}{\gamma} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}-1} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{T}\|\kappa\| \bar{\xi}_\epsilon} \\
&+ \frac{1-\gamma}{\gamma} \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}-2} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} \\
&+ \\
&\underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}-1} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2} \frac{1}{T\|\kappa\|^2 \bar{\xi}_\epsilon} \left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) \\
\\
F'' &= \underline{W}e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\| \bar{\xi}_\epsilon^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\|\right)^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} \left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\|\right)\right] \\
&+ \underline{W} \frac{1}{\gamma} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}-2} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \left[-\frac{\gamma-1}{\gamma} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) + \right. \\
&+ (2-\gamma) \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2} \\
&+ \left. \gamma e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|^2} \left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)\right] \\
&= -\underline{W}e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\| \bar{\xi}_\epsilon^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\|\right)^2} \frac{H_2}{T\|\kappa\|^2} \\
&+ \underline{W} \frac{1}{\gamma} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}-2} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T) \frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \left[-\frac{\gamma-1}{\gamma} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2} \left[3 + \gamma\left(-\frac{H_2}{T\|\kappa\|^2} - 1\right) - \frac{1}{\gamma}\right]\right] \\
&= -\underline{W}e^{-rT} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\| \bar{\xi}_\epsilon^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \sqrt{T}\|\kappa\|\right)^2} \frac{H_2}{T\|\kappa\|^2} \\
&+ \underline{W} \frac{1}{\gamma} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}-2} e^{-\frac{1}{\gamma}(rT(\gamma-1) + \frac{1}{2}T\|\kappa\|^2 \frac{\gamma-1}{\gamma})} \left[-\frac{\gamma-1}{\gamma} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)^2} \left[3 + \gamma\left(-\frac{H_2}{T\|\kappa\|^2} - 1\right) - \frac{1}{\gamma}\right]\right] \\
&> \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{-2} \frac{-H_2}{\sqrt{2\pi T^{3/2}}\|\kappa\|^3} + \underline{W} \frac{1}{\gamma} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}-2} \left[-\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|} \left(3 + \gamma\left(\frac{-H_2}{T\|\kappa\|^2} - 1\right) - \frac{1}{\gamma}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underline{W}\xi^{-2} \left[\frac{-H_2}{\sqrt{2\pi}T^{3/2}\|\kappa\|^3} (1 + \xi^{\frac{1}{\gamma}}) + \frac{1}{\gamma}\xi^{\frac{1}{\gamma}} \frac{3}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|} - \frac{1}{\gamma}\xi^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \right) \right] \\
&= \underline{W}\xi^{-2} \left[\frac{rT + \frac{1}{2}T\|\kappa\|^2 + \ln(\bar{\xi}_\epsilon)}{\sqrt{2\pi}T^{3/2}\|\kappa\|^3} (1 + \xi^{\frac{1}{\gamma}}) + \frac{1}{\gamma}\xi^{\frac{1}{\gamma}} \frac{3}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|} - \frac{1}{\gamma}\xi^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \right) \right] \\
&= \underline{W}\xi^{-2} \left[\frac{rT + \frac{1}{2}T\|\kappa\|^2 + \ln(\bar{\xi}_\epsilon)}{\sqrt{2\pi}T^{3/2}\|\kappa\|^3} (1 + \xi^{\frac{1}{\gamma}}) - \frac{1}{\gamma}\xi^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} - 3 \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

Vidíme, že pre každé investora s rôznymi preferenciami a averziou k riziku platí

$$\frac{rT + \frac{1}{2}T\|\kappa\|^2 + \ln(\bar{\xi}_\epsilon)}{\sqrt{2\pi}T^{3/2}\|\kappa\|^3} (1 + \xi^{\frac{1}{\gamma}}) > \frac{1}{\gamma}\xi^{\frac{1}{\gamma}} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\|\kappa\|} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} - 3 \right) \right)$$

Preto $F'' > 0$ a teda F je klesajúca.

Keďže funkcia F je klesajúcou funkciou, vieme numericky vyjadriť hodnotu $\bar{\xi}_\epsilon$.

Druhá kritická hodnota $\underline{\xi}_\epsilon$ sa nachádza v intervale $[\underline{\xi}_{PI}, \underline{\xi}_B]$, preto potrebujeme vypočítať hodnoty $\underline{\xi}_B, \underline{\xi}_{PI}$.

10.2 Výpočet kritickej hodnoty pre benchmark

$$E[\xi(T)W(T)] \leq \xi(0)W(0)$$

$$E[\xi(T)(\underline{W} - W(T))\mathbf{1}_{W(T) \leq \underline{W}}] \leq \epsilon$$

Hodnota majetku v prípade benchmarku je

$$W(T) = I(z_1\xi(T))$$

kde I je inverzná funkcia derivácie funkcie užitočnosti, teda

$$u(z_1\xi(T)) = \frac{(z_1\xi(T))^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$u'(z_1\xi(T)) = (z_1\xi(T))^{-\gamma}$$

$$I(z_1\xi(T)) = (z_1\xi(T))^{-\frac{1}{\gamma}}$$

multiplikátor z_1 vypočítame nasledovne

$$W(T) = (z_1\xi_B(T))^{-\frac{1}{\gamma}}$$

$$z_1 = \frac{1}{\xi_B W^\gamma}$$

Hodnotu stavovej funkcie ξ_B vyjadríme zo základného predpokladu

$$E[\xi(T)W(T)] \leq \xi(0)W(0)$$

teda

$$E[\xi(T)I(z_1\xi(T))] = \xi(0)W(0)$$

$$E[\xi(T)I(\frac{1}{\xi_B W^\gamma}\xi(T))] = \xi(0)W(0)$$

$$E[\xi(T)(\frac{\xi(T)}{\xi_B W^\gamma})^{-\frac{1}{\gamma}}] = \xi(0)W(0)$$

$$E[\xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \xi_B^{\frac{1}{\gamma}} W] = \xi(0)W(0)$$

$$E[\xi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}] = \xi(0)W(0) \frac{1}{\underline{W}} \xi_B^{-\frac{1}{\gamma}}$$

$$\xi_B^{\frac{1}{\gamma}} = \xi(0) \frac{W(0)}{\underline{W}} \frac{1}{E[\xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}]}$$

Medzivýpočet strednej hodnoty $E[\xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}]$

Stavová funkcia je daná predpisom

$$d\xi(t) = -\xi(t)[r(t)dt + \kappa^T dw(t)]$$

teda spĺňa nasledujúcu rovnicu

$$\xi(t) = \xi(0)e^{-rt - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 t - \|\kappa\|\sqrt{t}V_T}$$

kde X ma normálne normované rozdelenie, t.j. $V_T \sim N(0, 1)$. Potom stredná hodnota sa dá upraviť nasledovne

$$\begin{aligned} E[\xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}] &= E[\exp((-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T - \|\kappa\|\sqrt{T}V_T)(\frac{\gamma-1}{\gamma}))] \\ &= \exp((-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)(\frac{\gamma-1}{\gamma})) E[\exp(-\|\kappa\|\sqrt{T}V_T \frac{\gamma-1}{\gamma})] \end{aligned}$$

označme si $S = e^{(-\|\kappa\|\sqrt{T}V_T(\frac{\gamma-1}{\gamma}))}$, potom

$$\ln S = -\|\kappa\|\sqrt{T}V_T(\frac{\gamma-1}{\gamma}) \sim N(0, \|\kappa\|^2 T (\frac{\gamma-1}{\gamma})^2)$$

$$E[\ln S] = \exp(\|\kappa\|^2 T (\frac{\gamma-1}{\gamma})^2)$$

potom

$$\begin{aligned} E[\xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}] &= \exp((-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)(\frac{\gamma-1}{\gamma})) \exp(\|\kappa\|^2 T (\frac{\gamma-1}{\gamma})^2) \\ &= \exp((-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)(\frac{\gamma-1}{\gamma}) + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T (\frac{\gamma-1}{\gamma})^2) \end{aligned}$$

odtiaľ dostávame

$$\xi_B^{\frac{1}{\gamma}} = \frac{W(0)}{W} \frac{\xi(0)}{E[\xi(T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}]}$$

$$\xi_B = \left(\frac{W(0)\xi(0)}{W} \right)^{\gamma} \exp((rT + \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)(\gamma-1) - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T \frac{(\gamma-1)^2}{\gamma})$$

10.3 Výpočet kritickej hodnoty pre úplne poistené portfólio

V prípade úplného poistenia optimálna hodnota majetku v čase maturity je

$$W_{PI} = \begin{cases} I(z_1\xi(T)) & \text{ak } \xi(T) < \underline{\xi}_{PI} \\ \underline{W} & \text{ak } \xi(T) \geq \underline{\xi}_{PI} \end{cases}$$

opäť vychádzame z nasledujúcej rovnosti

$$E[\xi(T)W(T)] = \xi(0)W(0)$$

$$\begin{aligned} E[\xi(T)W(T)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \xi(T)W(T)f(\xi(T)W(T))d\xi W \\ &= E[\xi(T)\underline{W}] + E[\xi(T)I(z_1\xi(T))] \\ &= E[\xi(T)\underline{W}] + E[\xi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\underline{W}\underline{\xi}_{PI}^{\frac{1}{\gamma}}] \end{aligned}$$

potrebujem teda zistiť bod zlomu

$$\begin{aligned} \xi &\geq \underline{\xi}_{PI} \\ e^{-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T - \|\kappa\|\sqrt{T}V_T} &\geq \underline{\xi}_{PI} \\ -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T - \|\kappa\|\sqrt{T}V_T &\geq \ln \underline{\xi}_{PI} \\ -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T - \ln \underline{\xi}_{PI} &\geq \|\kappa\|\sqrt{T}V_T \end{aligned}$$

kde $X \sim N(0, 1)$ a teda $\|\kappa\|\sqrt{T}V_T \sim N(0, \|\kappa\|^2T)$.

Nech $H := -rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T - \ln \underline{\xi}_{PI}$, potom strednú hodnotu vyjadríme nasledovne

$$\begin{aligned} E[\xi(T)W(t)] &= E[\xi(T)\underline{W}] + E[\xi(T)I(z_1\xi(T))] \\ E[\xi(T)W(t)] &= \int_{-\infty}^H \underline{W} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2T}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T - a)} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2T}} da \\ &+ \int_H^{\infty} \underline{W} \underline{\xi}_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\|\kappa\|^2T}} e^{((-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T - a)(\frac{\gamma-1}{\gamma})} e^{-\frac{a^2}{2\|\kappa\|^2T}} da \\ &= \underline{W} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T) + \frac{\|\kappa\|^2T}{2}} \phi\left(\frac{H}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) \\ &+ \underline{W} \underline{\xi}_{PI}^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2T)\frac{\gamma-1}{\gamma} + \frac{(\gamma-1)^2T\|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \left[1 - \phi\left(\frac{H}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right)\right] \end{aligned}$$

Hodnotu $\underline{\xi}_{PI}$ dopočítame numericky z intervalu $[0, \underline{\xi}_B]$.

Ak už poznáme interval $[\underline{\xi}_{PI}, \underline{\xi}_B]$ a hodnotu $\bar{\xi}_\epsilon$, numericky dopočítame druhú kritickú hodnotu stavovej premennej $\underline{\xi}_\epsilon$ vychádzajúc z prvej rovnice systému

$$\begin{aligned} \xi(0)W(0) &= \underline{W} \underline{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) \right) \\ &+ \underline{W} e^{-rT} \left[\Phi\left(\frac{H_1}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) - \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \|\kappa\|\sqrt{T}\right) \right] \\ &+ \underline{W} \bar{\xi}_\epsilon^{\frac{1}{\gamma}} e^{(-rT - \frac{1}{2}\|\kappa\|^2 T)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{(\gamma-1)^2 T \|\kappa\|^2}{2\gamma^2}} \Phi\left(\frac{H_2}{\sqrt{T}\|\kappa\|} + \frac{(\gamma-1)\sqrt{T}\|\kappa\|}{\gamma}\right) \end{aligned}$$

Literatúra

- [1] Basak S. and Shapiro A.: 2001, *Value-at-Risk Based Risk Management: Optimal policies and Asset Prices*, 2001
- [2] Gerber H. and Pafumi G.: 2000, *Pricing dynamic investment fund protection*, North American Actuarial Journal, pp. 28-41.
- [3] Zagst R. and Kraus J.: 2009, *Stochastic Dominance of Portfolio Insurance Strategies*, Springer Science+Business Media
- [4] Bertrand P. and Prigent J.-L.: 2002, *Portfolio insurance: the extreme value approach to the CPPI method*, Finance, pp. 69-86.
- [5] Bertrand P. and Prigent J.-L.: 2005, *Portfolio Insurance Strategies: OBPI versus CPPI*, Finance, pp. 5-32.
- [6] Ahn D., Boudoukh J., Richardson M. and Whitelaw R.: 1999, *Optimal Risk Management Using Options*, The Journal of Finance
- [7] Yamai Y. and Yoshida T.: 2002, *On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall*, Monetary and economic studies
- [8] Black F. and Perold A.: 1992, *Theory of constant proportion portfolio insurance*, The Journal of Economics, Dynamics and Control, pp. 403-426.
- [9] Cont R. and Tankov P.: 2000, *Constant Proportion Portfolio Insurance in presence of Jumps in Asset Prices*
- [10] Miklošovič T.: 2010, *Zaistené stratégie*, Diplomová práca
- [11] Annaert J., Osselaer S. and Verstraete B.: 2009, *Performance evaluation of portfolio insurance strategies using stochastic dominance criteria*, Journal of Banking & Finance, pp. 272-280