UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

LÉVYHO PROCESY A OCEŇOVANIE DERIVÁTOV NA NEÚPLNÝCH TRHOCH

DIPLOMOVÁ PRÁCA

2011

JÁN KUDLAČÁK

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY

LÉVYHO PROCESY A OCEŇOVANIE DERIVÁTOV NA NEÚPLNÝCH TRHOCH

Diplomová práca

b63b46f5-a496-4c9e-82af-c0a6d98b9517

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Študijný odbor: 9.1.9. Aplikovaná matematika

Vedúci diplomovej práce: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Bratislava 2011

Bc. Ján Kudlačák

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava 17. 5. 2009 . . . .

Ján Kudlačák

Poďakovanie

Touto cestou sa chcem poďakovať doc. Mgr. Igorovi Melicherčíkovi, PhD. za odborné vedenie, cenné pripomienky, povzbudenie a trpezlivosť, s ktorou ma viedol pri písaní tejto diplomovej práce.

Moja veľká vďaka patrí taktiež Pánu Bohu, mojej rodine a priateľom, ktorí mi počas celého štúdia pomáhali.

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Ján Kudlačák
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Lévyho procesy a oceňovanie derivátov na neúplných trhoch

Cieľ : Zoznámiť sa s teóriou Lévyho procesov a oceňovaním na neúplných trhoch. Nakalibrovať niektorý z modelov a výsledky provnať s B-S modelom.

Vedúci : doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.

Dátum zadania: 02.02.2010

Dátum schválenia: 13.04.2011

prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)
20/4/2011

vedúci práce

Abstrakt

Kudlačák Ján : *Lévyho procesy a oceňovanie derivátov na neúplných trhoch*
Vedúci diplomovej práce: doc. Mgr. Igor Melicherčík, PhD.
Bratislava 2011

Táto práca sa zaoberá Lévyho procesmi a ich využitím pri oceňovaní finančných derivátov na neúplných trhoch. V práci je postupne predstavený matematický model finančného trhu, Black-Scholesov model, definícia, vlastnosti a príklady Lévyho procesov, oceňovacie prístupy na neúplnom trhu a Mertonov model trhu. Vlastnou časťou práce je vytvorenie kalibračného modelu pre Mertonov model trhu a jeho aplikovanie na reálne dáta.

Kľúčové slová

Lévyho procesy, neúplný trh, oceňovanie na neúplnom trhu, martingalová miera s minimálnou entropiou, Mertonov model, kalibrácia Mertonovho modelu

Abstract

Kudlacak Jan : *Levy process and option pricing on incomplete market*

Supervisor: doc. Mgr. Igor Melichercik, PhD.

Bratislava 2011

The thesis deals with Levy processes and the pricing of financial derivatives on incomplete markets. In the thesis, there are respectively introduced following topics: mathematical model of financial market, the Black-Scholes model, definition, properties and examples of Levy processes, pricing approaches to pricing on incomplete market and the Merton market model. The own contribution to the thesis lies in creating of calibration model for the Merton market model and its application on real data.

Keywords

Levy processes, incomplete market, pricing on incomplete market, Minimal Entropy Martingal Measure, Merton model, calibration of Merton model

Predhovor

Medzi hlavné úlohy finančnej matematiky patrí riešenie problému oceňovania finančných derivátov. Témou tejto práce je moderný matematický prístup k oceňovaniu derivátov - Lévyho procesy a s tým spojené oceňovanie na neúplných trhoch.

V čase vzniku tejto práce sa tento prístup prudko rozvíja na teoretickej úrovni vo viacerých významných vedeckých centrách a je predmetom záujmu mnohých svetových osobností pôsobiacich v oblasti finančnej matematiky.

Cieľom práce je poskytnúť čitateľovi základný rozhľad v teórii finančného trhu, Lévyho procesov a oceňovania derivátov. Vyčerpávajúce spracovanie tejto témy však ide ďaleko nad rozsah práce. Táto práca má ambíciu byť veľkým obohatením pre študentov a odborníkov, ktorí chcú lepšie spoznať a využívať moderné nástroje finančnej matematiky.

Vlastný prínos práce spočíva v analýze konkrétneho modelu spadajúceho do tematiky Lévyho procesov a neúplných trhov a predstavenie jeho kalibrácie od výberu dát až po finálny model. Vo vlastnej časti práce boli využívané metódy z oblasti finančnej matematiky, pravdepodobnosti a štatistiky a numerickej optimalizácie.

Obsah

Zoznam použitých skratiek a symbolov

- C - európska Call opcia
- t - časová premenná
- S_t - cena podkladového aktíva v čase t
- V_t - cena derivátu v čase t
- T - terminálny čas, čas splatnosti opcie
- K - Strike Price európskej opcie
- r - bezriziková úroková miera
- $\mathbb{P}$ - reálna pravdepodobnostná miera trhu
- $\mathbb{Q}$ - ekvivalentná martingalová miera
- $(S_t)_{t\geq 0}$ - proces ceny akcie
- $(\tilde{S}_t)_{t\geq 0}$ - martingalový proces oddiskontovanej ceny akcie
- $(W_t)_{t\geq 0}$ - Wienerov proces
- $(N_t)_{t\geq 0}$ - Poissonov proces
- B-S - Black-Scholesov model
- VG - Variance-Gamma proces
- MEMM - Ekvivalentná martingalová miera s minimálnou entropiou
- PS - počet simulácií v Monte Carlo algoritme

Úvod

Finančný trh je veľmi dôležitým pilierom ekonomického systému. Stabilný a efektívny finančný trh je nevyhnutným predpokladom pre udržateľný rozvoj hospodárstva. V posledných desaťročiach zaznamenal finančný trh veľký rozmach obchodu s finančnými derivátmi - finančnými produktmi odvodenými od vývoja akcií, akciových indexov či úrokových mier. Pri určení správnej ceny finančných derivátov je nevyhnutné nasadiť matematické modelovanie. Závratný rast trhu s derivátmi spôsobuje veľký rozvoj matematickej teórie oceňovania finančných derivátov. Do centra pozornosti výskumu vo finančnej matematike sa stále viac dostáva využitie triedy stochastických procesov nazývanej Lévyho procesy a s tým spojené oceňovanie na tzv. neúplných trhoch.

Cieľom tejto práce je predstaviť teóriu Lévyho procesov a oceňovania na neúplných trhoch, nakalibrovať Mertonov model finančného trhu a výsledky porovnať so známym Black-Scholesovym modelom.

Matematická teória v oblasti Lévyho procesov a oceňovania na neúplných trhoch dosahuje vysoký stupeň náročnosti. Kvôli obmedzenému rozsahu práce neuvádzame základy teórie pravdepodobnosti, miery a integrálu, stochastických procesov a finančnej matematiky. Predpokladáme, že čitateľ pozná pojmy ako náhodná premenná, stochastický proces, filtrácia, martingal, atď. Pre čítanie tejto práce postačuje znalosť Black-Scholesovho modelu.

Diplomová práca je tvorená piatimi kapitolami, ktoré na seba logicky nadväzujú. V prvej kapitole je predstavený matematický model finančného trhu. V druhej kapitole sú uvedené základy, závery a nedostatky Black-Scholesovho modelu. V tretej kapitole je analyzovaná trieda Lévyho procesov. Vo štvrtej kapitole sú uvedené dva oceňovacie prístupy využívané pri oceňovaní na neúplných trhoch. V piatej kapitole, ktorú tvoria z veľkej časti vlastné výsledky, je podrobne predstavená kalibrácia Mertonovho modelu.

Obsah práce nevyčerpáva jej tému, veríme však, že poskytuje základný rozhľad v teórii Lévyho procesov a oceňovaní na neúplných trhoch a predstavené vlastné výsledky presvedčivo poukazujú na využiteľnosť predstavenej teórie v praxi.

Kapitola 1

Finančný trh

Finančný trh je významnou súčasťou trhového mechanizmu. Na finančnom trhu sa sústreďuje ponuka a dopyt peňazí a kapitálu, vytvára sa cena za ktorú sú subjekty finančného trhu ochotné uskutočňovať finančné transakcie a operácie. Podľa S.G. Eakinsa [1] "finančný systém tvoria banky, investori, vypožičiavatelia, firmy, burzy, ktorí sú vtiahnutí do procesu pohybu fondov z prebytkového sektora k tým, ktorí ich využívajú a finančné trhy sú fórum, kde dodávatelia fondov a záujemcovia o pôžičky a investície môžu priamo uskutočňovať obchodné transakcie."

Ako možno matematicky modelovať finančný trh? Finančný trh je veľmi zložitou súčasťou ekonomiky, v matematickom modeli ho zjednušíme, zameriame sa len na skutočnosti, ktoré sú objektom nášho záujmu.

1.1 Matematický model finančného trhu

Finančný trh možno modelovať viacerými spôsobmi, my budeme vychádzať z logického rámca knihy [4].

Udalosti na trhu sa modelujú merateľným priestorom $(\Omega, \mathcal{F})$. Tok informácií na trhu reprezentuje filtrácia $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Pravdepodobnosť udalostí $A \in \mathcal{F}$ je daná pravdepodobnostnou mierou $\mathbb{P}$. Aktíva obchodované na trhu sú definované d-rozmerným vektorovým stochastickým procesom ich cien $(S_t)_{t\geq 0} = (S_t^1, ..., S_t^d)_{t\geq 0}$ adaptovaným vzhľadom k filtrácii $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Často nás zaujíma hodnota portfólia, resp. derivátu len do význačného času T (napr. čas vyplatenia derivátu), v tom prípade stačí uvažovať stochastické procesy a filtráciu na ohraničenom časovom intervale $[0, T]$.

Finančný trh bude definovaný filtrovaným pravdepodobnostným priestorom $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ a procesom $(S_t)_{t \geq 0}$. V tejto práci uvažujeme trh, na ktorom sa obchoduje jedno rizikové aktívum (reprezentuje ho nedeterministický stochastický proces) a jedno bezrizikové aktívum, tzv. "numeraire", ktorého hodnota je v každom čase deterministická. Hodnota numeraire v čase t bude v tejto práci daná funkciou e^{rt}, kde r je kladná konštanta (predstavuje napr. bežný účet s fixnou úrokovou sadzbou r a spojitým úročením alebo štátny bezkupónový dlhopis s nominálnou hodnotou 1). Diskontným faktorom je v tom prípade funkcia e^{-rt}. Očakávaný výnos kapitálu je na úrovni výnosu numeraire, preto budeme počítať s oddiskontovanými cenami.

Portfólio investora v danom čase t tvorí vektor $\phi_t = (\phi_t^1, ..., \phi_t^d) \in \mathbb{R}^d$. Parametre ϕ_t^i hovoria, koľko kusov aktíva i vlastní investor v čase t. Kvôli možnosti matematickej analýzy pripúšťame hodnoty týchto parametrov z oboru reálnych čísel, záporná hodnota znamená krátku pozíciu v danom aktíve. Hodnota portfólia je skalárny súčin vektorov ϕ_t a S_t . **Stratégiou** nazývame stochastický proces parametrov $(\phi_t)_{t \geq 0}$ adaptovaný vzhľadom k filtrácii $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Stratégia predstavuje predávanie a kupovanie podkladových aktív. Zisk stratégie do času t je daný hodnotou $\int_0^t \phi_u dS_u$. Samofinancovaná stratégia je stratégia, ktorá nepožaduje pridávanie ani odoberanie kapitálu od investora - vystačí s presunom kapitálu medzi jednotlivými zložkami portfólia.

Arbitráž je samofinancovaná stratégia, pomocou ktorej možno do času T bez rizika straty dosiahnuť kladný zisk s nenulovou pravdepodobnosťou, teda platí

$$\mathbb{P}[\int_0^t \phi_u dS_u \geq 0] = 1 \quad \forall t \in [0, T], \qquad \mathbb{P}[\int_0^T \phi_u dS_u > 0] > 0. \tag{1.1}$$

Existencia arbitráže na trhu by viedla k možnosti finančnej pumpy, pomocou ktorej by investor mohol získať ľubovoľné množstvo kapitálu, čo je absurdné. Arbitrážna cena je cena umožňujúca vznik arbitráže. Výskyt arbitrážnej ceny na trhu by hneď viedol k využitiu arbitráže a dopyt po produkte by jeho cenu zvýšil na bezarbitrážnu cenu. Vylúčenie arbitráže je teda celkom prirodzený predpoklad.

Na trhu sa obchodujú okrem podkladových aktív S_t ďalšie od nich odvodené produkty - finančné deriváty. **Finančný derivát** je kontrakt stanovujúci finančne merateľné plnenie v určenom čase $T > 0$ na základe vývoja podkladového aktíva. Z matematického hľadiska ide o funkciu vývoja ceny podkladového aktíva $V_T((S_t)_{t\in[0;T]})$. V ďalšom texte budeme pre zjednodušenie derivát označovať symbolom V. Vývoj ceny podkladového aktíva je daný udalosťou $\omega \in \Omega$, čiže derivát je náhodná premenná nad priestorom $(\Omega, \mathcal{F}_T)$.

1.2 Oceňovanie finančných derivátov

Základom matematickej teórie oceňovania finančných derivátov sú dva princípy - vylúčenie arbitráže a rizikovo neutrálne oceňovanie. Tieto princípy vychádzajú z teórie racionálneho správania sa subjektov pôsobiacich na trhu. Ich uplatnením prichádzame k jasnému prechodu od štatistického modelu podkladových aktív k cene ich derivátov.

Cieľom matematického oceňovania je nájsť pravidlo Π_t na vyčíslenie hodnoty derivátu v čase t, $0 \leq t \leq T$. Pravidlo Π_t je reálnou funkciou nad priestorom $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ a množinou všetkých funkcií V_T, môžeme si však pod ním predstaviť univerzálnu postupnosť krokov vedúcich od špecifikácie derivátu V k určeniu jeho ceny v čase t. Pre zjednodušenie uvažujme, že pravidlo je funkciou V_T, cenu konkrétneho derivátu určeného pomocou oceňovacieho pravidla nazvime $V_t = \Pi_t(V_T)$. Oceňovacie pravidlo musí spĺňať niekoľko základných prirodzených podmienok. Prvou je, že môžeme použiť len informácie prístupné v čase t, teda proces $(V_t)_{t\in[0,T]}$ musí byť adaptovaný vzhľadom k filtrácii $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Ďalšia podmienka je nezápornosť:

$$\mathbb{P}[V_T \geq 0] = 1 \Rightarrow \mathbb{P}[V_t \geq 0] = 1 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.2}$$

Treťou podmienkou je linearita:

$$\Pi_t(\sum_{i=1}^{n} V_T^i) = \sum_{i=1}^{n} \Pi_t(V_T^i), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Linearitu môžeme rozšíriť na nekonečnú spočítateľnú množinu derivátov.
Tieto tri podmienky vedú na koncept rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miery.

Predpokladajme, že máme oceňovacie pravidlo Π_0. Symbolom 1_A označujeme charakteristickú funkciu množiny A: $1_A(x) = 1$ pre $x \in A$, $1_A(x) = 0$ inak. Uvažujme finančný derivát vyplácajúci 1, ak nastane udalosť $A \in \mathcal{F}_T$ a 0 inak - stávka na to, že nastane udalosť A. Pre $A = \Omega$ dostávame bezkupónový dlhopis, ktorého cena v čase t je fixne daná $\Pi_t(1_\Omega) = e^{-r(T-t)}$. Definujme

$$\mathbb{Q}(A) = \Pi_0(1_A)/\Pi_0(1_\Omega). \tag{1.4}$$

$\mathbb{Q}(A)$ je teda cena stávky obnosu e^{rT} v čase 0 na udalosť A. Linearita a kladnosť Π_0 nám zabezpečujú σ-aditivitu $\mathbb{Q}$, ďalej platí $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$, teda $\mathbb{Q}$ je pravdepodobnostná miera na priestore $(\Omega, \mathcal{F}_T)$.
Predpokladajme, že nepoznáme oceňovacie pravidlo, ale máme k dispozícii mieru $\mathbb{Q}$. Triviálne platí $\mathbb{Q}(A) = E^{\mathbb{Q}}[1_A]$. Pre derivát $V_T = \sum_{i=1}^{n} c_i 1_A, c_i \in \mathbb{R}$ dostávame na základe linearity oceňovacieho pravidla a strednej hodnoty:

$$V_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \Pi(1_A) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{Q}(A) e^{-rT} = e^{-rT} \sum_{i=1}^{n} c_i E^{\mathbb{Q}}[1_A] = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}[V_T].$$

Ak je Π_0 spojité, môžeme ľubovoľný derivát naceniť ako limitu cien derivátov vyššie uvedeného typu konvergujúcich k danému derivátu (technické detaily konvergencie nebudeme špecifikovať). V čase t disponujeme informáciou $\mathcal{F}_t$, ktorá presnejšie špecifikuje pravdepodobnosť udalosti $A \in \mathcal{F}_T$. To nám umožňuje presnejšie vypočítať cenu derivátu pomocou konceptu podmienenej strednej hodnoty. Cena ľubovoľného derivátu v čase t tak bude daná vzťahom:

$$V_t = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}[V_T | \mathcal{F}_t]. \tag{1.5}$$

Posledná podmienka špecifikujúca oceňovacie pravidlo, a teda aj oceňovaciu mieru $\mathbb{Q}$, je vylúčenie arbitráže. Väzbu medzi pôvodnou pravdepodobnostnou mierou $\mathbb{P}$ a mierou $\mathbb{Q}$ určuje vylúčenie arbitráže pri ocenení nemožnej udalosti. Uvažujme udalosť $A \in \mathcal{F}_T$, pre ktorú platí $\mathbb{P}[A] = 0$. Stávka na nemožnú udalosť je pre investora bezcenná, jej hodnota musí byť v ľubovoľnom čase rovná nule. Pre rizikovo neutrálnu mieru musí platiť:

$$\Pi_0(1_A) = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}[1_A] = e^{-rT}\mathbb{Q}[A] = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}[A] = 0.$$

Naopak, ak $\mathbb{Q}[A] = 0$, potom aj $\mathbb{P}[A] = 0$, inak stávka na A vytvára presne podľa vzťahu 1.1 možnosť arbitráže. Predstavená úvaha vedie k záveru, že miery $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{P}$ musia byť ekvivalentné:

$$\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} : \forall A \in \mathcal{F}_T \quad \mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0. \tag{1.6}$$

Za derivát akcie S môžeme považovať aj akciu samotnú - funkcia $V_T(.)$ je identita. Akciu môžeme od času t držať do konečného času $T > t$, výplata derivátu bude S_T. Podľa predpokladu trhu o trende rastu akcie a princípu vylúčenia arbitráže má táto stratégia rovnakú hodnotu ako kúpa numeraire v čase t v hodnote S_t. Teda platí

$$E^{\mathbb{Q}}[S_T|\mathcal{F}_t] = E^{\mathbb{Q}}[S_t e^{r(T-t)}|\mathcal{F}_t] = S_t e^{r(T-t)} \tag{1.7}$$

Tretia rovnosť platí, pretože náhodná premenná S_t je merateľná vzhľadom k σ-algebre $\mathcal{F}_t$. Rovnosti môžeme predeliť hodnotou e^{rT}, čím prejdeme k procesu oddiskontovanej ceny akcie $(\tilde{S}_t)_{t\in[0,T]} = (e^{-rt}S_t)_{t\in[0,T]}$, pre ktorý na základe vzťahu 1.7 platí:

$$E^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_T|\mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t. \tag{1.8}$$

Vylúčenie arbitráže teda implikuje podmienku, že proces oddiskontnovaných cien akcií $(\tilde{S})_{t\in[0,T]}$ musí byť martingalom vzhľadom k filtrácii $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ a rizikovo neutrálnej pravdepodobnostnej miere $\mathbb{Q}$.
Mieru $\mathbb{Q}$ preto voláme ekvivalentná martingalová miera. Nie je ťažké nahliadnuť, že daná ekvivalentná martingalová miera jednoznačne definuje oceňovacie pravidlo.

Pravdepodobnostná miera $\mathbb{Q}$ nesúvisí s pôvodnou pravdepodobnosťou výskytu udalostí $\mathbb{P}$. $\mathbb{Q}$ nemôže byť interpretovaná ako pravdepodobnosť nastania udalostí v reálnom svete a nemôže byť vyšetrená ekonometrickou analýzou procesov podkladových aktív.

Odvodené výsledky sú zahrnuté v nasledovnej vete, ktorá je základným všeobecným princípom na oceňovanie finančných derivátov:

Veta 1.2.1. *(Prvá základná veta oceňovania derivátov, Bezarbitrážny oceňovací princíp) Majme trh daný priestorom $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, jednou akciou $(S_t)_{t\geq 0}$ a numerairom typu spojité úročenie úrokom r. Derivát podkladového aktíva S nech je daný funkciou $V_T(.)$.*
Ak existuje pravdepodobnostná miera $\mathbb{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ taká, že platí

$$e^{-rt}S_t = E^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}S_T|\mathcal{F}_t], \qquad \mathbb{Q} \sim \mathbb{P}, \tag{1.9}$$

potom trh je bezarbitrážny a cena derivátu v čase t daná hodnotou

$$V_t = E^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}V_T((S_t)_{t\in[0,T]})|\mathcal{F}_t] \tag{1.10}$$

je bezarbitrážna.

1.3 Úplnosť trhu

Kým bezarbitrážnosť trhu je v realite prirodzeným predpokladom a vďaka tomu je podstatnou a bežnou vlastnosťou v matematických modeloch, úplnosť finančných trhov v realite pozorovania zamietajú a taktiež na pôde matematického modelovania sa vyvíjajú rozumné kvalitné modely neúplného trhu. Sú to predovšetkým modely postavené na báze Lévyho procesov.

Na definíciu úplného trhu a oceňovanie derivátov na úplných trhoch bol zavedený pojem dokonalé zaistenie.

Definícia 1.3.1. *Dokonalým zaistením derivátu V nazývame samofinancovanú stratégiu* $(\Phi_t)_{t\in[0,T]}$*, pomocou ktorej možno takmer iste replikovať daný derivát V:*

$$\mathbb{P}[V_T = \kappa + \int_0^T \Phi_t dS_t] = 1, \quad \kappa \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

Definícia 1.3.2. *Úplným trhom nazývame trh, na ktorom existuje pre ľubovoľný derivát dokonalé zaistenie. Inak nazývame trh neúplným.*

Na úplnom trhu je možné pomocou podkladových aktív replikovať všetky deriváty, ktoré sú tým pádom redundantnými finančnými nástrojmi. Realita však ukazuje, že deriváty majú jedinečné a nezastupiteľné postavenie na trhu a nie je možné ich replikovať.

Ak vzťah 1.11 platí pre pravdepodobnostnú mieru $\mathbb{P}$, potom platí pre ľubovoľnú inú ekvivalentnú pravdepodobnostnú mieru. Dôvodom je, že ekvivalentné pravdepodobnostné miery definujú rovnaké množiny istých udalostí. Ak teda uvažujeme proces diskontovaných cien a ekvivalentnú martingalovú mieru $\mathbb{Q}$, pre derivát V s dokonalým zaistením Φ platí :

$$\mathbb{Q}[e^{-rT} V_T = \kappa + \int_0^T \Phi_t d\tilde{S}_t] = 1, \quad \kappa \in \mathbb{R} \tag{1.12}$$

$\tilde{S}_t$ je pod mierou $\mathbb{Q}$ martingalom, z čoho vyplýva cena derivátu v počiatočnom čase:

$$V_0 = E^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} V_T|\mathcal{F}_0] = E^{\mathbb{Q}}[\kappa + \int_0^T \Phi_t d\tilde{S}_t|\mathcal{F}_0] = E^{\mathbb{Q}}[\kappa] + 0 = \kappa. \tag{1.13}$$

Cena derivátu na úplnom trhu sa teda dá vypočítať jednoducho ako počiatočný kapitál potrebný na odštartovanie samofinancovanej zaisťovacej stratégie. Tento záver umožnil v B-S modeli odvodiť B-S parciálnu diferenciálnu rovnicu popisujúcu dynamiku ceny každého derivátu závisiaceho len od konečnej hodnoty akcie. Aplikovaním vzťahu 1.13 môžeme na úplnom trhu naceniť každý derivát, čo pri podobnom myšlienkovom postupe, aký sme aplikovali na odvodenie ekvivalentnej martingalovej miery, vedie k záveru, že ekvivalentná martingalová miera je na úplnom trhu jednoznačne určená. Platí aj opačná implikácia - ak existuje jediná ekvivalentná martingalová miera, tak možno dokonale zaistiť každý derivát, trh je úplný (odvodenie tejto implikácie je podstatne náročnejšie).

Veta 1.3.1. *(Druhá základná veta oceňovania derivátov) Trh definovaný priestorom* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *a procesom cien* $(S_t)_{t\geq 0}$ *je úplný práve vtedy, keď existuje práve jedna ekvivalentná martingalová miera* $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$.

Na bezarbitrážnom neúplnom trhu existuje podľa tejto vety viac ekvivalentných martingalových mier. Ocenenie derivátu ľubovoľnou z nich vedie k bezarbitrážnej a teda rozumnej, spravodlivej cene. Rozličné ekvivalentné martingalové miery môžu danému derivátu priradiť rozdielne ceny. Vybratie jednej konkrétnej oceňovacej miery záleží na subjektívnom rozhodnutí oceňovateľa - môže optimalizovať ďalšie faktory ako je minimalizácia zaisťovacieho rizika, rozdielu medzi oceňovacou a pôvodnou pravdepodobnostnou mierou, alebo sa zamerať na matematickú priehľadnosť, jednoduchosť, či ekonomickú interpretovateľnosť.

Kapitola 2

Black-Scholesov model

Prvým významným matematickým modelom nasadeným na oceňovanie finančných derivátov je Black-Scholesov[1] (B-S) model. Je to prvý model využívajúci princípy bezarbitrážneho oceňovania v stochastickom modeli trhu. V prvej časti tejto kapitoly sú stručne predstavené východiská a výsledky základného B-S modelu. Tento model však obsahuje vážne nedostatky. V druhej časti kapitoly sa pozrieme na niekoľko dôležitých vlastností B-S modelu, ktoré sú v rozpore s reálnymi pozorovaniami finančného trhu. Od Lévyho procesov očakávame odstránenie predstavených nedostatkov.

2.1 Brownov pohyb

Hlavným stavebným kameňom, na ktorom je B-S model postavený, je Brownov pohyb. Brownov pohyb patrí medzi najviac preštudované stochastické procesy, je

[1]Keď v roku 1973 zverejnili Fischer Black a Myron Scholes v časopise *Journal of Political Economy* článok *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, začala sa písať moderná história oceňovania finančných derivátov a dá sa povedať, že aj trhu s finančnými derivátmi. Na rozvoji oceňovacej teórie spolupracoval aj Robert Merton, ktorému bola za túto prácu spolu s Myronom Scholesom udelená v roku 1997 Nobelova cena za ekonómiu. Fischer Black sa tohto významného ocenenia nedožil, zomrel v roku 1995 vo veku 57 rokov. Základný model odvodený Mertonom, Blackom a Scholesom je doteraz obľúbeným teoretickým odrazovým mostíkom pre oceňovanie finančných derivátov a stále existujú snahy o jeho rozšírenie tak, aby reflektoval realitu finančného trhu.

základným procesom stochastickej analýzy. Symbolom $\stackrel{d.}{=}$ označujeme rovnosť podľa distribúcie.

Definícia 2.1.1. *(Wienerov proces) Nech* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ *je filtrovaný pravdepodobnostný priestor. Stochastický proces* $(W_t)_{t\geq 0}$ *je Wienerov proces, ak spĺňa nasledovné vlastnosti:*

(a) $(W_t)_{t\geq 0}$ *je adaptovaný vzhľadom k filtrácii* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

(b) $\mathbb{P}[W_0 = 0] = 1$

(c) pre všetky $s, t \geq 0, t > s$, *je* $W_t - W_s$ *nezávislé od* $\mathcal{F}_s$ *(nezávislosť prírastkov)*

(d) pre všetky $s \geq 0, t > 0$ *platí:*
$W_{s+t} - W_s \stackrel{d.}{=} W_t - W_0 \sim N(0, t)$ *(stacionarita, normalita prírastkov)*

(e) $(W_t)_{t\geq 0}$ *má spojité trajektórie s pravdepodobnosťou 1*

Definícia 2.1.2. *(Brownov pohyb) Nech* $(W_t)_{t\geq 0}$ *je Wienerov proces,* $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$. *Potom proces*

$$B_t = \mu t + \sigma W_t, \quad t \geq 0 \tag{2.1}$$

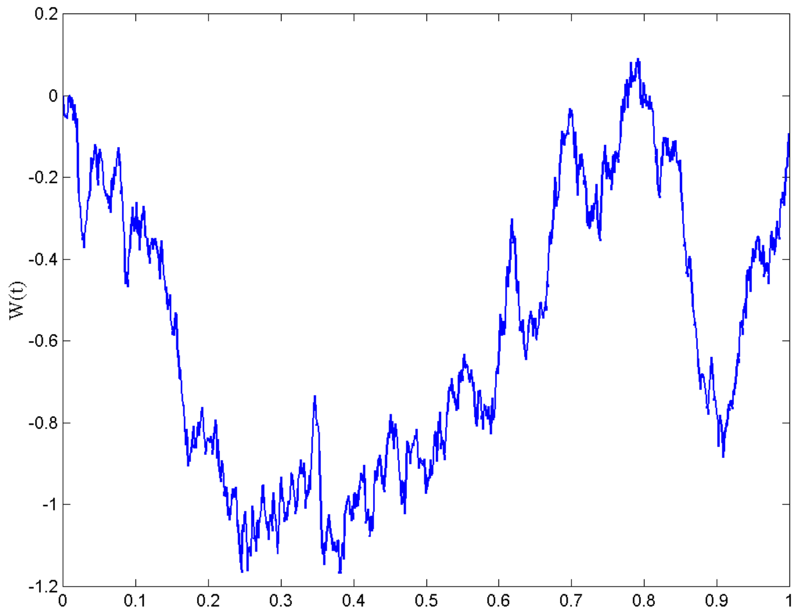
nazývame Brownov pohyb.

Parameter μ voláme drift a parameter σ voláme volatilita Brownovho pohybu. Stochastický kalkulus vybudovaný na základe Brownovho pohybu je podstatne odlišný od analýzy deterministických funkcií. Brownov pohyb má totiž náhodný charakter a jeho trajektórie sú v každom bode nediferencovateľné takmer iste, napriek tomu, že sú spojité. Pre analýzu funkcií a stochastických diferenciálnych rovníc odvodených od Brownovho pohybu je významným nástrojom tzv. Itôv proces, Itôv integrál a Itôva lema. Viac o Brownovom pohybe sa dá dočítať napr. v [2], [3].

2.2 Oceňovanie derivátov pomocou B-S modelu

Cenu finančného aktíva v čase t označme S_t. Podľa B-S modelu je vývoj S_t daný stochastickou diferenciálnou rovnicou:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma dW_t + (\mu + \frac{\sigma^2}{2})dt, \quad t \geq 0. \tag{2.2}$$



Obr. 2.1: Príklad trajektórie Wienerovho procesu

Jej riešením je stochastický proces tvaru:

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma W_t), \quad t \geq 0, \tag{2.3}$$

často nazývaný exponenciálny Brownov pohyb.

Naším cieľom je pomocou bezarbitrážneho oceňovacieho pravidla 1.10 oceniť derivát V podkladového aktíva S, ktorého proces ceny je exponenciálnym Brownovym pohybom. Podľa Girsanovovej vety existuje práve jedna rizikovo neutrálna pravdepodobnostná miera $\mathbb{Q}$ taká, že proces diskontovanej ceny akcie S je pri pravdepodobnostnej miere $\mathbb{Q}$ martingalom. V B-S modeli tak dostávame úplný trh, na ktorom je možné každý derivát podkladovej akcie replikovať danou akciou a bezrizikovým aktívom $B_t = e^{rt}$. Dá sa teda zostrojiť samofinancovaná stratégia spĺňajúca podmienky:

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t, \tag{2.4}$$

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t, \tag{2.5}$$

kde ϕ_t je počet akcií a ψ_t počet dlhopisov v čase t. Podmienka 2.5 predstavuje práve samofinancovanosť stratégie - netreba investovať ani odoberať žiaden ďalší kapitál. Vývoj stratégie je presne daný vývojom podkladového aktíva a presne určuje hodnotu derivátu v každom čase. Spojením podmienky samofinancovanosti stratégie a aplikovaním Itôvej lemy na funkciu $V_t(.)$ dostávame Black-Scholesovu parciálnu diferenciálnu rovnicu:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial S} rS - rV = 0 \tag{2.6}$$

Ak je daná hodnota derivátu v čase jeho expirácie funkciou $V(S,T) = f(S_T)$, tvorí funkcia $f(.)$ okrajovú podmienku pre B-S parciálnu diferenciálnu rovnicu a tak možno hodnotu derivátu $V_t(S_t)$ v každom čase pred expiráciou vypočítať ako riešenie tejto parciálnej diferenciálnej rovnice. Tento záver B-S modelu je z matematického hľadiska vynikajúci - riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice v tejto forme je preskúmaný analytický a numerický problém.

2.3 Nedostatky Black-Scholesovho modelu

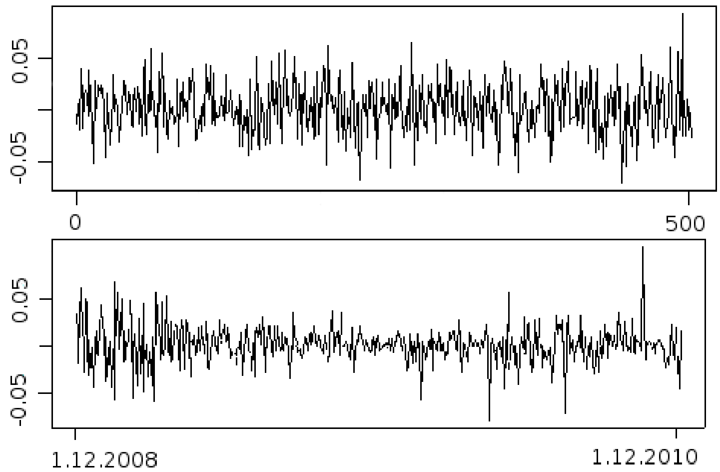
2.3.1 Normalita výnosov akcií

Výnos ceny akcie od času t_0 do času t_1 je podiel $(S_{t_1} - S_{t_0})/S_{t_0}$. Zvyčajne sa modeluje rad cien akcií s malými časovými rozpätiami a výnosy akcie sú malé čísla. Je teda možné výnos akcie medzi dvomi nasledovnými časmi aproximovať hodnotou

$$\frac{S_{t_1} - S_{t_0}}{S_{t_0}} \approx \ln\left(\frac{S_{t_1} - S_{t_0}}{S_{t_0}} + 1\right) = \ln(S_{t_1}) - \ln(S_{t_0}) \tag{2.7}$$

V B-S modeli to znamená, že výnosy akcie sú modelované prírastkami Brownovho pohybu. Tie sú nezávislé a majú normálne rozdelenie, s parametrami nemeniacimi sa v čase. Vďaka tomu môžeme ľahko testovať, či sa cena akcie skutočne riadi exponenciálnym Brownovým pohybom. Stačí vyšetriť, či sú výnosy akcie z normálneho rozdelenia.

Ako príklad analyzujeme časový rad výnosov akcie Google s denným časovým rozpätím typu Adj. Close v časovom rozpätí 1.12.2008 až 1.12.2010.



Obr. 2.2: Vývoj výnosov akcie Google modelovaný normálnym rozdelením (hore) a reálny vývoj výnosov akcie Google v rozpätí dvoch rokov (dolu)

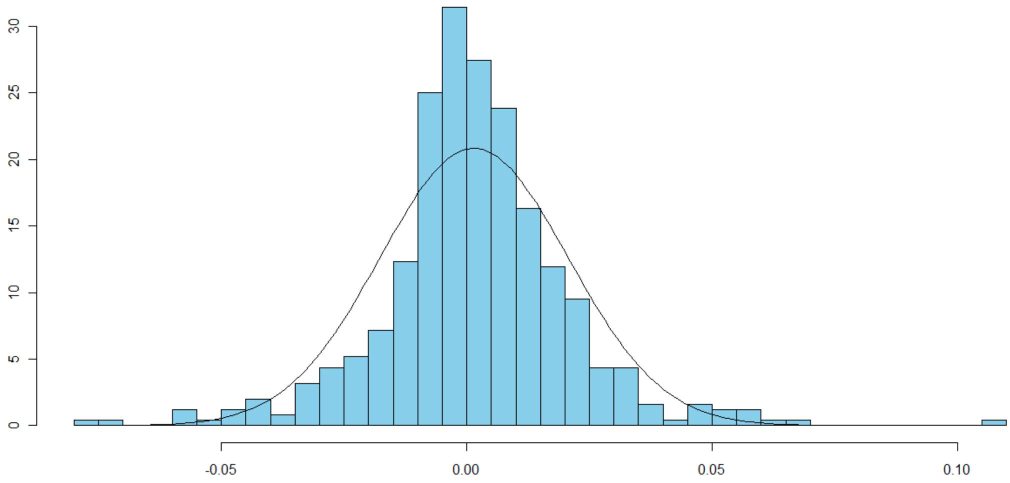
Na Obr. 2.2 je zakreslený výnos akcie Google modelovaný pomocou normálneho rozdelenia s parametrami rovnými výberovej strednej hodnote a výberovej disperzii reálnych výnosov a taktiež vývoj reálnych výnosov akcie Google. Principiálny rozdiel medzi reálnymi a modelovanými dátami je na obrázkoch jasne viditeľný.

Na základe Kolomogorov-Smirnovho testu normality zamietame normalitu analyzovaných dát s p-hodnotou na úrovni 0,000998. Veľmi nízka p-hodnota testu znamená, že dáta nie sú z normálneho rozdelenia s veľmi vysokou pravdepodobnosťou. Výberová šikmosť dát je 0,13, pričom normálne rozdelenie má nulovú šikmosť. Výberová špicatosť dát dosahuje hodnotu až 6,5 a normálne rozdelenie má špicatosť vždy rovnú trom. Vysokú špicatosť dát môžeme vidieť aj na histograme výnosov, v ktorom je zakreslená hustota normálneho rozdelenia s parametrami rovnými výberovej strednej hodnote a výberovej disperzii (Obr. 2.3).

Štatistická analýza reálnych dát v mnohých prípadoch veľmi striktne zamieta normalitu výnosov akcií. To je vážny dôvod, prečo je B-S model v praxi nepoužiteľný.

2.3.2 Spojité trajektórie

Podstatnou súčasťou finančného trhu sú informácie. Cenu akcie určuje ponuka a dopyt, ktoré sú veľmi ovplyvnené novými informáciami. Pohyb ceny akcie úzko súvisí



Obr. 2.3: Histogram výnosov akcie Google a hustota normálneho rozdelenia

zo zverejnením novej skutočnosti, ako je napríklad rozhodnutie vedenia súkromnej firmy alebo štátnej inštitúcie, či krach banky. Ak je informácia závažná, môže spôsobiť náhlu veľkú zmenu v cene akcie, ktorú z hľadiska trajektórie vnímame ako skok. B-S model predpokladá spojité trajektórie cien podkladových aktív, nepripúšťa možnosť skokov. Tým zanedbáva dôležitú charakteristiku trhu - nečakaný výskyt nových informácií náhle meniacich ponuku a dopyt a tým cenu akcií.

2.3.3 Úplnosť trhu

V B-S modeli existuje práve jedna rizikovo neutrálna pravdepodobnosť, pri ktorej je proces diskontovanej ceny podkladového aktíva martingalom. To znamená, že sme dostali model úplného trhu. Na takomto trhu existuje pre každý derivát práve jedna spravodlivá cena a je rovná cene, ktorú zaplatíme na začiatku za kúpu portfólia, pomocou ktorého potom dokonale replikujeme daný derivát (viď kap. 1.3). Keďže derivát vieme dokonale replikovať, je na trhu nadbytočným nástrojom. Realita ukazuje, že skutočné trhy nie sú úplné a deriváty sú nenahraditeľnými finančnými nástrojmi.

2.3.4 Volatility smile

Na oceňovanie európskej call-opcie bez dividend je pre B-S model odvodený explicitný vzorec, ktorý je funkciou volatility Brownovho pohybu modelujúceho výnosy

Obr. 2.4: Krivka Volatility Smile pre akciu DIS

podkladovej akcie. Ak poznáme trhovú cenu uvažovanej call opcie, môžeme na základe tejto formuly vypočítať tzv. implikovanú volatilitu akcie. Je to volatilita, pri ktorej dostaneme na základe B-S modelu presne trhovú cenu opcie.

Pri nasadení B-S modelu na reálne dáta sa ukázalo, že implikovaná volatilita sa mení, ak analyzujeme opcie na to isté podkladové aktívum s rozličnou dobou do splatnosti, resp. rozličnou strike price. To zamieta stacionaritu parametrov B-S modelu. Navyše je častým javom ostro konvexný tvar implikovanej volatility ako funkcie strike price pre strike price blízko okolo ceny podkladovej akcie a s rovnakou dobou do splatnosti. Táto krivka má vo finančnej praxi vlastný názov - volatility smile (konvexná krivka na blízkom okolí svojho minima pripomína úsmev - preto názov "smile"). Tento jav sa považuje za charakteristický pre finančné dáta a preto je potrebné nájsť spôsob, ako ho vysvetliť, resp. jeho existenciu zahrnúť do modelu trhu.

Kapitola 3

Lévyho procesy

V tejto kapitole zadefinujeme triedu Lévyho[1] procesov a predstavíme ich základné vlastnosti.

3.1 Definícia Lévyho procesu

Lévyho procesy nie sú spojitými procesmi, požadujeme od nich oveľa slabší druh spojitosti.

Definícia 3.1.1. *(càdlàg)* *Funkcia $f : U \to \mathbb{R}$ sa nazýva càdlàg, ak*

- $\forall t \in U \quad \lim_{s \to t+} f(s) = f(t)$ *(sprava polospojitá)*
- $\forall t \in U \;\; \exists \lim_{s \to t-} f(s)$ *(existuje limita zľava)*

Pomenovanie càdlàg pochádza z francúzskeho “continue à droite, limite à gauche” - spojitá sprava, limita zľava. Táto vlastnosť je vhodná na modelovanie ceny finančného aktíva, ktorého cenu v danom bode nedokážeme predpovedať na základe minulosti.

[1]Paul Lévy (1886 – 1971) sa narodil vo Francúzsku v Paríži. Študoval na École Polytechnique, doktorandské štúdia absolvoval na Parížskej univerzite a v roku 1913 sa stal profesorom na École Polytechnique. Je považovaný za jedného z otcov modernej teórie pravdepodobnosti a zvlášť teórie stochastických procesov. Medzi najvýznamnejšie výsledky patria odvodenia limitných rozdelení, analýza procesov s nezávislými prírastkami a Wienerovho procesu.

Analogicky môžeme definovať càglàd funkciu - spojitá zľava, limita sprava. Procesy s vlastnosťou càglàd sú vhodné na modelovanie nami vytvorených stratégií.

Definícia 3.1.2. *(Stochastická spojitosť)* *Stochastický proces $(X_t)_{t\geq 0}$ sa nazýva stochasticky spojitý v bode a, ak*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{h\to 0} \mathbb{P}[|X_{a+h} - X_a| \geq \epsilon] = 0.$$

Proces $(X_t)_{t\geq 0}$ sa nazýva stochasticky spojitý, ak je stochasticky spojitý v každom bode $t \geq 0$.

Je vhodné poznamenať, že stochastická spojitosť neimplikuje spojitosť trajektórií stochastického procesu. Zabezpečuje „rozumnú" mieru výskytu skokov a vylučuje skoky v deterministickom čase (napríklad vyplácanie dividend), ktoré možno modelovať iným spôsobom.

Definícia 3.1.3. *(Lévyho proces)* *Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ je filtrovaný pravdepodobnostný priestor. Stochastický proces $(X_t)_{t\geq 0}$ nazývame Lévyho proces, ak spĺňa nasledovné vlastnosti:*

(a) $(X_t)_{t\geq 0}$ je adaptovaný vzhľadom k filtrácii $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

(b) $\mathbb{P}[X_0 = 0] = 1$

(c) pre všetky $s, t \geq 0, t > s$, je $X_t - X_s$ nezávislé od $\mathcal{F}_s$ (nezávislosť prírastkov)

(d) Rozdelenie$X_{t+h} - X_t$ nezávisí od t pre všetky $t \geq 0, h > 0$ (stacionarita prírastkov)

(e) $(X_t)_{t\geq 0}$ má càdlàg trajektórie s pravdepodobnosťou 1

(f) $(X_t)_{t\geq 0}$ je stochasticky spojitý proces

Definíciu Lévyho procesu spĺňa Wienerov proces, ktorého definícia 2.1.1 sprísňuje defníciu Lévyho procesu o spojitosť trajektórií a normalitu prírastkov. Teda definícia Lévyho procesu nie je prázdna, Lévyho proces ako matematický objekt má zmysel. Ak simulujeme Lévyho proces v diskrétnych časoch, dostávame náhodnú prechádzku (angl. random walk). Lévyho procesy tak možno považovať za extrapoláciu pojmu náhodnej prechádzky do spojitého času.

Otázkou je, aká široká je trieda Lévyho procesov. Je dostatočne flexibilná na modelovanie rôznych vlastností finančných aktív? Už sme ukázali, že Wienerov proces nie je dostatočne flexibilný, hoci sa s ním elegantne pracuje. Je možné efektívne pracovať aj s triedou Lévyho procesov? Pri práci s Lévyho procesmi nám pomáha niekoľko dôležitých vlastností a záverov predstavených v nasledujúcich kapitolách.

3.2 Nekonečne deliteľné rozdelenia

Definícia 3.2.1. *(Nekonečne deliteľné rozdelenie) Pravdepodobnostné rozdelenie χ nazývame nekonečne deliteľným, ak pre všetky $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ existujú rovnako rozdelené nezávislé náhodné premenné $X_1, X_2, ..., X_n$ také, že náhodná premenná $Y = X_1 + X_2 + ... + X_n$ má rozdelenie χ.*

Pre charakteristickú funkciu ϕ súčtu nezávislých náhodných premenných platí

$$\phi_{X+Y}(u) = E[\exp(iu(X+Y))] = E[\exp(iuX)]E[\exp(iuY)] = \phi_X(u)\phi_Y(u). \quad (3.1)$$

Taktiež platí, že charakteristická funkcia jednoznačne určuje rozdelenie náhodnej premennej. Preto pravdepodobnostné rozdelenie je nekonečne deliteľné, ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je charakteristická funkcia daného rozdelenia n-tou mocninou nejakej charakteristickej funkcie. Tento vzťah nám pomáha vyšetrovať nekonečnú deliteľnosť náhodných premenných.

Príklad 1. Normálne rozdelenie $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, s charakteristickou funkciou ϕ_X.

$$\phi_X(u) = E[\exp(iuX)] = \exp(i\mu u - \tfrac{1}{2}\sigma^2 u^2) = \exp((i\mu u - \tfrac{1}{2}\sigma^2 u^2).\tfrac{n}{n}) =$$

$$= \exp(i\tfrac{\mu}{n}u - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2 u^2)^n = (\phi_Y(u))^n,$$

kde $Y \sim N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$. Ukázali sme, že normálne rozdelenie je nekonečne deliteľné.

Nekonečne deliteľné rozdelenie je napríklad normálne, exponenciálne, Gama, Poissonovo, geometrické. Ako vidieť na príkladoch, môže to byť diskrétne aj spojité rozdelenie. Niektoré rozdelenia, ktoré nie sú nekonečne deliteľné, vymedzuje nasledovná veta:

Veta 3.2.1. *Ak má pravdepodobnostné rozdelenie ohraničený nosič, tak nie je nekonečne deliteľné.*

Podľa tejto vety nie sú nekonečne deliteľnými rozdeleniami napr. alternatívne, binomické, rovnomerné.

Súvislosť medzi Lévyho procesmi a nekonečne deliteľnými rozdeleniami je obsiahnutá v nasledovnej vete:

Veta 3.2.2. *Nech $(X_t)_{t\geq 0}$ je Lévyho proces. Potom pre všetky $t > 0$ má náhodná premenná X_t nekonečne deliteľné rozdelenie. Naopak, ak χ je nekonečne deliteľné rozdelenie, potom existuje Lévyho proces $(X_t)_{t\geq 0}$ taký, že X_1 má rozdelenie χ.*

Vzťah medzi Lévyho procesmi a nekonečne deliteľnými rozdeleniami je teda veľmi úzky. Kým pri náhodnej prechádzke môžeme zvoliť ľubovoľné rozdelenie náhodnej premennej prírastku v jednom kroku, Lévyho procesy už majú obmedzenie na výber pravdepodobnostného rozdelenia prírastkov. Poznamenajme, že hoci druhá časť vety naoko špecifikuje rozdelenie iba v jednom bode, dáva nám oveľa väčšiu informáciu. Vďaka nekonečnej deliteľnosti, nezávislosti a stacionarite prírastkov máme v rozdelení X_1 informáciu o rozdelení $(X_t)_{t\geq 0}$ v každom diskrétnom čase $t \in \mathbb{N}$ a ak je dané rozdelenie uzavreté vzhľadom na konvolúciu, tak aj v časoch z oboru kladných racionálnych čísel.

Základnou vetou v analýze Lévyho procesov je Lévy - Chinčinova veta:

Veta 3.2.3. *(Lévy - Chinčinova veta)* *Nech X je náhodná premenná s nekonečne deliteľným rozdelením. Potom jej charakteristickú funkciu $\phi(.)$ možno zapísať v tvare:*

$$\phi(u) = e^{\psi(u)}, u \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

$$\psi(u) = iau - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux1_{(|x|<1)})\nu(dx), \tag{3.3}$$

kde ν je miera na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ splňajúca

$$\int_{-\infty}^{\infty} \min(1, x^2)\nu(dx) < \infty. \tag{3.4}$$

Vzťah 3.2 spolu s 3.3 nazývame Lévy-Chinčinova formula.

Definícia 3.2.2. *Parametre (a, σ^2, ν) z Lévy-Chinčinovej vety nazývame Lévyho (alebo aj charakteristická) trojica. Funkciu ψ voláme charakteristický exponent Lévyho procesu.*

Pozrime sa bližšie na Lévy-Chinčinovu formulu. Ako už bolo povedané, charakteristická funkcia súčtu nezávislých náhodných premenných je súčinom ich charakteristických funkcií. Podľa Lévy-Chinčinovej formuly môžeme každú nekonečne deliteľnú náhodnú premennú vyjadriť ako súčet troch nezávislých náhodných premenných podľa troch sčítancov vo funkcii ψ. Prvé dva zodpovedajú Normálnemu rozdeleniu so strednou hodnotou a a volatilitou σ (porovnaj s charakteristickou funkciou v príklade 1).

Posledný sčítanec zodpovedá skokovej zložke a konkrétne charakteristickej funkcii súčtu (nie nutne konečného počtu) nezávislých náhodných premenných so zloženým Poissonovým rozdelením s kompenzovanými malými skokmi.

Vďaka priamemu vzťahu medzi Lévyho procesmi a nekonečne deliteľnými rozdeleniami má Lévy-Chinčinova formula jasnú interpretáciu i pre Lévyho procesy. Určuje charakteristickú funkciu ϕ Lévyho procesu $(X_t)_{t\geq 0}$ v čase $t = 1$ a charekteristická funkcia náhodnej premennej X_t pre dané $t \geq 0$ je t-tou mocninou funkcie ϕ.
Každý Lévyho proces môžeme vyjadriť ako súčet troch procesov, ktoré prislúchajú trom parametrom Lévyho trojice. Prvé dva parametre zodpovedajú Brownovmu pohybu s driftom a a volatilitou σ^2. Tretí parameter Lévyho procesu - Lévyho miera ν má nasledovnú interpretáciu:

$$\nu(A) = E[\#t \in [0,1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A], \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \tag{3.5}$$

Lévyho miera danej borelovskej množine A priradí strednú hodnotu počtu skokov za časovú jednotku, pričom veľkosť skokov patrí do množiny A. Každá kompaktná množina A, ktorá neobsahuje hodnotu 0, má konečnú mieru ν. Inak by mal proces X_t nekonečne veľa skokov na ohraničenom intervale, pričom vďaka kompaktnosti A by všetky skoky boli v absolútnej hodnote väčšie ako určitá hodnota $\epsilon > 0$. To je v spore s vlastnosťou trajektórií càdlàg. Ak je miera ν konečná, člen $\int_{-\infty}^{\infty}(e^{iux}-1)\nu(dx)$ zodpovedá zloženému Poissonovmu rozdeleniu, kde intenzita Poissonovho procesu je daná hodnotou $\int_{-\infty}^{\infty}\nu(dx)$ a distribúcia skokov f je daná vzťahom $\nu(dx) = \lambda f(x)dx$.

Miera ν avšak nemusí byť konečná. Pri nule môže explodovať do nekonečna, čo znamená, že proces X_t bude mať pre každé $\epsilon > 0$ nekonečne veľa skokov menších ako ϵ. Malé skoky vo všeobecnosti v súčte nemusia konvergovať. Člen $-iux1_{(|x|<1)}$ z Lévy-Chinčinovej formuly vybalansuje malé skoky tak, že odčítava ich strednú hodnotu. Tým dostávame proces s tzv. kompenzovanými skokmi. Podľa zákona veľkých čísel malé kompenzované skoky konvergujú, aj keď ich je na ohraničenom intervale nekonečne veľa. Podmienka 3.4 stanovuje práve vlastnosť Lévyho miery, že počet skokov väčších ako ľubovoľné $\epsilon > 0$ má byť ohraničený, kým malých skokov môže byť aj nekonečne veľa.

Definícia 3.2.3. *(Proces s nekonečnou aktivitou) Lévyho proces $(X_t)_{t\geq 0}$ nazývame procesom s konečnou aktivitou, ak pre jeho Lévyho mieru ν platí:*

$$\nu(\mathbb{R}\backslash\{0\}) < \infty \tag{3.6}$$

Inak proces $(X_t)_{t\geq 0}$ nazývame procesom s nekonečnou aktivitou.

Veta 3.2.4. *Lévyho proces má konečne veľa skokov na ľubovoľnom podintervale $[s,t]$, $0 \leq s < t$, práve vtedy, keď je procesom s konečnou aktivitou.*

Lévyho procesy s nekonečnou aktivitou tvoria veľkú triedu procesov a sú s obľubou využívané na finančné modelovanie.

3.3 Vlastnosti Lévyho procesov

Pri finančnom modelovaní často vychádzame z konkrétneho predpokladu na vlastnosti modelovaných objektov. V prípade Lévyho procesov nám určité predpoklady presnejšie vymedzia triedu procesov, s ktorými pracujeme. V tejto kapitole predstavíme, akú triedu procesov dostaneme požadovaním istých vlastností. Vychádzame z literatúry [4], [7], [8].

Určité vlastnosti trajektórií, ako je diferencovateľnosť, spojitosť, dávajú presné podmienky na Lévyho trojicu:

Veta 3.3.1. *Lévyho proces* $(X_t)_{t\geq 0}$ *má diferencovateľné trajektórie práve vtedy, keď jeho charakteristická trojica spĺňa podmienky:* $\sigma^2 = 0$, $\nu = 0$, *teda keď* $(X_t)_{t\geq 0}$ *je deterministická lineárna funkcia.*

Veta 3.3.2. *Lévyho proces* $(X_t)_{t\geq 0}$ *má spojité trajektórie práve vtedy, keď jeho charakteristická trojica spĺňa podmienky:* $\nu = 0$, *teda keď* $(X_t)_{t\geq 0}$ *je Brownov pohyb.*

Veta 3.3.3. *Lévyho proces* $(X_t)_{t\geq 0}$ *má po častiach konštantné trajektórie práve vtedy, keď jeho charakteristická trojica spĺňa podmienky:* $\sigma^2 = 0$, $\nu(\mathbb{R}\backslash\{0\}) < \infty$ *a* $a = \int_{|x|\leq 1} x\nu(dx)$. *Alebo ekvivalentne práve vtedy, keď jeho charakteristický exponent má tvar:*

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1)\nu(dx), \quad \nu(\mathbb{R}\backslash\{0\}) < \infty,$$

teda práve vtedy, keď $(X_t)_{t\geq 0}$ *je zloženým Poissonovým procesom.*

Zložený Poissonov proces je podrobnejšie predstavený v kapitole 3.4.1.

Pripomeňme si pojem variácie funkcie [3]:

Definícia 3.3.1. *Nech* $\Pi = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ *je delenie intervalu* $[0, T]$, *teda* $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$. *Označme* $\|\Pi\| = \max\{t_{k+1} - t_k; k = 0, ...n-1\}$. *Prvú variáciu funkcie* f *na intervale* $[0, T]$ *definujeme*

$$V_{[0,T]}(f) = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} |f(t_{k+1}) - f(t_k)|,$$

ak limita na pravej strane existuje.

Každá monotónna a každá diferencovateľná funkcia má konečnú variáciu. Každá funkcia s konečnou variáciou sa dá vyjadriť ako rozdiel dvoch rastúcich funkcií. Hovoríme, že Lévyho proces má konečnú variáciou, ak jeho trajektórie sú na ľubovoľnom ohraničenom podintervale funkcie s konečnou variáciou s pravdepodobnosťou 1.

Veta 3.3.4. *Lévyho proces* $(X_t)_{t\geq 0}$ *s charakteristickou trojicou* (a, σ^2, ν) *má konečnú variáciu práve vtedy, keď jeho charakteristická trojica spĺňa podmienky:*

$$\sigma^2 = 0, \quad \int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty.$$

Jeho charakteristický exponent má tvar:

$$\psi(u) = ibz + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1)\nu(dx)$$

a proces $(X_t)_{t\geq 0}$ *môže byť vyjadrený ako súčet skokov na intervale* $[0, t]$ *a lineárnej funkcie:*

$$X_t = bt + \sum_{s\in[0,t]}^{\Delta X_s \neq 0} \Delta X_s, \quad t \geq 0,$$

pričom $b = a - \int_{|x|\leq 1} x\nu(dx)$.

Rastúce Lévyho procesy sa nazývajú aj subordinátory a s obľubou sa využívajú pri budovaní Lévyho procesov. Časovú zložku procesu totiž môžeme chápať ako deterministický lineárny proces, ktorý môžeme nahradiť iným rastúcim procesom. Subordinátor môže obsahovať nelineárne časti a skoky, čím môžeme vhodne ohnúť časový priebeh procesu a vytvoriť tak nový Lévyho proces.

Veta 3.3.5. *Nech* $(X_t)_{t\geq 0}$ *je Lévyho proces. Potom sú nasledovné podmienky ekvivalentné*

(a) $\exists t > 0 \;\; \mathbb{P}[X_t \geq 0] = 1$

(b) $\forall t > 0 \;\; \mathbb{P}[X_t \geq 0] = 1$

(c) $(X_t)_{t\geq 0}$ *má takmer iste neklesajúce trajektórie* $t \geq s \Rightarrow \mathbb{P}[X_t \geq X_s] = 1$

(d) Charakteristická trojica procesu spĺňa
$\sigma^2 = 0,\ \nu((-\infty, 0]) = 0,\ \int_0^\infty \min(x, 1)\nu(dx) < \infty,$
$b = a - \int_{|x|\leq 1} x\nu(dx) < \infty,$
teda proces nemá difúznu zložku, má len kladné skoky s konečnou variáciou a kladný drift.

Často je potrebné vedieť distribúciu rozdelenia prírastkov procesu, prípadne jeho hustotu, ak existuje. Lévyho procesy vo všeobecnosti nemusia mať hustotu. Pre zložený Poissonov proces s intenzitou $\lambda > 0$ platí $\mathbb{P}[X_t = 0] = e^{-\lambda t} > 0, \forall t \geq 0$, teda distribúcia pravdepodobnosti má pre každé $t \geq 0$ atóm v bode 0.

Avšak ak $(X_t)_{t\geq 0}$ nie je zložený Poissonov proces, potom X_t má spojitú hustotu, ako tvrdí nasledujúca veta [4]:

Veta 3.3.6. *Nech $(X_t)_{t\geq 0}$ je Lévyho proces s charakteristickou trojicou (a, σ^2, ν). Ak $\sigma^2 > 0$ alebo $\nu(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \infty$, potom X_t má spojitú hustotu pre všetky $t > 0$.*

3.4 Príklady Lévyho procesov

Ako sme už spomenuli, najjednoduchšími príkladmi Lévyho procesov sú Brownov pohyb a Poissonov proces, ktoré predstavujú i základné stavebné prvky Lévyho procesov. V tejto kapitole sa pozrieme na ďalšie Lévyho procesy, zvlášť na zložený Poissonov proces, ktorý je veľmi názorný a obľúbený vo finančnom a poistnom modelovaní. Rozsiahly zoznam Lévyho procesov s ich charakteristikami je možné nájsť v [5], odvodenie tvaru procesov sa nachádza napr. v [4].

Konkrétny Lévyho proces môžeme vytvoriť zadaním nekonečne deliteľného rozdelenia prírarastkov cez ich distribučnú funkciu, hustotu rozdelenia alebo charakteristickú funkciu. Taktiež môžeme priamo zadať Lévyho trojicu spĺňajúcu predpoklady Lévy-Chinčinovej vety 3.2.3. Musíme dbať na to, aby vytvorený proces spĺňal všetky axiómy definície Lévyho procesu 3.1.3.

Často sa využívajú tri prístupy odvodenia nového Lévyho procesu z existujúcich. Prvý sa zakladá na vete, že lineárnou transformáciou Lévyho procesu je Lévyho proces.

Druhým prístupom je transformácia času Lévyho procesu rastúcim Lévyho procesom - subordinácia. Tento prístup je bližšie predstavený spolu s príkladom v častiach 3.4.3 a 3.4.4.

Tretím využívaným prístupom odvodenia Lévyho procesu je exponenciálne zakrivenie Lévyho miery - prenásobenie Lévyho miery klesajúcou exponenciálnou funkciou na obidvoch poloosiach. Transformovaná Lévyho miera bude iste opäť spĺňať predpoklady Lévy-Chinčinovej vety na Lévyho mieru a tak môžeme pomocou nej vytvoriť nový Lévyho proces. Odvodenie Lévyho miery založené na tomto prístupe môžeme vidieť pri určení martingalového procesu oddiskontovaných cien pod ekvivalentnou martingalovou mierou s minimálnou entropiou vo vete 4.1.2.

3.4.1 Zložený Poissonov proces

Definícia 3.4.1. *Stochastický proces $(S_t)_{t\geq 0}$ nazývame zložený Poissonov proces s intenzitou λ a distribúciou skokov F, ak má tvar*

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, t \geq 0, \tag{3.7}$$

kde skoky X_i sú rovnako rozdelené nezávislé premenné s distribúciou F a $(N_t)_{t\geq 0}$ je Poissonov proces s intenzitou λ a N_t je nezávislé od X_i pre všetky $t \geq 0, i \in \mathbb{N}$.

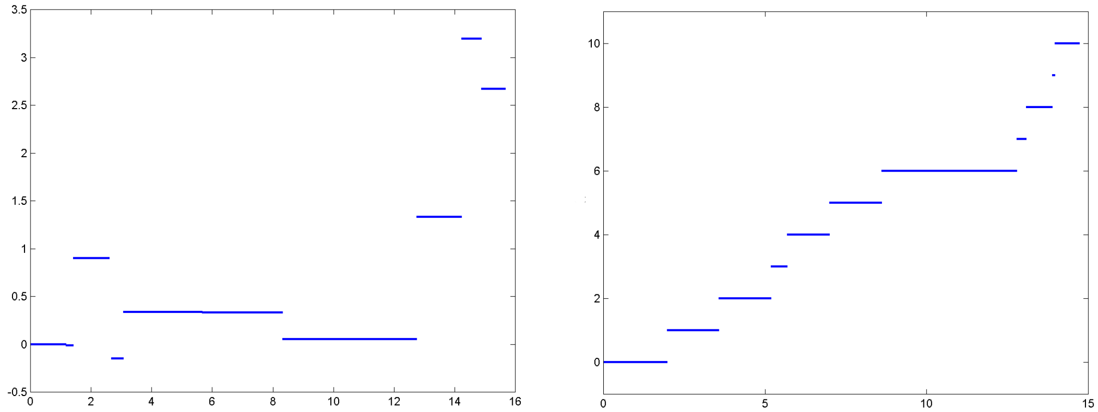
Klasický Poissonov proces zodpovedá prípadu, keď X_i sú deterministické s hodnotou 1. Zložený Poissonov proces má rovnako ako klasický po častiach konštantné trajektórie s rovnakým rozdelením času skokov, avšak skoky majú náhodnú veľkosť a môžu byť aj záporné. Predstavuje tak určité zovšeobecnenie klasického Poissonovho procesu. Vzťah medzi Lévyho mierou a distribúciou prírastkov zloženého Poissonovho procesu je daný vzťahom:

$$\mathbb{P}[X_i \in A] = \frac{\nu(A)}{\lambda}, \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \tag{3.8}$$

Prevod medzi Lévyho mierou a pravdepodobnostnou distribúciou skokov je teda veľmi jednoduchý. Parameter λ dostaneme zo vzťahu $\lambda = \nu(\mathbb{R}\backslash\{0\})$. Veta o úplnej pravdepodobnosti nám umožňuje vyjadriť distribúciu pravdepodobnosti Poissonovho procesu v čase t nasledovne:

$$\mathbb{P}[S_t \in A] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[S_t \in A | N_t = n]\mathbb{P}[N_t = n] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[\sum_{i=1}^{n} X_i \in A] \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t}\rho_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(A) \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \tag{3.9}$$



Obr. 3.1: Príklad trajektórie zloženého Poissonovho procesu so štandardným normálnym rozdelením skokov (vľavo) a klasického Poissonovho procesu (vpravo).

kde ρ_x je Diracova miera sústredená v bode x, $F^{*n}(A)$ je n-tá konvolučná mocnina distribúcie pravdepodobnosti F.

Veta 3.4.1. *Charakteristická funkcia zloženého Poissonovho procesu v čase t má tvar:*

$$E[\exp(iuS_t)] = \exp(\lambda t(\psi_X(u) - 1)), \forall u \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

kde $\psi_X(u)$ je hodnota charakteristickej funkcie náhodnej premennej X_i v bode u pre nejaké $i \in \mathbb{N}$.

Pre distribúciu pravdepodobnosti F triviálne platí $1 = \int_{-\infty}^{\infty} 1F(dx)$. Charakteristickú funkciu $\psi_X(u)$ môžeme ako strednú hodnotu prepísať v integrálnom tvare $\psi_X(u) = E[\exp(iuX_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux}F(dx)$. Máme nové vyjadrenie charakteristickej funkcie zloženého Poissonovho procesu:

$$E[\exp(iuS_t)] = \exp(t\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1)F(dx)), \forall u \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Z tohto tvaru charakteristickej funkcie dostávame Lévyho trojicu zloženého Poissonovho procesu:

$$(a, \sigma^2, \nu) = (\lambda \int_{-1}^{1} xF(dx), 0, \lambda F) \tag{3.12}$$

Centrálne momenty prírastkov zloženého Poissonovho procesu sa dajú ľahko odvodiť z vety 3.4.1 cez derivácie charakteristickej funkcie v bode 0 a majú tvar:

$$E[S_t] = E[X_i].E[N_t], \quad Var[S_t] = Var[X_i].E[N_t] + E[X_i]^2.Var[N_t], \quad i \in \mathbb{N} \quad (3.13)$$

3.4.2 Skokovo - difúzny proces

Proces nazývame difúznym, ak je v Lévyho trojici parameter σ^2 nenulový, t.j. ak je stavebným blokom procesu aj Wienerov proces.

Definícia 3.4.2. *Stochastický proces $(L_t)_{t\geq 0}$ nazývame skokovo $-$ difúzny, ak sa dá vyjadriť v tvare:*

$$L_t = bt + \sigma W_t + S_t, t \geq 0, \quad (3.14)$$

kde $b \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ sú konštanty, $(W_t)_{t\geq 0}$ je Wienerov proces a $(S_t)_{t\geq 0}$ je zložený Poissonov proces.

Ak rozpíšeme skokovú zložku S, dostaneme tvar:

$$L_t = bt + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} X_i, t \geq 0, \quad (3.15)$$

kde skoky X_i sú podľa definície zloženého Poissonovho procesu rovnako rozdelené nezávislé premenné s distribúciou F a $(N_t)_{t\geq 0}$ je Poissonov proces s intenzitou λ nezávislý od $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Skokovo - difúzny proces a jeho parametre majú veľmi jasnú interpretáciu - je to súčet lineárnej časti s parametrom b, Wienerovho procesu s volatilitou σ^2 a postupne sa vyskytujú skoky s intenzitou Poissonovho procesu λ a veľkosťou podľa distribúcie pravdepodobnosti F. Skokovo - difúzny proces je súčet Brownovho pohybu a zloženého Poissonovho procesu, preto zo vzťahu 3.12 ľahko vidíme, že Lévyho trojica skokovo-difúzneho procesu má tvar:

$$(a, \sigma^2, \nu) = (b + \lambda \int_{-1}^{1} xF(dx), \sigma^2, \lambda F) \quad (3.16)$$

Stredná hodnota tohto procesu v čase t je

$$E[L_t] = bt + \lambda t E[X], \quad (3.17)$$

kde X má distribúciu F.

Ak výnosy akcie modelujeme skokovo-difúznym procesom s normálnym rozdelením skokov, dostávame tzv. Mertonov model, ktorý je podrobne analyzovaný v kapitole 5.

3.4.3 Gama proces

V doteraz predstavených procesoch boli skoky zriedkavou udalosťou, prichádzali po určitom náhodnom čase. V procesoch s nekonečnou aktivitou skoky principálne neustále vytvárajú proces – v každom časovom intervale ich je nekonečne veľa. Najjednoduchším príkladom procesov s nekonečnou aktivitou je Gama proces. Rozdelenie prírastkov procesu s časovým rozpätím t je dané Gama-rozdelením s parametrami $\lambda > 0, ct > 0$. Charakteristická funkcia rozdelenia prírastkov má jednoduchý tvar:

$$E[e^{iuX_t}] = (1 - \frac{iu}{\lambda})^{-ct} \tag{3.18}$$

Z tvaru charakteristickej funkcie ľahko vidieť, že rozdelenie je nekonečne deliteľné - je n-tou mocninou charakteristickej funkcie Gama-rozdelenia s parametrami $\lambda, ct/n$.

Hustota rozdelenia Gama procesu v čase t má tvar:

$$f_t(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^{ct}}{\Gamma(ct)} x^{ct-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

Hustota rozdelenia prírastkov je nenulová len na kladnej osi, preto prírastky sú kladné takmer iste a tak Gama proces je subordinátor - rastúci Lévyho proces.

Lévyho trojica Gama procesu:

$$(a, \sigma^2, \nu) = (c\frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}, 0, c\frac{e^{-\lambda x}}{x} 1_{x>0}) \tag{3.20}$$

Z tvaru Lévyho miery ν ľahko ukážeme, že Gama proces je procesom s nekonečnou aktivitou, teda platí $\nu(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \infty$.

$$\nu(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \int_0^\infty c\frac{e^{-\lambda x}}{x} dx = \int_1^\infty c\frac{e^{-\lambda x}}{x} dx + \int_0^1 c\frac{e^{-\lambda . x}}{x} dx > 0 + \int_0^1 c\frac{e^{-\lambda . 1}}{x} dx =$$

$$= \left[e^{-\lambda} c \ln(x)\right]_0^1 = ce^{-\lambda}\ln(1) - ce^{-\lambda}\lim_{x\to 0}\ln(x) = \infty \tag{3.21}$$

$$\Rightarrow \nu(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \infty$$

Prvá nerovnosť platí, pretože funkcia $e^{-\lambda x}$ je v x klesajúca a tak sa dá zdola ohraničiť pravou hranicou vlastného integrálu, resp. nevlastný integrál kladnej funkcie môžeme zdola ohraničiť nulou. Posledná rovnosť platí, pretože $\lim_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$.

3.4.4 Subordinácia, Variance-Gamma proces

Ľubovoľnému Lévyho procesu $(X_t)_{t\geq 0}$ môžeme preškálovať časovú zložku iným, rastúcim Lévyho procesom $(Y_t)_{t\geq 0}$ (subordinátorom) nezávislým od procesu $(X_t)_{t\geq 0}$. Je dokázané, že vzniknutý proces je tiež Lévyho proces. Takéto odvodenie Lévyho procesu sa nazýva subordinácia procesu $(X_t)_{t\geq 0}$ procesom $(Y_t)_{t\geq 0}$. Nový proces má dobrú ekonomickú interpretáciu - ekonomický proces sa pohybuje pôvodným procesom X, avšak vnímame ho v stochastickom "trhovom" čase. Náhodný a skokový vývoj "trhového" času reprezentuje náhodný prílev informácií a "nervozitu" na trhu.

V praxi sa s obľubou využíva subordinácia Brownovho pohybu (viď def. 2.1.2). Špeciálne ak za základný proces zvolíme Brownov pohyb

$$B_t = \mu t + \sigma W_t, t \geq 0$$

a za subordinátor zvolíme Gama proces $(Y_t)_{t\geq 0}$, dostaneme tzv. Variance-Gamma proces (VG-proces):

$$Z_t = B_{Y_t} = \mu Y_t + \sigma W_{Y_t}, t \geq 0. \tag{3.22}$$

Nech $\phi_{Y_t}(.)$ je charakteristická funkcia prírastkov Gama procesu. Uvádzame náčrt odvodenia charakteristickej funkcie rozdelenia prírastkov VG procesu, využívame pritom nezávislosť procesov $(B_t)_{t\geq 0}$ a $(Y_t)_{t\geq 0}$:

$$E[\exp(iuZ_t)] = E[\exp(iuB_{Y_t})] = E[\exp(iY_t\mu u - \frac{1}{2}Y_t\sigma^2 u^2)] =$$

$$= E[\exp(iY_t(u\mu - \frac{1}{i}\frac{1}{2}\sigma^2 u^2)] = \phi_{Y_t}(u\mu - \frac{1}{i}\frac{1}{2}\sigma^2 u^2) = (1 - \frac{iu\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2}{\lambda})^{-ct}$$

VG proces je procesom s nekonečnou aktivitou. Prekvapujúce je, že VG-proces má konečnú variáciu, hoci Brownov pohyb má nekonečnú variáciu. V r. 1998 Madan a kol. ukázali, že VG proces sa dá vyjadriť ako rozdiel dvoch Gama procesov [5].

3.5 Lévyho procesy a finančné modelovanie

Tak ako v B-S modeli, aj pri modelovaní procesu ceny podkladového aktíva pomocou Lévyho procesov budeme pomocou zvoleného Lévyho procesu modelovať výnosy akcie, nie proces absolútnych cien. Výnos akcie za pozorovanú dobu má hodnotu prírastku procesu $(X_t)_{t\geq 0}$:

$$\log(\frac{S_t}{S_s}) = X_t - X_s, \quad 0 \leq s < t. \tag{3.23}$$

Definícia 3.5.1. *Nech $(X_t)_{t\geq 0}$ je Lévyho proces, $S_0 \in \mathbb{R}$. Potom proces*

$$S_t = S_0 \exp(X_t), \quad t \geq 0 \tag{3.24}$$

nazývame exponenciálny Lévyho proces odvodený od procesu $(X_t)_{t\geq 0}$.

Vývoj ceny akcie teda $(S_t)_{t\geq 0}$ budeme modelovať exponenciálnym Lévyho proces odvodeným od nami definovaného procesu $(X_t)_{t\geq 0}$. Presné charakteristiky procesu $(S_t)_{t\geq 0}$ nás nezaujímajú. Vhodnosť modelovania trhu cez exponenciálne Lévyho procesy potvrdzuje nasledujúce tvrdenie:

Veta 3.5.1. *Nech $(X_t)_{t\geq 0}$ je Lévyho proces s charakteristickou trojicou (a, σ^2, ν). Ak nie sú trajektórie $(X_t)_{t\geq 0}$ takmer iste rastúce alebo klesajúce, tak finančný trh daný numerairom typu spojité úročenie konštantným úrokom a exponenciálnym Lévyho procesom odvodeným od $(X_t)_{t\geq 0}$ je bezarbitrážny.*

Predpoklady vety môžeme rozvinúť do nasledujúcich podmienok bezarbitrážneho trhu:

- $(X_t)_{t\geq 0}$ má nenulovú difúznu zložku, $\sigma^2 > 0$,
- $(X_t)_{t\geq 0}$ je procesom s nekonečnou variáciou,
- $(X_t)_{t\geq 0}$ má s nenulovou pravdepodobnosťou kladné aj záporné skoky,
- $(X_t)_{t\geq 0}$ má kladné skoky a parameter $a < 0$ alebo $(X_t)_{t\geq 0}$ má záporné skoky a parameter $a > 0$.

Platnosť aspoň jednej z uvedených podmienok implikuje bezarbitrážnosť trhu.

V literatúre boli pri finančnom modelovaní využité niektoré špecifické Lévyho procesy. V r. 1987 a 1990 analyzovali Madan a Seneta VG-proces, v r. 1995 využil Eberlein a Keller Hyperbolické Lévyho procesy, Barndorff-Nielsen zase NIG (Normal Inverse Gaussian) procesy. Tieto tri boli v r. 1998 zaradené Eberleinom do spoločnej širšej triedy Zovšeobecnených hyperbolických procesov. Carr a spol. uviedli v r. 2002 triedu CGMY procesov. Schoutens predstavil v r. 2001 Meixnerov proces, atď. Vyčerpávajúce predstavenie týchto procesov ide za rámec tejto práce. Definíciu a vlastnosti mnohých z nich možno nájsť v [5].

Môžeme si všimnúť, že nasadenie Lévyho procesov na finančné modelovanie je veľmi mladým a dynamicky sa rozvíjajúcim prístupom. V súčasnosti sa stále viac dostáva do centra pozornosti vedeckého výskumu i praktických aplikácií. Dôvodom je veľká flexibilita Lévyho procesov.

Lévyho procesy dokážu lepšie zachytiť vlastnosti trhu - môžeme pracovať s rozličnými pravdepodobnostnými rozdeleniami, triedy Lévyho procesov obsahujú väčší počet parametrov, vďaka čomu sa dajú kontrolovať momenty rozdelenia. Do modelu trhu môžeme zahrnúť skoky v procese cien. Taktiež dostávame v mnohých prípadoch neúplný trh, čo korešponduje s realitou. Pri viacerých Lévyho procesoch sa podarilo ukázať, že model na nich postavený vysvetľuje krivku Volatility Smile z B-S modelu. Nasadenie Lévyho procesov nám pomáha odstrániť nedostatky B-S modelu predstavené v kapitole 2.3. Cenou za to je vyššia matematická náročnosť teórie a tiež horšia analytická a numerická riešiteľnosť oceňovacieho problému.

Kapitola 4

Oceňovanie derivátov na neúplných trhoch

Modelovanie ceny finančného aktíva pomocou exponenciálneho Lévyho procesu vedie v mnohých prípadch na model neúplného trhu (viď kapitolu 1.3). Na neúplnom trhu existuje viacero ekvivalentných martingalových mier, ktoré môžeme využiť na oceňovanie derivátov. V tejto kapitole bude predstavených niekoľko dôležitých ekvivalentných martingalových mier.

4.1 Optimálne martingalové miery

Množinu všetkých ekvivalentných martingalových mier na danom trhu označme G. Pri výbere konkrétnej ekvivalentnej martingalovej miery z G je častým prístupom optimalizácia niektorej vlastnosti. Veľmi obľúbená je minimalizácia vzdialenosti medzi pôvodnou a ekvivalentnou martingalovou pravdepodobnostnou mierou. Prechod medzi rozličnými mierami na tom istom merateľnom priestore $(\Omega, \mathcal{F})$ zabezpečuje Radon-Nikodymova derivácia [11].

4.1.1 Radon-Nikodymova derivácia

Nech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je pravdepodobnostný priestor a M je nezáporná $\mathcal{F}$-merateľná náhodná premenná, pre ktorú platí $\int_\Omega M(\omega)dP(\omega) = 1$. Potom môžeme na priestore

$(\Omega, \mathcal{F})$ definovať novú mieru $\mathbb{Q}$ vzťahom:

$$d\mathbb{Q}(\omega) = M(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \tag{4.1}$$

teda platí

$$\int_A h(\omega) d\mathbb{Q}(\omega) = \int_A h(\omega) M(\omega) d\mathbb{P}(\omega), \tag{4.2}$$

pre všetky $A \in \mathcal{F}$ a náhodné premenné h, pre ktoré integrál na pravej strane rovnosti existuje. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ je nový pravdepodobnostný priestor. Vo všeobecnosti $\mathbb{Q} \neq \mathbb{P}$, $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \neq L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$. Z toho vyplýva, že daná náhodná premenná X má na $(\Omega, \mathcal{F})$ vzhľadom k $\mathbb{P}$ a $\mathbb{Q}$ rozdielne rozdelenie pravdepodobnosti.

Veta 4.1.1. *(Radon-Nikodymova veta) Nech $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ (miera $\mathbb{Q}$ je absolútne spojitá vzhľadom k miere $\mathbb{P}$). Potom existuje jediná nezáporná $\mathcal{F}$-merateľná náhodná premenná M, pre ktorú platí vzťah 4.1.*

Náhodnú premennú M z Radon-Nikodymovej vety voláme Radon-Nikodymova derivácia a označujeme ju $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

4.1.2 Minimalizácia vzdialenosti medzi mierami

Na meranie vzdialenosti mier môžeme použiť strednú hodnotu akejkoľvek ostro konvexnej funkcie Radon-Nikodymovej derivácie uvažovaných mier:

$$H_f(\mathbb{Q}, \mathbb{P}) = E^{\mathbb{P}}[f(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]. \tag{4.3}$$

Optimalizačnou úlohou je nájsť ekvivalentnú martingalovú mieru $\mathbb{Q}^*$ s najmenšou odchýlkou od pôvodnej pravdepodobnostnej miery $\mathbb{P}$ podľa funkcie vzdialenosti H_f:

$$\mathbb{Q}^* = \arg \inf_{\mathbb{Q} \in G} H_f(\mathbb{Q}, \mathbb{P}). \tag{4.4}$$

V súčasnej literatúre sú uvádzané predovšetkým nasledovné funkcie f, ktorým sú priradené aj názvy ekvivalentných martingalových mier [9]:

1. $f(x) = x \log(x)$, MM[1] s minimálnou relatívnou entropiou

[1] MM - skr. Martingalová miera

2. $f(x) = -\log(x)$, MM s minimálnou obrátenou relatívnou entropiou

3. $f(x) = |x-1|$, MM s minimálnou totálnou variáciou

4. $f(x) = -\sqrt{x}$, MM s minimálou Hellingerovou vzdialenosťou

5. $f(x) = |x-1|^p$, MM s minimálnym p-tym momentom

6. $f(x) = |x-1|^2$, MM s minimálou varianciou

4.1.3 Martingalová miera s minimálnou entropiou

Pojem entropia vychádza z teórie informácií, kde reprezentuje opak informácie - mieru chaosu, nerozonateľnosti stavov systému. Zvyčajne sa modeluje ako logaritmus počtu (miery) mikrostavov prislúchajúcich danému makrostavu.

Definícia 4.1.1. *Nech $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{P}$ sú pravdepodobnostné miery na priestore $(\Omega, \mathcal{F})$. Relatívnu entropiu, alebo Kullback-Leiblerovu vzdialenosť ε definujeme:*

$$\varepsilon(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \begin{cases} E^{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\ln(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})], & ak \quad \mathbb{Q} \ll \mathbb{P} \\ \infty, & inak. \end{cases} \tag{4.5}$$

My uvažujeme ekvivalentné miery, pre ktoré platí $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ ($\mathbb{Q}$ je absolútne spojitá vzhľadom k miere $\mathbb{P}$). Z definície Radon-Nikodymovej derivácie platí:

$$\varepsilon(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = E^{\mathbb{Q}}[\ln(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})] \tag{4.6}$$

Relatívna entropia je vždy nezáporná a $\varepsilon(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = 0$ len ak $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = 1$ takmer iste.

Martingalová miera s minimálnou entropiou (skr. MEMM) je získaná riešením optimalizačnej úlohy 4.4, kde za funkciu H_f zvolíme relatívnu entropiu ε:

$$\mathbb{Q}^{MEMM} = \arg\inf_{\mathbb{Q}\in G} \varepsilon(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \arg\inf_{\mathbb{Q}\in G} E^{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\ln(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}})]. \tag{4.7}$$

Vďaka tomu sa dá MEMM interpretovať ako martingalová miera najmenej rozmazávajúca informáciu obsiahnutú v pôvodnom modeli. Preto je starostlivá kalibrácia parametrov pôvodného modelu veľmi dôležitá. Efektívnu prácu s MEMM nám umožňuje nasledovná veta [10]:

Veta 4.1.2. *Nech $S_t = S_0 \exp(X_t)$, kde $(X_t)_{t\geq 0}$ je Lévyho proces s trojicou (a, σ^2, ν). Nech r je hodnota bezrizikovej úrokovej miery. Ak existuje riešenie β rovnice:*

$$a + (\beta + \frac{1}{2}\sigma^2) + \int_{\infty}^{-\infty} ((e^x - 1)e^{\beta(e^x - 1)} - x1_{(|x|\leq 1)})\nu(dx) = r, \tag{4.8}$$

potom exponenciálny Lévyho proces $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_0 e^{X_t^*}$, kde $(X_t^*)_{t\geq 0}$ je Lévyho proces s trojicou (a^*, σ^2, ν^*), pričom platí:

$$a^* = a + \beta\sigma^2 + \int_1^{-1} x(e^{\beta(e^x-1)} - 1)\nu(dx), \tag{4.9}$$

$$\nu^*(dx) = e^{\beta(e^x-1)}\nu(dx), \tag{4.10}$$

je martingalom vzhľadom k miere MEMM.

Vďaka tejto vete poznáme martingalový proces diskontovanej ceny podkladového aktíva a tak podľa oceňovacieho pravidla 1.10 môžeme naceniť ľubovoľný derivát. Poznamenávame, že v knihe [4] obsahuje táto veta chyby - nesprávne sa pracuje s úrokom r a závažná chyba je vo vzťahu 4.9.

Parameter β je zvyčajne záporný (vzhľadom k potrebnej konečnosti nevlastného integrálu vystupujúceho vo vete je tento fakt pre väčšinu Lévyho mier prirodzený). Záporná β ohýňa pôvodnú Lévyho mieru tak, že pri oceňovaní derivátov sa kladie väčší dôraz na záporné skoky, kým kladné skoky hrajú menšiu úlohu. Z finančného hľadiska je táto vlastnosť pozitívne hodnotená, racionálna - záporné skoky v procese ceny akcie vnímajú investori citlivejšie ako kladné.

4.2 Mertonov prístup

Merton si zvolil konkrétny stochastický proces ceny akcie, na ktorom demonštroval špecifický prístup voľby ekvivalentnej martingalovej miery. Postupoval podobne ako v B-S modeli - skorigoval iba drift Brownovho procesu tak, aby dostal martingalový proces. Nemenil pravdepodobnostné miery náhodných premenných vystupujúcich v podkladovom procese, vďaka čomu mohol analyticky prísť k záverečným vzorcom. Bližšie sa na Mertonov prístup a jeho profilový príklad pozrieme v kapitole 5.2.1. Všeobecne by sa dal využiť pre všetky skokovo-difúzne procesy.

Kapitola 5

Mertonov model

V tejto kapitole bude predstavený Mertonov model a jeho aplikovanie na reálne dáta. Naším cieľom je nakalibrovať Mertonov model na základe Mertonovho prístupu k výberu ekvivalentnej martingalovej miery a tiež na základe martingalovej miery s minimálnou entropiou. V prvej časti kapitoly sú predstavené a odvodené teoretické východiská a v druhej časti kapitoly je predstavená kalibrácia modelu na akcii Google.

5.1 Kalibračný model

Naším cieľom je nakalibrovať oceňovací model. Európske opcie sú jednoduchými a mohutne obchodovanými derivátmi, preto budeme predpokladať, že ich trhové ceny sú správne. Chceme získať implikované parametre modelu - parametre, pre ktoré model najlepšie odhaduje trhové ceny európskych call opcií. Európska call opcia je kontrakt, ktorého držiteľ má právo od vypisovateľa kúpiť v stanovenom čase T dohodnutú akciu za cenu K. Cenu K voláme Strike Price. V danom momente zachytíme trhovú cenu akcie S_0 a ceny k nej prislúchajúcich n európskych call-opcií s rovnakou dobou do splatnosti a rozličnou Strike Price - vektor V_{real}. Odhadneme parametre modelu a vypočítame modelové ceny - vektor V_{model}. Na meranie vzdialenosti cien modelu od trhových cien používame nasledovnú funkciu:

$$\rho(V_{real}, V_{model}) = \sum_{i=1}^{n}(V_{real}^i - V_{model}^i)^2, V_{real}, V_{model} \in \mathbb{R}^n \tag{5.1}$$

Úlohou kalibrácie je vhodnou optimalizačnou metódou nájsť bod minima funkcie $\rho(V_{real}, V_{model})$ na d-rozmernom priestore parametrov $\Theta \subset \mathbb{R}^d$:

$$\arg\min_{\theta \in \Theta} \rho(V_{real}, V_{model}), \tag{5.2}$$

Ak zvolíme počet opcií n tak, aby $n > d$, je veľmi pravdepodobné, že v bode hľadaného minima je nenulová vzdialenosť $\rho(V_{real}, V_{model})$. Model síce nevysvetľuje úplne presne ceny modelu, avšak lepšie odhaduje ceny širšieho portfólia opcií. Nájsť riešenie úlohy 5.2 môže byť pre konkrétne modely neúplného trhu veľmi ťažko analyticky alebo numericky riešiteľný problém. Funkcia $\rho(V_{real}, V_{model})$ ako funkcia kalibrovaných parametrov nemusí byť konvexná a môže mať viac lokálnych miním. Preto nám v mnohých prípadoch stačí pseudoriešenie úlohy - bod blízko lokálneho minima, v ktorom je hodnota funkcie $\rho(V_{real}, V_{model})$ nízka. Pseudoriešenie nám poskytne parametre, s ktorými uspokojivo modelujeme reálne dáta.

5.2 Mertonov model

Mertonov model trhu predpokladá, že proces ceny akcie sa riadi exponenciálnym Lévyho procesom odvodeným od skokovo-difúzneho procesu (viď kap. 3.4.2) s normálne rozdelenými skokmi. Proces ceny akcie má tvar:

$$S_t = S_0. \exp(X_t) = S_0. \exp(\mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i), t \geq 0, \quad \text{kde} \tag{5.3}$$

- $(W_t)_{t \geq 0}$ - štandardný Wienerov proces
- $(N_t)_{t \geq 0}$ - Poissonov proces s intenzitou λ
- $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}, \quad Y_i \sim N(m, \delta^2)$ sú náhodné skoky, rovnako rozdelené a nezávislé
- Všetky 3 procesy sú stochasticky nezávislé.
- 5 parametrov: $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \delta > 0, m \in \mathbb{R}, \lambda > 0$.

Parametre μ, σ^2 sú drift a volatilita Brownovho pohybu, ktorý je jednou zložkou procesu výnosov akcie. Hodnota λt označuje intenzitu skokov za čas t. Hodnotu λ môžeme interpretovať ako priemerný počet skokov za rok. Parametre m a δ sú stredná hodnota a volatilita veľkostí skokov. Zo vzťahu 3.17 dostávame, že stredná hodnota výnosov akcie za čas t je $E[X_t] = \mu t + m\lambda t$.

Lévyho trojica Mertonovho modelu procesu výnosov akcie sa dá vyjadriť nasledovným spôsobom:

$$(a, \sigma^2, \nu) = (\mu + \lambda \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}} dx, \sigma^2, \lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}}) \tag{5.4}$$

Proces cien akcií 5.3 spolu s bezrizikovým aktívom je modelom neúplného finančného trhu.

5.2.1 Mertonove ceny

Pri odvodení Mertonových cien európskej call opcie budeme vychádzať z kapitoly 4.2 o Mertonovom prístupe k zvoleniu ekvivalentnej martingalovej miery. Stručné odvodenie Mertonových cien je spracované podľa knihy [4].

Podľa Mertonovho prístupu na to, aby proces $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ bol martingalom pri novej miere $\mathbb{Q}^M$, zmeníme len drift Wienerovho procesu:

$$\mathbb{Q}^M : \qquad \tilde{S}_t = e^{-rt} S_0. \exp[\mu^M t + \sigma W_t^M + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i],$$

W_t^M je štandardný Wienerov proces pri novej miere Q_M.
μ^M získame z poznatku, že martingal má konštantnú strednú hodnotu:

$$E_{\mathbb{Q}^M}[\tilde{S}_t] = S_0. E_{\mathbb{Q}^M}[e^{-rt} \exp(\mu^M t + \sigma W_t^M + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i)] = S_0$$

$$\Rightarrow \mu^M = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda[e^{m+\frac{\delta^2}{2}} - 1]$$

Skoková časť procesu zostáva nezmenená, reálne pravdepodobnosti skokov považujeme za rizikovo neutrálne. Riziko vyplývajúce zo skokov teda považujeme za diverzifikovateľné a neprináša rizikovú prémiu. Tento predpoklad nie je v súlade s realitou na finančných trhoch.

Máme proces ceny akcie, ekvivalentnú martingalovú mieru $\mathbb{Q}^M$, môžeme oceňovať deriváty pomocou oceňovacej formuly:

$$V_t = E_{\mathbb{Q}^M}[e^{-r(T-t)}V(S_T)|\mathcal{F}].$$

Symbolom τ označme čas do splatnosti derivátu, $\tau = T - t$. Pre európsku call opciu dostávame po spočítaní tejto podmienenej strednej hodnoty cenu vo forme nekonečného radu vážených cien Black-Scholesovho modelu:

$$C_\tau^M(S) = e^{-r\tau}\sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}C^{BS}(\tau, S_n, \sigma_n), \quad \text{kde} \tag{5.5}$$

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\tau}, \tag{5.6}$$

$$S_n = S\exp(nm + \frac{n\delta^2}{2} - \lambda\tau e^{m+\frac{\delta^2}{2}} + \lambda\tau), \tag{5.7}$$

$$C^{BS}(\tau, S_n, \sigma_n) \text{ je cena podľa B-S modelu.} \tag{5.8}$$

Cenu európskej Call-opcie vypočítanú podľa vzorca 5.5 budeme nazývať Mertonova cena.

Pre nasadenie gradientnej numerickej schémy na kalibráciu Mertonovho modelu sme zo vzorca Mertonových cien odvodili prvé parciálne derivácie tohto vzorca podľa jednotlivých parametrov. Uvádzame tu označenie funkcií, ktoré v nich vystupujú a samotný tvar parciálnych derivácií:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_n}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma_n^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\sigma_n^2\tau}}, \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_n}{E}\right) + \left(r - \frac{\sigma_n^2}{2}\right)\tau}{\sqrt{\sigma_n^2\tau}}$$

$$q_n = e^{-r\tau}\mathbb{P}[N_t = n] = e^{-r\tau}\frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!}$$

$$C_n^{BS} = C^{BS}(\tau, S_n, \sigma_n) = S_n\phi(d_1) - Ee^{-r\tau}\phi(d_2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial \lambda} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} q_n \left[(-\tau + \frac{n}{\lambda})C_n^{BS} + \frac{\partial S_n}{\partial \lambda}\left(\phi(d_1) + \frac{S_n e^{-\frac{d_1^2}{2}} - e^{-r\tau}Ee^{-\frac{d_2^2}{2}}}{S_n\sqrt{2\pi\sigma_n^2\tau}} \right) \right]$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial \lambda} = S_n\tau(1 - e^{m+\frac{\delta^2}{2}})$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} q_n 2\sigma \left[\frac{e^{-r\tau}Ed_1e^{-\frac{d_2^2}{2}} - S_n d_2 e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{2\sigma_n^2\sqrt{2\pi}} \right]$$

$$\frac{\partial C}{\partial m} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} q_n \left[S_n(n - \lambda\tau e^{m+\frac{\delta^2}{2}}) \left(\phi(d_1) + \frac{S_n e^{-\frac{d_1^2}{2}} - e^{-r\tau}Ee^{-\frac{d_2^2}{2}}}{S_n\sqrt{2\pi\sigma_n^2\tau}} \right) \right]$$

$$\frac{\partial C}{\partial \delta} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} q_n 2\delta \left[\frac{\partial S_n}{\partial \delta^2}\phi(d_1) + \frac{S_n(\frac{\partial S_n}{\partial \delta^2}\frac{\sqrt{\sigma_n^2\tau}}{S_n} - \frac{nd_2}{2})e^{-\frac{d_1^2}{2}} + E(\frac{\partial S_n}{\partial \delta^2}\frac{\sqrt{\sigma_n^2\tau}}{S_n} - \frac{nd_1}{2})e^{-\frac{d_2^2}{2}-r\tau}}{\sigma_n^2\tau\sqrt{2\pi}} \right]$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial \delta^2} = \frac{S_n}{2}(n - \lambda\tau e^{m+\frac{\delta^2(1-n)}{2}})$$

5.2.2 Výpočet MEMM ceny derivátu v Mertonovom modeli

V tejto kapitole uvádzame vlastný prístup k výpočtu MEMM cien v Mertonovom modeli. Uvažujme Mertonov model procesu ceny akcie s parametrami $(\mu, \lambda, \sigma^2, m, \delta^2)$. Predpokladajme, že máme nakalibrované všetky jeho parametre. Z parametrov môžeme odvodiť Lévyho trojicu logaritmu tohto procesu (a, σ^2, ν) podľa vzťahu 5.4. Úlohou je vypočítať cenu európskej call opcie pomocou MEMM. Na to nám poslúži veta 4.1.2. Jej nasadením získame Lévyho trojicu procesu $(X_t^*)_{t\geq 0}$ z uvedenej vety v nasledovnom tvare (a^*, σ^2, ν^*):

$$a^* = a + \beta\sigma^2 + \int_1^{-1} (xe^{\beta(e^x-1)} - x)\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}}dx, \tag{5.9}$$

$$\nu^*(dx) = e^{\beta(e^x-1)}\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}}dx, \quad \text{kde} \tag{5.10}$$

β je riešením rovnice:

$$a+(\beta+\frac{1}{2})\sigma^2+\int_{\infty}^{-\infty}((e^x-1)e^{\beta(e^x-1)}-x1_{(|x|\leq 1)})\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}}dx=0. \quad (5.11)$$

Parameter μ môžeme z Lévyho trojice Skokovo-Difúzneho procesu vyjadriť nasledovne:

$$\mu=a-\int_1^{-1}x\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}}dx. \quad (5.12)$$

Na základe novej Lévyho trojice a vzťahu 5.12 môžeme vypočítať modelové parametre nového procesu $(X_t^*)_{t\geq 0}$:

$$\mu^*=a^*-\int_1^{-1}x\nu^*(dx)=\mu+\sigma^2\beta, \quad (5.13)$$

$$\lambda^*=\int_{\infty}^{-\infty}\nu^*(dx). \quad (5.14)$$

Parameter σ^2 sa nemení a aj jeho interpretácia zostáva rovnaká. Hodnoty parametrov m a δ^2 sa síce nemenia, avšak už ich nemôžeme interpretovať ako strednú hodnotu a varianciu skokov, nakoľko rozdelenie skokov už nie je normálne - má novú hustotu:

$$f^*(x)=\frac{1}{\lambda^*}\nu^*(dx)=\frac{1}{\lambda^*}e^{\beta(e^x-1)}\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\delta^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}}. \quad (5.15)$$

Odvodili sme parametre procesu ceny $(S_0.e^{X_t^*}{}_t)_{t\geq 0}$ využívaného pri výpočte ceny derivátu

$$S_0.e^{X_t^*}=S_0.\exp[\mu^*t+\sigma W_t+\sum_{i=1}^{N_t^*}Y_i^*],t\geq 0. \quad (5.16)$$

Reálny proces ceny akcie $(S_t)_{t\geq 0}$ nás už pri oceňovaní nezaujíma.

Majme daný derivát V, ktorý chceme oceniť v čase $t=0$. Jeho cenu získame pomocou oceňovacej formuly:

$$V_0=E^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}V_T((S_0.e^{X_t^*})_{t\in[0,T]})|\mathcal{F}_0]. \quad (5.17)$$

Keďže chceme vypočítať cenu európskej call opcie, môžeme uvažovať, že V_T je funkciou len ceny akcie v čase splatnosti derivátu. Taktiež v čase 0 poznáme hodnotu akcie S_0, preto môžeme prejsť od podmienenej strednej hodnoty ku klasickej strednej hodnote. Oceňovacia formula 5.17 tak nadobudne tvar

$$V_0 = E^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} V_T(S_0.e^{X_T^*})]. \tag{5.18}$$

Pri odvodení Mertonových cien nám normalita skokov umožnila vypočítať rozdelenie výnosov akcie - bolo jednoduché spraviť zo sumy náhodných premenných vystupujúcich v definícii procesu jednu normálne rozdelenú náhodnú premennú. Žiaľ pri MEMM cenách už nevieme analyticky spočítať n-té konvolučné mocniny hustôt pravdepodobnostného rozdelenia skokov a získať explicitný vzorec pre výpočet ceny derivátu. Preto sme pristúpili k výpočtu strednej hodnoty pomocou Monte-Carlo metódy.

Pre simuláciu ceny akcie v čase T pod ekvivalentnou martingalovou pravdepodobnostnou mierou $\mathbb{Q}$ by sme museli simulovať skoky s hustotou pravdepodobnosti f^*, ktorá nie je hustotou niektorého zo známych rozdelení. Preto chceme prejsť pri výpočte strednej hodnoty 5.18 od miery $\mathbb{Q}$ k inej miere η spĺňajúcej 2 podmienky:

1. vieme simulovať náhodné premenné v modeli ceny akcie, pre ktoré η definuje združené rozdelenie,
2. vieme odvodiť Radon-Nikodymovu deriváciu $\frac{d\mathbb{Q}}{d\eta}$ (pozri kapitolu 4.1.1).

Mieru η sme sa rozhodli zvoliť tak, aby distribúcia skokov bola z normálneho rozdelenia s parametrami pôvodného procesu ceny pod reálnou mierou $\mathbb{P}$ a distribúcia ostatných náhodných premenných vystupujúcich v modeli ceny podkladového aktíva zostala nezmenená. Chceme teda vo výpočte ceny derivátu pracovať s náhodnou premennou

$$S_T^{\eta} = S_0. \exp(\mu^* T + \sigma W_T + \sum_{i=1}^{N_T^*} Y_i) = S_0. \exp(X_T^{\eta}), \tag{5.19}$$

kde $Y_i \sim N(m, \delta^2), i = 1, 2, ..., N_T^* \sim Pois(\lambda^* t)$ a W_T $N(0, T)$.

Cenu derivátu môžeme vyjadriť nasledovne:

$$V_0 = E^{\eta}[e^{-r(T)} V_T(S_T^{\eta}) \frac{d\mathbb{Q}}{d\eta}]. \tag{5.20}$$

Nech v čase T zahŕňa X_T^{η} práve n skokov, teda platí $N_T^* = n$. Náhodná premenná X_T^{η} je potom súčtom $n+1$ nezávislých náhodných premenných: W_T s hustotou g a $Y_1, \ ..., Y_n$ s hustotou f. Náhodná premenná X_T^* je súčtom $n+1$ nezávislých náhodných premenných: W_T s hustotou g a $Y_1^*, \ ..., Y_n^*$ s hustotou f^*. Chceme získať Radon-Nikodymovu deriváciu $\frac{d\mathbb{Q}}{d\eta}$ ako funkciu náhodných premenných W_T a $Y_1, \ ..., Y_n$. Združené hustoty náhodnej premennej X_T^{η}, resp. X_T^* majú pod pravdepodobnostnými rozdeleniami η a $\mathbb{Q}$ tvar:

$$\eta : h(x_1, \ ..., x_{n+1}) = g(x_1).f(x_2). \ ... \ .f(x_{n+1}) \tag{5.21}$$

$\mathbb{Q} : h^*(x_1, \ ..., x_{n+1}) = g(x_1).f^*(x_2). \ ... \ .f^*(x_{n+1}) =$

$= g(x_1).f(x_2).\frac{\lambda}{\lambda^*} \exp(\beta(e^{x_2} - 1)) \ ... \ .f(x_{n+1})\frac{\lambda}{\lambda^*} \exp(\beta(e^{x_{n+1}} - 1)) =$

$= h(x_1, \ ..., x_{n+1}) \prod_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda}{\lambda^*} \exp(\beta(e^{x_i} - 1)), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, .., n+1.$

Miery η a $\mathbb{Q}$ sú ekvivalentné a náhodná premenná

$$M = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda^*} \exp(\beta(e^{Y_i} - 1)) \tag{5.22}$$

spĺňa vzťah 4.2 o Radon-Nikodymovej derivácii, preto $M = \frac{d\mathbb{Q}}{d\eta}$.

Chceme vypočítať hodnotu európskej Call opcie so strike price K:

$$C^{MEMM} = E^{\eta}[e^{-rT}(S_T^{\eta} - K)^+ (\frac{d\mathbb{Q}}{d\eta})] \tag{5.23}$$

Podľa vety o úplnej pravdepodobnosti môžeme strednú hodnotu 5.23 vypočítať nasledovným spôsobom:

$$C^{MEMM} = e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N_T^* = n] E[(S_0.e^{\mu^* T + \sigma W_T + \sum_{i=1}^{n} Y_i} - K)^+ \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda^*} e^{\beta(e^{Y_i} - 1)}], \tag{5.24}$$

$$\text{kde } \mathbb{P}[N_t^* = n] = \frac{e^{-T\lambda^*}(T\lambda^*)^n}{n!}, \quad W_T \sim N(0,T), \quad Y_i \sim N(m, \delta^2).$$

Na skrátenie zápisu využívame konvenciu $\sum_1^0 a_i = 0$, $\prod_1^0 a_i = 1$. Prvý člen sumy 5.24 vieme analyticky spočítať:

$$\mathbb{P}[N_T^* = 0] E[(S_0.e^{T\mu^* + \sigma W_T} - K)^+] = e^{-(T\lambda^*)}(S_0 e^{T\mu^* + \frac{1}{2}T\sigma^2} \phi(d_1) - K\phi(d_2)), \tag{5.25}$$

kde

$$d_1 = \frac{\log(S_0/K) + T\mu^* + T\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 T}}, \quad d_2 = \frac{\log(S_0/K) + T\mu^*}{\sqrt{\sigma^2 T}}, \tag{5.26}$$

kde $\phi(.)$ je distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia. Pri odvodení tohto vzorca sme postupovali analogicky ako sa postupuje pri odvodení Black-Scholesovho vzorca pre cenu európskej call opcie (dá sa nájsť napr. v [3]). Keďže odvodenie tohto vzorca je dlhé a pre našu prácu nezaujímavé, neuvádzame ho tu. Zvlášť pre nízke časy do expirácie, resp. nízke λ^* môže byť $\mathbb{P}[N_t^* = 0]$ (t.j. pravdepodobnosť, že do expirácie nenastane skok v procese ceny) pomerne vysoká a tak presná znalosť hodnoty prvého člena je veľmi vhodná - znižuje trvanie výpočtu i odchýlku vypočítanej hodnoty.

Pre cenu európskej call opcie v tvare 5.24 už vieme efektívne simulovať všetky náhodné premenné vystupujúce vo vzorci a tak môžeme nasadiť metódu Monte Carlo. Suma, ktorú máme spočítať je nekonečná. Simulovať budeme prvých N členov, ktoré signifikantne tvoria hodnotu ceny opcie. Počet simulácií označujeme PS. Algoritmus oceňovacej metódy Monte Carlo je nasledovný:

Vstup:

Parametre trhu: S_0, r, K, T

Parametre modelu: λ, m, δ, σ, β, μ^*, λ^*

Parametre rozmeru simulácie: N,PS

1. vypočítame H_0; prvý člen sumy 5.24 podľa vzorca 5.25

2. pre dostatočne veľké $N \in \mathbb{N}$ a $PS \in \mathbb{N}$ nasimulujeme PS krát $N+1$ realizácií náhodných premenných so štandardným normálnym rozdelením $x_{1,k},\ ..., x_{n+1,k}$, $k = 1,\ ..., PS$,

3. pre každé $k = 1,\ ..., PS$ vypočítame hodnoty $y_{1,k} = \sigma\sqrt{T}x_{1,k}$, $y_{n,k} = m + \delta x_{n,k}, \quad n = 2,\ ..., N+1$

4. pre každé $k = 1,\ ..., PS$ vypočítame funkčnú hodnotu
$$H_k = \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-T\lambda^*}(T\lambda^*)^n}{n!}(S_0.e^{T\mu^*+y_{1,k}+\sum_{i=2}^{n+1} y_{i,k}} - K)^+ \prod_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda}{\lambda^*} \exp(\beta(e^{y_{i,k}} - 1))$$

5. cena derivátu:
$$C^{MEMM} \approx e^{-rT}(H_0 + \frac{1}{PS}\sum_{k=1}^{PS} H_k)$$

Výstup: C^{MEMM}.

Navrhnutý postup výpočtu MEMM ceny má výhodu v tom, že sa dá využiť na výpočet cien všetkých derivátov závisiacich od koncovej ceny akcie. Tento postup sa dá využiť nielen v Mertonovom modeli, ale aj v ďalších modeloch postavených na báze skokovo-difúznych procesov obsahujúcich náhodné premenné, ktoré vieme simulovať.

5.3 Výsledky kalibrácie

Naším cieľom bolo nakalibrovať Mertonov model ceny akcie Google na základe 6 cien európskych Call opcií bez dividend a porovnať ho s B-S modelom.

5.3.1 Podkladové údaje

Použili sme nasledovné podkladové trhové dáta:

- Zdroj: http://finance.yahoo.com/
- Čas zberu dát: 25.9.2010, 13:31:15
- Cena akcie: **$527,29**
- Čas do splatnosti call opcií: **0,476 roka**
- Úrok (polročný): **0,0019**
-

Strike Price	480	500	520	540	560	580
Cena Call-opcie	69,5	56,85	44,55	34,35	25,95	19,5

Cena Call opcie v našej práci je priemer trhových cien Bid a Ask.

5.3.2 Kalibrácia Mertonovho modelu na základe Mertonových cien

Pri kalibrácii Mertonovho modelu na základe Mertonových cien odhadujeme 4 parametre riešením kalibračnej optimalizačnej úlohy 5.2:

$$\arg\min_{\theta\in\Theta} \rho(V_{real}, V_{model}) = \arg\min_{\lambda,\sigma,m,\delta} \sum_{i=1}^{6} (C_i^{real} - C_i^{M})^2, \lambda, \sigma, \delta \geq 0, m \in \mathbb{R}. \tag{5.27}$$

Optimalizovaná funkcia v tomto prípade je zle podmienená a postačí nám pseudoriešenie. Numerická metóda sietí na 4-rozmernom priestore nie je vôbec vhodná kvôli vysokej časovej náročnosti. Nie je zaručené, že optimalizovaná funkcia je konvexná a tak nie je vhodné nasadiť ani Newtonovské optimalizačné metódy či metódy konjugovaných gradientov.

My sme úlohu riešili Cauchyho numerickou metódou najväčších spádov. Hoci táto numerická schéma je považovaná za málo efektívnu, postačila na pomerne rýchlu konvergenciu k bodu s nízkou hodnotou minimalizovanej funkcie. Ako optimálny sme dostali bod, v ktorom má funkcia ρ hodnotu 0,1586 a gradient ρ má euklidovskú normu $\|\nabla\rho\| = 0,088$.

Samotná funkcia ρ využívaná na kalibráciu modelov je súčtom kvadratických členov a tak príliš "nafukuje" vzdialenosti vektorov s $\rho > 1$ a naopak "prilepšuje" vektorom s $\rho < 1$. Preto je na spravodlivé porovnanie modelov potrebné zobrať odmocninu ρ, ktorá je euklidovskou metrikou na n-rozmernom reálnom priestore, kde n je počet uvažovaných opcií. Pre našu kalibráciu modelu máme $\sqrt{\rho} = 0,398$.

Hodnoty kvality kalibrácie prijímame ako uspokojujúce a nájdený bod považujeme za pseudoriešenie kalibračnej úlohy. Odhadnuté parametre modelu:

- $\hat{\lambda} = 3,8204045$
- $\hat{\sigma} = 0,0658669$
- $\hat{m} = -0,0391453$
- $\hat{\delta} = 0,1452225$

Parametre v našom modeli sú veľmi citlivé na odchýlku, preto sme ich hodnoty zaokrúhlili na 6 desatinných miest. Pre bod po zaokrúhlení sme dostali uspokojivé hodnoty $\sqrt{\rho} = 0,398$, $\|\nabla\rho\| = 0,154$. Zaokrúhlenie parametrov na 4 desatinné miesta zvýši hodnotu funkcie ρ o $0,00013$ a norma gradientu vystúpi až na hodnotu $12,75$.

Akcia Google skáče podľa nášho modelu približne 3,8 krát ročne a skok znamená priemerne zníženie akcie o 3,9%. Volatilita Brownovej zložky procesu výnosov akcie má hodnotu 0,066 a štandardná odchýlka skokov má hodnotu 0,145. Vidíme, že skoková časť procesu má v našom modeli významnú úlohu, je signifikantným faktorom pri oceňovaní. Modelové odhady reálnych cien:

Strike Price	480,00	500,00	520,00	540,00	560,00	580,00
Reálna cena	69,50	56,85	44,55	34,35	25,95	19,50
Mertonova cena	69,69	56.53	44.69	34.36	25,91	19,51

Tabuľka 5.1: Trhové a kalibrované Mertonove ceny európskych Call opcií akcie Google

5.3.3 Kalibrácia Black-Scholesovho modelu

Na kalibráciu B-S modelu sme využili rovnakú kalibračnú metódu a vstupné dáta ako v prípade Mertonových cien. V B-S modeli je potrebné odhadnúť len jeden parameter - volatilitu σ, ktorej hodnota sa štandardne nachádza vo vnútri intervalu $[0, 1]$. Optimalizačná úloha má nízky rozmer a jedno globálne minimum. Preto sme využili jednoduchú numerickú schému - v danom bode vypočítame hodnoty susedných bodov vzdialených o krok $s > 0$ a pohneme sa tam, kde je nižšia hodnota. V prípade, že sa nie je kam pohnúť, zmenšujeme krok s až po stanovenú hranicu. Dospeli sme k výsledku $\hat{\sigma}_{BS} = 0,27962$. Optimalizovaná funkcia vzdialenosti trhových cien od modelových ρ má hodnotu 16,78 a $\sqrt{\rho} = 4,10$. Vypočítané odhady reálnych cien:

Strike Price	480,00	500,00	520,00	540,00	560,00	580,00
Reálna cena	69,50	56,85	44,55	34,35	25,95	19,50
Cena z modelu	67,11	54,86	44,22	35,17	27,60	21,40

Tabuľka 5.2: Trhové a kalibrované MEMM ceny európskych Call opcií akcie Google

S Mertonovým modelom sme dosiahli lepšie výsledky kalibrácie. Tento záver nie je prekvapujúci - Mertonove ceny obsahujú 4 parametre, pričom jeden zodpovedá práve parametru B-S modelu a tak je prirodzené, že Mertonov model je aspoň taký dobrý ako B-S model.

5.3.4 Kalibrácia Mertonovho modelu na základe MEMM ceny

Kalibrácia všetkých parametrov Mertonovho modelu by sa pri nami navrhnutej metóde Monte Carlo výpočtu hodnoty jednej ceny opcie nedala efektívne numericky riešiť, úloha je časovo veľmi náročná.

Z kapitoly 5.3.2 máme odhadnuté parametre Mertonovho modelu $\lambda, \sigma, m, \delta$ na základe Mertonových cien. Keďže sme odhadovali parametre procesu ceny akcie pod reálnou pravdepodobnostnou mierou $\mathbb{P}$, teda parametre trhového procesu ceny, môžeme tieto parametre považovať za správne aj pre oceňovanie na základe MEMM ceny. Ďalším cieľom preto je nakalibrovať posledný parameter Mertonovho modelu - koeficient μ, ktorý sa nachádza pri deterministickej zložke dt v definícii procesu ceny.

Pri odvodení Mertonvých cien európskej Call-opcie sme koeficient μ vyjadrili pomocou ostatných parametrov, preto sme ho nemohli na základe Mertonových cien nakalibrovať. Vo vzorci MEMM ceny európskej call opcie sa parameter μ nachádza, môžeme ho kalibrovať.

Opäť sme zvolili kalibračný model z kapitoly 5.1 avšak tentokrát len s jednou opciou, $n = 1$. Nami zvolená podkladová opcia kalibrácie má strike price $K = 520$. Sme totiž presvedčení, že v cene opcií s K blízkym cene akcie $S_0 = 527,29$ je silne prítomná informácia o očakávaní budúceho vývoja akcie. Dôvod zníženia počtu podkladových opcií je, že výpočet jednej ceny metódou Monte Carlo trvá pomerne dlho, ak chceme dosiahnuť malú odchýlku odhadovanej strednej hodnoty. Pri Monte-Carlo metóde výpočtu strednej hodnoty podľa algoritmu z kapitoly 5.2.2 sme pracovali s konštantami $PS = 10^6$, $N = 10$, ktoré poskytovali dostatočnú presnosť pri vyhovujúcej časovej náročnosti - odchýlka sa prejavovala na úrovni stotín a výpočet jednej ceny trval približne 5 minút. Zvýšenie N sa vôbec neprejavilo na odhadovaných cenách (intuitívne sa to dá vysvetliť tým, že pravdepodobnosť výskytu viac ako 10 skokov do polroka je pre využívanú intenzitu skokov veľmi nízka). Ako najrýchlejšia metóda nakalibrovania μ sa nám javilo nastreľovanie hodnoty parametra tak, aby sme dostali MEMM cenu opcie rovnú trhovej cene podkladovej opcie. Pri tom sme využili pozorovanie, že zvýšenie hodnoty μ vedie k zvýšeniu MEMM ceny opcie. Týmto spôsobom sme vedeli odhadnúť parameter pomerne presne po približne štyroch pokusoch.

Výsledok kalibrácie je odhad parametra μ:

$$\hat{\mu} = 0,1302. \tag{5.28}$$

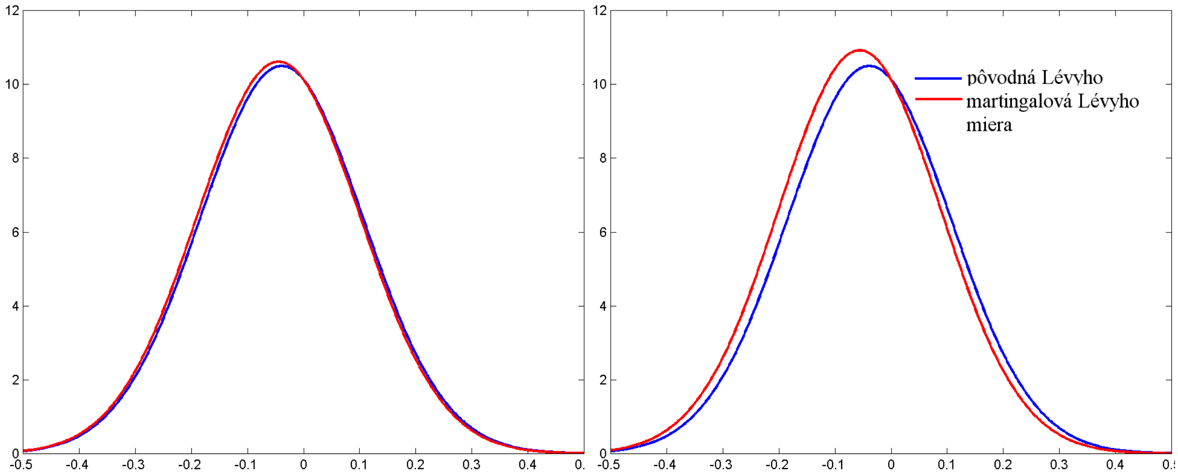
Zo vzťahu 3.17 vieme, že stredná hodnota ročných výnosov akcie je podľa modelu rovná $\hat{\mu} + \hat{\lambda}\hat{m} = -0.019$. Podľa modelu sú teda v zachytenom momente očakávania trhu o raste akcie mierne pesimistické, očakáva sa pokles hodnoty akcie o 1,9%.

Nakalibrovaný model porovnáme s trhovými cenami opcií na 6 opciách použitých pri kalibrácii v prechádzajúcich modeloch:

Strike Price	480,00	500,00	520,00	540,00	560,00	580,00
Reálna cena	69,5	56,85	44,55	34,35	25,95	19,5
Cena z modelu	69,49	56,37	44,55	34,25	25,91	19,63

Tabuľka 5.3: Trhové a kalibrované ceny európskych Call opcií akcie Google

Odchýlka modelových cien od trhových má hodnotu $\sqrt{\rho} = 0,51$. Parametre martingalového procesu $\tilde{S}_t$ pre nakalibrovaný model vyšli $\beta = -0,269$, $\lambda^* = 3,852$, $\mu^* = 0,129$. Martingalový proces má mierne zvýšenú intenzitu skokov oproti pôvodnému procese a naopak o trochu nižší koeficient pri dt.



Obr. 5.1: Lévyho miera výnosov pôvodného a martingalového procesu akcie Google pre MEMM cenu opcie v Mertonovom modeli, vľavo pre kalibrované $\hat{\mu}$ a vpravo pre $\mu = \hat{\mu} + 0,05$

Na Obr. 5.1 vidíme porovnanie Lévyho miery výnosov pôvodného procesu ν a martingalového procesu ν^*. Rozdiel je veľmi malý. Väčšia plocha pod grafom Lévyho miery znamená vyššiu intenzitu skokov, čo sme odhalili aj numericky. Môžeme pozorovať aj efekt zápornej hodnoty parametra β, ktorá naklonila Lévyho mieru smerom doľava. Obrázok potvrdzuje komentár zo záverečného odseku kapitoly 4.1.3, že pre záporné β dáva Lévyho miera ν^* väčší dôraz na záporné hodnoty výnosov. Pre porovnanie uvádzame aj obrázok s neoptimálnym $\mu = \hat{\mu} + 0,05 = 0,1802$, pri ktorom má parameter β hodnotu -0,85. Nová Lévyho miera je v tomto prípade ešte viac posunutá smerom doľava - výraznejšie zdôrazňuje záporné skoky a menej reflektuje pôvodný pravdepodobnostný model.

Zaujímavou otázkou je, aká je citlivosť parametrov na jednostrannú výchýlku. V Tab. 5.4 uvádzame ceny podkladových akcií, ak sa v jednotlivých parametroch vychýlime o hodnotu 0,05. Jednostranná výchylka zmení pôvodný pravdepodobnostný model tak, že zvýši volatilitu alebo strednú hodnotu výnosov. Pri výpočte cien s vychýlenými parametrami sme vždy vypočítali aj parametre ekvivalentného martingalového procesu, aby bolo oceňovanie daným modelom správne.

Strike P.	480	500	520	540	560	580	β	λ^*	μ^*	$\sqrt{\rho}$
Trh	69,50	56,85	44,55	34,35	25,95	19,50	-	-	-	0
Model	69,49	56,37	44,55	34,25	25,91	19,63	-0,27	3,85	0,129	0,51
μ+0,05	70,85	57,80	46,02	35,62	26,85	19,99	-0,85	3,94	0,176	2,74
σ+0,05	71,10	58,27	46,89	37,10	28,96	22,42	-0,29	3,86	0,126	5,93
λ+0,05	69,72	56,59	44,79	34,54	26,21	19,90	-0,25	3,90	0,129	0,66
m+0,05	68,78	55,53	43,66	33,43	25,20	19,04	-2.55	3,87	0,119	2,16
δ+0,05	80,00	67,58	56,22	46,12	37,65	30,98	-0,37	3,86	0,128	27,7

Tabuľka 5.4: Trhové a MEMM ceny opcií akcie Google pri jednostranných výchylkách kalibrovaných parametrov

Stredná hodnota výnosov alebo riziko prítomné vo volatilite reálneho procesu akcie sa zmenou parametrov zvýšilo, preto vo väčšine prípadov model nadsadzoval ceny opcií. Pri zvýšení strednej hodnoty veľkostí skokov m pozorujeme opačný jav - podliezanie trhových cien. Je to spôsobené miernym znížením parametra μ^* a veľmi nízkou hodnotou parametra β, ktorá zvyšuje významnosť skokov s nízkou hodnotou a tým kompenzuje vplyv zvýšenia veľkosti skokov. Pre parameter λ sme nepozorovali veľkú zmenu odhadu cien, čo môže byť spôsobené nízkou relatívnou zmenou parametra. Veľká zmena odhadu nastala pre parameter δ. Volatilita skokov má teda v našom modeli výrazný vplyv na tvorbu ceny opcie.

Ďalej sme uvažovali model, ktorý má dvojnásobnú intenzitu skokov $\lambda = 7,64$, ktorých veľkosť má polovičnú strednú hodnotu $\mu = -0,0196$ a polovičnú varianciu $\delta^2 = 0,0105$. V tomto modeli sa skoky vyskytujú približne 2 krát častejšie ako v nakalibrovanom, avšak majú polovičnú veľkosť. Zo zvýšením intenzity skokov sa zvyšuje i pravdepodobnosť vyššieho počtu skokov za sledované obdobie a tak sme v Monte Carlo algoritme zvýšili hranicu sumácie na dvojnásobok $N = 20$. Vidíme, že nový model neodhaduje trhové ceny úplne zle, avšak badať systematickú odchýlku - podhodnocovanie opcií s nízkou Strike Price a nadhodnocovanie opcií s vysokou Strike Price. Parametre ekvivalentného martingalového procesu pre nový model majú hodnoty $\beta = -0,259$, $\lambda^* = 7,672$, $\mu^* = 0,129$. Parametre β a μ^* zostali približne rovnaké ako v kalibrovanom modeli. Intenzita martingalového procesu je približne dvojnásobná. Odhadnuté ceny modelu s dvojnásobnou intenzitou a polovičnou veľkosťou skokov môžeme vidieť v Tab. 5.5.

Strike Price	480,00	500,00	520,00	540,00	560,00	580,00
Reálna cena	69,5	56,85	44,55	34,35	25,95	19,5
Cena z modelu	69,00	56,35	45,24	35,74	27,87	21,54

Tabuľka 5.5: Trhové a MEMM ceny európskych Call opcií akcie Google pre dvojnásobnú intenzitu a polovičnú veľkosť skokov oproti kalibrovanému modelu

Záver analýzy citlivosti parametrov je, že zmena kalibrovaných parametrov zvyšuje odchýlku odhadovaných cien. Tým sa čiastočne potvrdila optimalita kalibrácie i dôležitosť starostlivej kalibrácie parametrov modelu.

5.3.5 Porovnanie modelov

V tejto kapitole podrobnejšie porovnáme nakalibrované modely. Nakalibrované parametre a podkladové dáta zostávajú rovnaké ako v predchádzajúcich kapitolách, iba rozšírime portfólio podkladových akcií. Porovnanie trhových cien opcií a cien opcií vypočítaných podľa jednotlivých oceňovacích modelov vidíme v Tab. 5.6 a Tab. 5.7. V poslednom stĺpci Tab. 5.7 sa nachádza odmocnina funkcie ρ za daný riadok pre obidve tabuľky (definícia ρ je vo vzťahu 5.1).

Môžeme si všimnúť, že s Mertonovým modelom dokážeme oveľa lepšie odhadovať

Strike Price	**450**	**460**	**470**	**480**	**490**	**500**	**510**	**520**
Reálna cena	91,50	83,80	76,30	69,50	62,70	56,85	50,80	44,55
Mertonova cena	91,69	84,07	76,73	69,69	62,95	56,53	50,44	44,69
B-S cena	88,44	80,96	73,84	67,11	60,78	54,86	49,34	44,22
MEMM cena	91,55	83,92	76,57	69,51	62,77	56,35	50,26	44,52

Tabuľka 5.6: Trhové a rôznymi modelmi odhadnuté ceny európskych Call opcií akcie Google, Strike Price 450 až 520

Strike Price	**530**	**540**	**550**	**560**	**570**	**580**	**590**	**600**	$\sqrt{\rho}$
Reálna cena	39,25	34,35	30,1	25,95	22,15	19,5	16,4	14,05	0,00
Merton. cena	39,32	34,36	29,88	25,91	22,47	19,52	17,01	14,88	1,36
B-S cena	39,50	35,17	31,21	27,60	24,34	21,40	18,76	16,40	7,95
MEMM cena	39,17	34,25	29,82	25,91	22,52	19,63	17,15	15,04	1,56

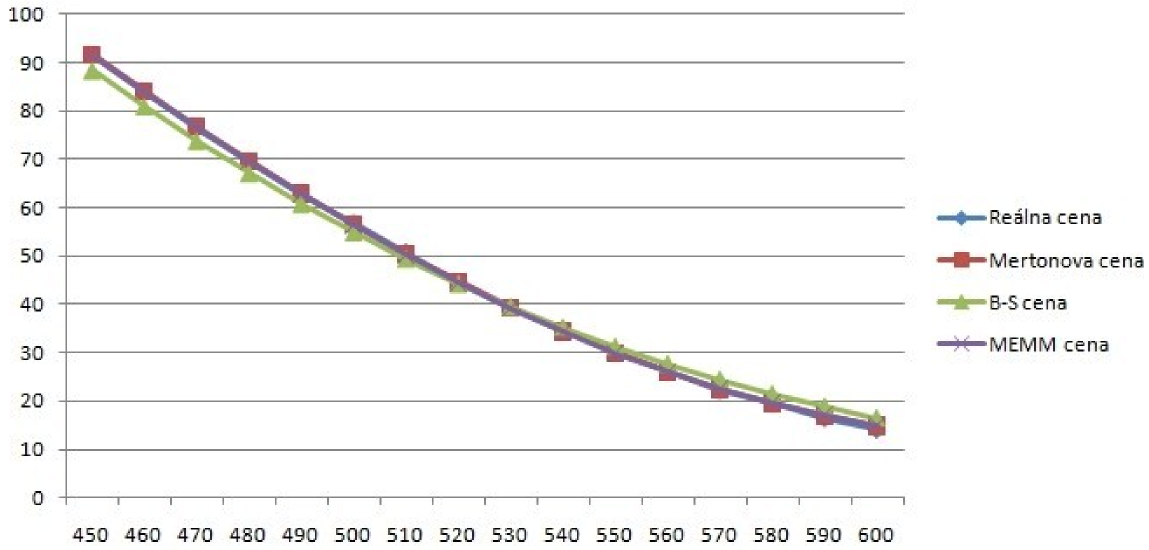
Tabuľka 5.7: Trhové a rôznymi modelmi odhadnuté ceny európskych Call opcií akcie Google, Strike Price 530 až 600

reálne ceny opcií a jeho parametre sú stabilné - dobre odhadujú aj ceny opcií, ktoré neboli využité na kalibráciu modelu. V Mertonovom modeli dostávame pre Mertonove ceny a MEMM ceny približne rovnakú kvalitu odhadov trhových cien. Odchýlku ρ MEMM cien veľmi zvyšujú posledné dve ceny pre Strike Price 590 a 600. Inak sú MEMM ceny veľmi kvalitnými odhadmi trhových cien.

Naproti tomu B-S dosahuje veľkú odchýlku modelovaných cien od trhových a opciám s nízkou Strike Price priraďuje cenu nižšiu ako je trhová a naopak opciám s vysokou Strike Price dáva vyššiu cenu.

Môžeme si taktiež všimnúť rozdiel medzi vypočítanými MEMM cenami z tejto a predchádzajúcej kapitoly pre tie isté Strike Price. Porovnanie cien nám dáva predstavu o tom, akú odchýlku dosahuje nami použitá metóda Monte Carlo. Napríklad parameter $\hat{\mu}$ bol kalibrovaný tak, aby cena opcie so Strike Price bola 44,55. V tejto kapitole nám nová simulácia vypočítala hodnotu 44,52.

Tabuľky 5.6 a 5.7 sú graficky zobrazené na Obr. 5.2. Aj na ňom je vidieť, že trhové, MEMM a Mertonove ceny sa takmer prelínajú, kým B-S ceny vykazujú systematickú odchýlku.



Obr. 5.2: Trhové a rôznymi modelmi odhadnuté ceny európskych Call opcií akcie Google

Každý model z analyzovaných modelov má svoje výhody a nevýhody. S najjednoduchším B-S modelom sa rýchlo a elegantne pracuje, je ľahký na pochopenie a interpretáciu. Veľkým problémom je, že nedokáže kvalitne modelovať trhové dáta.

Mertonove ceny nám poskytli dobrú možnosť kalibrácie Mertonovho modelu - nasadenie gradientnej numerickej optimalizačnej schémy a rýchly výpočet ceny opcie. Odhady trhových cien po kalibrácii dosahovali vynikajúce výsledky. Problémom je ignorovanie prémie z rizika vyplývajúceho zo skokov akcie a tak vhodnosť využitia tohto modelu a oceňovacieho prístupu pre širšiu triedu derivátov je otázna.

Oceňovanie pomocou MEMM v Mertonovom modeli má rozumnú interpretáciu - minimalizuje sa vzdialenosť medzi pôvodnou a ekvivalentnou martingalovou mierou. Odhady trhových dát tiež dosahovali veľmi dobrú kvalitu. Nevýhodou je, že výpočet ceny metódou Monte Carlo je časovo pomerne náročný a výsledok má náhodný charakter. Výhodou nami predstaveného prístupu k výpočtu MEMM ceny je, že sa dá ľahko pretransformovať na oceňovanie iných derivátov i pomocou ďalších Lévyho procesov modelujúcich vývoj podkladového aktíva.

Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo predstaviť Lévyho procesy a ich využitie pri oceňovaní finančných derivátov na neúplných trhoch. Cieľom výskumnej časti bolo nakalibrovať vybraný model trhu postavený na báze Lévyho procesu. Pre úspešné dosiahnutie tohto cieľa som zvolil rozdelenie práce na 5 logických celkov.

V prvej kapitole je predstavený matematický model finančného trhu a sú odvodené základné oceňovacie princípy. Taktiež sa v nej nachádza definícia a vysvetlenie úplnosti trhu.

V druhej kapitole sú uvedené východiská a závery Black-Scholesovho modelu ako aj jeho podstatné nedostatky, ktoré viedli k potrebe zavedenia širšej triedy procesov na modelovanie pohybu podkladového aktíva.

V tretej kapitole je zadefinovaný Lévyho proces. Predstavená je úzka spojitosť Lévyho procesov s nekonečne deliteľnými rozdeleniami. Kapitola pokračuje užitočnými vlastnosťami a príkladmi Lévyho procesov. Obzvlášť podrobne sa venujeme zloženému Poissonovmu procesu pre jeho názornosť a významnosť v našej práci i všeobecne vo finančnom modelovaní. Predstavené vlastnosti Lévyho procesov ukazujú, že Lévyho procesy teoreticky odstraňujú nedostatky Black-Scholesovho modelu a sú vhodné na finančné modelovanie.

Štvrtá kapitola obsahuje dva prístupy k zvoleniu ekvivalentnej martingalovej miery, ktoré sa vyuívajú na oceňovanie derivátov. Tu sa zameriavame na ekvivaletnú martingalovú mieru s minimálnou entropiou.

V piatej kapitole sa venujeme Mertonovmu modelu a jeho kalibrácii. Mertonov model ceny akcie Google sme nakalibrovali na európskych call opciách pomocou Mertonových cien a cien vypočítaných z martingalovej miery s minimálnou entropiou. Na kalibráciu pomocou Mertonových cien sme využili gradientnú numerickú schému - Cauchyho metódu najväčších spádov. Na kalibráciu pomocou cien vypočítaných z martingalovej miery s minimálnou entropiou sme využili stochastickú metódu výpočtu strednej hodnoty typu Monte Carlo. Na rovnakých dátach sme nakalibrovali Black-Scholesov model. Pomocou Mertonovho modelu sme dokázali veľmi dobre replikovať trhové dáta, kým Black-Scholesov model vykazoval značnú systematickú odchýlku.

Záver práce je povzbudivý - Lévyho procesy sú vhodným teoretickým i praktickým nástrojom na oceňovanie finančných derivátov. Predpokladáme, že v budúcnosti sa stanú mohutne využívaným nástrojom na finančných trhoch.

Zoznam použitej literatúry

[1] Eakins, S.G. *Finance. Investments, Institutions, Management. East Carolina University*, Addison - Wesley Eductional Publishers Inc, 1999, str. 483

[2] ∅ksendal B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications* Springer, 2000, ISBN 3-540-63720-6

[3] Melicherčík I., Olšarová L., Úradníček V. *Kapitoly z finančnej matematiky* epos,2005, ISBN 80-8057-651-3

[4] Cont R, Tankov P. *Financial Modelling With Jump Processes* CRC Press LLC, 2004, ISBN 1-58488-413-4

[5] Schoutens W. *Lévy Processes in Finance - Pricing Financial Derivatives* John Wiley & Sons Inc., 2003, ISBN 0-470-85156-2

[6] Merton R. *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, J. Financial Economics, 3, 1976

[7] Andersen T. G., Davis R. A., Kreiß J.-P., Mikosch, T., *Handbook of Financial Time Series*, University of Freiburg, Springer Verlag, 2009, ISBN 978-3-540-71296-1, str. 439-455

[8] Kallsen J., *Lévy Processes in Finance* TU München/CAU Kiel, 2007

[9] Miyahara Y., *Jump Process Models in Mathematical Finance* Osaka University, 2005

[10] Miyahara Y., *A Note on Esscher Transformed Martingale Measures for Geometric Lévy Processes* Nagoya City University, 2004

[11] Krogstadt H.E., *Comments on Girsanov's Theorem* Norwegian University of Science and Technology, 2003