UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

dd508748-c31f-4269-a848-8656bbe5d93e

MODEL OCEŇOVANIA KORPORÁTNYCH DLHOPISOV S RIZIKOM LIKVIDITY A TRHOVÝM RIZIKOM

Diplomová práca

Bratislava 2011

Zuzana Letašiová

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky

MODEL OCEŇOVANIA KORPORÁTNYCH DLHOPISOV S RIZIKOM LIKVIDITY A TRHOVÝM RIZIKOM

Diplomová práca

Zuzana Letašiová

9.1.9. Aplikovaná matematika
Ekonomická a finančná matematika

Vedúci práce: RNDr. Ing. Ján Pataky, PhD.

BRATISLAVA 2011

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Mgr. Zuzana Letašiová
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovensky

Názov : Model oceňovania korporátnych dlhopisov s rizikom likvidity a trhovým rizikom

Cieľ : Popísať a vysvetliť model oceňovania dlhopisov metódou binárneho stromu. Následná aplikácia modelu na trhové dáta.

Vedúci : RNDr. Ing. Ján Pataky, PhD.

Dátum zadania: 18.12.2008

Dátum schválenia: 05.04.2011

prof. RNDr. Marek Fila, DrSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

vedúci práce

Poďakovanie

Týmto by som sa chcela poďakovať vedúcemu mojej diplomovej práce RNDr. Ing. Jánovi Patakymu, PhD. za poskytnutie materiálov a cenné rady pri písaní práce.

Tiež by som chcela poďakovať predovšetkým svojej rodine a kamarátom za podporu a pomoc počas celej doby štúdia.

Čestné prehlásenie

Týmto prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s využitím svojich poznatkov a uvedenej odbornej literatúry.

V Bratislave, apríl 2011

……..…………………

Zuzana Letašiová

Abstrakt

LETAŠIOVÁ, Zuzana: Model oceňovania korporátnych dlhopisov s rizikom likvidity a trhovým rizikom [Diplomová práca] - Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky; Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky - Vedúci práce: RNDr. Ing. Ján Pataky, PhD. Bratislava: FMFI UK, 2011, 47 strán.

Fluktuácie na finančných trhoch sú do značnej miery nepredvídateľné. Snahou investorov je preto čo najpresnejšie ocenenie rizika, ktorému je cenný papier vystavený. Nejedná sa tu iba o riziko poklesu ceny aktíva, ale aj o prípady, kedy sa emitent môže ocitnúť v platobnej neschopnosti, alebo investor nenájde na trhu protistranu na realizáciu obchodu.
V diplomovej práci predkladáme model oceňovania dlhopisov, ktorý v sebe zahŕňa likvidné, kreditné a trhové riziko. Porovnaním cien na likvidnom a nelikvidnom trhu dostaneme likvidno-trhovú prémiu, ktorá sa mení v závislosti od predpokladov použitých na opis trhu. V praktickej časti sa pokúsime nasimulovať model oceňovania dlhopisov pre reálne dáta a porovnať výstupy. Z vypočítaných hodnôt premenných, ktoré najlepšie kalibrujú trhové výstupy, dostaneme pravdepodobnosť bankrotu spoločnosti.

Kľučové slová: oceňovanie dlhopisov, likvidné riziko, trhové riziko, kreditné riziko

Abstract

LETAŠIOVÁ, Zuzana: A model of corporate bond pricing with liquidity and marketability risk. [Master thesis] - Comenius University in Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics; Department of Applied Mathematics and Statistics – Supervisor: RNDr. Ing. Ján Pataky, PhD. Bratislava: FMFI UK, 2011, 47 p.

Fluctuations in the financial markets are largely unpredictable. Therefore investors should seek the most accurate risk assessment, which is exposed in the paper. It is not only the risk of asset price depreciation, but also the risk that the issuer may find themselves insolvent, or an investor may not find any market counterparty for the implementation of the trade.
This paper deals with the bond pricing model which includes liquidity, marketability and credit risk. Comparing the prices on liquid and illiquid market, the liquidity-market premium is obtained. This premium varies depending on the assumptions used for the description of the market. The practical part of this paper is trying to simulate the bond pricing model for real data and compare the outcomes. The calculated values of variables that calibrate market outcomes the best help us to get the probability of default of the company.

Key words: bond pricing model, liquidity risk, marketability risk, credit risk

Zoznam skratiek

K	hranica defaultu v štrukturálnych modeloch. Keď cena aktíva nadobudne túto hodnotu, nachádza sa v defaulte.
c	kupón dlhopisu
t	časová perióda
P	istina dlhopisu, nominálna hodnota
T	maturita dlhopisu
r	bezriziková úroková miera na trhu (v našom prípade v Japonsku)
$\mathbf{V_0}$	počiatočná hodnota dlhopisu
q	pravdepodobnosť, že cena dlhopisu sa zvýši
1 - q	pravdepodobnosť poklesu ceny dlhopisu
$\mathbf{V_d}$	hodnota dlhopisu, na (resp. pod) ktorú klesne vtedy, keď firma zbankrotuje (= **K** v štrukturálnych modeloch)
I	počet tried investorov na trhu, $I \in \mathbf{N}$
$\boldsymbol{\alpha_i}$	riziková prémia investora v triede *i*
$\boldsymbol{\gamma(i)}$	pravdepodobnosť, že investor je v triede *i*
(t,m)	označenie uzla na strome
m	počet krokov smerom hore (nárast ceny dlhopisu) potrebných k dosiahnutiu uzla *(t,m)*
$\mathbf{\Pi_i(t,m)}$	cena, ktorou dlhopis ocení jeho majiteľ v uzle *(t,m)*, ak ho predá
$\mathbf{\Pi^0_i(t,m)}$	cena dlhopisu (podľa jeho majiteľa), ak ho v uzle *(t,m)* nepredá
$\mathbf{U_j(t,m)}$	cena dlhopisu (podľa investora z triedy *j*), ak si ho v uzle *(t,m)* kúpi
$\mathbf{U^0_j(t,m)}$	cena dlhopisu (podľa investora z triedy *j*), ak si ho v uzle *(t,m)* nekúpi
$\mathbf{p_{i,j,t,m}}$	predajná cena dlhopisu, tj. cena, za ktorú je dlhopis v uzle *(t,m)* predaný. Pričom pôvodný majiteľ cenného papiera je z triedy *i* a nový majiteľ – investor – je z triedy *j*.
$\mathbf{p^L_{i,j,t,m}}$	predajná cena dlhopisu na likvidnom trhu
$\mathbf{B_{i,t+1,m}}$	očakávaná cena dlhopisu (podľa jeho majiteľa) v ďalšom časovom kroku
$\boldsymbol{\lambda}$	sila obchodovania držiteľa dlhopisu oproti investorovi, $\lambda \in (0,1)$

$\mathbf{D_{i,t,m}}$	cena nelikvidného dlhopisu, tj. dlhopisu, ktorý je obchodovaný na nelikvidnom trhu, pre jeho majiteľa z triedy *i* v uzle *(t,m)*
$\mathbf{D^{L}_{i,t,m}}$	cena likvidného dlhopisu, tj. dlhopisu, ktorý je obchodovaný na likvidnom trhu, pre jeho majiteľa z triedy *i* v uzle *(t,m)*
$\mathbf{D_{t,m}}$	celková očakávaná cena nelikvidného dlhopisu pre rôznych investorov v uzle *(t,m)*
$\mathbf{D^{L}_{t,m}}$	celková očakávaná cena likvidného dlhopisu v uzle *(t,m)*
$\mathbf{LP_{t,m}}$	likvidno-trhová prémia v uzle *(t,m)*
PV	súčasná hodnota (dlhopisu)
BCPB	Burza cenných papierov Bratislava
CDS	credit default swap, swap kreditného zlyhania
BoJ	Bank of Japan, japonská centrálna banka

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Zoznam grafov

Obsah

1. ÚVOD

S príchodom cenných papierov na trh sa investori pokúšali vynájsť a zdokonaliť metódy o čo najlepšie ocenenie týchto produktov. Ich snahou bolo nakalibrovať všetky veličiny, ktoré determinujú cenu aktíva a počítať s každým rizikom ovplyvňujúcim jej vývoj.

Všetky druhy finančného rizika, ktoré ovplyvňujú dlhopis, sa spravidla premietnu do jeho ceny. Našou snahou je zahrnúť do modelu na ocenenie dlhopisov najdôležitejšie finančné riziká: likvidné, trhové a kreditné. Na trhu máme firmu, ktorá emituje dlhopis. Tento sa následne obchoduje na sekundárnom trhu, na ktorom sú investori rozdelení podľa rizikovej prémie, ktorú subjektívne pridávajú k cene dlhopisu. V každej časovej perióde dochádza k párovaniu trhu, tzn. aktuálny držiteľ dlhopisu sa stretne s náhodne vybraným investorom. V závislosti od rizikovej prémie týchto dvoch účastníkov môže alebo nemusí dôjsť k uzavretiu obchodu. Trh poznáme likvidný a nelikvidný, pričom porovnaním predajných cien (tzn. cien, pri ktorých je obchod realizovaný) na likvidnom a nelikvidnom trhu sme schopní sledovať vplyv likvidno-trhového rizika na oceňovanie dlhopisov. Tento vplyv je funkciou heterogénnosti rizikovej prémie investorov a ich vzájomnej nákupnej sily. Model v našej diplomovej práci prináša návrh ocenenia, ktorý berie do úvahy, že náklady na bankrot nie sú vyčísliteľné prostredníctvom heterogénnych očakávaní rizikovej prémie.

Centrálna časť práce je rozdelená do troch kapitol. V prvej oboznámime čitateľa s rôznymi druhmi finančného rizika na trhu, kreditnými derivátmi a ich rozdelením, ako i dvoma prístupmi k oceneniu kreditného rizika. V ďalšej časti práce predstavíme a predložíme riešenie modelu oceňovania dlhopisov metódou binomického stromu, ktorý zahŕňa kreditné riziko. 4. kapitola je praktická, v ktorej aplikujeme dáta z trhu na model oceňovania dlhopisov popísaný v predchádzajúcej kapitole.

2. ZÁKLADNÉ POJMY PROBLEMATIKY

2.1. Finančné riziká

V tejto podkapitole si zadefinujeme najrozšírenejšie riziká, ktoré súvisia s oceňovaním finančných nástrojov na finančných trhoch. Môžme sa o nich dočítať napr. v práci [2] alebo v rôznych zdrojoch na internete, napr. [13].

Finančné riziko je každé riziko, ktoré je spojené s finančnými aktívami. Spočíva v tom, že skutočný výnos bude nižší ako očakávaný. Finančné riziko sa delí na kreditné, trhové, likvidné a operačné riziko.

Kreditné riziko, alebo tiež úverové riziko, charakterizuje riziko straty na strane investora vyplývajúce z neschopnosti alebo neochoty protistrany (emitenta dlhopisu, klienta s hypotekárnym úverom či kreditnou kartou) splniť svoje záväzky. Táto udalosť sa nazýva default alebo tiež bankrot.

Imúnnym voči tomuto druhu rizika sú spravidla vládne dlhopisy, nakoľko vláda môže, v prípade potreby, vytlačiť nové peniaze na splatenie svojich záväzkov. V prípade členských krajín Eurozóny k tomuto účelu slúži Euroval, resp. finančná pomoc od ostatných štátov. Ak je však dlhopis emitovaný súkromnou firmou, je väčšia pravdepodobnosť, že sa dostane do konkurzu.

Strata investora v prípade bankrotu zahŕňa stratu z istiny a z úrokov, znížený cash flow a zvýšené náklady na vymáhanie finančných prostriedkov.

Najznámejším bankovým produktom, ktorý nesie kreditné riziko, je hypotekárny úver. Bonita klienta je pre banku veľmi dôležitá a jej oceneniu venuje dostatočný priestor.

V našom prípade bude kreditné riziko predstavovať riziko bankrotu emitenta dlhopisu a s tým spojenú stratu cash flow pre investora.

Trhové riziko predstavuje riziko zníženia hodnoty portfólia, investičného alebo obchodného, v dôsledku zmeny hodnoty faktorov trhového rizika. K štandardným faktorom trhového rizika patria: ceny akcií, úrokové sadzby, výmenné kurzy, a ceny komodít. Poznáme štyri typy trhového rizika:

Akciové riziko – pri ktorom sa zmení cena akcií a/alebo implikovaná volatilita.

Úrokové riziko – pri ktorom dochádza k zmene úrokových sadzieb.

Menové riziko predstavujúce riziko zmeny devízových kurzov.

Komoditné riziko – predstavuje riziko zmeny ceny komodít (napr. kukurica, meď, ropa).

Likvidné riziko spočíva v tom, že cenný papier, alebo aktívum, nemôže byť na trhu obchodované dostatočne rýchlo a z toho dôvodu dôjde k strate, resp. zisk z obchodovania nebude taký, ako bol očakávaný. Riziko likvidity vzniká v situáciách, keď má jeden účastník trhu záujem o predaj, resp. kúpu cenného papiera, ale neobjaví sa protistrana, s ktorou by mohol tento obchod zrealizovať. Problém nájsť protistranu nemusí nutne znamenať, že aktívum je bezcenné. Častokrát k týmto situáciám dochádza kvôli nízkej informovanosti. Likvidné riziko sa vo väčšej miere vyskytuje na trhoch rozvíjajúcich sa krajín, resp. na burzách s malým počtom účastníkov. K strate likvidity inštitúcie dochádza pri znížení úverového ratingu či nečakaných výdavkoch. Firma je vystavená likvidnému riziku, ak finančné trhy, na ktorých obchoduje, podliehajú strate likvidity.

Likvidita trhu má štyri dimenzie, podľa ktorých sa meria: spread ponuky a dopytu ceny (čím je menší pomer spreadu k cene aktíva, tým je aktívum likvidnejšie), veľkosť trhu (meria sa objemom aktív, ktoré môžu byť na trhu obchodované), okamžitý nákup (do úvahy sa berie čas potrebný k realizácií obchodu za požadovanú cenu) a pružnosť trhu (rýchlosť, akou sa ceny vrátia na pôvodné úrovne po veľkej transakcii).

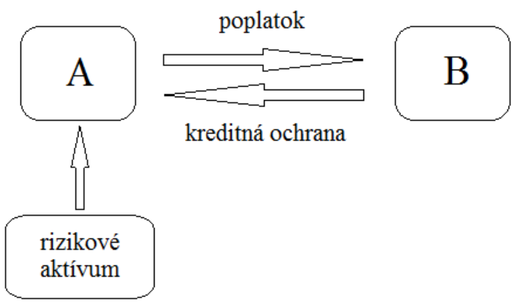
Operačné riziko vyplýva z chodu spoločnosti a zahŕňa v sebe riziko zlyhania ľudského faktoru, procesov a systémov, ktoré firma používa. Patrí sem tiež riziko podvodu, právne riziko a riziko ohrozenia životného prostredia.

2.2. Kreditné deriváty

Každý druh rizika so sebou prináša istú neistotu a nebezpečie pre investora, ktorý je vlastníkom rizikového aktíva. Na druhej strane však predstavuje aj možnosť zisku. Zisku zo samotného rizika, prípadne z investície do kreditnej ochrany podkladového aktíva.

Kreditné deriváty sú pomerne novým a zároveň aj jedným z najrozšírenejších typov finančných produktov posledných desaťročí. Veľa investorov má svoje portfólio závislé od zmeny spreadov medzi rizikovými a bezrizikovými výnosmi. Kreditné deriváty ponúkajú týmto investorom dôležitý nástroj na manažovanie svojho portfólia a zaisťovanie voči kreditnému riziku.

Podľa [7], kreditný derivát je mimoburzový kontrakt, ktorý v sebe zahŕňa kreditné riziko. Od úrokového kontraktu sa vo všeobecnosti líši tým, že namiesto bezrizikovej úrokovej miery závisí od rizikovej úrokovej miery. Kreditné riziko je možné preniesť priamo z predávajúceho na kupujúceho, aktívum však zostáva v portfóliu jeho pôvodného vlastníka a predáva sa iba riziko. Jednou z možností je, že vlastník rizikového aktíva platí kupujúcemu kreditného rizika pravidelný poplatok, za čo mu je poskytnutá kreditná ochrana v prípade bankrotu inštitúcie, ktorá emitovala rizikové aktívum. Zjednodušená schéma je na obrázku 2.1.



Obrázok č. 2.1 Schéma fungovania kreditného derivátu

Kreditné riziko môže byť prevedené z predávajúceho na kupujúceho prostredníctvom kreditného derivátu s financovaním. V tom prípade sa obdržané prostriedky obvykle investujú do kolaterálnych cenných papierov, aby bol dosiahnutý výnos z hotovosti. Ten sa vypláca investorom, ktorí kupujú kreditné riziko. Kolaterálne cenné papiere sú väčšinou štátne dlhopisy, ktoré predstavujú minimálne riziko.

Obchodovanie s kreditným rizikom predpokladá, že predávajúci aj kupujúci majú istú predstavu o výške straty, ktorá môže v prípade kreditnej udalosti nastať. Vedia predpokladať pravdepodobnosť, s akou kreditná udalosť nastane a majú očakávania o jej časovom priebehu. Zjednodušene povedané, subjekty dokážu kreditné riziko kvantifikovať.

2.3. Rozdelenie kreditných derivátov[1]

Hoci sú kreditné deriváty jedným z najmladších finančných produktov na trhu, ich samotná podstata nie je nová. Vo väčšine využívajú možnosti swapov a opcií, prípadne iných finančných nástrojov. Podľa toho ich aj rozdeľujeme do štyroch skupín. Poznáme kreditný forward, kreditný futures, kreditný swap a kreditnú opciu. Od úrokových derivátov sa líšia tým, že ich premenlivá platba závisí od rizikovej úrokovej miery určitého subjektu. Platba je odvodená od kreditného spreadu v určitom časovom okamihu.

Spomedzi všetkých druhov kreditných derivátov sa na trhu najčastejšie využívajú 4 z nich. Swapy celkových výnosov sú nástrojom na vytvorenie repliky podkladových úverov alebo cenných papierov. Investor pri ekvivalentnom úvere, resp. cennom papieri, na seba preberá riziko zlyhania dlžníka. Ďalším druhom je kontrakt kreditného spreadu, ktorý umožňuje obchodovanie s kreditným spreadom k určitému dátumu v budúcnosti vo forme forwardu alebo opcie. Ich ocenenie v súčasnosti by malo odzrkadľovať riziko zlyhania dlžníka. Kreditný dlhopis poskytuje kupujúcemu hotovosť a prináša mu výnos z aktív, ktoré sú ním podložené. Nesie však riziko v prípade straty, ak niektoré z nich zlyhá. Prenáša riziko bankrotu z banky na investora. Swapy kreditného zlyhania (CDS) umožňujú oddelené obchodovanie kreditného rizika a ich oceňovanie by malo odzrkadľovať kreditný spread. CDS sú najpopulárnejšou a najrozšírenejšou formou kreditných derivátov. Predávajúci kreditného rizika pri tomto type kontraktu platí kupujúcemu periodické platby a v prípade, že dôjde

[1] Podľa [6].

ku kreditnej udalosti referenčného aktíva alebo celého koša aktív, dostáva od kupujúceho CDS kontraktu vopred dohodnutú čiastku. K najhoršej situácií môže dôjsť, keď nastane kreditná udalosť toho, kto kreditné riziko kupuje. Obľúbenosť CDS je daná ich podobnosťou s dlhopismi, pričom trh CDS je likvidnejší ako ten s dlhopismi. Britská banková asociácia a Medzinárodná asociácia swapov a derivátov (ISDA) odhadujú, že trh CDS narástol zo 180 miliárd USD v roku 1997 na úroveň 5 biliónov USD v roku 2004. Ekonómovia podľa Jakolu ([5]) odhadujú, že dnes presahuje 17 biliónov USD.

2.4. Ocenenie kreditného rizika

Jednou zo zásadných otázok vo financiách je spôsob, akým majú byť kompenzovaní investori, ktorí nákupom derivátov podstupujú kreditné riziko.

V literatúre kreditného rizika sa stretávame s dvoma hlavnými prístupmi k problematike ocenenia korporátnych dlhopisov, ako i iných derivátov zahrňujúcich kreditné riziko. Štrukturálny model považuje kapitál spoločnosti za call opciu na hodnotu jej aktív a default spoločnosti pokladá za endogénnu udalosť. Modeluje zlyhanie dlžníka v závislosti od jeho kapitálovej štruktúry. Princíp je založený na predpoklade, že ak sa hodnota aktív priblíži k hodnote krátkodobých záväzkov, dochádza k zlyhaniu dlžníka. Hlavným nedostatkom štrukturálneho modelu je to, že nie je konzistentný s rizikovo-neutrálnymi pravdepodobnosťami zlyhania a že hodnota aktív firmy a ich volatilita, s ktorými je riziko zlyhania spojené, nie sú pozorovateľné veličiny. Štrukturálne modely sú závislé na ekonomickej argumentácií. Základnými premennými sú hodnota aktív firmy a ich volatilita. Najznámejším štrukturálnym modelom je Mertonov model. Na druhej strane reduced-form (alebo tiež štatistické) modely úplne abstrahujú od ekonomického poňatia defaultu a pozerajú sa naňho ako na exogénnu udalosť. Miera výskytu defaultu tu vstupuje do modelu ako parameter, pričom proces zlyhania dlžníka, ktorý do modelu vstupuje, je modelovaný ako náhodný Poissonov proces. Z matematického hľadiska sú tieto modely atraktívne pre ich konzistentnosť s rizikovo-neutrálnymi pravdepodobnosťami zlyhania, ktoré sa dajú odvodiť z cien dlhopisov, prípadne rozpätia kreditných spreadov.

Štatistický prístup je ľahko prispôsobiteľný pri oceňovaní rizika defaultu. Naproti tomu štrukturálny prístup je schopný oceňovať len pri veľkých zjednodušeniach kapitálovej štruktúry a prináša nie príliš uspokojivé empirické výsledky. Dôsledkom čoho aplikovaná literatúra preferuje štatistické modely pred štrukturálnymi. Ak nás však zaujíma vzájomný vzťah determinantov defaultu k firemným charakteristikám, v tom prípade sú reduced-form modely menej vhodné.

Vo všetkých modeloch štrukturálnej literatúry je default firmy definovaný ako moment, kedy jej hodnota prvýkrát klesne pod defaultnú hranicu *K*. S týmto opisom prišli ako prví Black a Scholes, Merton a Black s Coxom. Neskôr sa pridali Longstaff a Schwartz, Briys a Varenne, Tauren a Collin-Dufresne a Goldstein. Firma v defaulte teda nie je viac schopná splatiť svoje záväzky, nakoľko ich výška presahuje jej trhovú hodnotu.

Štrukturálne modely prešli postupne dlhodobým vývojom. U Blacka, Scholesa a Mertona maturujú všetky dlhopisy v ten istý deň a firma defaultuje, keď je jej hodnota menšia ako jej záväzky. Defaultná hranica *K* je tvorená jediným bodom, rovnajúcim sa nominálnej hodnote maturujúceho dlhopisu. Nanešťastie sa model stane nepoužiteľným, keď dlhopisy maturujú v iných časových okamžikoch. Black a Cox, Longstaff a Schwartz vo svojich modeloch predpokladajú, že firma sa ocitne v defaulte v momente, keď jej hodnota klesne pod hranicu *K*. (Pričom *K* je funkciou času: $K(t) = k.e^{-c(T-t)}$, kde k je nominálna hodnota maturujúceho dlhopisu). V tomto prípade *K* môže byť chápané ako nominálna hodnota záväzkov firmy. Hranica defaultu je spojitá a deterministická, takže k defaultu môže dôjsť v ľubovoľnom časovom okamžiku, aj mimo výplat.

U všetkých: Blacka a Coxa, Longstaffa a Schwartza, Briysa a Varennea sa predpokladá, že dlhopis emitovaný firmou zostane konštantný bez ohľadu na hodnotu firmy. Neskôr si Tauren, Collin-Dufresne a Goldstein uvedomili skutočnosť, že peňažná hodnota firemných záväzkov nie je konštantná a že jej vývoj ovplyvňuje hodnotu dlhopisu.

Na okraj by sme ešte spomenuli posledný prístup, s ktorým sme sa pri štúdiu literatúry oceňovania kreditného rizika stretli. Je to model Hsu, Saá-Requejo a Santa-Clara z roku 2010 a prichádza s mierne modifikovanou definíciou defaultu. K tomu dôjde, keď je hodnota firmy menšia ako hodnota, ktorú firma dosiahne po reštrukturalizácií. *K* (čiže hranica bankrotu) je v tomto prípade stochastické. Model má dva zdroje rizika – šoky firemných aktív a šoky bezrizikovej úrokovej miery. A obidva tieto zdroje sú charakterizované Brownovým pohybom. K bankrotu dôjde vtedy, keď aktíva firmy už nie sú viac schopné pokryť jej záväzky. Viac o tomto i vyššie spomenutých modeloch možno nájsť v práci Hsu, Saá-Requejo a Santa-Clara ([4]).

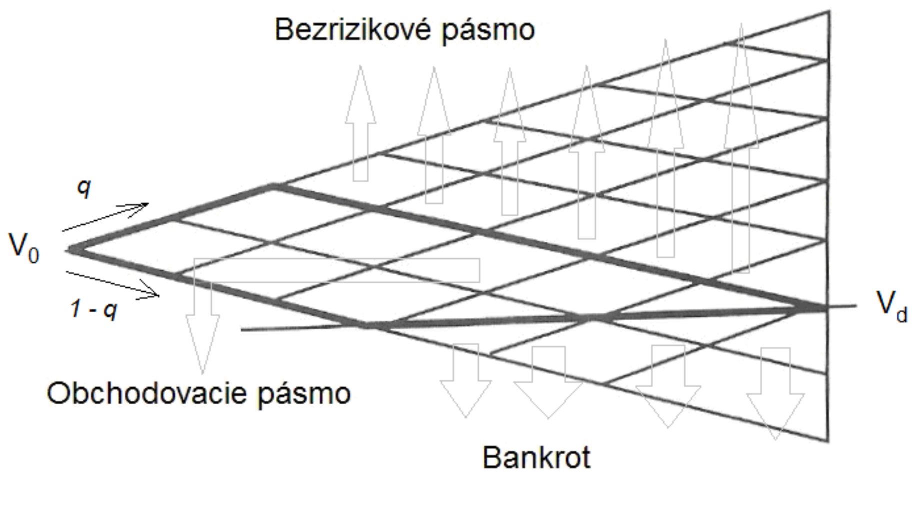
Popri týchto dvoch vyššie spomenutých prístupoch k oceňovaniu kreditného rizika existuje aj niekoľko inovatívnych prístupov. My sa v ďalšej kapitole bližšie pozrieme na model, ktorý oceňuje dlhopisy a počíta pritom aj s kreditným (i likvidným) rizikom, ktorému sú cenné papiere vystavené.

3. MODEL

Model použitý v našej diplomovej práci je prevzatý z článku Tychona a Vannetelboscha ([8]). Budeme sa ho snažiť popísať, vysvetliť a následne aplikovať v praktickej časti diplomovej práce na reálne dáta a overiť tak, či platí.

Majme firmu, ktorá emituje dlhopis s kupónom *c*. Kupón je vyplácaný periodicky, s periódou dĺžky *t*, až do vyplatenia istiny *P*. Čas maturity je označený ako *T*. Nech *r* je bezriziková úroková miera.

Vývoj ceny dlhopisu sleduje stochastický proces. Počiatočnú hodnotu si označíme ako V_0, z nej sa potom odvíja celý binomický strom. V_0 možno interpretovať aj ako trhovú hodnotu firmy, v tom prípade budeme hovoriť o vývoji hodnoty celej firmy, nie iba jej dlhopisu. Literatúra, s ktorou sme pracovali, tieto dve interpretácie používala súčasne, my sa však zameriame iba na opis vývoja ceny dlhopisu. Náčrt binomického stromu je na obrázku 3.1. Hodnota V_0 sa vyvíja v rámci tohto stromu s pravdepodobnosťami, ktoré sú časovo a hodnotovo nezávislé: *q* je pravdepodobnosť nárastu ceny, *1-q* pravdepodobnosť poklesu ceny.



Obrázok č. 3.1 Binomický strom vývoja ceny dlhopisu na trhu.

Zdroj: The Journal of Credit Risk, Volume 1/Number 3, Summer 2005, str. 30.

Model predpokladá, podobne ako v štrukturálnej literatúre spomenutej vyššie, že bankrot firmy nastane v okamžiku, keď hodnota dlhopisu klesne pod konštantu V_d (totožná s K v predchádzajúcej kapitole), ktorá je časovo nezávislá. Binomický strom na obrázku 3.1 je rozdelený na tri časti – časť stromu, ktorá je pod hodnotou V_d je označená ako „bankrot". Ak sa dlhopis nachádza v tomto pásme, spravidla už nie je obchodovaný na burze, nakoľko jeho emitujúca firma skrachovala. Ak je však dlhopis ešte stále na burze a jeho cena môže potenciálne klesnúť na V_d, nachádza sa v „obchodovacom pásme". Časť stromu, kedy už hodnota dlhopisu nemôže klesnúť až do bankrotu, tzn. dlhopis je v bezpečí a ceho cena určite nebude ovplyvnená bankrotom firmy, je označená ako „bezrizikové pásmo", v tomto momente už s určitosťou vieme, že majiteľovi dlhopisu bude vyplatená jeho nominálna hodnota.

Dlhopis je po svojej emisii obchodovaný na sekundárnom trhu, ktorý sa skladá z množstva držiteľov dlhopisu a potenciálnych investorov, ktorých zámerom je cenný papier kúpiť. Všetci účastníci trhu sú rozdelení do tried podľa toho, akú veľkú rizikovú prémiu subjektívne pridávajú k cene dlhopisu. Riziková prémia predstavuje prirážku, ktorú potenciálni investori žiadajú za to, že budú vlastniť dlhopisy. Jej výška by mala odzrkadľovať pravdepodobnosť, že sa emitujúca spoločnosť, resp. štát, dostane do problémov s vyplatením cenného papiera. Napríklad keď malo Grécko problémy so štátnym dlhom, tak podľa [10] bol 7.5.2010 rozdiel v rizikovej prémií medzi desaťročnými nemeckými a gréckymi štátnymi dlhopismi 1 047 bázických bodov (bp). Riziková prémia teda odráža spoľahlivosť. Predstavuje zvýšenie úrokovej sadzby, ktoré musí zaplatiť rizikovejší dlžník v porovnaní s menej rizikovým dlžníkom.

Teraz sa zameriame sa na opis sekundárneho trhu. Investori sú rozdelení podľa rizikovej prémie, ktorú pridávajú k cene dlhopisu. Sú rozdelení do konečného počtu tried I. $I \in \mathbf{N}$, triedy sú homogénne. Nech α_i je riziková prémia u investorov v triede i. $i = 1, \ldots I$. Triedy sú usporiadané tak, že $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_I$. Označme $\gamma(i)$ pravdepodobnosť, že investor je v triede i.

Predpokladáme, že investori požadujú heterogénnu rizikovú prémiu, ktorú ale nevysvetlíme rozdielnosťou informácií. Všetci investori na trhu majú totiž prístup k tým istým informáciám, i napriek tomu je riziková prémia, ktorú očakávajú, rôzna. To pripomína prácu Harrisona a Krepsa ([3]), ktorí uvažovali dynamický model, kde sú obchodníci rizikovo neutrálni a majú heterogénne očakávania (tie sa nedajú vysvetliť rozdielnosťou informácií) o priebehu dividend v prípade riskantného aktíva a nekrytých predajov viazaných v aktíve. Vypozorovali, že cena aktíva je vyššia ako fundamentálne ocenenie ktorýmkoľvek obchodníkom, pretože v sebe zahŕňa právo predať aktívum sekundárnemu investorovi s vyššou očakávanou cenou v budúcnosti.

Vývoj ceny dlhopisu v našom modeli podľa [8] pozorujeme optikou teórie hier, kde cena kontraktu v každom okamžiku závisí od reakcie oboch účastníkov – investora aj obchodníka, od ich očakávaných cien, od cien, ktoré sú obaja ochotní zaplatiť a od ich vôle dohodnúť sa. Detailnejšie sa na celý proces pozrieme v ďalšej podkapitole.

3.1. Hra

Hra v našom modeli prebieha v dvoch fázach. V prvej fáze sa firma emitujúca dlhopis stretne s jedným z potenciálnych investorov a dôjde k cenovej ponuke. V tejto cene, stanovenej firmou, sú zahrnuté náklady, ktoré musí vynaložiť na to, aby sa jej v čase emisie podarilo nájsť najlepšieho investora na trhu. Pri podpisovaní kontraktu často dominujú veľké investičné bankové spoločnosti, ktoré vo všeobecnosti používajú niekoľkostupňové podcenenie.

Nasleduje ďalšia fáza, kde je dlhopis obchodovaný na sekundárnom trhu podľa týchto krokov:

Krok 1. Majiteľ dlhopisu obdrží kupónovú platbu za periódu *t*.

Krok 2. Majiteľ dlhopisu náhodne vyberie potenciálneho investora, ktorému sa pokúsi dlhopis predať. Uvažujme dva rôzne spôsoby náhodného výberu reprezentované dvomi potenciálnymi extrémnymi formami organizácie trhu, aby sme tým získali opis likvidnej prémie, ktorá je rozdielom medzi týmito dvoma procesmi.

Nelikvidný proces výberu investora. Majiteľ dlhopisu si vyberie celú populáciu investorov. Nemôže sa vyvarovať situácií, že v skupine investorov bude aj taký, s ktorým pri realizácii obchodu nebude mať žiaden zisk, prípadne taký, s ktorým by k obchodu vôbec nedošlo. Investor, pri stretnutí s ktorým by k obchodu nedošlo, je napríklad ten, kto požaduje vyššiu rizikovú prémiu ako aktuálny držiteľ dlhopisu, dôsledkom čoho sa nedohodnú na cene.

Likvidný proces výberu. Držiteľ dlhopisu si vyberie podmnožinu investorov, pri stretnutí s ktorými vždy dôjde k uzavretiu obchodu. Čiže riziková prémia požadovaná týmito investormi je nižšia, resp. rovná tej jeho. Takže pri akomkoľvek náhodnom výbere z tejto podmnožiny bude pri realizácií kontraktu vždy možný zisk.

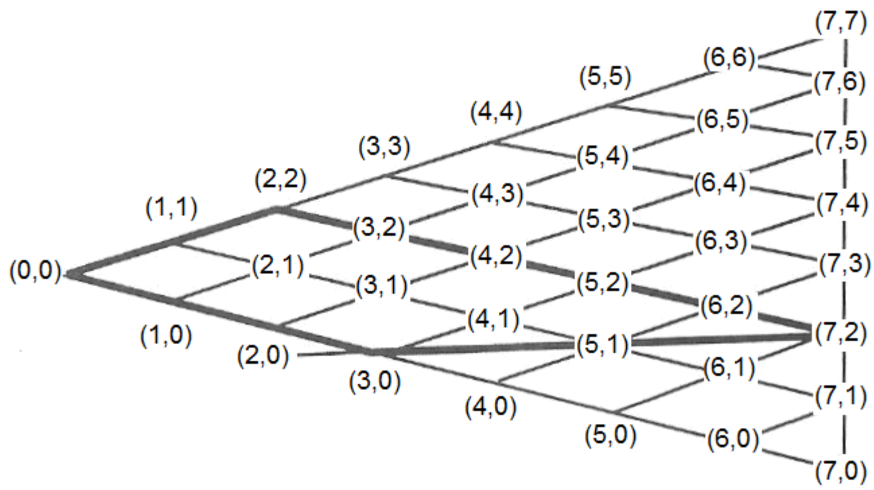
Krok 3. Držiteľ dlhopisu a vybraný investor uzavrú zmluvu za predajnú cenu dlhopisu, ak z uzavretia obchodu plynie zisk.

Pravdepodobnosť zisku z obchodu v našom modeli vychádza z predpokladu, že potenciálni investori požadujú heterogénne prémie za riziko. Definícia zisku z obchodu je nasledovná: keď sa držiteľ dlhopisu a investor stretnú, o zisku hovoríme vtedy, ak obaja súhlasia s cenou, čiže dôjde k realizácií obchodu. Veľkosť zisku z obchodu zodpovedá rozdielu medzi cenou, za ktorú bol obchod zrealizovaný, a najnižšou cenou, za ktorú bol držiteľ dlhopisu ochotný svoj cenný papier predať. Ak sa z trhu vytratí heterogénnosť očakávaní prémie za riziko, nelikvidný a likvidný proces výberu investora sa stanú identickým a zisk z obchodu sa vytratí.

Vráťme sa teraz k nášmu binomickému stromu z obrázka 3.1:

- Označme si uzol na strome ako *(t,m)*, kde *t* predstavuje časovú periódu a *m* je počet krokov smerom hore potrebných k dosiahnutiu tohto uzla. Takýto strom pre 7 časových krokov môžme nájsť na obrázku 3.2. V každom uzle stromu jednotliví investori ocenia dlhopis – v závislosti od toho, v ktorej triede *i* sa nachádzajú, resp. vzhľadom na ich očakávanú rizikovú prémiu α_i – v prípade predaja dlhopisu i v prípade, že k predaju nedôjde.
- Cena, akú má dlhopis pre jeho majiteľa v prípade jeho predaja v uzle *(t,m)* si označme ako $\Pi_i(t,m)$.

- $\Pi^0{}_i(t,m)$ je cena, akú má dlhopis pre jeho majiteľa, ak ho v uzle *(t,m)* nepredá. Jej hodnota závisí od očakávaných cien dlhopisu v budúcnosti.
- Nech $U_j(t,m)$ predstavuje cenu, akú má dlhopis pre investora v prípade, že si ho kúpi v uzle *(t,m)*.
- $U^0{}_j(t,m)$ je cena, akú má dlhopis pre investora, ak si ho v uzle *(t,m)* nekúpi. Túto hodnotu možno chápať ako užitočnosť v danom uzle pre investora, ak si cenný papier nekúpi.



Obrázok č. 3.2 Binomický strom vývoja ceny dlhopisu s označením uzlov.

V každom uzle *(t,m)* budú majiteľ dlhopisu typu *i* (t.j. majiteľ dlhopisu z triedy *i*) a investor typu *j* súhlasiť s uzavretím obchodu iba v prípade, ak z obchodu plynie zisk. A to platí vtedy a len vtedy keď:

$$\Pi_i(t,m) \geq \Pi^0{}_i(t,m) \qquad \text{a} \qquad U_j(t,m) \geq U^0{}_j(t,m). \tag{3.1}$$

Čiže obaja – investor i súčasný držiteľ dlhopisu – uprednostňujú predaj dlhopisu pred jeho ponechaním u pôvodného majiteľa, pre oboch je teda obchod výhodný.

Pričom

$$\Pi_i(t,m) = p_{i,j,t,m} \,. \tag{3.2}$$

Cena, akú má dlhopis pre jeho majiteľa v uzle *(t,m)*, je rovná cene, za ktorú tento cenný papier v danom uzle predá (tj. $p_{i,j,t,m}$).

$$\Pi^0{}_i(t,m) = q\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[c + B_{i,t+1,m+1}\right] + (1-q)\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[c + B_{i,t+1,m}\right]. \tag{3.3}$$

Ak dlhopis jeho majiteľ nepredá, jeho cena bude rovná váženému priemeru očakávaných diskontovaných cien tohto cenného papiera v ďalšom časovom okamžiku. S pravdepodobnosťou q cena dlhopisu porastie, čiže sa bude rovnať $B_{i,t+1,m+1}$, s pravdepodobnosťou $1-q$ klesne a bude rovná $B_{i,t+1,m}$.

$$U_j(t,m) = q\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[c + B_{j,t+1,m+1}\right] + (1-q)\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[c + B_{j,t+1,m}\right] - p_{i,j,t,m} \,. \tag{3.4}$$

Cena dlhopisu pre investora, ktorý si ho v uzle *(t,m)* kúpi, je rovná rozdielu váženého priemeru (s váhami q a $1-q$) očakávaných diskontovaných cien v nasledujúcom časovom okamžiku a predajnej ceny v danom uzle, tzn. ceny, ktorú musel investor za cenný papier zaplatiť (tj. $p_{i,j,t,m}$).

$$U^0{}_j(t,m) = 0 \,. \tag{3.5}$$

Cena dlhopisu pre investora, ktorý si dlhopis nekúpi, je rovná nule.

$p_{i,j,t,m}$ v predchádzajúcich rovniciach je cena, za ktorú je dlhopis predaný a $B_{i,t+1,m+1}$ je očakávaná cena dlhopisu držaného investorom typu i v uzle $(t+1,m+1)$, t.j. očakávaná cena v ďalšom časovom kroku ak cena dlhopisu porastie. $B_{i,t+1,m}$ je očakávaná cena dlhopisu v ďalšom časovom kroku, ak jeho cena klesne.

3.2. Riešenie

Na určenie ceny, za ktorú je dlhopis v jednotlivých uzloch predaný, použijeme **asymetrické Nashovo obchodovacie ekvilibrium** (termín použitý v [1]), v ktorom sila obchodovania držiteľa dlhopisu oproti investorovi je ekvivalentná s $\lambda \in (0,1)$. Sila obchodovania je parameter, ktorý zahŕňa investorove predchádzajúce skúsenosti na trhu a skutočnosť, či je schopný predávať ďalej bez väčších ťažkostí. Napríklad veľká banková spoločnosť má principiálne väčšiu silu obchodovať ako súkromný investor – nováčik na trhu. Výsledná cena dlhopisu sa potom bude odvíjať od očakávaných cien investorov, ktorí sa na obchode podieľajú, s váhami, ktoré zodpovedajú ich silám obchodovania. Tzn. keď by napríklad súkromný investor chcel kúpiť dlhopis za 100 eur a banka, ktorá je momentálne držiteľom toho dlhopisu, by ho bola ochotná predať za 120 eur, výsledná cena (ak dôjde k uzavretiu kontraktu) bude bližšie k sume, ktorú si stanovil účastník s väčšou obchodovacou silou, v tomto prípade banka.

V každom uzle *(t,m)* binomického stromu pri stretnutí držiteľa dlhopisu a investora bude obchod zrealizovaný za cenu

$$p_{i,j,t,m} = \underset{p_{i,j,t,m}}{\arg\max} \left[\Pi_i(t,m) - \Pi^0_i(t,m)\right]^{\lambda} \left[U_j(t,m) - U^0_j(t,m)\right]^{1-\lambda}, \quad j \geq i. \tag{3.6}$$

V prípade, že $j < i$, tak k obchodu nedôjde. V tom prípade totiž investor požaduje väčšiu rizikovú prémiu ($\alpha_j > \alpha_i$), je teda ochotný zaplatiť za dlhopis menej ako jeho majiteľ požaduje.

Rovnica uvedená vyššie je asymetrickým Nashovym obchodovacím ekvilibriom. Jej deriváciou dostaneme hodnotu $p_{i,j,t,m}$, ktorú využijeme v ďalšej interpretácii. (3.6) rozpíšeme ako

$$p_{i,j,t,m} = \underset{p_{i,j,t,m}}{\arg\max} \left[p_{i,j,t,m} - q\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[c + B_{i,t+1,m+1}\right] + (1-q)\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[c + B_{i,t+1,m}\right]\right]^{\lambda} \ldots$$

$$\left[q\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[c + B_{j,t+1,m+1}\right] + (1-q)\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[c + B_{j,t+1,m}\right] - p_{i,j,t,m} - 0\right]^{1-\lambda}. \tag{3.7}$$

Keďže maximalizujeme cez $p_{i,j,t,m}$, môžme celú rovnicu zjednodušiť ako

$$(p_{i,j,t,m}-a)^{\lambda}(b-p_{i,j,t,m})^{1-\lambda} \to \max_{p_{i,j,t,m}}. \tag{3.8}$$

Pre deriváciu f podľa $p_{i,j,t,m}$ platí:

$$\frac{\partial f}{\partial p_{i,j,t,m}} = \lambda(p_{i,j,t,m}-a)^{\lambda-1}(b-p_{i,j,t,m})^{1-\lambda} + (p_{i,j,t,m}-a)^{\lambda}(1-\lambda)(b-p_{i,j,t,m})^{1-\lambda-1}(-1) \tag{3.9}$$

$$= \lambda\left(\frac{b-p_{i,j,t,m}}{p_{i,j,t,m}-a}\right)^{1-\lambda} - (1-\lambda)\left(\frac{p_{i,j,t,m}-a}{b-p_{i,j,t,m}}\right)^{\lambda}. \tag{3.10}$$

Položením $\frac{\partial f}{\partial p_{i,j,t,m}} = 0$ dostávame podmienku

$$\lambda\left(\frac{p_{i,j,t,m}-a}{b-p_{i,j,t,m}}\right)^{\lambda-1} = (1-\lambda)\left(\frac{p_{i,j,t,m}-a}{b-p_{i,j,t,m}}\right)^{\lambda}. \tag{3.11}$$

Ďalšími úpravami dostaneme

$$\lambda(b-p_{i,j,t,m}) = (1-\lambda)(p_{i,j,t,m}-a) \tag{3.12}$$

a následne

$$p_{i,j,t,m} = \lambda b + a(1-\lambda). \tag{3.13}$$

Pričom

$$a = q\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[c + B_{i,t+1,m+1}\right] + (1-q)\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[c + B_{i,t+1,m}\right], \tag{3.14}$$

$$b = q\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[c + B_{j,t+1,m+1}\right] + (1-q)\left(\frac{1}{1+r}\right)\left[c + B_{j,t+1,m}\right]. \tag{3.15}$$

Z (3.13), (3.14) a (3.15) dostaneme výslednú rovnicu na výpočet predajnej ceny dlhopisu:

$$p_{i,j,t,m} = (1-\lambda)\left(\frac{q}{1+r}\left(c+B_{i,t+1,m+1}\right)+\frac{1-q}{1+r}\left(c+B_{i,t+1,m}\right)\right)$$
$$+\lambda\left(\frac{q}{1+r}\left(c+B_{j,t+1,m+1}\right)+\frac{1-q}{1+r}\left(c+B_{j,t+1,m}\right)\right). \tag{3.16}$$

Dlhopis sa predá za túto cenu pre každé $j \geq i$, kde $\alpha_i \geq \alpha_j$, t.j. ak je z obchodu medzi držiteľom dlhopisu typu i a investorom typu j možný zisk. Čiže aktuálny držiteľ dlhopisu požaduje väčšiu rizikovú prémiu ako investor, ktorý si chce dlhopis kúpiť. Pre každé $j < i$, kde $\alpha i < \alpha j$, nie je možný zisk. Držiteľ dlhopisu totiž očakáva menšiu rizikovú prémiu ako investor. Čiže držiteľ dlhopisu typu i si cenný papier ponechá a jeho cena bude rovná:

$$p_{i,j,t,m} = p_{i,i,t,m} = \left(\frac{q}{1+r}\left(c+B_{i,t+1,m+1}\right)+\frac{1-q}{1+r}\left(c+B_{i,t+1,m}\right)\right). \tag{3.17}$$

Špecifický prípad nastane, ak firme hrozí bankrot, tj. keď pravdepodobnosť, že hodnota firmy klesne pod hodnotu V_d, je práve *(1-q)*, čiže na binomickom strome chýba posledný krok smerom dole. V tomto prípade sa predajná cena dlhopisu bude rovnať:

$$p_{i,j,t,m} = (1-\lambda)\left(\frac{q}{1+r}\left(c+B_{i,t+1,m+1}\right)+\frac{1-q}{1+r}\left(1-\alpha_i\right)V_d\right)$$
$$+\lambda\left(\frac{q}{1+r}\left(c+B_{j,t+1,m+1}\right)+\frac{1-q}{1+r}\left(1-\alpha_j\right)V_d\right). \tag{3.18}$$

Kvôli vyjadreniu likvidnej prémie si teraz rozdelíme trh na likvidný a nelikvidný. Za príklad nelikvidného trhu môžme považovať napr. pražskú alebo bratislavskú burzu cenných papierov. Ročný obrat na BCPB dosiahol v roku 2007 11,7 miliárd Eur (podľa [9]). Na druhej strane ako príklad likvidného trhu uvedieme napr. londýnsky devízový trh, kde denný obrat dosahuje priemerne 637 miliárd USD ([15]), čo je viac ako 10 000-krát objem burzy cenných papierov v Bratislave. Cena, za ktorú bude dlhopis v uzle *(t,m)* predaný na likvidnom trhu, si označíme ako $p^L_{i,j,t,m}$.

I samotné dlhopisy si rozdelíme na likvidné a nelikvidné, podľa toho, na akom trhu (likvidnom či nelikvidnom) sa obchodujú. Na ocenenie **nelikvidného dlhopisu** $D_{i,t,m}$ pre jedného jeho držiteľa typu *i* v uzle *(t,m)* musíme zvážiť rozličné ceny podľa pravdepodobností spojených s rôznymi typmi investorov:

$$D_{i,t,m} = \sum_j p_{i,j,t,m} \times \gamma(j), \tag{3.19}$$

kde *γ(j)* je pravdepodobnosť výberu investora typu *j*, ktorá je známa. $\sum_{j=1}^{I} \gamma(j) = 1$.

Na ocenenie **likvidného dlhopisu** $D^L_{i,t,m}$ pre jeho držiteľa typu *i* v uzle *(t,m)* musíme zvážiť rozličné ceny pre rôznych investorov, s ktorými sa držiteľ dlhopisu na trhu stretne, podľa im prislúchajúcich pravdepodobností:

$$D^L_{i,t,m} = \frac{\sum_{j=i}^{I} p^L_{i,j,t,m} \times \gamma(j)}{\sum_{j=i}^{I} \gamma(j)}. \tag{3.20}$$

Sumy začínajú od *i*, keďže uvažujeme iba likvidný spôsob výberu investora, tj. taký, pri ktorom si aktuálny držiteľ dlhopisu vyberá potenciálneho investora iba z tých, ktorí požadujú menšiu (alebo rovnakú) rizikovú prémiu ako on. Čiže sú z triedy *i* alebo vyššej.

Na nájdenie celkových očakávaných hodnôt dlhopisu pre rôznych investorov (t.j. pre rôzne *i*) budeme uvažovať rozličné hodnoty pre jednotlivých investorov a k nim prislúchajúce pravdepodobnosti. Vyjadríme si to zvlášť pre likvidný i nelikvidný dlhopis:

$$D_{t,m} = \sum_j D_{j,t,m} \times \gamma(j) \tag{3.21}$$

a

$$D^L_{t,m} = \sum_j D^L_{j,t,m} \times \gamma(j). \tag{3.22}$$

Teraz si v kontexte nášho modelu zadefinujme **likviditno-trhové riziko**. Skladá sa z dvoch komponentov. Prvým je trhové riziko, ktoré pre majiteľa dlhopisu predstavuje risk, že ho nebude schopný predať za primeranú cenu v ľubovoľný časový okamžik. Druhou zložkou je likvidné riziko, t.j. riziko, že obchodník bude nútený predať svoj dlhopis so stratou z istiny. Do nášho modelu sa trhové riziko premietne prostredníctvom obmedzení príležitostí vhodných na obchodovanie. Tieto nastanú iba v určitých časových intervaloch. Keď sa frekvencia príležitostí vhodných na obchodovanie zvyšuje, (t.j. čas medzi dvomi periódami klesá), klesá zároveň aj trhové riziko. Druhý komponent, t.j. likvidné riziko, sa premietne ako problém párovania (t.j. hľadania a nachádzania vhodných) investorov s heterogénnymi očakávaniami rizikovej prémie. Likvidno-trhové riziko je rozdiel medzi hodnotou dlhopisu na likvidnom trhu a hodnotou toho istého dlžného kontraktu na trhu, kde sa očakávajú problémy s párovaním investorov. Naša definícia likvidno-trhového rizika vedie k definícií **likvidno-trhovej prémie:**

$$LP_{t,m} \equiv D^{L}{}_{t,m} - D_{t,m} \,. \tag{3.23}$$

Keď sa z trhu vytratí trhové riziko (t.j. keď interval medzi dvomi vybranými príležitosťami na obchodovanie bude ľubovoľne malý), likvidno-trhové riziko vymizne tiež. Podobne, keď z trhu zmizne likvidné riziko (t.j. keď sa vytratí heterogenita rizikovej prémie u investorov), likvidno-trhové riziko sa stratí tiež. Môžeme poznamenať, že trhové riziko (definované ako časové obmedzenie na obchodovanie) ostáva konštantné počas celej doby splatnosti dlhopisu, zatiaľ čo likvidné riziko s časom rastie. Pretože s pribúdajúcim časom je stále menej a menej pravdepodobné, že na trhu nájdeme vhodného investora, s ktorým by bol pri realizácií obchodu možný zisk.

V každom uzle stromu vypočítame očakávané predajné ceny dlhopisu pre každý typ investora. Pri výpočte sa pozeráme iba na uzly, v ktorých sa obchoduje, t.j. uzly nad hranicou bankrotu. Náš model oceňovania dlhopisov teraz aplikujeme na reálne dáta z trhu.

4. APLIKOVANIE MODELU NA REÁLNE DÁTA

Model na oceňovanie dlhopisov pomocou binomického stromu uvedený v 3. kapitole sme aplikovali na dáta z trhu a našou snahou bolo nakalibrovať premenné tak, aby výstup zo softvéru bol čo najbližšie skutočným trhovým cenám.

Náš teoretický model vychádza z počiatočnej trhovej ceny dlhopisu, pričom vývoj tejto ceny neberie ako stochastickú premennú, ktorá by mohla dosiahnuť ľubovoľné hodnoty. Predpokladá (ako v teórií hier), že cena dlhopisu môže dosiahnuť iba určité hodnoty. Konkrétne tie, ktoré prislúchajú jednotlivým uzlom binomického stromu (obr. 3.1, príp. 3.2). Všetky uzle nášho binomického stromu sú ekvilibriá, vypočítané Nashovým ekvilibriom, do ktorých sa cena dlhopisu počas svojho vývoja dostane s nejakou pravdepodobnosťou. Predpokladajme, že vieme, pri akej hodnote dlhopisu sa firma dostane do bankrotu. Poznáme tiež nominálnu hodnotu dlhopisu, úrokovú mieru a výšku kupónu, takže si vieme namodelovať vývoj ceny dlhopisu na binomickom strome.

Pri praktickej aplikácií nášho modelu sme museli postupovať opačne. Model pracuje rekurentne[2]. Rovnako ako v teórií hier, kde hľadáme Nashove ekvilibriá odzadu. Takže pri realizácií vychádzame z konca binomického stromu, kde sa dlhopis ocitne v čase svojej maturity. Tu poznáme dve hodnoty dlhopisu – jeho nominálnu hodnotu a hodnotu, pri ktorej sa firma nachádza v bankrote. Teoreticky by sme mohli odhadnúť túto hodnotu bankrotu už pri samotnej emisií dlhopisu, kvôli našej snahe o čo najexaktnejší výpočet však budeme pracovať nie s odhadnutými, ale s reálnymi číslami. Kvôli tomu potrebujeme firmu, ktorá už zbankrotovala, resp. sa nachádza v konkurze, aby sme sa z historických údajov mohli dostať k trhovej cene dlhopisu, ktorú dosiahol v čase bankrotu spoločnosti.

[2] Čo vidíme napr. pri finálnom vyjadrení Nashovho obchodovacieho ekvilibria (3.16), kde hodnota p s indexom t závisí od hodnoty premennej B s indexom $t+1$.

4.1. Takefuji Corporation

Spomedzi spoločností, ktoré vyhlásili minulý rok bankrot, sme si vybrali na japonskom trhu firmu Takefuji, ktorá sprostredkovávala spotrebiteľské úvery. Japonský termín sarakin (サラ金) označuje legálneho úžerníka, ktorý poskytuje nezabezpečené pôžičky za vysoké úroky. Niečo podobné ako Home Credit alebo Provident Financial u nás. V Japonsku využíva alebo využilo tieto služby približne 14 miliónov obyvateľov, čo predstavuje 10% populácie. Na trhu pôsobí okolo 10 000 takýchto spoločností, ktoré sprostredkovali úvery v celkovom objeme prevyšujúcom 100 miliárd USD. Úvery pre spotrebiteľov a malé firmy sú dlhohodobo jedným z najslabších ohnísk japonského finančného systému. Ale kvôli svojej ľahkej dostupnosti sú jednoduchým automatom na peniaze. Úroky na úvery dosiahli v minulosti až neuveriteľných 29,2%, vďaka regulačnému zákonu z roku 2006 sú dnes obmedzené hornou hranicou 15 - 20% a ich objem nemôže, podľa BBC ([11]), presiahnuť tretinu priemerného ročného príjmu klienta. Takefuji corporation má svoje dcérske spoločnosti v USA, Číne a Spojenom kráľovstve. K 31. marcu 2010 spoločnosť prevádzkovala len na území Japonska 786 pobočiek ([16]).

Počas svojej 40 ročnej histórie spoločnosť vyčnievala pre svoje nekonvenčné praktiky získavania financií ako aj kontroverzného zakladateľa Yasuo Takei, ktorý spoločnosť založil v roku 1966. Takefuji corporation sa v 60-tych a 70-tych rokoch sústredila hlavne na požičiavanie ženám v domácnosti, vďaka čomu sa spoločnosť rýchlo rozrástla. Zakladateľ Yasuo Takei neustále žaloval média kvôli kritickým článkom o jeho spoločnosti. Bol zatknutý, pretože chcel odpočúvať telefón jedného novinára. Takefuji bola známa aj svojím kontroverzným spôsobom vymáhania peňazí. V roku 2008 jeden zo zamestnancov púšťal hlasnú hudbu pred domom jedného z dlžníkov, aby ho tak zahanbil a prinútil zaplatiť. Po prijatí regulačného zákona sa pomer schválených úverov spoločnosti k celkovému počtu žiadostí o úvery postupne znižoval. Koncom augusta 2010 dosiahol iba 4,4 %, čo veľmi zhoršilo finančnú situáciu spoločnosti.

Podľa Bloombergu ([12]) si spoločnosť účtovala na úrokoch až neuveriteľných 29 miliárd USD (Y 2.4 biliónov). Predstavenstvo spoločnosti v decembri 2009 oznámilo očakávanú stratu vo výške Y 8 800 miliónov vo fiškálnom roku končiacom v marci 2010.

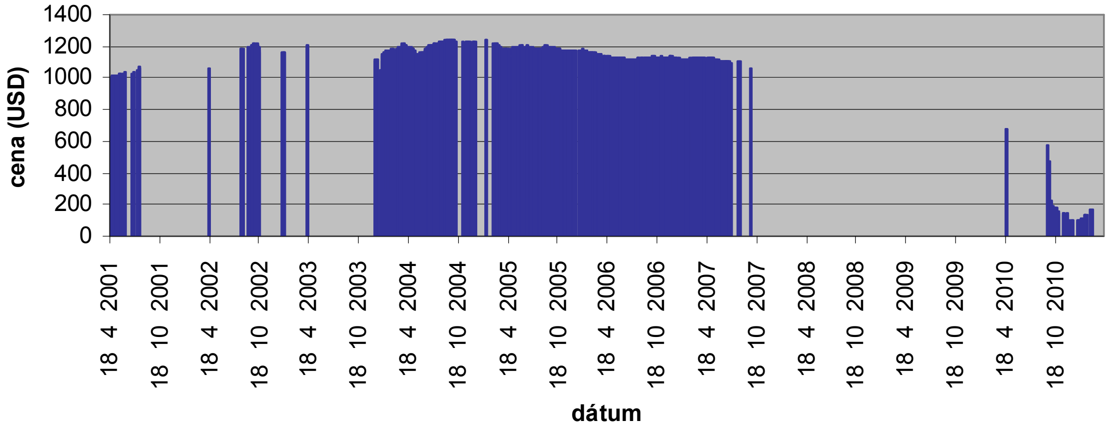
Podobné negatívne vyhliadky boli podľa Reuters ([17]) aj na nasledujúci fiškálny rok, kedy sa počítalo so stratou až Y 19 994.

28. septembra 2010 požiadala spoločnosť Takefuji o ochranu pred veriteľmi pre svoj dlh vo výške Y 433,6 miliárd (5,2 mld USD), čo bol tretí najväčší bankrot minulého roka v krajine vychádzajúceho slnka. Obvinili hlavne regulačný zákon, ktorý obmedzil výšku úrokov na úvery a tým rapídne znížil príjmy spoločnosti. Nasledovala rezignácia prezidenta spoločnosti Akira Kiyokawa, ktorého (podľa [14]) nahradil Junichi Yoshida. Neočákava sa, že by bankrot Takefuji mal nejaký dôležitý vplyv na finančný sektor krajiny.

Ratingové agentúy v posledných rokoch kontinuálne znižovali rating spoločnosti. Moody´s v máji 2009 znížila rating Takefuji z Baa2 na Baa3. V novembri toho istého roku na Caa1. 25.3.2010 bol rating Takefuji Caa2 s negatívnym výhľadom ([17]).

4.2. Dáta

Takefuji corporation počas svojej existencie emitovala niekoľko dlhopisov. Z tých, ktoré boli obchodované v čase vyhlásenia bankrotu spoločnosti, sme si vybrali 10-ročný dlhopis s identifikačným číslom ISIN US87406DAC20 emitovaný v apríli 2001. Maturita dlhopisu bola 15.4.2011. Kupón vo výške 9,2 % p.a. bol vyplácaný polročne. Na obrázku 4.1 vidíme vývoj trhovej ceny dlhopisu odo dňa jeho emisie až po dnešok (zdroj: Bloomberg). V dňoch, pri ktorých na grafe nie je žiadna cena, nebol dlhopis na burze obchodovaný.



Graf č. 4.1 Vývoj trhovej ceny dlhopisu spoločnosti Takefuji co. Zdroj: Bloomberg.

Keď sa bližšie pozrieme na vývoj okolo dňa bankrotu spoločnosti, všimneme si viditeľný pokles ceny dlhopisu. Trhové ceny sú v tabuľke 4.2. V deň bankrotu spoločnosti klesla cena jej dlhopisu zo 470 USD na 205 USD, čo predstavuje prepad až o 56,4 %.

Keďže dlhopis vypláca kupóny polročne, rozhodli sme sa nastaviť časový krok v našom modeli na pol roka. Za 10 rokov existencie dlhopisu to predstavuje 20 časových krokov. Trhová cena dlhopisu v čase jeho emisie bola 997,09 USD, nominálna hodnota 1 000 USD. Kupóny sú vo výške 9,2% p.a. (t.j. 46 USD pri polročnom vyplácaní). Viac informácií o dlhopise možno nájsť na screenshote z Bloombergu v prílohe.

Predpokladajme, že cena dlhopisu môže rásť i klesať s rovnakou pravdepodobnosťou, t.j. $q = 1 - q = 0{,}5$. A predpokladajme tiež, že na trhu sú dvaja účastníci, ktorí sa snažia zrealizovať obchod a majú porovnateľnú silu obchodovať. Jeden z účastníkov je aktuálnym držiteľom dlhopisu, druhý má zámer tento cenný papier kúpiť. Je dobré si uvedomiť, že toto zjednodušenie nás nijako neobmedzuje. Hoci účastníkov trhu môže byť v konečnom dôsledku viac, pre naše pozorovanie sú podstatní naozaj len tí dvaja, ktorí sa na obchode podieľajú – majiteľ dlhopisu a investor so záujmom o kúpu. Na určenie bezrizikovej úrokovej miery, s ktorou v modeli pracujeme, sa pozrieme na overnight úrokovú sadzbu japonskej centrálnej banky. Jej priemerné hodnoty za jednotlivé roky počas životnosti dlhopisu sú uvedené v tabuľke 4.3. Priemer za celé obdobie (IX. 2001 - 2011) bol podľa Bank of Japan 0,13574 %. S touto úrokovou sadzbou budeme pracovať.

dátum	cena (USD)
16.9.2010	581,25
17.9.2010	
20.9.2010	
21.9.2010	
22.9.2010	
23.9.2010	
24.9.2010	
27.9.2010	**470**
28.9.2010	**205**
29.9.2010	222,5
30.9.2010	220
1.10.2010	200
4.10.2010	195
5.10.2010	195
6.10.2010	172,5
7.10.2010	170
8.10.2010	168,75
11.10.2010	
12.10.2010	
13.10.2010	178,75
14.10.2010	176,25
15.10.2010	

Tabuľka č. 4.2 Vývoj trhovej ceny dlhopisu Takefuji co. okolo dňa defaultu spoločnosti.

Average Uncollateralized Overnight Call Rate	
Rok	**% p.a.**
2001 (IX.-XII.)	0,0030
2002	0,0018
2003	0,0013
2004	0,0008
2005	0,0011
2006	0,1245
2007	0,4727
2008	0,4615
2009	0,1053
2010	0,1006
2011 (I.)	0,0930
Priemer	**0,13574**

Tabuľka č. 4.3 Priemerná úroková miera japonskej centrálnej banky. Zdroj: BoJ.

Ako sme už spomenuli, náš model pracuje rekurentne, pri praktickej realizácií sa teda najprv pozrieme na konečnú vetvu stromu. Ak by sme nepočítali s možným bankrotom firmy, majiteľovi dlhopisu by bol v čase maturity vyplatený nominál. Dnešná hodnota dlhopisu sa v tom prípade počíta ako diskontovaná hodnota nominálu + diskontovaná hodnota kupónov.

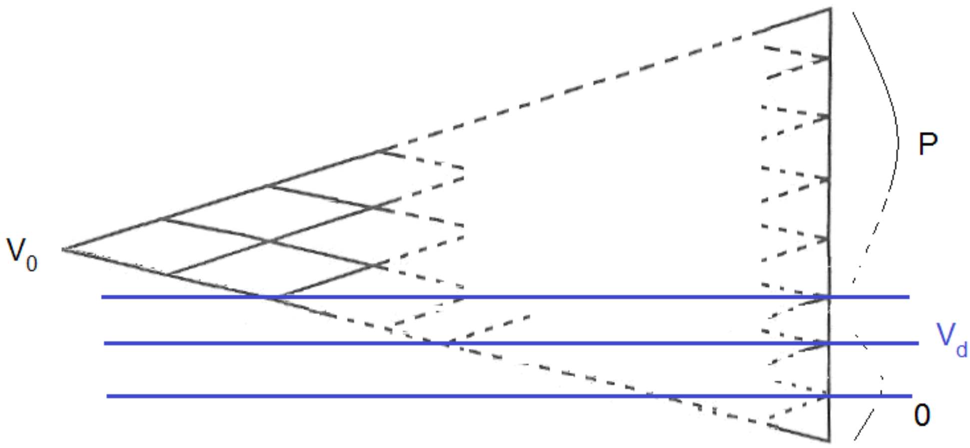
$$PV = \frac{\frac{c}{2}}{1+\frac{r}{2}} + \frac{\frac{c}{2}}{(1+\frac{r}{2})^2} + \ldots + \frac{\frac{c}{2}}{(1+\frac{r}{2})^{2T}} + \frac{P}{(1+\frac{r}{2})^{2T}}. \tag{4.1}$$

Čo v našom prípade znamená

$$PV = \frac{\frac{92}{2}}{1+\frac{0,00136}{2}} + \frac{\frac{92}{2}}{(1+\frac{0,00136}{2})^2} + \ldots + \frac{\frac{92}{2}}{(1+\frac{0,00136}{2})^{20}} + \frac{1000}{(1+\frac{0,00136}{2})^{20}}. \tag{4.2}$$

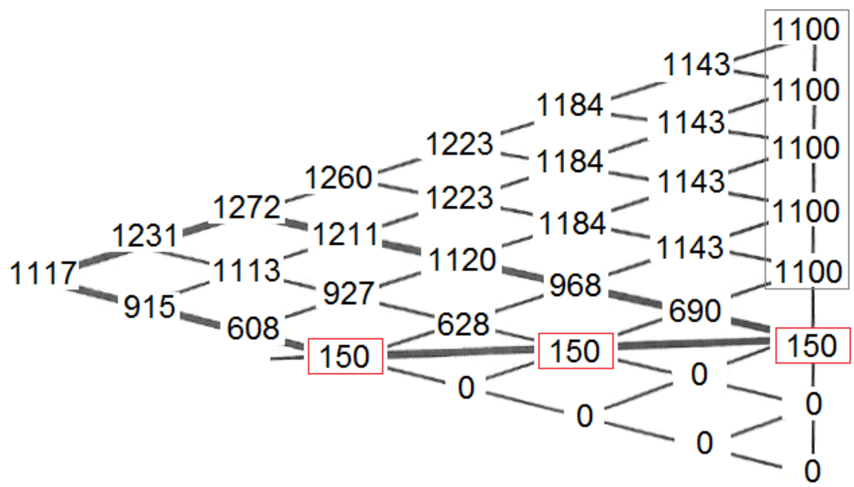
Vypočítaná súčasná hodnota dlhopisu (ku dňu jeho emisie) je 986,5 USD, čo je porovnateľné s jeho skutočnou trhovou cenou v deň emisie. Vypočítaná súčasná hodnota kupónov ku dňu jeho emisie predstavuje 913,5 USD. Takto by sme počítali cenu dlhopisu v čase jeho emisie, keby sme do nášho modelu nezahrnuli bankrot. Alebo keby sa cena dlhopisu pohybovala iba v bezrizikovom pásme binomického stromu (obr. 3.1.). My však uvažujeme celý strom, náš model pri výpočte zahŕňa aj možný bankrot spoločnosti.

Počítame s tým, že v prípade bankrotu dostanú držitelia dlhopisov ako výplatu namiesto nominálu iba jeho trhovú hodnotu v tom okamihu. Čo v našom prípade znamená 205 USD. Táto hodnota zodpovedá nášmu V_d, teda hodnote dlhopisu v čase bankrotu spoločnosti. V tomto bode prechádza binomickým stromom čiara bankrotu. Čo však nevieme je to, v akej časti binomického stromu sa táto čiara nachádza. Preto urobíme niekoľko pozorovaní, pri ktorých budeme meniť umiestnenie čiary bankrotu na binomickom strome. A budeme sa snažiť nakalibrovať premennú zodpovedajúcu umiestneniu čiary bankrotu vzhľadom na poslednú vetvu stromu tak, aby dopočítaná súčasná hodnota dlhopisu v čase emisie bola čo najbližšie tej skutočnej. Idea je taká, že ak by hranica bankrotu prechádzala veľmi nízko, povedzme nad posledným uzlom poslednej vetvy stromu (tzn. niekde medzi uzlami (7,0) a (7,1) na obrázku 3.2), vtedy by bola pravdepodobnosť bankrotu spoločnosti počas životnosti dlhopisu veľmi malá a teda jeho cena v čase emisie by bola bankrotom iba málo ovplyvnená. Ak by však hranica bankrotu prechádzala vyššie, povedzme približne v polovici poslednej vetvy binomického stromu (hovoríme o uzloch (7,2) a (7,3) z obrázku 3.2), bola by pravdepodobnosť bankrotu spoločnosti väčšia a tým by bola aj jeho cena v čase emisie bankrotom viac ovplyvnená a teda nižšia. Náčrt tohto problému je na obrázku 4.4. Výplata v najnižšej časti stromu je nula, pretože ak sa spoločnosť dostane do bankrotu a držitelia dlhopisov svoj cenný papier nepredajú za trhovú cenu v deň bankrotu, nebude im v čase maturity vyplatený nominál a ich cenný papier sa stáva bezcenným. Na finančných trhoch v niektorých krajinách bankrot spoločnosti automaticky naznamená, že jej cenné papiere sa prestanú obchodovať a stanú sa bezcennými, spoločnosť sa z bankrotu môže dostať. Náš model však od tejto skutočnosti abstrahuje a pozerá sa na bankrot ako na jednorázovú záležitosť.



Obrázok č. 4.4 Binomický strom vývoja ceny dlhopisu s očakávanými výplatami na konci. Viacero čiar V_d znamená, že ešte nevieme, kadiaľ hranica bankrotu prechádza.

Na výpočet počiatočnej ceny (V_0) použijeme vzťahy (3.16), (3.17) a (3.18). Z hodnôt na konci binomického stromu vypočítame hodnoty dlhopisu na predposlednej vetve (uzly (*T-1,0*) až (*T-1,T-1*), v našom prípade (*19,0*) až (*19,19*)) a postupujeme v čase smerom k *0*, tzn. k hodnote V_0, ktorú si chceme vyjadriť. Pričom hodnoty na čiare bankrotu zodpovedajú V_d, hodnoty v obchodovacom a bezrizikovom pásme (obrázok 3.1) postupne počítame diskontovaním dvoch nasledujúcich hodnôt, ktoré z daného uzla vychádzajú. V bezrizikovom pásme teda iba diskontujeme nominál (+ pripočítame kupónovú platbu), v obchodovacom pásme vypočítame priemer (resp. pomer – podľa pravdepodobností q a $1-q$) hodnôt, ktoré z uzla vychádzajú, pričom tá nižšia z nich určite závisí od hodnoty V_d. Týmto rekurentným výpočtom sa závislosť na hodnote V_d dostane aj do počiatočnej hodnoty V_0. V akom pomere – to závisí od toho, kde na binomickom strome prechádza čiara bankrotu. Pre lepšiu ilustráciu výpočtu hodnôt dlhopisu v našom modeli pre jednotlivé uzly binomického stromu prikladáme obrázok 4.5, kde máme 7 ročný dlhopis, ktorý vypláca ročný kupón (preto 7 časových periód) vo výške 10 % p.a. Nominál je 1000 USD a bezriziková úroková miera v danom období bola 5%. Predpokladajme, že spoločnosť zbankrotuje vtedy, keď hodnota jej dlhopisu klesne na 150 USD. Vypočítané hodnoty dlhopisu v jednotlivých uzloch pre tento príklad sú na obrázku 4.5.



Obrázok č. 4.5 Binomický strom s vypočítanými hodnotami dlhopisu v jednotlivých uzloch.

Teraz, keď vieme, ako náš model oceňuje dlhopis, aplikujeme ho na dáta spoločnosti Takefuji a porovnáme výstupy zo softvéru Matlab.

4.3. Výstupy

Ako hodnotu dlhopisu na konečnej vetve (nad čiarou bankrotu) sme nastavili jeho nominálnu hodnotu (premenná P=1000). Keďže v deň bankrotu Takefuji bola trhová cena jej dlhopisu 205 USD, nastavíme hranicu bankrotu ako hodnotu 205 (premenná V_d). V modeli meníme hodnotu premennej k, ktorá predstavuje poradové číslo uzla (zdola) v poslednom časovom okamžiku, pričom cez tento uzol prechádza čiara bankrotu. (Pre lepšiu ilustráciu: obrázok 4.4). Kalibráciou premennej k sa snažíme docieliť, aby počiatočná hodnota dlhopisu bola čo najbližšie k jeho skutočnej hodnote. Zodpovedajúce k predstavuje najlepšiu kalibráciu. Tabuľka 4.6 zobrazuje ceny dlhopisu na začiatku binomického stromu v závislosti od k.

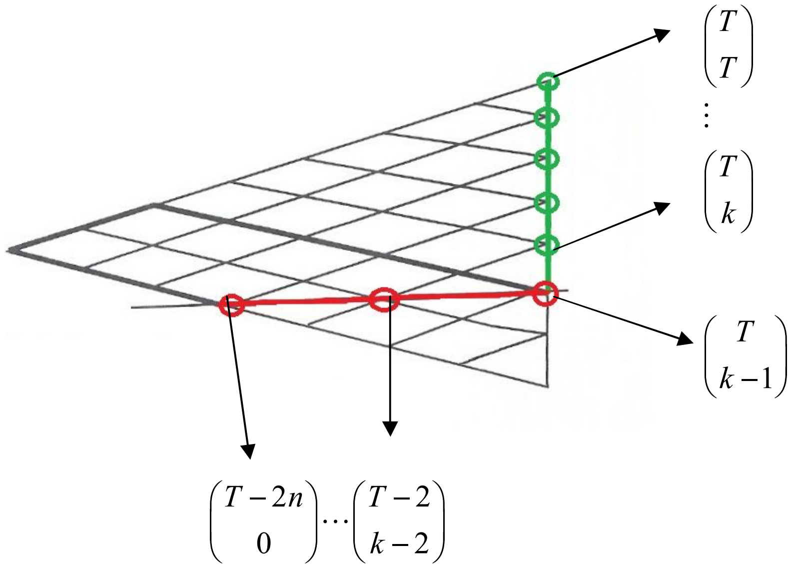
k	V0 [USD]	
	s kupónom	bez kupónu
1	1 945,40	986,52
2	1 945,40	986,51
3	1 945,20	986,35
4	1 944,00	985,35
5	1 938,70	980,88
6	1 919,30	965,67
7	1 863,50	925,12
8	1 730,20	838,28
9	1 459,00	686,41
10	976,51	467,32

Tabuľka č. 4.6 Cena dlhopisu v prvom uzle binomického stromu v závislosti od hodnoty k.

Keď porovnáme skutočnú trhovú cenu dlhopisu v deň jeho emisie (997,09 USD) s výstupmi zo softvéru uvedenými vyššie, vidíme, že táto cena je vyššia ako všetky výstupy v pravej časti tabuľky (keď do výsledku nepočítame dnešnú hodnotu kupónu – väčšina dlhopisov je reálne predávaná za cenu, ktorá odzrkadľuje iba jeho nominálnu hodnotu, nie kupóny. Tie sú považované za niečo navyše). Výstupy nám teda naznačujú, že v skutočnej trhovej cene nášho dlhopisu nie je bankrot vôbec braný do úvahy - dokonca ani v najkrajnejšom uzle (*20,0*) (čo by zodpovedalo hodnote pri k = 1).

Pozrime sa teraz na cenu dlhopisu v čase jeho emisie, ktorú sme dostali iba jednoduchým diskontovaním jeho nominálnej hodnoty (986,5 USD) a kupónových platieb (913,5 USD). Spolu nám vyšlo 1900 USD. Z tabuľky 4.6 vidíme, že v tomto prípade by najlepšou aproximáciou bola hodnota zodpovedajúca $k = 6$, tzn. 1919,3 USD, ktorá je nášmu výsledku najbližšie spomedzi hodnôt v strednej časti tabuľky 4.6. Hodnota dlhopisu v čase jeho emisie sa teda najviac približuje nášmu modelu vtedy, ak $k = 6$, čiže keď čiara bankrotu prechádza 6. uzlom poslednej vetvy stromu (t.j. (*20,5*). Čo nám táto informácia hovorí? Hodnota k, ktorú sme dostali, nám určuje, ako vysoko stromom prechádza čiara bankrotu. Jej konkrétne číselné vyjadrenie môžme použiť pre iný dlhopis spoločnosti, resp. pre dlhopis spoločnosti, ktorá je podobná tej našej. Stačí, keď budeme poznať nominálnu hodnotu tohto dlhopisu s podobnými parametrami (resp. dlhopisu emitovaného spoločnosťou s obdobnou hospodárskou štruktúrou) a jeho predajnú cenu v čase emisie. Vďaka k, ktoré už poznáme, vieme priamo z modelu vypočítať hodnotu dlhopisu, pri ktorej sa spoločnosť bude nachádzať v bankrote. Čím by k bolo väčšie, tým by sme očakávali bankrot firmy s väčšou pravdepodobnosťou. Pokúsme sa teraz numericky vyjadriť pravdepodobnosť očakávaného bankrotu spoločnosti.

Na vypočítanie pravdepodobnosti bankrotu spoločnosti, ktorá emitovala dlhopis, nám poslúži Pascalov trojuholník. Počet uzlov stromu v poslednom časovom okamžiku je o 1 väčší ako časová perióda. Pravdepodobnosti dosiahnutia jednotlivých uzlov sú rôzne. Napr. do najspodnejšieho uzla sa dá dostať len jednou jedinou cestou. Podobne do najvrchnejšieho. Najviac pravdepodobné je, že cena dlhopisu ostane v intervale okolo hodnoty, (a teda najväčší počet možných ciest ako sa táto hodnota dá dosiahnuť,) za ktorú bol emitovaný. Pričom jednotlivé čísla vyjadrujúce počet možností, koľkými cestami sa ten ktorý vrchol stromu dá dosiahnuť, sú čísla zodpovedajúce Pascalovmu trojuholníku. Pravdepodobnosť, že sa spoločnosť dostane do bankrotu, sa dá vyjadriť ako podiel sumy počtov ciest k dosiahnutiu jednotlivých uzlov na čiare bankrotu od jej začiatku až po posledný časový okamžik (červené uzly na binomickom strome na obrázku 4.7) k celkovému počtu možných ciest do všetkých vrcholov na poslednej vetve stromu, ktoré sú vyššie ako čiara bankrotu + súčet ciest do uzlov na línii bankrotu (zelené + červené uzly na obrázku 4.7).



Obrázok č. 4.7 Binomický strom s označením uzlov na čiare bankrotu.

Čísla v čitateli zlomku začínajú vyjadrením posledného uzla na čiare bankrotu a pokračujú vyjadrením všetkých uzlov na tejto čiare smerom doľava. Ich súčet sa dá vyjadriť ako

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{T-2i+2}{k-i}. \tag{4.3}$$

Menovateľ zlomku na výpočet pravdepodobnosti očakávaného bankrotu spoločnosti bude súčtom čitateľa (tzn. uzlov bankrotu) a časti T-teho riadku Pascalovho trojuholníka (od línie bankrotu smerom nahor):

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{T-2i+2}{k-i} + \sum_{j=0}^{T-k} \binom{T}{k+j}. \tag{4.4}$$

V našej realizácií máme 20 časových periód a najlepšia aproximácia zodpovedá k = 6. Pravdepodobnosť, že sa firma dostane do bankrotu potom (zo (4.3) a (4.4)) zodpovedá hodnote:

$$\frac{\sum_{i=1}^{6}\binom{20-2i+2}{6-i}}{\sum_{i=1}^{6}\binom{20-2i+2}{6-i}+\sum_{j=0}^{14}\binom{20}{6+j}}. \tag{4.5}$$

Čo sa približne rovná 1,84 %.

Vypočítanú hodnotu môžme použiť pri porovnávaní pravdepodobností bankrotu tej istej spoločnosti v inom časovom období, resp. pri posudzovaní pravdepodobnosti bankrotu inej spoločnosti s podobnou hospodárskou štruktúrou.

5. ZÁVER

Cieľom diplomovej práce bolo popísať a vysvetliť model oceňovania dlhopisov metódou binomického stromu, ktorý vychádza z teórie hier. V praktickej časti práce sme v softvéri Matlab nasimulovali v teoretickej časti opísaný model oceňovania dlhopisov pre reálnu spoločnosť a kalibráciou premenných modelu sme docielili výstup, ktorý sa približoval trhovým pozorovaniam, resp. sme fidovali diskontované hodnoty cenného papiera. Pri pozorovaní výsledkov sme dospeli k záveru, že čím menej očakávame bankrot spoločnosti (čím je menšia hodnota premennej k), tým sa k trhovej hodnote dlhopisu viac približujeme. Z výstupu teda usudzujeme, že v trhovej cene dlhopisu nie je bankrot braný do úvahy. Lepšiu kalibráciu dostaneme, keď výstupy porovnáme s diskontovanou hodnotou dlhopisu. Vtedy nám výjde, že najlepšia aproximácia zodpovedá $k = 6$. Pri tejto aproximácií je očakávaná pravdepodobnosť bankrotu spoločnosti na úrovni 1,84%.

Hodnota parametra k, ktorú sme dostali ako výsledok, by sa dala použiť pre spoločnosť s podobnou štruktúrou a podobnými hospodárskymi výsledkami, resp. pre tú istú spoločnosť v inom časovom období, resp. pre iný dlhopis tejto spoločnosti. Z počiatočnej hodnoty dlhopisu, ktorá je známa, a nami získanej hodnoty parametra k potom vieme pre danú spoločnosť určiť pravdepodobnosť bankrotu, resp. hodnotu, pri ktorej ku krachu dôjde.

Z môjho pohľadu sa tento model javí ako ťažko uchopiteľný v praxi kvôli nejednoznačnej a náročnej kalibrácií a kvôli tomu, že pre presnejší výpočet musíme už na začiatku poznať cenu dlhopisu, ktorú dosiahne, keď sa firma dostane do bankrotu. Je však dobre uplatniteľný pre kalibráciu iných modelov ako testovací model. Myslím si, že jeho hlavné využitie môže byť v meraní rizika v bankách ako pomocný nástroj kontroly ich kalibrácie.

Použitá literatúra

[1] Binmore, K., Rubinstein, A., and Wolinsky, A.: *The Nash bargaining solution in economic modelling*. Rand Journal of Economics, Vol.17, No. 2, Summer 1986, p.176-88.

[2] Blažková, L.: *Úvod do riadenia finančných rizík*. Finančný manažér, Jeseň 2010, p. 88-90. Available online at http://www.statsoft.cz/file1/PDF/financny%20manazer%202010-3%2088-90.pdf

[3] Harrison, J. M., and Kreps, D. M.: *Speculative investor behavior in a stock market with heterogeneous expectations*. Quarterly Journal of Economics, Vol.92, No. 2, 1978, p.323-36.

[4] Hsu, J. C., Saá-Requejo, J., Santa-Clara, P.: *A Structural Model of Default Risk*. Journal of Fixed Income, vol. 19, No. 3, p.77-94, Winter 2010.

[5] Jakola, M.: Credit Default Swap Index Options. Kellogg School of Management, Northwestern University, 2006. Available online at: http://www.kellogg.northwestern.edu/research/fimrc/papers/jakola.pdf

[6] Kaderová, A.: *Rozdelenie kreditných derivátov*. Katedra matematiky, Fakulta hospodárskej informatiky EU BA, 2010. Available online at http://www.fhi.sk/files/katedry/km/veda-vyskum/prace/2010/kaderova3.pdf

[7] Kaderová, A.: *Základné pojmy z oblasti merania a riadenia kreditného rizika*. Katedra matematiky, Fakulta hospodárskej informatiky EU BA, 2010. Available online at http://www.fhi.sk/files/katedry/km/veda-vyskum/prace/2010/kaderova2.pdf

[8] Tychon, P., and Vannetelbosch, V.: *A Model of Corporate Bond Pricing with Liquidity and Marketability Risk*. Journal of Credit Risk vol.3, 2005, p.3-35.

[9] http://firmy.etrend.sk/firmy-a-trhy-financny-sektor/burzu-zivia-statne-dlhopisy.html

[10] http://spravy.pravda.sk/rizikova-premia-greckych-dlhopisov-vyrazne-klesla-f8y-/sk_ekonomika.asp?c=A100510_123542_sk_ekonomika_p01

[11] http://www.bbc.co.uk/news/business-11424914

[12] http://www.bloomberg.com/news/2011-02-22/sazka-takefuji-espanola-del-zinc-arcandor-quinn-bankruptcy.html

[13] www.financnik.sk

[14] http://www.ft.com/cms/s/0/47006c38-cae0-11df-bf36-00144feab49a.html#ixzz1GW5M71bc

[15] http://www.internet.sk/mediakurier/uk/12.htm

[16] http://www.reportlinker.com/p0342437/Takefuji-Corporation-8564-Financial-and-Strategic-SWOT-Analysis-Review.html#ixzz1GW2vZNfl

[17] http://www.reuters.com/finance/stocks/keyDevelopments?symbol=TAKAF.PK

Príloha 1

Kód v Matlabe na ocenenie dlhopisov metódou binomického stromu uvedenej v 3. kapitole.

```
%maturita n

r=0.0013574/2;  % priemer urokovej miery BoJ p.a. /
                % pocet casovych okamzikov - semi annual

q=0.5;          % pravdepodobnost pohybu hore = narastu ceny dlhopisu
c=92/2;         % kupon [USD]
P=1000;         % istina dlhopisu [USD]
Vd=205;         % hodnota bankrotu

lambda=0.5;     % obchodovacia sila 1. investora oproti 2.

gamma1=0.5;     % pravdepodobnost vyberu 1.investora
gamma2=1-gamma1;

v=1/ (1+r);     % sucasna hodnota ur. miery

%--------------------------------------------------------------------------

T=20;           % 10 rocny dlhopis, semi annual kupony
k=6             % poradove cislo uzla zdola v poslednom casovom okamziku,
                % cez ktory prechadza linia bankrotu. k menime

pom=mod(T,2);                       % zvysok po deleni
if (pom==0 && k>T/2)||(pom==1 && (k > T/2 + 1))  % ak by dlhopis uz hned na
                                                 % zaciatku bol v bankrote-
                                                 % linia bankrotu prechadza
                                                 % vyssie ako je hodnota
                                                 % v uzle (0,0).
       display('dlhopis je v bankrote');
else

for t=(T+1):-1:1    % od 21 po 1
    for m=1:t
        B1(t,m)=0;  % do vsetkych uzlov nastavime hodnotu 0,
        B2(t,m)=0;  % aby sme mali 0 pod liniou bankrotu
    end
end

  B1(T+1,k) = Vd;   % na bankrotovu hranicu v case T nastavime
                    % sumu, ktoru pri bankrote dostane investor
  B2(T+1,k) = Vd;


for m=(k+1):(T+1)   % od hranice bankrotu smerom hore nastavime za sumu,
                    % ktoru dostane investor, c+P.
 B1(T+1,m) = c+P;
 B2(T+1,m) = c+P;
end
```

```
for t=(T-1+1):-1:(T+1-2*k+2)
  pom=mod(T+1-t,2);
    if pom==0                    % sme na hranici bankrotu v smere casu,
                                 % tj. v horizontalnej rovine
     B1(t,k-(T+1-t)/2)=Vd;       % nastavi sumu, ktoru investor dostane
                                 % v okamziku bankrotu
     B2(t,k-(T+1-t)/2)=Vd;
     for m=(k-(T+1-t)/2+1):t     % v tom istom case ale o 1 vyssie
                                 % a ideme hore
       p12(t,m)=(1-lambda)*(v*q*(c+B1(t+1,m+1))+ v*(1-q)*(c+B1(t+1,m)))+...
               lambda*(v*q*(c+B2(t+1,m+1)) + v*(1-q)*(c+B2(t+1,m)));
       p11(t,m)=v*q*(c+B1(t+1,m+1)) + v*(1-q)*(c+B1(t+1,m));
       p22(t,m)=v*q*(c+B2(t+1,m+1)) + v*(1-q)*(c+B2(t+1,m));
       p21(t,m)=p22(t,m);
       B1(t,m)=gamma1*p11(t,m) + gamma2*p12(t,m);
                                 % B1=dlhopis oceneny hracom1
       B2(t,m)=p22(t,m);         % B2=dlhopis oceneny hracom2
     end
  else
    for m=(k-(T+1-t-pom)/2):t   % oceni uzle, ktore nie su
                                 % na hranici bankrotu
      p12(t,m)=(1-lambda)*(v*q*(c+B1(t+1,m+1))+ v*(1-q)*(c+B1(t+1,m)) )+...
               lambda*(v*q*(c+B2(t+1,m+1)) + v*(1-q)*(c+B2(t+1,m)));
      p11(t,m)=v*q*(c+B1(t+1,m+1)) + v*(1-q)*(c+B1(t+1,m));
      p22(t,m)=v*q*(c+B2(t+1,m+1)) + v*(1-q)*(c+B2(t+1,m));
      p21(t,m)=p22(t,m);
      B1(t,m)=gamma1*p11(t,m) + gamma2*p12(t,m);
      B2(t,m)=p22(t,m);
    end
    end
end

for t=(T+1-2*k+1):-1:1           % oceni zvysny trojuholnik
  for m=1:t
    p12(t,m)=(1-lambda)*(v*q*(c+B1(t+1,m+1)) + v*(1-q)*(c+B1(t+1,m)) ) +...
               lambda*(v*q*(c+B2(t+1,m+1)) + v*(1-q)*(c+B2(t+1,m)));
    p11(t,m)=v*q*(c+B1(t+1,m+1)) + v*(1-q)*(c+B1(t+1,m));
    p22(t,m)=v*q*(c+B2(t+1,m+1)) + v*(1-q)*(c+B2(t+1,m));
    p21(t,m)=p22(t,m);
    B1(t,m)=gamma1*p11(t,m) + gamma2*p12(t,m);
    B2(t,m)=p22(t,m);
  end
end
end
```

Príloha 2

Screenshot z Bloombergu s informáciami o dlhopise Takefuji co.