

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

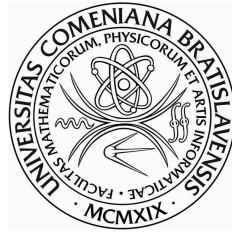
**Použitie Greenovej vety pri riešení spojitých
úloh optimálneho riadenia**

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Bc. Katarína Macková

Bratislava 2011

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
KATEDRA APLIKOVANEJ MATEMATIKY A ŠTATISTIKY



**Použitie Greenovej vety pri riešení spojitéch
úloh optimálneho riadenia**

Diplomová práca

Študijný odbor: 9.1.9 Aplikovaná matematika

Študijný program: Ekonomická a finančná matematika

Evidenčné číslo práce: 991bf5e4-869a-4812-84cf-baf79849d66d

Vedúci diplomovej práce:
doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Diplomant:
Bc. Katarína Macková

Bratislava 2011



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Katarína Macková
Študijný program: ekonomická a finančná matematika (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.9. aplikovaná matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyk záverečnej práce: slovenský

Názov : Použitie Greenovej vety pri riešení spojitéch úloh optimálneho riadenia

Cieľ : Popísať metódu použitia Greenovej vety pri riešení úloh optimálneho riadenia. Analyzovať jej vlastnosti a ilustrovať jej použitie na viacerých úlohách s ekonomickou problematikou. Pokúsiť sa o formalizáciu a zovšeobecnenie postupov (uvádzaných v nám známej literatúre iba na konkrétnych príkladoch) a tiež sa pokúsiť o zovšeobecnenie na nekonečný časový horizont.

Vedúci : doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc.

Dátum zadania: 28.01.2010

Dátum schválenia: 06.04.2011

.....
prof. RNDr. Daniel Ševčovič, CSc.
garant študijného programu

.....
študent

.....
vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie práce, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

.....
vedúci práce

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s využitím teoretických vedomostí a s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Bratislava, 15. apríla 2011

.....
Vlastnoručný podpis

Pod'akovanie

Ďakujem vedúcej diplomovej práce, Doc. RNDr. Margaréte Halickej, CSc., za cenné rady a pripomienky, ktoré mi veľmi pomohli pri vypracovaní tejto práce.

Abstrakt

MACKOVÁ, Katarína: Použitie Greenovej vety pri riešení spojitých úloh optimálneho riadenia [Diplomová práca], Univerzita Komenského v Bratislave, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky.

Vedúci práce: Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc, Bratislava, 2011, 55 s.

Cieľom diplomovej práce je matematicky odôvodniť správnosť postupu na riešenie spojitých úloh optimálneho riadenia, pri ktorom sa používa Greenova veta. Podrobný postup je najskôr popísaný na jednoduchom konkrétnom príklade. Ide o jednoduchý Model ekonomického rastu, ktorý je definovaný na konečnom časovom horizonte s pevným koncom. Následne je tento spôsob riešenia úloh zovšeobecnený a taktiež je rozšírený o možnosť riešiť úlohy aj na nekonečnom časovom horizonte. Nakoniec je spomínaný postup, ktorý je podložený vetami a tvrdeniami z prvých kapitol, ilustrovaný na konkrétnych príkladoch z oblasti ekonómie, marketingu ale aj z oblasti prírodných zdrojov.

Kľúčové slová: Úlohy optimálneho riadenia, Pontrjaginov princíp maxima, Greenova veta, Model ekonomického rastu

Abstract

MACKOVÁ, Katarína: Application of Green's theorem for solving continuous optimal control problems [Master thesis], Comenius University in Bratislava, Faculty of Mathematics, Physics and Informatics, Department of Applied Mathematics and Statistics.
Advisor: Doc. RNDr. Margaréta Halická, CSc, Bratislava, 2011, 55 pages.

Objective of the Master thesis is to mathematically justify the correctness of the procedure for solving continuous optimal control problems, where Green's theorem is used. The detailed procedure is first described on a simple example. It concerns the simple Model of economic growth, that is defined on the final time horizon with the fixed end. Subsequently is this manner of solving problems generalized and also it is extended to the possibility of solving problems on the infinite time horizon. Finally the used procedure, that is supported by theorems and statements from the first chapter, is illustrated in the specific examples from area of economics, marketing as well as from the area of natural resources.

Key words: Optimal Control Problems, Pontryagin Maximum Principle, Green's Theorem, Model of Economic Growth

Obsah

1	Úvod	2
2	Model ekonomického rastu	4
2.1	Riešenie pomocou PPM	6
2.1.1	Časový priebeh odozvy a adjungovanej premennej pri konštantnom riadení	8
2.1.2	Časový priebeh optimálneho riadenia a jeho odozvy na $[0, T]$	10
2.2	Riešenie pomocou Greenovej vety	16
2.2.1	Časový priebeh optimálneho riadenia a jeho odozvy na $[0, T]$	18
3	Všeobecný prípad	21
3.1	Riešenie pomocou PPM	21
3.2	Riešenie pomocou Greenovej vety	23
3.2.1	Poznámky	26
3.2.2	Časový priebeh optimálneho riadenia a jeho odozvy	26
4	Všeobecná úloha na nekonečnom časovom horizonte	29
5	Iné riešené príklady	34
5.1	Model optimálneho výlovu rýb	34
5.1.1	Riešenie na konečnom časovom horizonte s pevným koncom	35
5.1.2	Riešenie na nekonečnom časovom horizonte	36
5.2	Vidale-Wolfeov reklamný model	37
5.2.1	Riešenie na konečnom časovom horizonte s pevným koncom	38
5.2.2	Riešenie na nekonečnom časovom horizonte	39
5.3	Model optimálneho riadenia epidémie	40
5.3.1	Riešenie na konečnom časovom horizonte s pevným koncom	41
5.4	Model ekonomického rastu	42
5.4.1	Riešenie na nekonečnom časovom horizonte	42
6	Použitá matematická teória	45
6.1	Greenova veta	45
6.2	Formulácia PPM pre úlohu optimálneho riadenia	46
7	Záver	47
	Literatúra	48

Kapitola 1

Úvod

Optimálne riadenie je časťou matematiky, ktoré má široké využitie v rôznych oblastiach ľudského života. Tejto časti predchádzal variačný počet, ktorého začiatky sa datujú od čias I. Newtona a D. Bernoulliho, teda od konca 17. storočia. Zatiaľ čo úlohy optimálneho riadenia sa začali analyzovať až v druhej polovici 20. storočia, o čo sa zaslúžili R. E. Bellman a L. S. Pontryagin. Teda postupom času sa objavovali rôzne metódy, pomocou ktorých sa aj dnes riešia úlohy tohto typu.

Taktiež v oblasti ekonómie bolo potrebné využiť optimálne riadenie. Napríklad už v roku 1928 sa F. P. Ramsey zaoberal problémom ako optimálne určiť časové rozloženie spotreby, pričom treba dbať na obmedzenosť ekonomických zdrojov. Ramseyho model bol pôvodne formulovaný ako úloha variačného počtu, až v druhej polovici 20. storočia ako úloha optimálneho riadenia. Tento model sa stal východiskom mnohých ďalších modelov teórie ekonomického rastu. Ďalším významným modelom zaoberajúcim sa ekonomickým rastom je Solowov model ekonomického rastu, o ktorý sa zaslúžil R. M. Solow.

Pri našom štúdiu sme sa však stretli len s niekoľkými spôsobmi počítania úloh, ako napríklad s metódou variačného počtu, s Pontryaginovým princípom maxima (ozn. PPM) alebo s dynamickým programovaním od Bellmana. Pri riešení spojitých úloh optimálneho riadenia je najčastejšie použitá metóda PPM, ktorá je pri zložitejších príkladoch dosť komplikovaná.

Pri väčšom záujme o optimálne riadenie a najmä o spojité úlohy sme študovali rôzne práce, až sme objavili knihu [5], z ktorej sme sa dozvedeli, že existuje ďalší spôsob riešenia spojitých úloh z rôznych oblastí optimálneho riadenia. Touto novou metódou je použitie Greenovej vety v postupe riešenia. V spomínanej knihe je tento postup riešenia veľmi zjednodušený, ale aj napriek tomu môžeme na ňom vidieť, že sa týmto spôsobom dá rýchlejšie dostať k výsledku. Preto sme sa rozhodli, že sa budeme touto témou viac zaoberať.

Naším cieľom bude teda podrobne vysvetliť postup riešenia na jednoduchom konkrétnom príklade. Za ilustračný príklad, na ktorom ukážeme jednotlivé kroky riešenia, zoberieme jednoduchý model ekonomického rastu, ktorý je zadaný na konečnom časovom horizonte s pevným koncom. Tento model, podľa našich vedomostí, ešte nikde nebol riešený pomocou použitia Greenovej vety, preto treba podotknúť, že táto celá časť bude vlastnou prácou. Pre porovnanie budeme tento model riešiť aj pomocou použitia PPM a aj pomocou

Greenovej vety. Uvidíme, že oboma spôsobmi dostaneme rovnaký výsledok a tiež budeme môcť porovnať zložitosť riešenia modelu. Potom naše vedomosti použijeme pri riešení všeobecnej úlohy na konečnom časovom horizonte s pevným koncom. Jednotlivé kroky sa budeme snažiť urobiť tak, aby sme pomocou nich mohli jednoduchšie vyrátať konkrétne príklady. V práci [5] je uvedený aj príklad na nekonečnom časovom horizonte. Avšak jednotlivé kroky tam nie sú dostatočne zdôvodnené. Preto sa v tejto práci budeme zaoberať aj týmito úlohami na nekonečnom časovom horizonte a budeme sa snažiť matematicky lepšie zdôvodniť správnosť riešenia. Napokon sa pokúsime vysvetlený postup riešenia pri oboch typoch úloh ilustrovať na konkrétnych príkladoch.

Kapitola 2

Model ekonomického rastu

Tento model je popísaný v množstve prác, my sme vychádzali z formulácie modelu uvedeného v [1, str. 102-103]. Treba spomenúť, že ide o dynamickú verziu Solowovho modelu, ktorá je doplnená o optimalizačnú funkciu. V spomínanej knihe je úloha riešená na konečnom časovom horizonte s voľným koncom. Pre naše potreby však tento model mierne modifikujeme a to tak, že použijeme úlohu s pevným koncom.

Tento jednoduchý model budeme riešiť aj pomocou Greenovej vety a aj pomocou Pontrjaginovho princípu maxima (ozn. PPM). Následne porovnáme obidve riešenia. Formulácia úlohy

$$J = \int_0^T (1 - s(t))f(k(t)) dt \rightarrow \max$$

pri podmienkach

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= s(t)f(k(t)) - \delta k(t), \quad t \in [0, T], \quad T \text{ pevné,} \\ k(0) &= k_0, \\ k(T) &= k_T, \\ s(t) &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Nech k_0 , k_T , T a δ sú dané kladné konštanty a o funkcii $f(k)$ predpokladáme, že spĺňa nasledovné podmienky (P):

Podmienky (P):

$$\begin{aligned} f(k) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(k) \in C^2, \quad f(0) = 0, \quad f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0, \\ \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0. \end{aligned}$$

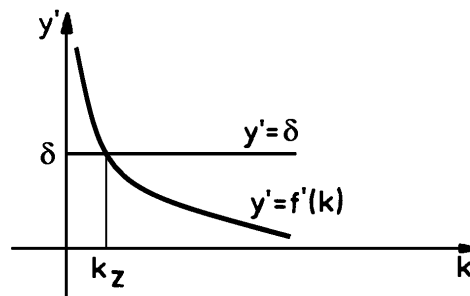
Kapitál $k(t)$ predstavuje stavovú premennú, ktorá sa exponenciálne znehodnocuje konštantou úmernosti δ . Funkcia $f(k)$ je produkčná funkcia definovaná pomocou podmienok (P). Časť vyprodukovaného kapitálu, ktorá sa znova investuje, sa označuje $s(t)$, ide o riadiacu premennú. Zvyšok sa spotrebúva. Potom si môžeme účelovú funkciu predstaviť ako množstvo kapitálu určeného na spotrebu v priebehu daného časového horizontu $[0, T]$.

Pri riešení tohto príkladu aj pomocou PPM aj pomocou Greenovej vety budeme potrebovať nasledovnú Lemu 2.1. s Dôsledkom 2.1.:

Lema 2.1. *Nech funkcia $f(k)$ spĺňa podmienky (P). Potom*

- (a) $\exists! k_Z: f'(k_Z) = \delta,$
- (b) $\exists! k_M: f(k_M) = \delta k_M,$
- (c) $k_Z < k_M.$

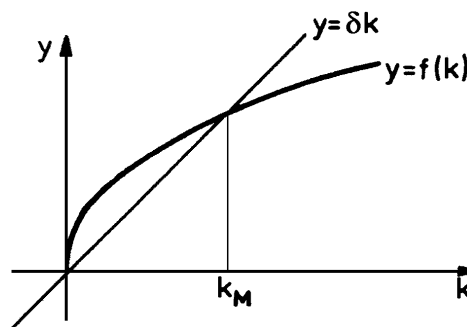
Dôkaz. (a) Na základe podmienok (P) vieme, že prvá derivácia produkčnej funkcie $f(k)$ monotónne klesá z ∞ do 0 a tiež vieme, že δ je kladná konštanta. K lepšej predstave slúži Obrázok 2.1.



Obrázok 2.1: Grafické znázornenie jednodužnosti bodu k_Z

Potom priamka $y' = \delta$ a klesajúca funkcia $y' = f'(k)$ musí mať práve jeden bod prieniku a to bod k_Z . To znamená, že $\exists! k_Z: f'(k_Z) = \delta$.

(b) Na základe podmienok (P) vieme, že produkčná funkcia $f(k)$ je rýdzokonkávna. Majme priamku δk , ktorá samozrejme prechádza bodom 0. Situácia je zobrazená na Obrázku 2.2.

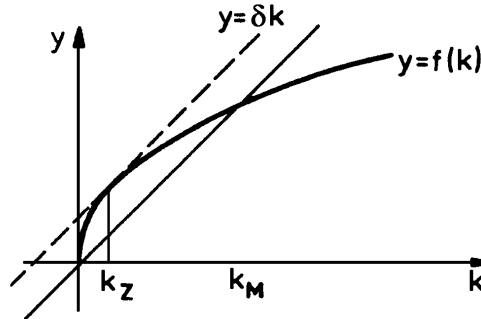


Obrázok 2.2: Grafické znázornenie jednodužnosti bodu k_M

Priamka a rýdzokonkávna funkcia majú maximalne dva spoločné body. V tomto prípade okrem bodu 0 majú len jediný bod prieniku, ktorý označíme k_M . To znamená, že $\exists! k_M: f(k_M) = \delta k_M$.

(c) Vieme, že na základe podmienok (P) je produkčná funkcia $f(k)$ rýdzokonkávna a rastúca. Bod k_M je priesečník $f(k)$ a priamky δk a bod k_Z je bod, kde sa $f(k)$ dotýka rovnobežky s δk . Táto rovnobežka musí byť nad funkciou $f(k)$ a keďže je funkcia rastúca

a rýdzokónkávna musí bod k_Z ležať vľavo od bodu k_M . Teda platí $k_Z < k_M$. V opačnom prípade by bola porušená buď konkávnosť alebo rastúcosť funkcie $f(k)$. Možno si to lepšie predstaviť na Obrázku 2.3.



Obrázok 2.3: Grafické znázornenie bodov k_Z a k_M

Dôsledok 2.1. *Nech funkcia $f(k)$ spĺňa podmienky (P). Potom*

- (a) $k \leq k_Z \Leftrightarrow f'(k) \geq \delta$,
- (b) $k \geq k_Z \Leftrightarrow f'(k) \leq \delta$,
- (c) $\frac{\delta k_Z}{f(k_Z)} \in (0, 1)$.

Dôkaz. (a) Z podmienok (P) vieme, že prvá derivácia produkčnej funkcie $f(k)$ monotónne klesá z ∞ do 0 (Obrázok 2.1). A teda pomocou Lemy 2.1.(a) platí, že ak $k(t) \leq k_Z$, tak $f'(k)$ musí v každom prípade ležať nad $y' = \delta$, nanačvých sa $f'(k)$ a δ rovnajú a to v bode k_Z . Naopak, ak $f'(k)$ leží nad $y' = \delta$ alebo sa v bode k_Z rovnajú, tak potom musí platiť $k(t) \leq k_Z$. Tým je teda splnená ekvivalencia $k(t) \leq k_Z \Leftrightarrow f'(k) \geq \delta$.

(b) Analogicky ako (a).

(c) Hodnota $\frac{\delta k_Z}{f(k_Z)}$ je kladná, pretože δ je kladná konštanta, hodnota k_Z je takisto kladná, čo vieme na základe podmienok (P) a Lemy 2.1.(a) a funkcia $f(k)$ nadobúda v bode k_Z takisto kladnú hodnotu. A teraz treba dokázať, že hodnota $\frac{\delta k_Z}{f(k_Z)}$ je menšia ako 1, teda $\delta k_Z < f(k_Z)$. Z podmienok (P) vieme, že funkcia $f(k)$ je rýdzokónkávna a rastúca, preto aj s pomocou Lemy 2.1.(b) priamka δk medzi bodmi 0 a k_M leží pod $f(k)$. Z toho na základe Lemy 2.1.(c) vyplýva, že $\delta k_Z < f(k_Z)$, t.j. čo bolo treba dokázať. Lepšie to možno vidieť na Obrázku 2.3.

2.1 Riešenie pomocou PPM

Prejdeme k riešeniu úlohy pomocou PPM. Na úlohu aplikujeme podmienky PPM (Veta 6.2.).

V tomto príklade budeme používať iba podmienku maxima a adjungovanú rovnicu. Podmienky transversality (PT) a stacionarity (PS) sú prázdne. Podmienka maxima (PM) vyzerá nasledovne

$$\Psi^0((1-s)f(k)) + \Psi(sf(k) - \delta k) \rightarrow \max_{s \in [0,1]}, \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{PM})$$

a adjungovaná rovnica (AR) má tvar

$$\dot{\Psi} = -\Psi^0((1-s)f'(k)) - \Psi(sf'(k) - \delta), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{AR})$$

Najprv predpokladajme, že $\Psi^0 = 0$. Podmienka maxima (PM) sa zjednoduší na tvar

$$sf(k)\Psi \rightarrow \max_{s \in [0,1]}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Jej riešením dostávame

$$s = \begin{cases} 1 & \text{ak } \Psi > 0, \\ \text{neurčené} & \text{ak } \Psi = 0, \\ 0 & \text{ak } \Psi < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Prípado, keď riadenie s je neurčené, môžeme vylúčiť, pretože táto možnosť je v rozpore s podmienkou ($\Psi^0, \Psi(t) \neq 0$ (vid'. Veta 6.2.)). Preto v prípade, keď $\Psi^0 = 0$, dostaneme len dve možnosti pre riadenie s a to

$$s = \begin{cases} 1 & \text{ak } \Psi > 0, \\ 0 & \text{ak } \Psi < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Teraz budeme predpokladať, že $\Psi^0 = 1$. Potom podmienku maxima (PM) môžeme jednoduchšie prepísať do tvaru

$$sf(k)[-1 + \Psi] \rightarrow \max_{s \in [0,1]}, \quad \forall t \in [0, T]$$

a jej riešením dostávame

$$s = \begin{cases} 1 & \text{ak } \Psi > 1, \\ \text{neurčené} & \text{ak } \Psi = 1, \\ 0 & \text{ak } \Psi < 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Podrobnejšie sa budeme venovať prípadu, kde je riadenie neurčené. Keďže Ψ spĺňa pomerne zložitú diferenciálnu rovnicu, nevieme povedať, či prípad $\Psi = 1$ nastane iba v konečnom počte bodov a preto musíme pripustiť možnosť, že $\Psi = 1$ nastane na intervale nenulovej dĺžky, ktorý sa volá singulárny interval I . Potom je zrejmé, že $\dot{\Psi} = 0$ pre $t \in I$ a teda z adjungovanej rovnice (AR) dostaneme tvar

$$\dot{\Psi} = 0 = (s-1)f'(k) - (sf'(k) - \delta),$$

z ktorého získame

$$f'(k) = \delta, \quad \forall t \in I. \quad (2.4)$$

Z Lemy 2.1.(a) vyplýva, že existuje práve jedno $k = k_Z$ také, že je splnená rovnica (2.4). Z toho vyplýva, že

$$k(t) = k_Z, \quad \forall t \in I \quad (2.5)$$

a teda $\dot{k}_Z = 0$ na I . Dosadením stavovej rovnice do posledného vzťahu dostávame, že $0 = \dot{k}_Z = sf(k_Z) - \delta k_Z$ a z toho

$$s_Z = \frac{\delta k_Z}{f(k_Z)}, \quad \forall t \in I. \quad (2.6)$$

Podľa Dôsledku 2.1.(c) je riadenie s_Z dané vzťahom (2.6) z intervalu $(0, 1)$ a teda je prípustné. Tým sme skompletizovali optimálne riadenie pre všetky možnosti Ψ , ktoré vyzerá nasledovne

$$s = \begin{cases} 1 & \text{ak } \Psi > 1, \\ \frac{\delta k_Z}{f'(k_Z)} & \text{ak } \Psi = 1, \\ 0 & \text{ak } \Psi < 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Hodnota riadenia $\frac{\delta k_Z}{f'(k_Z)}$ predstavuje určitú rovnováhu medzi spotrebou a investíciami, resp. medzi súčasnou a budúcou spotrebou.

2.1.1 Časový priebeh odozvy a adjungovanej premennej pri konštantnom riadení

K jednotlivým typom riadenia, ktoré sme získali v predchádzajúcej časti, treba dopočítať optimálnu odozvu. Túto odozvu budeme počítat na nejakom intervale J nenulovej dĺžky.

Prípád $\Psi^0 = 0$ **spolu s** $\Psi(t) > 0, \forall t \in J$

V tomto prípade ide o krajnú hodnotu riadenia a to $s = 1$. Po dosadení tejto hodnoty do stavovej rovnice a (AR) dostávame

$$\dot{k} = f(k) - \delta k, \quad \forall t \in J, \quad (2.8)$$

$$\dot{\Psi} = -\Psi[f'(k) - \delta], \quad \forall t \in J. \quad (2.9)$$

Z týchto rovníc vyplývajú na intervale J nasledovné možnosti:

$$k \text{ rastie, ak } k < k_M, \quad (2.10)$$

$$k \text{ klesá, ak } k > k_M, \quad (2.11)$$

$$\Psi \text{ rastie, ak } k > k_Z, \quad (2.12)$$

$$\Psi \text{ klesá, ak } k < k_Z, \quad (2.13)$$

kde podľa Lemy 2.1. k_M a k_Z sú jednoznačne definované rovnosťami $f'(k_Z) = \delta$, $f(k_M) = \delta k_M$.

Heslovito dokážeme tieto možnosti, kde je takisto využitá Lema 2.1.:

prvý prípad: $k < k_M \Rightarrow f(k) > \delta k \Rightarrow f(k) - \delta k > 0 \Rightarrow \dot{k} > 0 \Rightarrow k$ rastie,

druhý prípad by sme dokázali podobne.

Tretí prípad: $k > k_Z$ a zároveň z podmienok (P) vieme, že produkčná funkcia je rastúca a rýdzokonkávna $\Rightarrow f'$ je klesajúca funkcia $\Rightarrow f'(k) < f'(k_Z) \Rightarrow f'(k) < \delta \Rightarrow f'(k) - \delta < 0$ vynásobíme -1 a následne to vynásobíme aj $\Psi > 1 \Rightarrow -\Psi[f'(k) - \delta] > 0 \Rightarrow \dot{\Psi} > 0 \Rightarrow \Psi$ rastie,

posledný prípad by sme dokázali analogicky.

Prípád $\Psi^0 = 0$ **spolu s** $\Psi(t) < 0, \forall t \in J$

Tu ide o druhú krajnú hodnotu riadenia a to $s = 0$. Po dosadení tejto hodnoty do stavovej rovnice a (AR) dostávame

$$\dot{k} = -\delta k, \quad \forall t \in J, \quad (2.14)$$

$$\dot{\Psi} = \delta\Psi, \quad \forall t \in J. \quad (2.15)$$

Z čoho vyplýva, že funkcia k klesá exponenciálne a adjungovaná premenná Ψ bude takisto klesať exponenciálne, keďže je na tomto intervale záporná.

V prípade $\Psi^0 = 0$ nenastáva možnosť $\Psi(t) = 0$, teda nenastáva singulárna hodnota riadenia. Na základe diferenciálnych rovníc adjungovanej premennej v predchádzajúcich dvoch prípadoch môžeme povedať, že ak Ψ bude klesať (možnosť $\Psi(t) < 0$), tak už bude klesať stále. Vieme to na základe znamienka $\dot{\Psi}$, ktoré sa nemení. To znamená, že $s \equiv 0$ pre všetky $t \in [0, T]$, t.j. $J = [0, T]$. Ψ nemôže začať rásť, lebo by na nejakom intervale išlo o možnosť $\Psi(t) > 0$ a keďže nenadobúda hodnotu nula, nebolo by Ψ spojité. A takisto vieme, že ak Ψ bude rásť (možnosť $\Psi(t) > 0$), tak už bude rásť stále. To znamená, že $s \equiv 1$ pre všetky $t \in [0, T]$, t.j. $J = [0, T]$. Ψ na nejakom intervale nemôže začať klesať, lebo hoci Ψ by bolo spojité, tak spojitost' odozvy k by bola porušená.

Prípád $\Psi^0 = 1$ spolu s $\Psi(t) = 1, \forall t \in I$

Na singulárnom úseku I sme už získali hodnotu optimálnej odozvy, ktorou je $k = k_Z$.

Prípád $\Psi^0 = 1$ spolu s $\Psi(t) > 1, \forall t \in J$

V tomto prípade ide o krajnú hodnotu riadenia, ak na nejakom intervale $s = 1$, po úprave stavovej rovnice a adjungovanej rovnice (AR) dostávame

$$\dot{k} = f(k) - \delta k, \quad \forall t \in J, \quad (2.16)$$

$$\dot{\Psi} = -\Psi[f'(k) - \delta], \quad \forall t \in J. \quad (2.17)$$

Z týchto rovníc vyplývajú na intervale J rovnaké možnosti, ako v prípade $\Psi^0 = 0$ spolu s $\Psi(t) > 0, \forall t \in J$, presnejšie ide o vzťahy (2.10), (2.11), (2.12) a (2.13).

Pri ďalšej analýze budeme potrebovať nasledovnú lemu:

Lema 2.2. *Ak $\Psi^0 = 1$ a v nejakom $\bar{t} \in (0, T)$ je $\Psi(\bar{t}) > 1$ a $k(\bar{t}) \in (k_Z, k_M)$, tak potom je $\Psi(t) > 1$ pre všetky $t \in [\bar{t}, T]$.*

Dôkaz. Najprv si všimnime, že keďže $k(\bar{t}) < k_M$, tak podľa (2.10) funkcia $k(t)$ rastie v pravom okolí bodu \bar{t} . Zároveň však bude pre všetky $t \geq \bar{t}$ platiť, že $k(t) < k_M$, pretože $k(t) \equiv k_Z$ je riešením rovnice (2.16) a platí jednoznačnosť riešení diferenciálnej rovnice. Z toho vyplýva, že $k(t)$ bude stále rásť a navyše $k(t)$ bude z intervalu (k_Z, k_M) . Zo spojitosti adjungovanej premennej Ψ vyplýva, že v pravom okolí t je $\Psi(t)$ väčšie ako 1. Keďže $k(t) > k_Z$ pre všetky $t > \bar{t}$, tak podľa (2.12) premenná $\Psi(t)$ stále rastie a teda riadenie s zostáva rovné 1 na celom intervale $[\bar{t}, T]$.

Prípád $\Psi^0 = 1$ spolu s $\Psi(t) < 1, \forall t \in J$

Tu ide o druhú krajnú hodnotu riadenia, ak na nejakom intervale $s = 0$. Po úprave stavovej rovnice a adjungovanej rovnice (AR) dostávame

$$\dot{k} = -\delta k, \quad \forall t \in J, \quad (2.18)$$

$$\dot{\Psi} = -f'(k) + \delta\Psi, \quad \forall t \in J. \quad (2.19)$$

Z čoho vyplýva, že funkcia k klesá exponenciálne a adjungovanú premennú Ψ dopočítame v závislosti od tvaru funkcie k .

Pri ďalšej analýze budeme potrebovať nasledovnú lemu:

Lema 2.3. Ak $\Psi^0 = 1$ a v nejakom $\bar{t} \in (0, T)$ je $\Psi(\bar{t}) < 1$ a $k(\bar{t}) < k_Z$, tak potom $\Psi(t)$ a $k(t)$ klesajú na intervale $[\bar{t}, T]$.

Dôkaz. Zo spojitosti adjungovanej premennej Ψ vyplýva, že v pravom okolí t je $\Psi(t)$ menšie ako 1 a tiež, že $k(t)$ je menšie ako k_Z . Z toho vyplýva (podľa časti Prípady $\Psi^0 = 1$ spolu s $\Psi(t) < 1 \forall t \in J$), že $k(t)$ je klesajúca funkcia a $\Psi(t)$ takisto klesá. Keďže $\Psi(t)$ klesá, je stále menšie ako 1 a teda riadenie s zostáva rovné 0 na celom intervale $[\bar{t}, T]$.

2.1.2 Časový priebeh optimálneho riadenia a jeho odozvy na $[0, T]$

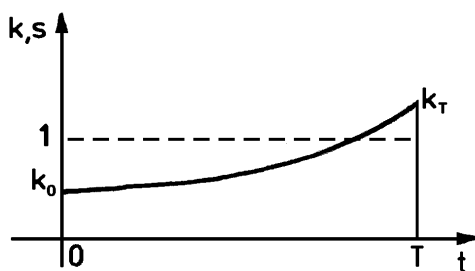
Celkový časový priebeh riadenia a jeho odozvy bude závisieť od veľkosti času T a od počiatkovej a koncovnej hodnoty kapitálu k_0 a k_T .

Poznámka Ku všetkým obrázkom v tejto časti, ktoré zobrazujú časový priebeh optimálneho riadenia a jeho odozvy, sú uvádzané aj obrázky s časovým priebehom adjungovanej premennej $\Psi(t)$, $t \in [0, T]$. Pomôže to k lepšej analýze časového priebehu optimálneho riadenia a jeho odozvy. Kvôli spojitosti adjungovanej premennej $\Psi(t)$ sa musí riadenie a jeho odozva správať, tak ako je to vyobrazené na daných obrázkoch. V opačnom prípade by došlo k porušeniu spojitosti adjungovanej premennej.

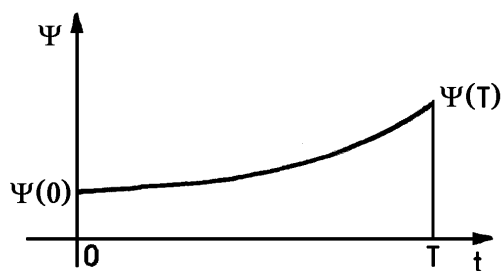
Najprv rozoberieme možnosť, kedy $\Psi^0 = 0$. Môžu nastať dva prípady a to buď $\Psi(t) > 0$ alebo $\Psi(t) < 0$ pre všetky $t \in [0, T]$. Vieme to na základe analýzy z časti 2.1.1 (Časový priebeh odozvy a adjungovanej premennej pri konštantnom riadení).

Prípady $\Psi(t) > 0, \forall t \in [0, T]$

Ak $\Psi(t) > 0$ pre všetky $t \in [0, T]$, tak $s \equiv 1$ pre všetky $t \in [0, T]$. V tomto prípade sa bude odozva k a adjungovaná premenná Ψ chovať podľa (2.8) a (2.9). Ich priebeh závisí od počiatkovej hodnoty kapitálu k_0 a od hodnoty $\Psi(0)$. Napríklad, ak sa k_0 nachádza medzi k_Z a k_M , tak na celom intervale $[0, T]$ bude odozva rásť a Ψ bude takisto rásť. Priebeh riadenia a jeho odozvy je vyobrazený na Obrázku 2.4a. Táto možnosť môže nastať iba v prípade, že hodnoty k_0 , k_T a T sú také, že odozva na riadenie $s = 1$ pre všetky t spĺňa podmienku $k(T) = k_T$.



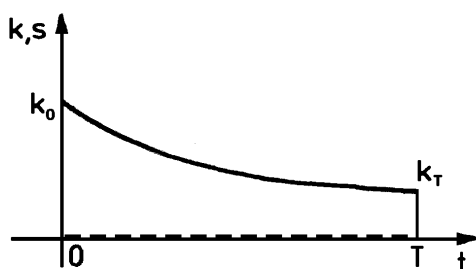
Obrázok 2.4a:
Optimálna odozva - plná čiara,
optimálne riadenie - čiarkovaná čiara



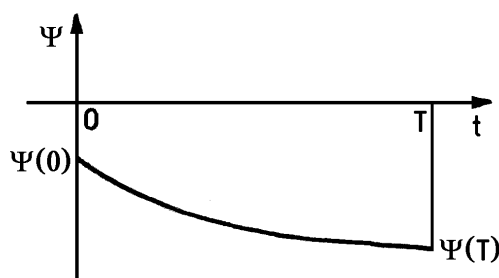
Obrázok 2.4b:
Časový priebeh
adjungovanej premennej

Prípád $\Psi(t) < 0, \forall t \in [0, T]$

Ak $\Psi(t) < 0$ pre všetky $t \in [0, T]$, tak $s \equiv 0$ pre všetky $t \in [0, T]$. V tomto prípade sa odozva k bude chovať podľa (2.14) a teda na celom intervale $[0, T]$ bude klesať do hodnoty k_T . Adjungovaná premenná sa bude chovať podľa (2.15) a taktiež bude na celom intervale $[0, T]$ klesať až do hodnoty $\Psi(T)$. Pribeh riadenia a jeho odozvy je vyobrazený na Obrázku 2.5a. Opäť aj tento prípad môže nastať iba, ak hodnoty k_0 , k_T a T sú také, že odozva na riadenie $s = 0$ pre všetky t spĺňa podmienku $k(T) = k_T$.



Obrázok 2.5a:
Optimálna odozva - plná čiara,
optimálne riadenie - čiarkovaná čiara



Obrázok 2.5b:
Časový priebeh
adjungovanej premennej

Teraz budeme analyzovať možnosť, kedy $\Psi^0 = 1$. Nasledujúcu analýzu rozdelíme na časti v závislosti od počiatočnej hodnoty stavu k_0 a to tak, či je táto hodnota menšia ako k_Z alebo sa jej rovná, či je väčšia ako k_M alebo sa jej rovná alebo či sa nachádza v intervale (k_Z, k_M) . My túto analýzu urobíme len pre prípad, že $k_0 \in (k_Z, k_M)$. Pre ostatné hodnoty počiatočného stavu k_0 sa postupuje analogicky. Jednotlivé situácie budeme ilustrovať obrázkami s časovým priebehom riadenia a jeho odozvy.

Nech teda $k_0 \in (k_Z, k_M)$. Ďalšia analýza závisí od hodnôt adjungovanej premennej Ψ , ktorej hodnoty však nepoznáme. Budeme preto postupne uvažovať všetky hodnoty počiatočného stavu adjungovanej premennej a to prípady $\Psi(0) < 1$, $\Psi(0) = 1$ a $\Psi(0) > 1$.

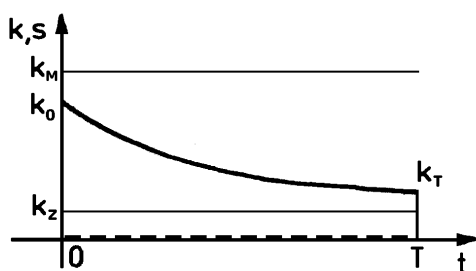
Prípád $\Psi(0) < 1$

Ak $\Psi(0) < 1$, potom zo spojitosti $\Psi(t)$ vyplýva, že $\Psi(t) < 1$ na nejakom pravom okolí bodu 0. Nech t_1 je maximálne $t_1 \in [0, T]$ také, že $\Psi(t) < 1$ pre každé $t \in [0, t_1)$. Potom v závislosti od hodnoty t_1 dostávame nasledujúce možnosti:

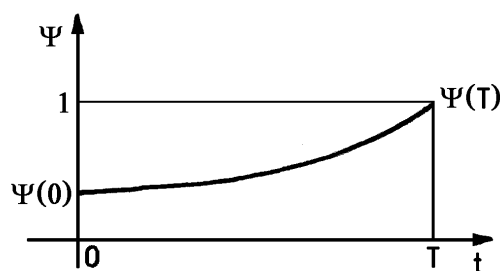
(A) Ak je $t_1 = T$, potom $s(t) = 0$ na celom intervale $[0, T]$ a takéto riadenie teda odpovedá prípadu, keď hodnoty k_0 , k_T a T vyhovujú rovnici $k_T = k_0 e^{-\delta T}$. Optimálna odozva bude mať teda tvar

$$k(t) = k_0 e^{-\delta t}, \text{ pre } 0 \leq t \leq T, \quad (2.20)$$

čo vidíme na Obrázku 2.6a.



Obrázok 2.6a:
Optimálna odozva - plná čiara,
optimálne riadenie - čiarkovaná čiara

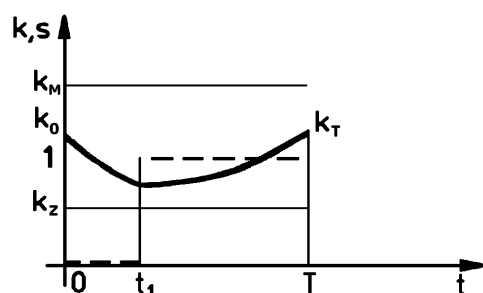


Obrázok 2.6b:
Časový priebeh
adjungovanej premennej

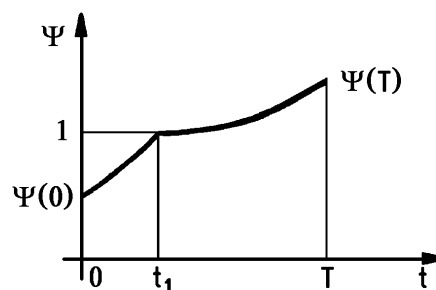
(B) Ak je $t_1 < T$, optimálna odozva na intervale $[0, t_1]$ klesá do hodnoty $k(t_1)$. Keďže v bode t_1 je $\Psi(t_1) = 1$ a v ľavom okolí bodu t_1 bolo $\Psi(t) < 1$, tak tam $\Psi(t)$ muselo rásť a teda podľa (2.19) bolo $\dot{\Psi} = -f'(k) + \delta\Psi > 0$ a to platí vtedy a len vtedy, ak $\Psi > \frac{f'(k)}{\delta}$. Keďže $\Psi(t) < 1$, tak dostávame, že v ľavom okolí bodu t_1 je $1 > \frac{f'(k)}{\delta}$, čo podľa Dôsledku 2.1.(b) znamená, že $k(t) \geq k_Z$. Zo spojitosti $k(t)$ teda dostávame, že $k(t_1) \geq k_Z$.

- Najprv vyšetříme prípad $k(t_1) > k_Z$. Zo spojitosti k vyplýva, že $k(t) > k_Z$ v pravom okolí bodu t_1 . Treba rozhodnúť, či sa adjungovaná premenná Ψ v pravom okolí bodu t_1 vyvíja podľa (2.19) (prípád $s = 0$) alebo (2.17) (prípád $s = 1$). Ak by bolo $s = 0$, tak by $\Psi(t)$ rástlo, bolo by väčšie ako 1 a to by sme sa dostali do sporu s tým, že pre $\Psi(t) > 1$ má byť $s = 1$.

V prípade, že $k(t_1) > k_Z$, teda napravo od bodu t_1 nastáva prípad $s = 1$ a podľa Lemy 2.2. toto platí na celom intervale $[t_1, T]$. Táto situácia je zobrazená na Obrázku 2.7a.



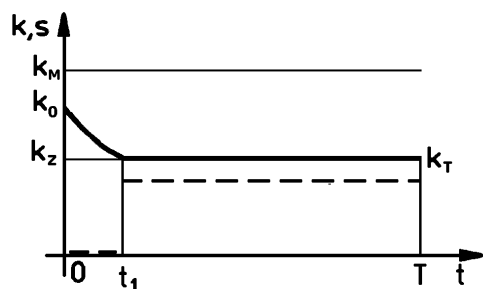
Obrázok 2.7a:
Optimálna odozva - plná čiara,
optimálne riadenie - čiarkovaná čiara



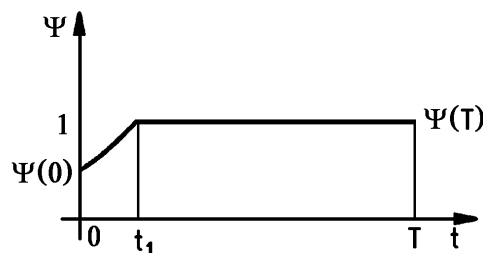
Obrázok 2.7b:
Časový priebeh
adjungovanej premennej

- Teraz vyšetříme prípad $k(t_1) = k_Z$. V tomto prípade dochádza k realizácii singularného úseku na intervale $[t_1, t_2]$, na ktorom platí: $\Psi(t) = 1$, $k(t) = k_Z$, $s(t) = \frac{\delta k_Z}{f(k_Z)}$ pre $t \in [t_1, t_2]$. Pre interval $[t_2, T]$ môžu nastať tieto prípady: Ak $t_2 = T$, tak koncový kapitál k_T musí byť na úrovni rovnovážnej hodnoty k_Z (Obrázok 2.8a). Ak

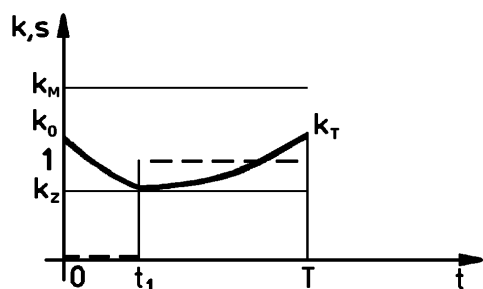
$t_2 = t_1$, tak singulárny interval sa realizuje ako triviálny - jeden bod. V závislosti od koncovej hodnoty kapitálu k_T môžu nastať prípady, ktoré môžeme vidieť na Obrázkoch 2.9a a 2.10a. Ak $t_2 \neq t_1 < T$, tak v závislosti od hodnoty k_T môžu nastať dve možnosti, ktoré sme výpočítali v časti 2.1.1 (Časový priebeh odozvy a adjungovanej premennej pri konštantnom riadení). A to buď k rastie, vtedy je riadenie s jednotkové alebo k klesá, vtedy je riadenie s nulové. Tieto dve možnosti sú zachytené na Obrázkoch 2.11a a 2.12a.



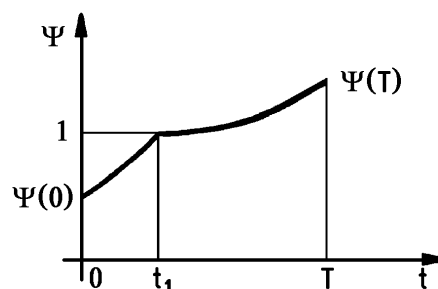
Obrázok 2.8a:
Optimálna odozva - plná čiara,
optimálne riadenie - čiarkovaná čiara



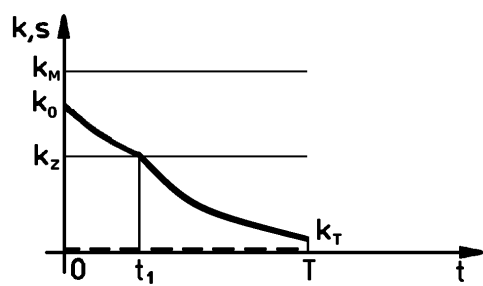
Obrázok 2.8b:
Časový priebeh
adjungovanej premennej



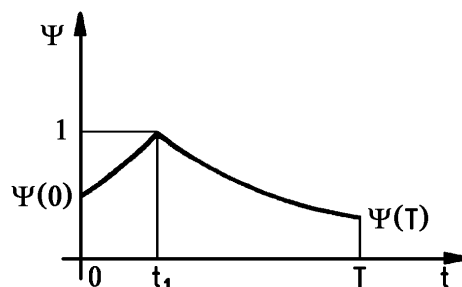
Obrázok 2.9a:
Optimálna odozva - plná čiara,
optimálne riadenie - čiarkovaná čiara



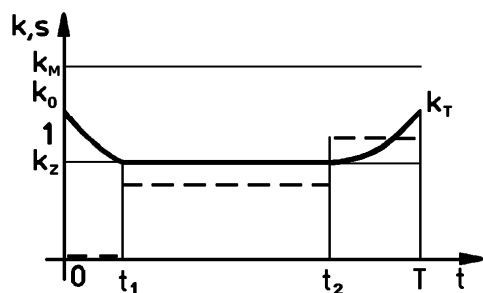
Obrázok 2.9b:
Časový priebeh
adjungovanej premennej



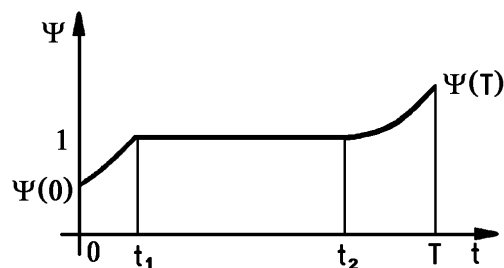
Obrázok 2.10a:
Optimálna odozva - plná čiara,
optimálne riadenie - čiarkovaná čiara



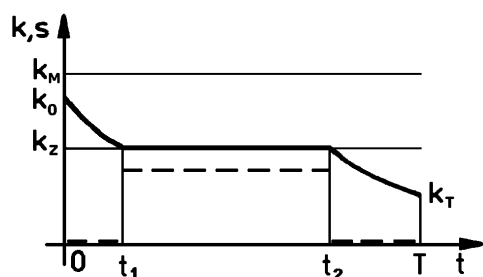
Obrázok 2.10b:
Časový priebeh
adjungovanej premennej



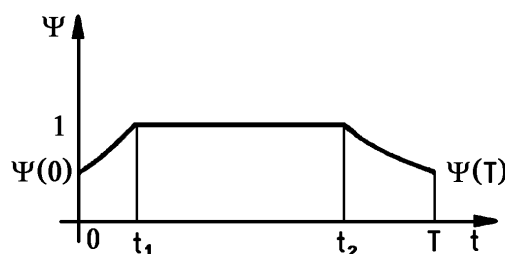
Obrázok 2.11a:
Optimálna odozva - plná čiara,
optimálne riadenie - čiarkovaná čiara



Obrázok 2.11b:
Časový priebeh
adjungovanej premennej



Obrázok 2.12a:
Optimálna odozva - plná čiara,
optimálne riadenie - čiarkovaná čiara

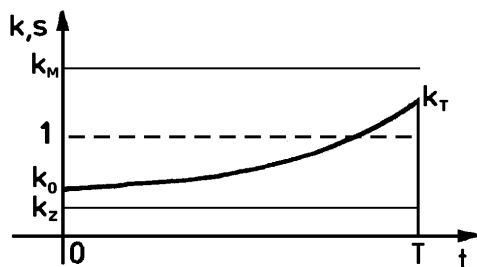


Obrázok 2.12b:
Časový priebeh
adjungovanej premennej

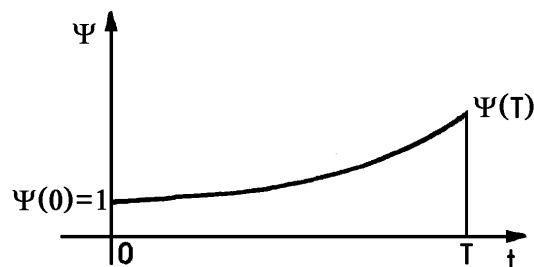
V tomto prípade treba dokázať, že singulárny úsek I nastáva len raz. Zo spojitosti adjungovanej premennej $\Psi(t)$ vieme, že ak kapitál nadobudne rovnovážnu hodnotu k_Z , potom na nej zostane až po k_T (len ak $k_Z = k_T$) alebo klesne na hodnotu k_T (len ak $k_Z > k_T$) alebo stúpne na hodnotu k_T (len ak $k_Z < k_T$). Nemôže nastať znovu singulárny úsek I , lebo ak raz adjungovaná premenná Ψ rastie a prekročí hodnotu 1, tak už bude stále rásť, v opačnom prípade by bola porušená jej spojitosť. Môžeme to podložiť aj Lemou 2.2. A ak adjungovaná premenná Ψ klesá a prekročí hodnotu 1, tak už bude klesať stále, v opačnom prípade by bola opäť porušená jej spojitosť. Túto situáciu vieme podložiť Lemou 2.3.

Prípad $\Psi(0) = 1$

Keďže $k(0) = k_0 > k_Z$, tak sme v situácii, ktorú sme analyzovali vyššie, ale v bode t_1 . Pre tento prípad teda nastáva $s = 1$ pre všetky $t \in [0, T]$. Tvar riadenia a jeho odozvy je vyobrazený na Obrázku 2.13a.



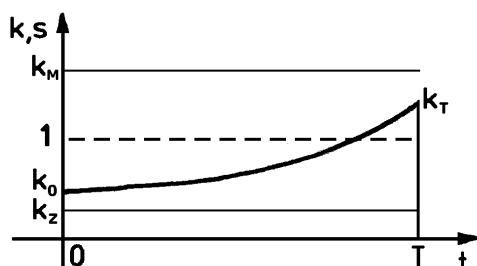
Obrázok 2.13a:
Optimálna odozva - plná čiara,
optimálne riadenie - čiarkovaná čiara



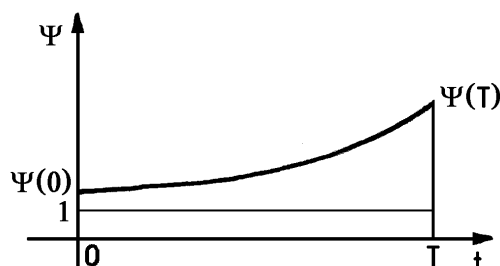
Obrázok 2.13b:
Časový priebeh
adjungovanej premennej

Prípád $\Psi(0) > 1$

Keďže $k(0) = k_0 > k_Z$ a $\Psi(0) > 1$, tak v pravom okolí bodu 0 je $s = 1$ a teda odozva k a adjungovaná premenná Ψ sa vyvíjajú podľa (2.16) a (2.17). To znamená, že Ψ rastie a aj k rastie. Keďže Ψ rastie, tak bude pre Ψ stále platiť $\Psi > 1$ a teda $s = 1$ na celom intervale $[0, T]$. Časový priebeh riadenia a jeho odozvy možno vidieť na Obrázku 2.14a.



Obrázok 2.14a:
Optimálna odozva - plná čiara,
optimálne riadenie - čiarkovaná čiara



Obrázok 2.14b:
Časový priebeh
adjungovanej premennej

Nakoniec môžeme povedať, že riešením Modelu ekonomického rastu pomocou PPM sme dospeli k záveru, že optimálna odozva je "najbližšie" ku rovnovážnej trajektórii $k = k_Z$ spomedzi všetkých prípustných trajektórií. V prípade veľkého T to znamená, že optimálne je dostať sa čo najskôr z hodnoty k_0 na rovnovážnu hodnotu odozvy k_Z , na tejto hodnote čo najdlhšie zotrvať a potom čo najrýchlejšie sa dostať na hodnotu k_T . Ak je časový horizont T krátky, tak sa odozva priblíži čo najviac k rovnovážnej hodnote k_Z tak, aby sa stihla dostať na hodnotu k_T .

Aj keď sme zadanie úlohy mierne modifikovali, tak v porovnaní s uvedeným riešením v knihe [1, str. 110-112] sa výsledky zhodujú. Avšak naša analýza je zložitejšia, pretože nemôžeme vylúčiť možnosť $\Psi^0 = 0$ a navyše pri analýze časového priebehu riadenia a jeho odozvy a adjungovanej premennej nemôžeme vychádzať z toho, že $\Psi(T) = 0$.

2.2 Riešenie pomocou Greenovej vety

Teraz si ukážeme riešenie úlohy pomocou použitia Greenovej vety. Najskôr zo stavovej rovnice $\dot{k} = sf(k) - \delta k$ vyjadríme riadenie, čím dostaneme

$$s = \frac{\dot{k} + \delta k}{f(k)}$$

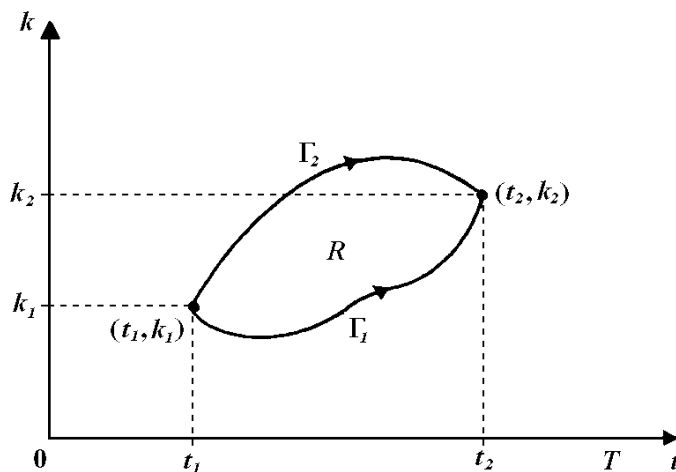
a následne ho dosadíme do účelovej funkcie tejto úlohy, čím získame

$$J = \int_0^T \left(1 - \frac{\dot{k} + \delta k}{f(k)} \right) f(k) dt. \quad (2.21)$$

Ďalej využijeme skutočnosť, že $\dot{k}(t) = \frac{dk}{dt}$ a to tak, že $\dot{k}(t)dt = dk$. Po prepísaní (2.21) dostávame nasledujúci krivkový integrál pozdĺž krivky Γ_1 ,

$$J_{\Gamma_1} = \oint_{\Gamma_1} ([f(k) - \delta k]dt - dk), \quad (2.22)$$

pričom krivka Γ_1 spája body (t_1, k_1) a (t_2, k_2) . Bližšie popíšeme krivku Γ_1 . Nech $\bar{k}(t)$ je odozva odpovedajúca nejakému prípustnému riadeniu. Túto odozvu možno chápať ako spojitú krivku v (t, k) priestore spájajúcu body $(0, k_0)$ a (T, k_T) . Uvažujme len úsek tejto odozvy a to krivku Γ_1 , ktorá spája body (t_1, k_1) a (t_2, k_2) , pričom $t_1 < t_2$. Zároveň uvažujme inú prípustnú odozvu $\tilde{k}(t)$ spĺňajúcu podmienku $\tilde{k}(t_1) = k_1$ a $\tilde{k}(t_2) = k_2$. Príslušnú krivku medzi týmito bodmi označíme Γ_2 . Navyše predpokladajme, že krivka Γ_1 leží pod krivkou Γ_2 , t.j. $\tilde{k}(t) > \bar{k}(t)$ pre každé $t \in (t_1, t_2)$. Krivku Γ_1 s uvedenou vlastnosťou budeme nazývať dolnou a Γ_2 hornou krivkou. Túto situáciu môžeme vidieť na Obrázku 2.15.



Obrázok 2.15: Prípustné krivky Γ_1 a Γ_2 v (t, k) priestore

Nech $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$, kde Γ je jednoduchá uzavretá krivka orientovaná proti smeru hodinových ručičiek, t.j. Γ obieha pozdĺž Γ_1 z bodu (t_1, k_1) do bodu (t_2, k_2) a pozdĺž Γ_2 z bodu (t_2, k_2) do bodu (t_1, k_1) . Teda dostávame

$$J_\Gamma = J_{\Gamma_1 - \Gamma_2} = J_{\Gamma_1} - J_{\Gamma_2}. \quad (2.23)$$

Označme R oblasť uzavretú krivkou Γ . Teraz môžeme na integrál J_Γ aplikovať Greenovu vetu, dostaneme

$$\begin{aligned} J_\Gamma &= \oint_\Gamma [f(k) - \delta k] dt - dk \\ &= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial t}(-1) - \frac{\partial}{\partial k}(f(k) - \delta k) \right] dt dk \\ &= \iint_R [-f'(k) + \delta] dt dk. \end{aligned}$$

Označíme výraz v hranatej zátvorke ako

$$I(k) = [-f'(k) + \delta]. \quad (2.24)$$

Je zrejmé, že ak $I(k)$ má v R stále rovnaké znamienko, tak bude mať aj J_Γ rovnaké znamienko. Na nasledujúcom Tvrdení 2.1. aj s Dôkazom si ukážeme význam znamienka $I(k)$.

Tvrdenie 2.1. *Nech Γ_1, Γ_2, R a $I(k)$ sú také, ako sú popísané vyššie. Nech krivka Γ_1 je dolná a krivka Γ_2 horná prípustná krivka. Ak $I(k) \geq 0$ pre všetky $(t, k) \in R$, potom platí $J_{\Gamma_1} \geq J_{\Gamma_2}$. A analogicky, ak $I(k) \leq 0$ pre všetky $(t, k) \in R$, potom platí $J_{\Gamma_1} \leq J_{\Gamma_2}$.*

Dôkaz. Ak $I(k) \geq 0$ pre všetky $(t, k) \in R$ a zároveň vieme, že $I(k)$ má v R stále rovnaké znamienko, tak bude mať aj J_Γ rovnaké znamienko a teda $J_\Gamma \geq 0$. Potom zo vzorca (2.23) dostávame $J_{\Gamma_1} \geq J_{\Gamma_2}$. To znamená, že integrál pozdĺž krivky Γ_1 dáva vyššiu hodnotu ako integrál pozdĺž krivky Γ_2 . A analogicky by sme dokázali aj opačný prípad.

Ak chceme Tvrdenie 2.1. použiť na hľadanie optimálneho riadenia a jeho odozvy, potrebujeme nájsť oblasti, kde $I(k)$ je kladné a $I(k)$ je záporné. Najprv poznamenajme, že $I(k)$ je rastúca funkcia premennej k . To vieme dokázať podľa podmienok (P), produkčná funkcia $f(k)$ je rastúca a konkávna funkcia, jej prvá derivácia je klesajúca, ale pred $f'(k)$ je záporné znamienko. To znamená, že ak $I(k)$ položíme rovné nule, tak dostaneme hodnotu, ktorú označíme k_Z . Potom môžeme pozorovať tú skutočnosť, že nad touto hodnotou je výraz $I(k)$ kladný a pod ňou záporný. K lepšej predstave nám pomôže Tvrdenie 2.2.

Tvrdenie 2.2. *Nech Γ_1 a Γ_2 sú také, ako sú popísané vyššie. Nech krivka Γ_1 je dolná a krivka Γ_2 horná prípustná krivka. Ak obe ležia v oblasti $k(t) \leq k_Z$ pre $t \in (t_1, t_2)$, potom $J_{\Gamma_1} < J_{\Gamma_2}$. Ak obe ležia v oblasti $k(t) \geq k_Z$ pre $t \in (t_1, t_2)$, potom $J_{\Gamma_1} > J_{\Gamma_2}$.*

Dôkaz. Tvrdenie možno dokázať na základe Lemy 2.1., Dôsledku 2.1. a vzorca (2.23).

Teraz položíme výraz $I(k)$ rovný nule a na základe Tvrdenia 2.2. dostaneme

$$f'(k) = \delta \Leftrightarrow k = k_Z, \quad (2.25)$$

čo je známe z Lemy 2.1.. Tým sme dostali rovnaký výsledok ako v časti 2.1 (Riešenie pomocou PPM), konkrétne (2.4) a (2.5). Tento výsledok platí pre rovnovážny úsek, ktorý zodpovedá singulárnemu intervalu I z PPM.

Keďže k_Z je jedinou hodnotou stavu na rovnovážnej úrovni, tak odozva na tejto úrovni musí byť konštantná, t.j. $k(t) = k_Z$ pre všetky $t \in I$. Teda platí $\dot{k}_Z = 0$ a tým môžeme stavovú rovnicu položiť rovnú nule, t.j. $0 = \dot{k}_Z = sf(k_Z) - \delta k_Z$. Potom z nej vyjadríme optimálne riadenie na rovnovážnom úseku

$$s_Z = \frac{\delta k_Z}{f(k_Z)}. \quad (2.26)$$

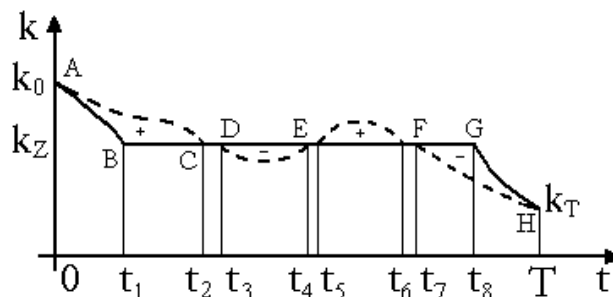
Znovu aj tento výsledok sme dostali v časti 2.1 (Riešenie pomocou PPM), konkrétne (2.6). Na základe Dôsledku 2.1.(c) platí, že hodnota (2.26) musí byť v intervale $(0, 1)$.

Poznámka Analýza časového priebehu odozvy pri konštantom riadení, pri ktorej použijeme Greenovu vetu, bude podobná a bude viesť k rovnakým výsledkom ako analýza v časti 2.1.1 (Časový priebeh odozvy a adjungovanej premennej pri konštantnom riadení), kde sme použili PPM. Avšak nebudeme potrebovať adjungovanú premennú Ψ .

2.2.1 Časový priebeh optimálneho riadenia a jeho odozvy na $[0, T]$

Celkový časový priebeh riadenia a jeho odozvy bude taktiež závisieť od veľkosti času T a od počiatočnej a koncovnej hodnoty kapitálu k_0 a k_T .

Predpokladajme, že počiatočná hodnota kapitálu k_0 je medzi hodnotami k_Z a k_M , koncová hodnota kapitálu k_T je menšia ako rovnovážna hodnota k_Z a časový horizont T je dostatočne dlhý. Teda táto situácia je zobrazená na Obrázku 2.12a. Pomocou nasledujúceho obrázku sa pokúsime vysvetliť, prečo práve takto vyzerajúci priebeh riadenia a jeho odozvy je optimálny. Obrázok 2.16 zobrazuje optimálnu trajektóriu (vyznačená plnou čiarou) pre Obrázok 2.12a spolu s ľubovoľne vybranou prípustnou trajektóriou, ktorá je vyznačená čiarkovane.



Obrázok 2.16: Optimálna trajektória verzus prípustná trajektória

Najprv rozdelíme interval $[0, T]$ na podintervaly, pozdĺž ktorých je čiarkovaná krivka buď nad, pod alebo je identicky rovná s plnou čiarou. Na Obrázku 2.16 sú tieto podintervaly nasledovné: $[0, t_2]$, $[t_2, t_3]$, $[t_3, t_4]$ a tak ďalej, až napokon $[t_7, T]$. Potom nasledujúcu analýzu rozdelíme na štyri časti:

- Najskôr rozoberieme interval $[0, t_2]$. Čiarkovaná trajektória na tomto intervale nemôže preťať krivku idúcu z bodu A do bodu B , pretože riadenie na intervale $[0, t_1]$ nadobúda hodnotu $s = 0$, no a pri tejto hodnote riadenia stav kapitálu najrýchlejšie klesne na rovnovážnu hodnotu k_Z . Rýchlejšie nemôže klesať, pretože riadenie je ohraničené hodnotou 0. Vytvoríme uzavretú krivku na intervale $[0, t_2]$ a to krivku $ABCA$. Plnú čiaru označíme ako Γ_1 (krivka v kladnom smere idúca z bodu A do bodu C), čiarkovanú čiaru označíme ako Γ_2 (krivka v zápornom smere idúca z bodu C do bodu A). Po vypočítaní krivkového integrálu pozdĺž krivky $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ dostaneme kladnú hodnotu a teda výraz $I(k)$ je kladný. Preto je na Obrázku 2.16 táto oblasť vyznačená znamienkom $+$. No a na základe Tvrdenia 2.1. a Tvrdenia 2.2. vieme povedať, že trajektória označená plnou čiarou je lepším riešením ako trajektória označená čiarkovanou čiarou na danom intervale $[0, t_2]$. Teda optimálne je dostať sa čo najskôr na rovnovážnu hodnotu k_Z .
- Podobne rozoberieme aj interval $[t_7, T]$. Čiarkovaná trajektória nemôže preťať krivku idúcu z bodu G do bodu H , pretože riadenie na intervale $[t_8, T]$ nadobúda hodnotu $s = 0$ a takisto pri tejto hodnote riadenia stav kapitálu najrýchlejšie klesne na koncovú hodnotu kapitálu k_T . Rýchlejšie nemôže klesať, pretože riadenie je ohraničené hodnotou 0. Po vytvorení uzavretej krivky $FHGF$ a po vypočítaní krivkového integrálu pozdĺž tejto krivky dostaneme zápornú hodnotu a teda výraz $I(k)$ je záporný. Preto je na Obrázku 2.16 táto oblasť vyznačená znamienkom $-$. No a opäť na základe Tvrdenia 2.1. a Tvrdenia 2.2. vieme povedať, že trajektória označená plnou čiarou je lepším riešením ako trajektória označená čiarkovanou čiarou na danom intervale $[t_7, T]$. Optimálne je čo najneskôr opustiť rovnovážnu hodnotu k_Z ale tak, aby odozva stihla dosiahnuť hodnotu k_T .
- Ďalej treba dokázať, že nie je optimálne opustiť rovnovážnu hodnotu smerom nadol a potom sa na ňu vrátiť. Po vypočítaní krivkového integrálu pozdĺž krivky DED dostaneme zápornú hodnotu a teda výraz $I(k)$ je záporný. No a opäť na základe Tvrdenia 2.1. a Tvrdenia 2.2. vieme povedať, že trajektória označená plnou čiarou je lepším riešením ako trajektória označená čiarkovanou čiarou na danom intervale $[t_3, t_4]$.
- A nakoniec nie je optimálne opustiť rovnovážnu hodnotu smerom nahor a potom sa na ňu vrátiť. Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom bode. Dostaneme, že trajektória označená plnou čiarou je lepším riešením ako trajektória označená čiarkovanou čiarou na danom intervale $[t_5, t_6]$.

Konečným výsledkom je, že na intervaloch $[0, t_2]$, $[t_3, t_4]$, $[t_5, t_6]$ a $[t_7, T]$ je optimálna trajektória vyznačená plnou čiarou a na ostatných intervaloch sú obe trajektórie identické. Teda trajektória označená plnou čiarou dáva vyššiu hodnotu krivkových integrálov na intervale $[0, T]$ a preto je optimálna. Z toho vyplýva, že trajektória označená čiarkovanou čiarou je horším riešením ako trajektória označená plnou čiarou. Tým sme dokázali, že

naša pôvodne zvolená optimálna trajektória je najlepšia zo všetkých možných prípustných trajektórií.

Na základe tejto analýzy môžeme povedať, že riadenie môže nadobúdať len tri hodnoty a to

$$s = \begin{cases} 1 \\ \frac{\delta k_Z}{f(k_Z)} \\ 0 \end{cases}, \quad (2.27)$$

čo je zhodné s (2.7).

Ďalšie prípady, kde sú hodnoty k_0 a k_T iné a kde priebeh optimálneho riadenia a jeho odozvy vyzerá odlišne, by sa dokázali analogicky.

Ďalej spomenieme Vetu 2.1., ktorá hovorí o optimálnej odozve na celom intervale $[0, T]$.

Veta 2.1. *Nech $\hat{k}(t)$ je optimálna odozva. Potom pre každú prípustnú odozvu $k(t)$ platí, že $|\hat{k}(t) - k_Z| \leq |k(t) - k_Z|$ v každom $t \in [0, T]$.*

Teda to znamená, že optimálne je, aby sa odozva dostala čo najrýchlejšie na hodnotu k_Z a čo možno najdlhšie na tejto hodnote zotrvala, až pokým sa nebude musieť dostať do hodnoty k_T . Táto odozva sa realizuje spolu s riadením, ktoré je na danom intervale optimálne.

Nakoniec môžeme zhrnúť, že riešením jednoduchého Modelu ekonomického rastu pomocou Greenovej vety sme dospeli k rovnakému záveru ako pri použití PPM. Optimálna odozva je "najbližšie" ku rovnovážnej trajektórii k_Z spomedzi všetkých prípustných trajektórií. K tomuto záveru sme sa dostali oveľa jednoduchším spôsobom ako pri riešení pomocou PPM, kde sme museli používať zložitú analýzu adjungovanej premennej.

Kapitola 3

Všeobecný prípad

Naše vedomosti získané pri riešení jednoduchého Modelu ekonomického rastu pomocou PPM a pomocou Greenovej vety zovšeobecníme na nasledujúcu úlohu

$$\int_0^T e^{-\rho t} [F_1(x(t)) + u(t)F_2(x(t))] dt \rightarrow \max$$

pri podmienkach

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_1(x(t)) + u(t)f_2(x(t)), \quad t \in [0, T], \quad T \text{ pevné,} \\ x(0) &= x_0, \\ x(T) &= x_T, \\ u(t) &\in [\alpha, \beta], \quad \alpha < \beta,\end{aligned}$$

kde α, β sú ľubovoľné konštanty a konštanta ρ je nezáporná.

Táto úloha musí mať nasledovné vlastnosti, aby sa dala riešiť pomocou použitia Greenovej vety:

- účelová funkcia lineárna v riadení (potrebujeme vedieť odseparovať časti dt a dx , čo uvidíme neskôr),
- stavová rovnica lineárna v riadení,
- úloha s pevným koncom, na konečnom časovom horizonte,
- ohraničenie na riadenie, keďže úloha je lineárna v riadení.

Poznámka Neskôršie sa budeme zaoberať aj úlohami na nekonečnom časovom horizonte. S našimi vedomosťami o optimálnom riadení nevieme riešiť pomocou Greenovej vety úlohy na konečnom časovom horizonte s voľným koncom.

3.1 Riešenie pomocou PPM

Najskôr začneme úlohu riešiť klasicky pomocou PPM. Teda na úlohu aplikujeme podmienky PPM (Veta 6.2.).

V tomto príklade budeme používať iba podmienku maxima a adjungovanú rovnicu. Podmienky transversality (PT) a stacionarity (PS) sú prázdne. Podmienka maxima (PM)

vyzerá nasledovne

$$\Psi^0(F_1(x) + uF_2(x)) + \Psi(f_1(x) + uf_2(x)) \rightarrow \max_{u \in [\alpha, \beta]}, \forall t \in [0, T] \quad (\text{PM})$$

a adjungovaná rovnica (AR) má tvar

$$\dot{\Psi} = -\Psi^0(F_1'(x) + uF_2'(x)) - \Psi(f_1'(x) + uf_2'(x)) + \Psi\rho, \forall t \in [0, T]. \quad (\text{AR})$$

Budeme predpokladať, že $\Psi^0 = 1$. Potom podmienku maxima (PM) môžeme jednoduchšie prepísať do tvaru

$$[F_2(x) + \Psi f_2(x)]u \rightarrow \max_{u \in [\alpha, \beta]}, \forall t \in [0, T]$$

a jej riešením dostávame

$$u = \begin{cases} \beta & \text{ak } \Psi > \frac{-F_2(x)}{f_2(x)}, \\ \text{neurčené} & \text{ak } \Psi = \frac{-F_2(x)}{f_2(x)}, \\ \alpha & \text{ak } \Psi < \frac{-F_2(x)}{f_2(x)}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Podrobnejšie sa budeme venovať prípadu, kde je riadenie neurčené. Keďže Ψ spĺňa pomerne zložitú diferenciálnu rovnicu, nevieme povedať, či prípad $\Psi = \frac{-F_2(x)}{f_2(x)}$ nastane iba v konečnom počte bodov a preto musíme pripustiť možnosť, že nastane na intervale I nenulovej dĺžky. Keďže na tomto intervale poznáme hodnotu adjungovanej premennej ($\Psi = \frac{-F_2(x)}{f_2(x)}$), tak jej deriváciu $\dot{\Psi}$ dáme do rovnosti s adjungovanou rovnicou (AR), v ktorej za Ψ dosadíme výraz prislúchajúci danému intervalu. A z tejto rovnosti sa budeme snažiť vyjadriť riadenie. Derivácia adjungovanej premennej je

$$\dot{\Psi} = \frac{1}{f_2^2(x)} [-F_2'(x)f_2(x)\dot{x} + F_2(x)f_2'(x)\dot{x}]. \quad (3.2)$$

Výraz (3.2) dáme do rovnosti s (AR), v ktorej za adjungovanú premennú Ψ dosadíme $\frac{-F_2(x)}{f_2(x)}$. Po niekoľkých operáciách dostaneme

$$0 = -F_2'(x)f_2(x)f_1(x) + F_2(x)f_2'(x)f_1(x) + F_1'(x)f_2^2(x) - F_2(x)f_2(x)f_1'(x) + F_2(x)f_2(x)\rho. \quad (3.3)$$

Predpokladajme, že rovnica (3.3) má práve jedno riešenie, ozn. x_S . Potom práve toto riešenie je hľadaná optimálna hodnota odozvy na singulárnom úseku I . Keďže x_S je jedinou hodnotou stavu na singulárnom úseku I , tak odozva na I musí byť konštantná, t.j. $x(t) = x_S$ pre všetky $t \in I$.

Optimálne riadenie u na I dorátame tak, že optimálnu odozvu x_S zderivujeme, čím dostaneme $\dot{x}_S = 0$. A teda stavovú rovnicu položíme rovnú nule a potom vyjadríme optimálne riadenie na singulárnom intervale I v tvare

$$u_S = \frac{-f_1(x_S)}{f_2(x_S)}. \quad (3.4)$$

Predpokladajme, že optimálne riadenie (3.4) je z intervalu (α, β) . Tým sme zistili všeobecný tvar optimálneho riadenia na singulárnom intervale I . Takisto sme zistili, že optimálna odozva na I bude konštantná na hodnote x_S .

Poznámka Keďže je zadanie úlohy všeobecné, nevieme nájsť presný tvar optimálneho riadenia a jeho odozvy. Až v závislosti od tvaru funkcií F_1 , F_2 , f_1 a f_2 môžeme pokračovať ďalej. Zistíme tvar optimálneho riadenia, najmä tvar riadenia na singulárnom intervale I . Potom môžeme analyzovať tvar optimálnej odozvy. Až nakoniec môžeme určiť v závislosti od dát, presnejšie od hodnoty x_0 , x_T a T , časový priebeh optimálneho riadenia a jeho odozvy. Taktiež pri analýze časového priebehu musíme dbať na spojitosť adjungovanej premennej Ψ .

3.2 Riešenie pomocou Greenovej vety

Teraz si ukážeme riešenie úlohy pomocou použitia Greenovej vety. Najskôr si zo stavovej rovnice $\dot{x} = f_1(x) + uf_2(x)$ vyjadríme riadenie, čím dostaneme

$$u = \frac{\dot{x} - f_1(x)}{f_2(x)}$$

a následne ho dosadíme do účelovej funkcie tejto úlohy, čím získame

$$J = \int_0^T e^{-\rho t} \left[F_1(x) + \frac{\dot{x} - f_1(x)}{f_2(x)} F_2(x) \right] dt. \quad (3.5)$$

Tiež vieme, že $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$. Po prepísaní (3.5) dostávame nasledujúci krivkový integrál pozdĺž krivky Γ_1

$$J_{\Gamma_1} = \oint_{\Gamma_1} \left(e^{-\rho t} \left[F_1(x) - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} F_2(x) \right] dt + e^{-\rho t} \left[\frac{F_2(x)}{f_2(x)} \right] dx \right), \quad (3.6)$$

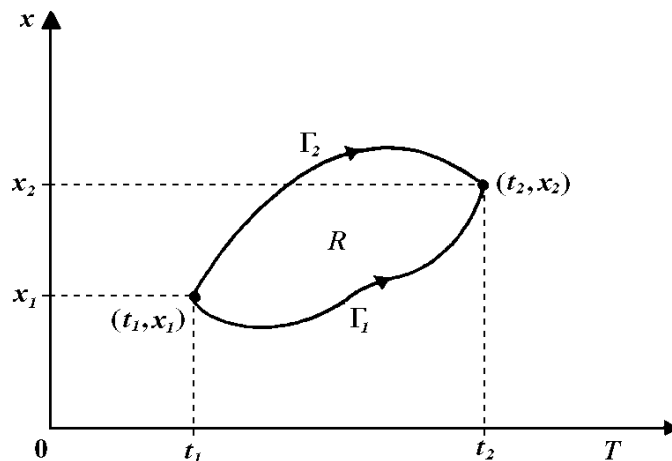
pričom krivka Γ_1 spája body (t_1, x_1) a (t_2, x_2) . Pre zjednodušenie výraz (3.6) prepíšeme nasledovne

$$J_{\Gamma_1} = \oint_{\Gamma_1} (e^{-\rho t} A(x) dt + e^{-\rho t} B(x) dx), \quad (3.7)$$

kde

$$A(x) = \left[F_1(x) - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} F_2(x) \right], \quad B(x) = \left[\frac{F_2(x)}{f_2(x)} \right]. \quad (3.8)$$

Ako je písané v časti 2.2 (Riešenie pomocou Greenovej vety), krivka Γ_1 je úsek odozvy $\bar{x}(t)$, ktorý zodpovedá nejakému prípustnému riadeniu $u(t)$. Potom krivku Γ_1 možno chápať ako spojitú krivku v (t, x) priestore spájajúcu body (t_1, x_1) a (t_2, x_2) , pričom $t_1 < t_2$. Taktiež uvažujme inú prípustnú odozvu $\tilde{x}(t)$, ktorá spĺňa podmienky $\tilde{x}(t_1) = x_1$ a $\tilde{x}(t_2) = x_2$. Úsek medzi týmito bodmi budeme označovať Γ_2 . Taktiež budeme predpokladať, že krivka Γ_1

Obrázok 3.1: Prípustné krivky Γ_1 a Γ_2 v (t, x) priestore

leží pod krivkou Γ_2 , t.j. $\tilde{x}(t) > \bar{x}(t)$ pre každé $t \in (t_1, t_2)$. Potom krivku Γ_1 s uvedenou vlastnosťou budeme nazývať dolnou a Γ_2 hornou krivkou. K lepšej predstave pomôže Obrázok 3.1.

Teraz si môžeme vytvoriť jednoduchú uzavretú krivku Γ , ktorá vznikne z rozdielu $\Gamma_1 - \Gamma_2$. Je orientovaná proti smeru hodinových ručičiek, t.j. Γ obieha pozdĺž Γ_1 z bodu (t_1, x_1) do bodu (t_2, x_2) a pozdĺž Γ_2 z bodu (t_2, x_2) do bodu (t_1, x_1) . Potom platí rovnaká rovnica (2.23) z časti 2.2 (Riešenie pomocou Greenovej vety)

$$J_\Gamma = J_{\Gamma_1 - \Gamma_2} = J_{\Gamma_1} - J_{\Gamma_2}. \quad (3.9)$$

Označme R oblasť uzavretú krivkou Γ . A až teraz môžeme na krivkový integrál J_Γ aplikovať Greenovu vetu. Dostaneme

$$J_\Gamma = \oint_{\Gamma} (e^{-\rho t} A(x) dt + e^{-\rho t} B(x) dx) = \iint_R e^{-\rho t} [-\rho B(x) - A'(x)] dt dx.$$

Výraz v hranatej zátvorke pri dvojnóm integráli označme $I(x)$

$$I(x) = [-\rho B(x) - A'(x)]. \quad (3.10)$$

Je zrejmé, že ak $I(x)$ má v R stále rovnaké znamienko, tak bude mať aj J_Γ rovnaké znamienko. Na základe Tvrdenia 2.1. z časti 2.2 (Riešenie pomocou Greenovej vety) vieme ukázať význam znamienka $I(x)$. Aby sme získali kladné a záporné oblasti J_Γ , položíme výraz $I(x)$ rovný nule. Predpokladajme, že rovnica $I(x) = 0$ má práve jedno riešenie. Napríklad v závislosti od tvaru funkcií F_1 , F_2 , f_1 a f_2 môže byť výraz $I(x)$ rastúca alebo klesajúca funkcia od x . To znamená, že ak je táto funkcia rastúca, položíme ju rovnú nule. Potom rovnica $I(x) = 0$ je splnená len pre jedinú hodnotu a to x_S , pri ktorej môžeme pozorovať tú skutočnosť, že nad touto hodnotou je výraz $I(x)$ kladný a pod ňou záporný. A naopak, ak je funkcia $I(x)$ klesajúca, takisto ju položíme rovnú nule. Potom má rovnica

$I(x) = 0$ jediné riešenie a to x_S , pri ktorom môžeme pozorovať zasa tú skutočnosť, že nad touto hodnotou je výraz $I(x)$ záporný a pod ňou kladný.

Hodnotu x_S budeme označovať ako rovnovážnu hodnotu odozvy. K lepšej predstave nám pomôže Tvrdenie 3.1., ktoré sa viaže k rastúcej funkcii $I(x)$ a Tvrdenie 3.2., ktoré sa viaže ku klesajúcej funkcii $I(x)$.

Tvrdenie 3.1. *Nech Γ_1 a Γ_2 sú také, ako sú popísané vyššie. Nech Γ_1 je dolná a Γ_2 je horná prípustná krivka. Ak obe ležia v oblasti $x(t) \leq x_S$ pre $t \in (t_1, t_2)$, potom $J_{\Gamma_1} < J_{\Gamma_2}$. Ak obe ležia v oblasti $x(t) \geq x_S$ pre $t \in (t_1, t_2)$, potom $J_{\Gamma_1} > J_{\Gamma_2}$.*

Tvrdenie 3.2. *Nech Γ_1 a Γ_2 sú také, ako sú popísané vyššie. Nech Γ_1 je dolná a Γ_2 je horná prípustná krivka. Ak obe ležia v oblasti $x(t) \leq x_S$ pre $t \in (t_1, t_2)$, potom $J_{\Gamma_1} > J_{\Gamma_2}$. Ak obe ležia v oblasti $x(t) \geq x_S$ pre $t \in (t_1, t_2)$, potom $J_{\Gamma_1} < J_{\Gamma_2}$.*

Teda potrebujeme položiť výraz $I(x)$ rovný nule

$$0 = [-\rho B(x) - A'(x)]. \quad (3.11)$$

Aby sme mohli porovnať výsledky, ktoré sme dostali riešením úlohy pomocou PPM a pomocou použitia Greenovej vety, potrebujeme rovnicu (3.11) prepísať pomocou funkcií F_1 , F_2 , f_1 a f_2 . Po krátkych úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} 0 = & -F_2'(x)f_2(x)f_1(x) + F_2(x)f_2'(x)f_1(x) + F_1'(x)f_2^2(x) - \\ & - F_2(x)f_2(x)f_1'(x) + F_2(x)f_2(x)\rho. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Tým sme dostali rovnaký vzťah ako pri riešení PPM (v časti 3.1 Riešenie pomocou PPM ide o vzťah (3.3)). Keďže predpokladáme, že má rovnica (3.12) práve jedno riešenie, tak toto riešenie budeme označovať x_S , čo je spomínaná rovnovážna hodnota odozvy. Potom toto riešenie je hľadaná optimálna odozva, ktorá pri riešení pomocou PPM zodpovedá optimálnej odozve na sigulárnom úseku I . Keďže x_S je jedinou hodnotou stavu na rovnovážnej úrovni I , tak odozva na tejto úrovni musí byť konštantná, t.j. $x(t) = x_S$ pre všetky $t \in I$. Teda platí $\dot{x}_S = 0$ a tým môžeme stavovú rovnicu položiť rovnú nule, t.j. $0 = \dot{x}_S = f_1(x_S) + u f_2(x_S)$. Potom z nej vyjadríme optimálne riadenie na rovnovážnom úseku

$$u_S = \frac{-f_1(x_S)}{f_2(x_S)}. \quad (3.13)$$

Aj tento výsledok sme dostali v časti 3.1 (Riešenie pomocou PPM), konkrétne (3.4). A aj tu musíme predpokladať, že optimálne riadenie (3.13) musí byť v intervale (α, β) , pretože platí pôvodné ohraničenie na riadenie $u \in [\alpha, \beta]$. Tým sme zistili všeobecný tvar optimálneho riadenia, ktoré zodpovedá singulárnemu intervalu I z PPM. Takisto sme zistili, že optimálna odozva na tomto intervale je konštantná.

Napokon môžeme zhrnúť, že oboma spôsobmi aj použitím PPM a aj použitím Greenovej vety sme dostali rovnaké výsledky.

Poznámka Keďže je zadanie úlohy všeobecné, tak aj pri jej riešení pomocou použitia Greenovej vety nevieme nájsť presný tvar optimálneho riadenia a jeho odozvy. Až v závislosti od tvaru funkcií F_1 , F_2 , f_1 a f_2 môžeme pokračovať ďalej. Potom zistíme tvar optimálneho riadenia, najmä tvar riadenia na rovnovážnej úrovni a následne môžeme analyzovať tvar optimálnej odozvy. Až nakoniec môžeme určiť v závislosti od dát, presnejšie od hodnoty x_0 , x_T a T , časový priebeh optimálneho riadenia a jeho odozvy.

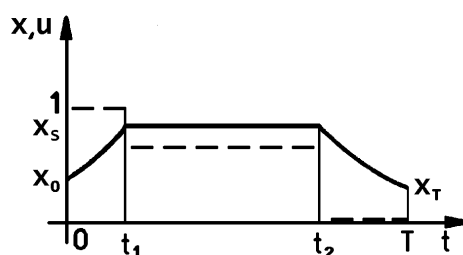
3.2.1 Poznámky

1. Riadenie $u(t)$ musí byť lineárne. Kontrapríkladom je napr. použitie kvadratického tvaru riadenia. V tomto prípade po dosadení riadenia do účelovej funkcie nevieme rozdeliť dx a dt na dve časti integrálu.
2. Optimálne riadenie $\hat{u}(t)$ na singulárnom intervale I dostaneme vždy zo stavovej rovnice aj v prípade použitia PPM aj pri riešení pomocou Greenovej vety. A to tak, že na celom I dostaneme jedinú hodnotu optimálnej odozvy $\hat{x}(t)$ a teda musí platiť $\dot{\hat{x}}(t) = 0$. Tým pádom stavovú rovnicu položíme rovnú nule a vyjadríme optimálne riadenie. Preto optimálne riadenie bude vždy pozostávať maximálne z troch možností a to z okrajových hodnôt intervalu, ktorý ohraničuje pôvodné riadenie a z hodnoty získanej zo stavovej rovnice.
3. Optimálna odozva $\hat{x}(t)$ bude na celom singulárnom intervale I stále rovnaká a dostaneme ju v prípade použitia Greenovej vety z rovnosti $I(x) = 0$. V prípade použitia PPM ju dostaneme tak, že dáme do rovnosti:
 - deriváciu adjungovanej premennej $\dot{\Psi}(t)$ z (AR), pričom za $\Psi(t)$ dosadíme výraz prislúchajúci singulárnemu intervalu,
 - deriváciu adjungovanej premennej $\dot{\Psi}(t)$ z tohto intervalu.

3.2.2 Časový priebeh optimálneho riadenia a jeho odozvy

Analýza v tejto podkapitole je analógiou s riešením v časti 2.2.1 (Časový priebeh optimálneho riadenia a jeho odozvy na $[0, T]$).

Celkový časový priebeh riadenia a jeho odozvy bude závisieť od veľkosti času T a od počiatočnej a koncovej hodnoty kapitálu x_0 a x_T . No nevieme presne určiť časový priebeh, ale odhadneme, že môže vyzeráť ako na Obrázku 3.2.

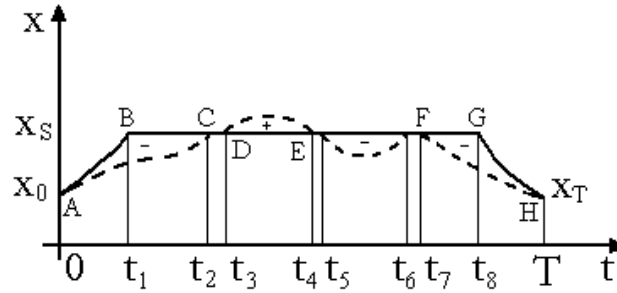


Obrázok 3.2: Optimálna odozva - plná čiara, optimálne riadenie - čiarkovaná čiara

To znamená, že odhadujeme tvar optimálnej odozvy tak, aby prípustná odozva bola čo najbližšie ku rovnovážnemu stavu x_s .

Teraz sa budeme snažiť dokázať, prečo práve takto by malo vyzeráť riadenie a jeho odozva. Takýto priebeh optimálnej odozvy porovnáme s inou ľubovoľnou prípustnou odozvou a dokážeme, že nami zvolená optimálna trajektória je naozaj optimálna. Túto situáciu

vidíme na Obrázku 3.3, pričom optimálna trajektória je vyznačená plnou čiarou a ľubovoľne zvolená prípustná trajektória je označená čiarkovane.



Obrázok 3.3: Optimalná trajektória verus prípustná trajektória

Predpokladajme, že výraz $I(x)$ daný vzťahom (3.10) je rastúca funkcia. Najprv budeme analyzovať na Obrázku 3.3 interval $[0, t_2]$. Chceme dokázať, že úsek odozvy z bodu A do bodu C (plná čiara) dáva vyššiu hodnotu účelovej funkcie danej úlohy ako úsek prípustnej odozvy z bodu A do bodu C (čiarkovaná čiara). To znamená, že integrál pod krivkou ABC dáva vyššiu hodnotu ako integrál pod krivkou AC . Neskôr pri aplikovaní Tvrdenia 2.1. chápme krivku AC ako krivku Γ_1 a krivku ABC ako krivku Γ_2 . Teda vytvoríme krivkový integrál pod uzavretou krivkou $ACBA$, ktorá je kladne orientovaná, t.j. orientovaná proti smeru hodinových ručičiek.

$$\begin{aligned} J_{\Gamma} &= \oint_{AC} (e^{-\rho t} A(x) dt + e^{-\rho t} B(x) dx) + \oint_{CBA} (e^{-\rho t} A(\hat{x}) dt + e^{-\rho t} B(\hat{x}) dx) \\ &= \oint_{ACBA} (e^{-\rho t} A(x) dt + e^{-\rho t} B(x) dx) \end{aligned}$$

Na krivkový integrál J_{Γ} aplikujeme Greenovu vetu.

$$J_{\Gamma} = \oint_{ACBA} (e^{-\rho t} A(x) dt + e^{-\rho t} B(x) dx) = \iint_R (-\rho e^{-\rho t} B(x) - e^{-\rho t} A'(x)) dt dx \quad (3.14)$$

Po menších úpravách a po tom, ako výraz $(-\rho B(x) - A'(x))$ označíme $I(x)$, z (3.14) dostaneme

$$J_{\Gamma} = \iint_R e^{-\rho t} I(x) dt dx. \quad (3.15)$$

Keďže sme predpokladali, že $I(x)$ je rastúca funkcia, tak potom na základe Tvrdenia 3.1. a rovnice (3.9) vieme, že pre rovnicu (3.15) platí $J_{\Gamma} \leq 0$. Teda celá oblasť ohraničená krivkou $ACBA$ leží v oblasti, kde $I(x) \leq 0$. Preto je táto oblasť označená na Obrázku 3.3 znamienkom $-$. A po použití rovnice (3.9) na nerovnosť $J_{\Gamma} \leq 0$ sme dokázali, že optimálnou trajektóriu je krivka ABC označená plnou čiarou. Tak by sme mohli pokračovať ďalej a vypočítať všetky krivkové integrály vytvorené na intervaloch $[t_3, t_4]$, $[t_5, t_6]$ a $[t_7, T]$.

Dosatali by sme znamienka, ktoré sú už zobrazené na Obrázku 3.3. A po opätovnom použití rovnice (3.9) na nerovnosti $J_T \leq 0$ alebo $J_T \geq 0$ môžeme prehlásiť, že na daných intervaloch je krivka vyznačená plnou čiarou optimálna a teda trajektória vyznačená plnou čiarou na celom intervale $[0, T]$ je optimálnou odozvou danej úlohy. Tým sme dokázali, že riadenie a jeho odozva vyobrazené na Obrázku 3.2 sú naozaj optimálne.

Sformulujeme Vetu 3.1., ktorá hovorí o optimálnej odozve na celom intervale $[0, T]$.

Veta 3.1. *Nech $\hat{x}(t)$ je optimálna odozva. Potom pre každú prípustnú odozvu $x(t)$ platí, že $|\hat{x}(t) - x_S| \leq |x(t) - x_S|$ v každom $t \in [0, T]$.*

To znamená, že optimálne je dostať sa čo najrýchlejšie na rovnovážnu hodnotu x_S a čo možno najdlhšie na tejto hodnote zotrvať, t.j. čo možno najneskôr hodnotu x_S opustiť. Táto odozva sa realizuje spolu s riadením, ktoré je na danom intervale optimálne.

Inak povedané, nie je optimálne dostať sa neskôr na rovnovážnu hodnotu v porovnaní s odozvou, ktorá sa realizuje s krajnou hodnotou riadenia. Nie je optimálne opustiť rovnovážnu hodnotu smerom nahor a potom sa na ňu vrátiť, opustiť rovnovážnu hodnotu smerom nadol a potom sa na ňu vrátiť. A nakoniec nie je optimálne natrvalo opustiť rovnovážnu hodnotu ešte pred tým, ako ju opustí odozva, ktorá sa realizuje s krajnou hodnotou riadenia.

Kapitola 4

Všeobecná úloha na nekonečnom časovom horizonte

V tejto kapitole ukážeme, že pomocou Greenovej vety vieme vyriešiť aj úlohu na nekonečnom časovom horizonte. Budeme používať upravenú všeobecnú úlohu z Kapitoly 3. Úloha je nasledovná

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} [F_1(x(t)) + u(t)F_2(x(t))] dt \rightarrow \max$$

pri podmienkach

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f_1(x(t)) + u(t)f_2(x(t)), \\ x(0) &= x_0, \\ u(t) &\in [\alpha, \beta], \quad \alpha < \beta,\end{aligned}$$

kde α, β sú ľubovoľné konštanty a konštanta ρ je nezáporná.

Riešenie bude podobné ako vo Všeobecnom prípade v Kapitole 3. Zo stavovej rovnice $\dot{x} = f_1(x) + uf_2(x)$ vyjadríme riadenie, čím dostaneme

$$u = \frac{\dot{x} - f_1(x)}{f_2(x)}$$

a následne ho dosadíme do účelovej funkcie tejto úlohy, čím získame

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left[F_1(x) + \frac{\dot{x} - f_1(x)}{f_2(x)} F_2(x) \right] dt. \quad (4.1)$$

Po jednoduchých úpravách v rovnici (4.1) dostaneme krivkový integrál pozdĺž krivky Γ_1

$$J_{\Gamma_1} = \oint_{\Gamma_1} \left(e^{-\rho t} \left[F_1(x) - \frac{f_1(x)}{f_2(x)} F_2(x) \right] dt + e^{-\rho t} \left[\frac{F_2(x)}{f_2(x)} \right] dx \right), \quad (4.2)$$

pričom krivka Γ_1 spája body (t_1, x_1) a (t_2, x_2) . Ďalší postup je rovnaký ako vo Všeobecnom prípade v Kapitole 3. Teda vieme, že rovnovážnu hodnotu odozvy x_S získame z rovnice, o ktorej predpokladáme, že má jediné riešenie.

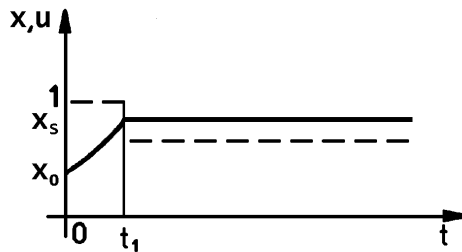
$$0 = -F_2'(x)f_2(x)f_1(x) + F_2(x)f_2'(x)f_1(x) + F_1'(x)f_2^2(x) - F_2(x)f_2(x)f_1'(x) + F_2(x)f_2(x)\rho \quad (4.3)$$

A keďže x_S je opäť jedinou hodnotou stavu na rovnovážnej úrovni I , tak odozva na tejto úrovni musí byť konštantná, t.j. $x(t) = x_S$ pre všetky $t \in I$ a teda platí $\dot{x}_S = 0$. Stavovú rovnicu položíme rovnú nule, t.j. $0 = \dot{x}_S = f_1(x_S) + uf_2(x_S)$. Potom z nej vyjadríme optimálne riadenie na rovnovážnom úseku

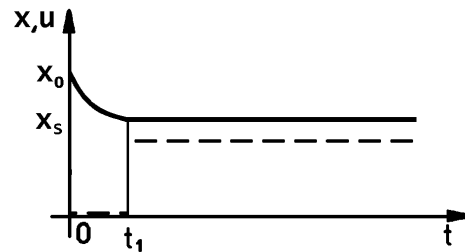
$$u_S = \frac{-f_1(x_S)}{f_2(x_S)}. \quad (4.4)$$

Aj v tomto prípade pre časový priebeh riadenia a jeho odozvy platí Veta 3.1. Vieme teda, že optimálne je dostať sa čo najrýchlejšie na rovnovážnu hodnotu odozvy x_S a čo možno najdlhšie na tejto hodnote zotrvať. Zmena však súvisí s nekonečným časovým horizontom. Teda ide o prípad, kedy čas t ide do nekonečna a vtedy nemáme určenú koncovú hodnotu odozvy. No my dokážeme, že nie je optimálne natrvalo, ale ani dočasne opustiť rovnovážnu hodnotu x_S .

Teda ďalej budeme dokazovať, že tvar riadenia a jeho odozvy musí vyzeráť tak, ako to je vyobrazené na Obrázku 4.1a alebo na Obrázku 4.1b. Závisí len od počiatočnej hodnoty odozvy x_0 .

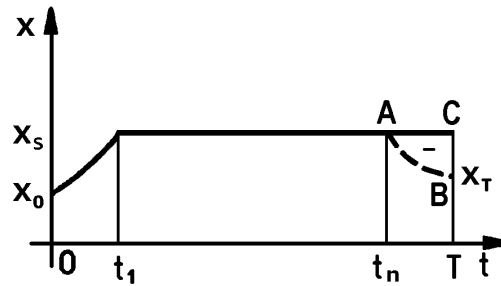


Obrázok 4.1a:
Optimálna odozva - plná čiara,
optimálne riadenie - čiarkovaná čiara



Obrázok 4.1b:
Optimálna odozva - plná čiara,
optimálne riadenie - čiarkovaná čiara

Zdôvodníme len prípad, keď začiatočná hodnota odozvy x_0 je menšia ako rovnovážna hodnota x_S . Teda priebeh riadenia a jeho odozvy bude vyzeráť ako na Obrázku 4.1a. Budeme sa snažiť ukázať, prečo práve takto by malo vyzeráť riadenie a jeho odozva. Priebeh optimálnej odozvy porovnáme s inou ľubovoľnou prípustnou odozvou a dokážeme, že nami zvolená optimálna trajektória je naozaj optimálna. Túto situáciu vidíme na Obrázku 4.2, pričom optimálna trajektória je vyznačená plnou čiarou a ľubovoľne zvolená prípustná trajektória je označená čiarkovane.



Obrázok 4.2: Optimálna trajektória verzus prípustná trajektória

Na Obrázku 4.2 je vyznačená optimálna aj prípustná trajektória len po čas T , pretože v ďalšej analýze budeme používať limitu pre T idúce do nekonečna. Na intervale $[0, t_n]$ je vyznačená len optimálna trajektória a je identická s prípustnou trajektóriou. Tento tvar optimálnej trajektórie sme analyzovali vo Všeobecnom prípade v časti 3.2.2 (Časový priebeh optimálneho riadenia a jeho odozvy na $[0, T]$). Preto sa budeme zaoberať len intervalom $[t_n, T]$.

Pre zjednodušenie budeme používať označenie z rovníc (3.7) a (3.8) a tiež vieme, že výraz $I(x)$ určený vzťahom (3.10) je rastúcou funkciou od x . Chceme nájsť podmienky, za ktorých v limite pre T idúce do nekonečna dáva úsek odozvy z bodu A do bodu C (plná čiara) vyššiu hodnotu účelovej funkcie danej úlohy ako úsek inej prípustnej odozvy z bodu A do bodu B (čiarkovaná čiara). To znamená, že v limite pre T idúce do nekonečna integrál pod krivkou AC dáva vyššiu hodnotu ako integrál pod krivkou AB . Neskôr pri aplikovaní Tvrdenia 3.1. chápme krivku AB ako krivku Γ_1 a krivku AC ako krivku Γ_2 . Aby sme mohli na krivkový integrál aplikovať Greenovu vetu, potrebujeme mať jednoduchú uzavretú krivku. Preto použijeme spojnicu \overline{BC} a tým vytvoríme uzavretú krivku $ABCA$. Teda vytvoríme krivkový integrál J_Γ pod uzavretou krivkou $ABCA$, ktorá je kladne orientovaná, t.j. orientovaná proti smeru hodinových ručičiek.

$$\begin{aligned}
 \Delta = J_\Gamma + \overline{CB} &= \oint_{AB} (e^{-\rho t} A(x) dt + e^{-\rho t} B(x) dx) - \oint_{AC} (e^{-\rho t} A(\hat{x}) dt + e^{-\rho t} B(\hat{x}) dx) \\
 &+ \int_{x_T}^{x_S} e^{-\rho T} B(x) dx + \int_{x_S}^{x_T} e^{-\rho T} B(x) dx \\
 &= \oint_{ABCA} (e^{-\rho t} A(x) dt + e^{-\rho t} B(x) dx) + \int_{x_S}^{x_T} e^{-\rho T} B(x) dx
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

V rovnici (4.5) je aj integrál \overline{CB} , pretože pri vytvorení krivkového integrálu J_Γ sme pridali úsečku \overline{BC} . Preto sme ju museli znovu odobrať. Teraz môžeme na J_Γ aplikovať Gree-

novu vetu.

$$\begin{aligned}\Delta &= \oint_{ABCA} (e^{-\rho t} A(x) dt + e^{-\rho t} B(x) dx) + \int_{x_S}^{x_T} e^{-\rho T} B(x) dx \\ &= \iint_R (-\rho e^{-\rho t} B(x) - e^{-\rho t} A'(x)) dt dx + \int_{x_S}^{x_T} e^{-\rho T} B(x) dx\end{aligned}\quad (4.6)$$

Výraz $(-\rho B(x) - A'(x))$ pri dvojnóm integráli v rovnici (4.6) označíme $I(x)$, potom dostaneme

$$\Delta = \iint_R e^{-\rho t} I(x) dt dx + \int_{x_S}^{x_T} e^{-\rho T} B(x) dx. \quad (4.7)$$

Keďže vieme, že pracujeme s nekonečným časovým horizontom, tak teraz použijeme na rovnicu (4.7) limitu pre T idúce do nekonečna.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta = \lim_{T \rightarrow \infty} \iint_R e^{-\rho t} I(x) dt dx + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{x_S}^{x_T} e^{-\rho T} B(x) dx. \quad (4.8)$$

Chceme ukázať, že limita daná vzorcom (4.8) je nekladná, pretože potom po použití Tvrdenia 3.1. by sme dokázali, že optimálnou trajektóriou je krivka AC označená plnou čiarou.

Na základe Tvrdenia 3.1. a rovnice (3.9) vieme, že platí

$$\lim_{T \rightarrow \infty} J_\Gamma = \lim_{T \rightarrow \infty} \iint_R e^{-\rho t} I(x) dt dx \leq 0, \quad (4.9)$$

pretože sme predpokladali, že $I(x)$ je rastúca funkcia od x a vieme, že oblasť R ohraničená krivkou $ABCA$ leží v oblasti, kde $x(t) \leq x_S$.

O výraze

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{x_S}^{x_T} e^{-\rho T} B(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \int_{x_S}^{x_T} B(x) dx \quad (4.10)$$

vo všeobecnosti však nemáme žiadne informácie. Ak by však platilo, že

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \int_{x_S}^{x_T} B(x) dx \leq 0, \quad (4.11)$$

tak by bolo splnené, že výraz (4.8) je nekladný.

Predpoklad daný vzťahom (4.11) je splnený napríklad, ak $B(x)$ je v danej oblasti kladnou konštantou a $0 \leq x(t) \leq x_S$. Potom

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \int_{x_S}^{x_T} B(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \underbrace{B(x)}_{>0} \underbrace{[x_T - x_S]}_{<0} \leq 0.$$

Teraz môžeme povedať, že na základe nerovnice (4.9) a predpokladu (4.11) je limita daná vzorcom (4.8) nekladná a teda na intervale $[t_n, T]$ pre T idúce do nekonečna je krivka AC optimálna. Teda integrál pod krivkou AC dáva vyššiu hodnotu účelovej funkcie ako integrál pod krivkou AB a preto je táto oblasť označená na Obrázku 4.2 znamienkom $-$. Potom optimálnou odozvou danej úlohy je trajektória vyznačená plnou čiarou na celom intervale $[0, T]$, pričom sme použili limitu pre T idúce do nekonečna. Tým sme dokázali, že riadenie a jeho odozva vyobrazené na Obrázku 4.1a sú naozaj optimálne.

Poznámka Treba povedať, že tiež nie je optimálne natrvalo opustiť rovnovážnu hodnotu odozvy smerom nahor. Postup dokazovania by bol analogický ako v prípade opustenia rovnovážnej hodnoty odozvy smerom nadol. Rozdiel je v tom, že výraz Δ má tvar

$$\Delta = J_\Gamma + \overline{CB} = \oint_{ABCA} (e^{-\rho t} A(x) dt + e^{-\rho t} B(x) dx) + \int_{x_T}^{x_S} e^{-\rho T} B(x) dx, \quad (4.12)$$

pričom sa krivka AB nachádza na rovnovážnej úrovni, teda je dolnou krivkou a krivka AC sa nachádza nad ňou, je teda hornou krivkou. Po aplikovaní Greenovej vety na krivkový integrál J_Γ dostaneme

$$\Delta = \iint_R (-\rho e^{-\rho t} B(x) - e^{-\rho t} A'(x)) dt dx + \int_{x_T}^{x_S} e^{-\rho T} B(x) dx \quad (4.13)$$

a potom limita z výrazu (4.13) musí byť nezáporná, pretože potom po použití Tvrdenia 3.1. by sme dokázali, že optimálna trajektória je krivka nachádzajúca sa na rovnovážnej úrovni. Na základe Tvrdenia 3.1. a rovnice (3.9) vieme, že limita z výrazu J_Γ je nezáporná. Platí to na základe predpokladu, že $I(x)$ je rastúca funkcia a vieme, že oblasť R ohraničená krivkou $ABCA$ leží v oblasti, kde $x(t) \geq x_S$. A o limite z výrazu \overline{CB} musíme predpokladať, že je tiež nezáporná. Teda po zmene hraníc musí platiť

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \int_{x_S}^{x_T} B(x) dx \leq 0, \quad (4.14)$$

čím sme dostali rovnakú podmienku ako v prípade opustenia rovnovážnej hodnoty odozvy natrvalo smerom nadol, ktorá je vyjadrená vzťahom (4.11). Nakoniec môžeme zhrnúť, že v oboch prípadoch opustenia rovnovážnej hodnoty odozvy natrvalo smerom nahor alebo smerom nadol, musí platiť rovnaká limitná podmienka.

Na záver sformulujeme Vetu 4.1., ktorá hovorí o optimálnej odozve na nekonečnom časovom horizonte.

Veta 4.1. *Nech je splnená podmienka (4.11) a nech $\hat{x}(t)$ je optimálna odozva. Potom pre každú prípustnú odozvu $x(t)$ platí, že $|\hat{x}(t) - x_S| \leq |x(t) - x_S|$ v každom $t \in [0, \infty)$, pričom existuje také t_1 , že $\hat{x}(t) = x_S$ pre každé $t \geq t_1$.*

To znamená, že optimálne je dostať sa čo najrýchlejšie na rovnovážnu hodnotu x_S a od času t_1 , keď sa odozva dostane na hodnotu x_S , na nej zotrvať až do nekonečna. Teda nie je optimálne v nejakom čase t_n natrvalo, ale ani dočasne opustiť rovnovážnu hodnotu x_S . Táto odozva sa realizuje spolu s riadením, ktoré je na danom intervale optimálne.

Kapitola 5

Iné riešené príklady

Nasledujúce príklady v tejto kapitole budeme riešiť len pomocou Greenovej vety, pričom budeme používať riešený Všeobecný prípad (Kapitola 3) a tiež riešenú Všeobecnú úlohu na nekonečnom časovom horizonte (Kapitola 4).

5.1 Model optimálneho výlovu rýb

Tento model je popísaný a riešený v knihe [5, str. 268-273]. V tejto práci je úloha riešená na nekonečnom časovom horizonte. My ju budeme riešiť aj na nekonečnom časovom horizonte aj na konečnom časovom horizonte s pevným koncom. Avšak pre našu potrebu tento model mierne modifikujeme. Ako zmeníme zadanie úlohy, popíšeme neskôr.

V modeli sa budeme zaoberať optimálnym výlovom rýb pri ich optimálnom množstve. Predpokladáme, že výlov organizuje jedna osoba, ktorá je ich jediným vlastníkom. Tento vlastník maximalizuje zisk z predaja rýb na konečnom časovom horizonte s pevným koncom alebo na nekonečnom časovom horizonte, pričom počíta aj s nákladmi na ich výlov. Úloha je nasledovná

$$J = \int_0^T e^{-\rho t} (pqx - c)u \, dt \rightarrow \max$$

pri podmienkach

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x) - qux, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ pevné,} \\ x(0) &= x_0, \\ x(T) &= x_T, \\ 0 &\leq x < \infty, \\ 0 &\leq u \leq U, \end{aligned}$$

kde $p, q, c, \rho, U, x_0, x_T$ a T sú dané kladné konštanty. Stavová premenná $x(t)$ popisuje množstvo rýb v čase t , ktorá logicky môže nadobúdať len nezáporné hodnoty a oproti pôvodnému zadaniu nebudeme brať do úvahy jej ohraničenie X . Riadiaca premenná $u(t)$ znamená mieru chytania rýb v čase t . Hodnota U je maximálna miera chytania rýb, ktorá je dostatočne veľkou hodnotou. Konštantu p je jednotková cena za predaj jednej

ryby, konštanta q je celočíselný koeficient chytania rýb. Konštanta c sú jednotkové náklady na chytanie rýb a konštanta ρ je diskontná úroková miera. Funkcia $g(x)$ je funkciou prirodzeného rastu množstva rýb, ktorá je diferencovateľná a konkávna. Od tejto funkcie nebudeme vyžadovať také vlastnosti, ako mala pôvodne, navyše pre jednoduchosť a názornosť riešenia zvolíme jej presný tvar a to $g(x) = x$.

5.1.1 Riešenie na konečnom časovom horizonte s pevným koncom

Teraz prejdeme k riešeniu tejto úlohy. Aby sme mohli aplikovať na úlohu Všeobecný prípad z Kapitoly 3., zo vzťahov (3.8) vyjadríme konkrétne $A(x)$ a $B(x)$, ktoré sú

$$A(x) = \left(\frac{pqx - c}{q} \right), \quad B(x) = - \left(\frac{pqx - c}{qx} \right). \quad (5.1)$$

Pre riešenie je rozhodujúci výraz $I(x)$ definovaný v (3.10). Tento výraz má pre našu úlohu tvar

$$I(x) = \left[\rho \left(\frac{pqx - c}{qx} \right) - p \right]. \quad (5.2)$$

Keďže je výraz (5.2) rastúcou funkciou od x , použijeme Tvrdenie 3.1.. Teda potrebujeme položiť výraz (5.2) rovný nule. Dostaneme

$$x_S = \frac{\rho c}{pq(1 - \rho)}. \quad (5.3)$$

Tým sme získali rovnovážnu hodnotu odozvy x_S , ktorá musí spĺňať pôvodné ohraňenie. Konštanty ρ , c , p a q sú kladné a keďže diskontná miera je logicky menšia ako jedna, tak hodnota $(1 - \rho)$ musí byť tiež kladná. Teda odozva x_S je kladná konštanta.

Keďže x_S je jedinou hodnotou odozvy na rovnovážnej úrovni, tak musí platiť $\dot{x}_S = 0$. Teda stavovú rovnicu položíme rovnú nule a vyjadríme z nej riadenie, ktoré zodpovedá rovnovážnej úrovni.

$$u_S = \frac{x_S}{qx_S} = \frac{1}{q} \quad (5.4)$$

Riadenie u_S musí spĺňať pôvodné ohraňenie na riadenie, teda musí ležať v intervale $(0, U)$. Vieme, že konštanta q je kladná, teda hodnota u_S je kladná. Keďže maximálna miera chytania rýb U je dostatočne veľká, tak predpokladáme, že riadenie u_S je menšie ako hodnota U . Tým sme získali, že riadenie u v závislosti od x môže nadobúdať len tri hodnoty a to

$$u(x) = \begin{cases} U & \text{ak } x > x_S, \\ \frac{1}{q} & \text{ak } x = x_S, \\ 0 & \text{ak } x < x_S. \end{cases} \quad (5.5)$$

Aj v tejto úlohe celkový časový priebeh riadenia a jeho odozvy bude závisieť od veľkosti času T a od počiatočného a koncového množstva rýb x_0 a x_T . Keďže tieto hodnoty nepoznáme, nemôžeme určiť presný tvar riadenia a jeho odozvy. No na základe Všeobecného prípadu z Kapitoly 3, konkrétnejšie na základe Vety 3.1. vieme povedať, že optimálne je dostať sa čo najrýchlejšie z hodnoty x_0 na rovnovážnu hodnotu x_S , na tejto hodnote zotrvať čo možno najdlhšie a potom sa čo najrýchlejšie dostať do hodnoty x_T . Daná odozva sa realizuje s prislúchajúcim riadením.

Napriek tomu, že v knihe [5, str. 268-273] bola úloha riešená iba na nekonečnom časovom horizonte, tak sa naše riešenie zhoduje s riešením v spomínanej knihe. Ale treba vyzdvihnúť prínos našej práce, že po dosadení funkcie x za funkciu prirodzeného rastu množstva rýb $g(x)$ sme dostali aj konkrétne vzťahy pre optimálne riadenie a jeho odozvu na rovnovážnej úrovni. Zatiaľ čo v uvedenej práci bolo riešenie len všeobecné a vyjadrené len po výraz $I(x)$.

5.1.2 Riešenie na nekonečnom časovom horizonte

Na nekonečnom časovom horizonte čas T nahradíme nekonečnom. O pevnom alebo voľnom konci netreba hovoriť, preto v tomto prípade nie je podmienka na pevný koniec. Účelová funkcia tejto úlohy bude vyzerat nasledovne

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (pqx - c)u dt \rightarrow \max.$$

Optimálne riadenie a jeho odozva na rovnovážnej úrovni sú rovnaké ako v prípade konečného časového horizontu s pevným koncom. Teda riadenie u_S je dané vzťahom (5.4) a odozva x_S je určená vzťahom (5.3). A takisto riadenie môže nadobúdať len tri možnosti, ktoré sú dané (5.5).

Keďže ide o úlohu na nekonečnom časovom horizonte, musí byť splnená limitná podmienka, ktorú sme definovali vo všeobecnej úlohe v Kapitole 4. Táto podmienka je daná vzťahom (4.11) a pre našu úlohu má tvar

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \int_{x_S}^{x_T} \left(-\frac{pqx - c}{qx} \right) dx \leq 0. \quad (5.6)$$

Túto podmienku následne rozpíšeme pre prípad opustenia rovnovážnej hodnoty odozvy natrvalo smerom nadol

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \int_{x_S}^{x_T} \left(-\frac{pqx - c}{qx} \right) dx &= - \lim_{T \rightarrow \infty} pe^{-\rho T} \int_{x_S}^{x_T} 1 dx + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{c}{q} e^{-\rho T} \int_{x_S}^{x_T} \frac{1}{x} dx = \\ &= - \lim_{T \rightarrow \infty} pe^{-\rho T} [x_T - x_S] + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{c}{q} e^{-\rho T} [\ln x_T - \ln x_S]. \end{aligned}$$

Oba výrazy v hranatých zátvorkách sú záporné pre všetky T a keďže odozva x_T nemôže nadobúdať záporné hodnoty, tak sú oba aj ohraničené. Prvá limita je nulová, pretože výraz $-p[x_T - x_S]$ je stále kladný a $e^{-\rho T}$ v limite pre T idúce do nekonečna je nulový. Druhá limita je nekladná, pretože pre všetky hodnoty T je výraz $\frac{c}{q} [\ln x_T - \ln x_S]$ záporný a výraz $e^{-\rho T}$ je kladný. A teda celá limita je nekladná a podmienka daná vzťahom (5.6) je splnená.

Podmienka pre prípad opustenia rovnovážnej hodnoty odozvy natrvalo smerom nahor je rovnaká, teda daná vzťahom (5.6). Rozpíšeme ju

$$- \lim_{T \rightarrow \infty} pe^{-\rho T} x_T + \lim_{T \rightarrow \infty} pe^{-\rho T} x_S + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{c}{q} e^{-\rho T} \ln x_T - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{c}{q} e^{-\rho T} \ln x_S. \quad (5.7)$$

Prvá limita je nekladná, pretože výraz $-px_T$ je stále záporný a výraz $e^{-\rho T}$ je kladný. Druhý a štvrtý výraz je nulový, pretože hodnoty x_S a $\ln x_S$ sú konštanty a zároveň výraz $e^{-\rho T}$ v limite pre T do nekonečna je nulový. Na tretí výraz musíme použiť L'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{c}{q} e^{-\rho T} \ln x_T = \frac{c}{q} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln x_T}{e^{\rho T}} \stackrel{L'H}{=} \frac{c}{q} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_T} \dot{x}_T}{\rho e^{\rho T}} = \frac{c}{q} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(1 - qu)}{\rho e^{\rho T}}$$

Hodnotu riadiacej premennej $u(t)$ v čitateli nepoznáme, preto tento výraz ohraničíme krajnými hodnotami riadenia.

$$\frac{c}{q} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(1 - qU)}{\rho e^{\rho T}} \leq \frac{c}{q} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(1 - qu)}{\rho e^{\rho T}} \leq \frac{c}{q} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(1 - q\frac{1}{q})}{\rho e^{\rho T}}$$

Obe krajné limity sa rovnajú nule, preto sa aj limita medzi nimi musí rovnať nule. A keďže sú tri výrazy vo vzťahu (5.7) nulové a jeden je nekladný, tak je celý výraz (5.7) nekladný. Tým je limitná podmienka daná vzťahom (5.6) splnená aj pre prípad opustenia rovnovážnej hodnoty odozvy smerom nahor.

Podobne ako v prípade konečného časového horizontu s pevným koncom aj teraz celkový časový priebeh riadenia a jeho odozvy bude závisieť od veľkosti času T a od počiatočného množstva rýb x_0 . Keďže tieto hodnoty nepoznáme, nemôžeme určiť presný tvar riadenia a jeho odozvy. No na základe Všeobecnej úlohy na nekonečnom časovom horizonte z Kapitoly 4, konkrétnejšie na základe Vety 4.1. vieme povedať, že optimálne je dostať sa čo najrýchlejšie z hodnoty x_0 na rovnovážnu hodnotu x_S a na tejto hodnote zotrvať až do nekonečna. Inými slovami nie je optimálne natrvalo, ale ani dočasne opustiť rovnovážnu hodnotu odozvy x_S .

Taktiež môžeme spomenúť, že riešenie je zhodné s riešením uvedeným v knihe [5, str. 268-273], no naše riešenie je konkrétne a dopracovali sme sa až k vzťahom pre optimálne riadenie a jeho odozvu na rovnovážnej úrovni.

5.2 Vidale-Wolfeov reklamný model

Aj tento model je popísaný a riešený v knihe [5, str. 194-205]. V tejto práci je úloha riešená na konečnom časovom horizonte s pevným koncom. My ju však budeme riešiť aj na nekonečnom časovom horizonte.

Model popisuje, ako reklama pôsobí na predaj daného výrobku. Maximalizuje príjem z predaja výrobkov, pričom ráta aj s výdavkami určenými na reklamu. Zastáva názor, že efekt reklamy je potrebný na vyšší zisk firmy, ale vzhľadom na čas sa tento efekt znižuje. Hoci tento model obsahuje aj ohraničenia na stav, ukážeme, že pomocou použitia Greenovej vety sa dá ľahko riešiť. Ohraničenia neskomplikujú postup riešenia. Úloha je nasledovná

$$J = \int_0^T e^{-\rho t} (\pi x - u) dt \rightarrow \max$$

pri podmienkach

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ru(1-x) - \delta x, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ pevné,} \\ x(0) &= x_0, \\ x(T) &= x_T, \\ 0 &\leq x \leq 1, \\ 0 &\leq u \leq Q,\end{aligned}$$

kde $Q, r, \delta, \rho, x_0, x_T$ a T sú dané kladné konštanty. Riadiaca premenná $u(t)$ vyjadruje mieru výdavkov na reklamu a stavová premenná $x(t)$ popisuje mieru predaja. Označme π ako príjem z maximálneho predaja korešpondujúci s $x = 1$. Konštantu Q je maximálne dovolená miera výdavkov na reklamu. V porovnaní s pôvodným zadaním budeme brať do úvahy len dostatočne veľkú hodnotu tejto konštanty. A konštantu ρ je spojitá diskontná miera.

Poznámka V spomínanej knihe [5] stavová premenná $x(t)$ označuje podiel aktuálnej miery predaja $S(t)$ k maximálne možnej miere predaja $M(t)$ na trhu v čase t , t.j.

$$x = \frac{S}{M}. \quad (5.8)$$

Potom je splnená podmienka $x(t) \in [0, 1]$, ak $x_0 \in [0, 1]$. Konštanty r a δ sú definované ako

$$r = \frac{a}{M}, \quad \delta = b + \frac{\dot{M}}{M},$$

kde konštantu a je účinok reklamy, ktorá pôsobí na nepredaný výrobok na trhu a konštantu b je strata zo zabudnutia, ktorá pôsobí na predaný výrobok na trhu.

5.2.1 Riešenie na konečnom časovom horizonte s pevným koncom

Prejdeme k riešeniu tejto úlohy. Aby sme mohli aplikovať na úlohu Všeobecný prípad z Kapitoly 3., zo vzťahov (3.8) vyjadríme konkrétne $A(x)$ a $B(x)$, ktoré sú

$$A(x) = \left(\pi x - \frac{\delta x}{r(1-x)} \right), \quad B(x) = - \left(\frac{1}{r(1-x)} \right). \quad (5.9)$$

Pre riešenie je rozhodujúci výraz $I(x)$ definovaný v (3.10). Tento výraz má pre našu úlohu tvar

$$I(x) = \left[\frac{\rho}{r(1-x)} - \pi + \frac{\delta}{r(1-x)^2} \right]. \quad (5.10)$$

Keďže je na intervale $[0, 1]$ výraz (5.10) rastúcou funkciou od x , použijeme Tvrdenie 3.1.. Teda potrebujeme zistiť, kde je výraz $I(x)$ daný vzťahom (5.10) väčší od nuly a kde je menší od nuly a preto ho položíme rovný nule. Tým dostaneme

$$x = 1 - \frac{2\delta}{-\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\pi r \delta}}. \quad (5.11)$$

Aby sme udržali hodnotu x v intervale $(0, 1)$, v menovateli pred odmocninou budeme brať kladné znamienko. A keďže táto hodnota môže nadobúdať aj záporné hodnoty a my vieme, že musí platiť, že optimálne x musí byť nezáporné, preto dostaneme

$$x_S = \max\left\{1 - \frac{2\delta}{-\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\pi r\delta}}, 0\right\}. \quad (5.12)$$

Tým sme získali rovnovážnu hodnotu odozvy x_S .

Keďže x_S je jedinou hodnotou odozvy na rovnovážnej úrovni, tak musí platiť $\dot{x}_S = 0$. Teda stavovú rovnicu položíme rovnú nule a vyjadríme z nej riadenie, ktoré zodpovedá rovnovážnej úrovni

$$u_S = \frac{\delta x_S}{r(1 - x_S)}. \quad (5.13)$$

Riadenie u_S musí spĺňať pôvodné ohraničenie na riadenie, teda musí ležať v intervale $(0, Q)$. Vieme, že konštanty r a δ sú kladné, a hodnoty x_S a $(1 - x_S)$ sú z intervalu $(0, 1)$, teda hodnota u_S je kladná. Keďže konštanta Q je dosť veľká, tak predpokladáme, že riadenie u_S je menšie ako Q . Teda sme dostali, že riadenie môže v závislosti od x nadobúdať tri hodnoty a to

$$u(x) = \begin{cases} Q & \text{ak } x > x_S, \\ \frac{\delta x_S}{r(1 - x_S)} & \text{ak } x = x_S, \\ 0 & \text{ak } x < x_S. \end{cases} \quad (5.14)$$

Opäť celkový časový priebeh riadenia a jeho odozvy bude závisieť od veľkosti času T a od počiatkovej a koncovej hodnoty miery predaja x_0 a x_T . Keďže tieto hodnoty nepoznáme, nemôžeme určiť presný tvar riadenia a jeho odozvy. No na základe všeobecného prípadu, konkrétnejšie na základe Vety 3.1. vieme povedať, že optimálne je dostať sa čo najrýchlejšie z hodnoty x_0 na rovnovážnu hodnotu x_S , čo najdlhšie na tejto hodnote zotrvať a potom čo najrýchlejšie sa dostať na hodnotu x_T . Daná odozva sa realizuje s prislúchajúcim riadením.

Tiež môžeme povedať, že pôvodné riešenie uvedené v spomínanej knihe je zhodné s naším, pričom sme uviedli len ten prípad, kedy je maximálne dovolená miera výdavkov na reklamu Q dostatočne veľká.

5.2.2 Riešenie na nekonečnom časovom horizonte

Na nekonečnom časovom horizonte čas T nahradíme nekonečnom. O pevnom alebo voľnom konci netreba hovoriť, preto v tomto prípade nie je podmienka na pevný koniec. Účelová funkcia tejto úlohy bude vyzeráť nasledovne

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (\pi x - u) dt \rightarrow \max.$$

Riadenie a jeho odozva na rovnovážnej úrovni sú rovnaké ako v prípade konečného časového horizontu s pevným koncom. Teda riadenie u_S je dané vzťahom (5.13) a odozva x_S je určená vzťahom (5.12). A teda riadenie môže nadobúdať len tri možnosti, ktoré sú dané (5.14).

Keďže ide o úlohu na nekonečnom časovom horizonte, musí byť splnená limitná podmienka, ktorú sme definovali vo všeobecnej úlohe v Kapitole 4. Táto podmienka je daná vzťahom (4.11) a pre našu úlohu má tvar

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \int_{x_S}^{x_T} \left(-\frac{1}{r(1-x)} \right) dx \leq 0. \quad (5.15)$$

Túto podmienku následne rozpíšeme

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \int_{x_S}^{x_T} \left(-\frac{1}{r(1-x)} \right) dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{r} e^{-\rho T} \int_{x_S}^{x_T} \left(-\frac{1}{1-x} \right) dx = \\ &= \frac{1}{r} \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} [\ln(1-x_T) - \ln(1-x_S)]. \end{aligned}$$

Keďže vieme, že odozva x_T je ohraničená intervalom $(0, 1)$, tak v oboch prípadoch trvalého opustenia rovnovážnej hodnoty odozvy smerom nahor alebo smerom nadol je výraz v hranatej zátvorke ohraničený. V prípade opustenia rovnovážnej hodnoty odozvy smerom nadol je výraz $\frac{1}{r}[\ln(1-x_T) - \ln(1-x_S)]$ kladný a tiež vieme, že výraz $e^{-\rho T}$ v limite pre T idúce do nekonečna je nulový. Potom celá limita je nulová. V prípade opustenia rovnovážnej hodnoty odozvy smerom nahor je výraz $\frac{1}{r}[\ln(1-x_T) - \ln(1-x_S)]$ záporný a $e^{-\rho T}$ je kladný. Tým je celá limita nekladná. A teda podmienka daná vzťahom (5.15) je pre oba prípady splnená.

Podobne ako v prípade konečného časového horizontu s pevným koncom aj teraz celkový časový priebeh riadenia a jeho odozvy bude závisieť od veľkosti času T a od počiatočnej hodnoty miery predaja x_0 . Keďže tieto hodnoty nepoznáme, nemôžeme určiť presný tvar riadenia a jeho odozvy. No na základe Všeobecnej úlohy na nekonečnom časovom horizonte z Kapitoly 4, konkrétnejšie na základe Vety 4.1. vieme povedať, že optimálne je dostať sa čo najrýchlejšie z hodnoty x_0 na rovnovážnu hodnotu x_S a na tejto hodnote zotrvať až do nekonečna. Inými slovami nie je optimálne natrvalo, ale ani dočasne opustiť rovnovážnu hodnotu odozvy x_S .

Hoci úloha na nekonečnom časovom horizonte nebola v knihe [5, str. 194-205] riešená, my sme ju vyriešili. Výsledky sa zhodujú s prípadom na konečnom časovom horizonte s pevným koncom a taktiež je splnená limitná podmienka.

5.3 Model optimálneho riadenia epidémie

Tento model je tiež popísaný a riešený v knihe [5, str. 295-298]. V tejto práci je úloha riešená na konečnom časovom horizonte s pevným koncom a takisto ju budeme aj my riešiť. Keďže sa jedná o epidémiu, tak nie je logické hovoriť o nekonečnom časovom horizonte.

V modeli sa budeme zaoberať počtom nakazených obyvateľov pri optimálnom stupni liečenia. Napriek tomu, že tento model obsahuje aj stavové ohraničenia, ukážeme, že pomocou

použitia Greenovej vety sa dá ľahko riešiť. Teda ohraničenia neskomplikujú postup riešenia. Účelom tejto úlohy optimálneho riadenia je minimalizovať súčasnú hodnotu nákladov na liečenie do časového horizontu T . Úlohu sformulujeme nasledovne

$$J = \int_0^T e^{-\rho t} [-(Cx + Ku)] dt \rightarrow \max$$

pri podmienkach

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \beta x(N - x) - ux, \quad t \in [0, T], \quad T \text{ pevné,} \\ x(0) &= x_0, \\ x(T) &= x_T, \\ 0 &\leq x \leq N, \\ 0 &\leq u \leq Q, \end{aligned}$$

kde $C, K, N, Q, \beta, \rho, x_0, x_T$ a T sú dané kladné konštanty. Konštantu N je celková pevná populácia. Stavová premenná $x(t)$ je počet nakazených obyvateľov v čase t a $N - x(t)$ je množstvo náchylného obyvateľstva. Pre jednoduchosť modelu predpokladáme, že imunita sa nedá získať tak, že nakazení ľudia budú v izolácií. Oni ostávajú stále náchylní. Stavová rovnica reguluje dynamiku epidemického rozsahu populácie. Riadiaca premenná $u(t)$ popisuje stupeň liečenia a konštantu β určuje nákazlivosť choroby. Časový horizont T označuje koniec sezóny pre danú chorobu. Konštantu C určuje jednotku spoločenských nákladov na nakazeného, konštantu K označuje náklady na jeden stupeň liečenia a konštantu Q je maximálny stupeň liečenia. Konštantu ρ je spojitá diskontná miera.

5.3.1 Riešenie na konečnom časovom horizonte s pevným koncom

Prejdeme k riešeniu tejto úlohy. Aby sme mohli aplikovať na úlohu Všeobecný prípad z Kapitoly 3., zo vzťahov (3.8) vyjadríme konkrétne $A(x)$ a $B(x)$, ktoré sú

$$A(x) = (-Cx - K\beta(N - x)) \quad , \quad B(x) = \left(\frac{K}{x}\right). \quad (5.16)$$

Pre riešenie je rozhodujúci výraz $I(x)$ definovaný v (3.10). Tento výraz má pre našu úlohu tvar

$$I(x) = \left[-\frac{K\rho}{x} + C - K\beta\right]. \quad (5.17)$$

Keďže je tento výraz rastúcou funkciou od premennej x , použijeme Tvrdenie 3.1.. Teda potrebujeme zistiť, kde je výraz $I(x)$ daný vzťahom (5.17) väčší od nuly a kde je menší od nuly a preto ho položíme rovný nule. Tým dostaneme

$$x = \frac{\rho}{C/K - \beta} = \frac{\rho}{\theta}, \quad (5.18)$$

kde $\theta = C/K - \beta$. Treba predpokladať, že hodnota θ je kladná konštantu. Tým sme získali rovnovážnu hodnotu odozvy x_S , ktorá musí byť v intervale $(0, N)$. Preto platí

$$x_S = \begin{cases} \rho/\theta & \text{ak } 0 < \rho/\theta < N, \\ N & \text{inak.} \end{cases} \quad (5.19)$$

Keďže x_S je v každom prípade jedinou hodnotou odozvy (pre každú presne zvolenú konfiguráciu dát) na rovnovážnej úrovni a to buď ρ/θ alebo N , tak musí platiť $\dot{x}_S = 0$. Teda stavovú rovnicu položíme rovnú nule a vyjadríme z nej riadenie, ktoré zodpovedá rovnovážnej úrovni. Dostaneme

$$u_S = \beta(N - x_S) = \begin{cases} \beta(N - \rho/\theta) & \text{ak } 0 < \rho/\theta < N, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (5.20)$$

Teda sme dostali, že riadenie u môže v závislosti od momentálneho stavu x nadobúdať len tri hodnoty a to

$$u(x) = \begin{cases} Q & \text{ak } x > x_S, \\ u_S & \text{ak } x = x_S, \\ 0 & \text{ak } x < x_S. \end{cases} \quad (5.21)$$

Celkový časový priebeh riadenia a jeho odozvy bude závisieť od veľkosti času T a od počiatkovej a koncovkej hodnoty nakazeného obyvateľstva x_0 a x_T . Keďže tieto hodnoty nepoznáme, nemôžeme určiť presný tvar riadenia a jeho odozvy. No na základe všeobecného prípadu, konkrétnejšie na základe Vety 3.1. vieme povedať, že optimálne je dostať sa čo najrýchlejšie z hodnoty x_0 na rovnovážnu hodnotu x_S , čo najdlhšie na tejto hodnote zotrvať a potom čo najrýchlejšie sa dostať na hodnotu x_T . Daná odozva sa realizuje s prislúchajúcim riadením.

Tiež môžeme povedať, že pôvodné riešenie uvedené v spomínanej knihe je zhodné s naším.

5.4 Model ekonomického rastu

5.4.1 Riešenie na nekonečnom časovom horizonte

Model z Kapitoly 2. budeme riešiť aj na nekonečnom časovom horizonte ale s malou zmenou, do účelovej funkcie pridáme diskontný faktor. Čas T nahradíme nekonečnom a preto v tomto prípade nie je podmienka na pevný koniec. Formulácia tejto úlohy bude vyzerať nasledovne

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} (1 - s(t)) f(k(t)) dt \rightarrow \max$$

pri podmienkach

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= s(t)f(k(t)) - \delta k(t), \\ k(0) &= k_0, \\ s(t) &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

Prejdeme k riešeniu tejto úlohy. Najskôr z Kapitoly 3., presnejšie zo vzťahov (3.8) vyjadríme konkrétne $A(x)$ a $B(x)$, ktoré sú

$$A(k) = (f(k) - \delta k) \quad , \quad B(k) = (-1). \quad (5.22)$$

Pre riešenie je rozhodujúci výraz $I(x)$ definovaný v (3.10). Tento výraz má pre našu úlohu tvar

$$I(k) = [\rho - f'(k) + \delta]. \quad (5.23)$$

Keďže je tento výraz rastúcou funkciou od premennej k , použijeme Tvrdenie 2.1. a Tvrdenie 3.1.. Teda potrebujeme zistiť, kde je výraz $I(k)$ daný vzťahom (5.23) väčší od nuly a kde je menší od nuly a preto ho položíme rovný nule. Tým dostaneme

$$f'(k) = \rho + \delta \Leftrightarrow k = k_Z. \quad (5.24)$$

Získali sme rovnovážnu hodnotu odozvy, ktorou je hodnota k_Z . Keďže k_Z je jedinou hodnotou stavu na rovnovážnej úrovni, tak odozva na tejto úrovni musí byť konštantná a teda platí $\dot{k}_Z = 0$. Teda stavovú rovnicu položíme rovnú nule a dostaneme optimálne riadenie na rovnovážnej úrovni

$$s_Z = \frac{\delta k_Z}{f(k_Z)}. \quad (5.25)$$

Výraz (5.25) je zhodný so vzťahom (2.26), ktorý sme dostali v prípade konečného časového horizontu s pevným koncom bez diskontácie. Aj v takto zadefinovanej úlohe môže riadenie nadobúdať len tri možnosti

$$s = \begin{cases} 1 \\ \frac{\delta k_Z}{f(k_Z)} \\ 0 \end{cases}, \quad (5.26)$$

čo je zhodné so vzťahom (2.27).

Keďže ide o úlohu na nekonečnom časovom horizonte, musí byť splnená limitná podmienka, ktorú sme definovali vo všeobecnej úlohe v Kapitole 4. Táto podmienka je daná vzťahom (4.11) a pre našu úlohu má tvar

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \int_{k_Z}^{k_T} (-1) dx \leq 0. \quad (5.27)$$

Podmienku (5.27) následne rozpíšeme

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \int_{k_Z}^{k_T} (-1) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} [k_Z - k_T]. \quad (5.28)$$

V prípade trvalého opustenia rovnovážnej hodnoty odozvy smerom nadol je rozdiel dvoch hodnôt v hranatej zátvorke kladný, ale pretože kapitál k_T nemôže byť záporný, tak je tento rozdiel ohraničený. A tiež vieme, že výraz $e^{-\rho T}$ v limite pre T idúce do nekonečna je nulový, tak limitná podmienka daná vzťahom (5.27) je nulová.

V prípade trvalého opustenia rovnovážnej hodnoty odozvy smerom nahor je výraz $[k_Z - k_T]$ záporný pre všetky T a zároveň výraz $e^{-\rho T}$ je kladný. Tým pádom limita (5.28) je nekladná a teda limitná podmienka, ktorá je daná vzťahom (5.27), je splnená.

Podobne ako v prípade konečného časového horizontu s pevným koncom aj teraz celkový časový priebeh riadenia a jeho odozvy bude závisieť od veľkosti času T a od počiatočnej hodnoty kapitálu k_0 . Keďže tieto hodnoty nepoznáme, nemôžeme určiť presný tvar riadenia a jeho odozvy. No na základe Všeobecnej úlohy na nekonečnom časovom horizonte z Kapitoly 4, konkrétnejšie na základe Vety 4.1. vieme povedať, že optimálne je dostať sa čo možno najrýchlejšie z hodnoty k_0 na rovnovážnu hodnotu k_Z a na tejto hodnote zotrvať až do nekonečna. Inými slovami nie je optimálne natrvalo, ale ani dočasne opustiť rovnovážnu hodnotu odozvy k_Z .

Podobne ako riešenie modelu v prípade konečného časového horizontu s pevným časom bez diskontácie je aj riešenie na nekonečnom časovom horizonte s diskontáciou našou vlastnou prácou, pretože podľa našich vedomostí takto zadaný model nebol nikde riešený pomocou použitia Greenovej vety.

Kapitola 6

Použitá matematická teória

6.1 Greenova veta

Greenova veta udáva vzťah medzi krivkovým integrálom pozdĺž jednoduchej uzavretej krivky C a dvojným integrálom na oblasti R , ktorá je krivkou C ohraničená.

Veta 6.1 (Greenova veta). [3] *Nech C je kladne orientovaná, po častiach hladká, jednoduchá uzavretá krivka v rovine \mathbb{R}^2 . A nech R je uzavretá oblasť v rovine \mathbb{R}^2 ohraničená krivkou C . Nech $F(x, y)$ a $G(x, y)$ sú funkcie definované na otvorenej oblasti obsahujúcej R , ktoré majú v R spojité prvé parciálne derivácie. Potom*

$$\oint_C F dx + G dy = \iint_R \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy, \quad (6.1)$$

kde výraz na ľavej strane je krivkový integrál pozdĺž krivky C a výraz vpravo je štandardný dvojný integrál na oblasti R .

Ilustračný príklad

Oblasť R môže byť popísaná napríklad tromi nasledujúcimi krivkovými integrálmi.

$$\oint_C -y dx = \oint_C x dy = \frac{1}{2} \left[\oint_C -y dx + x dy \right].$$

Tieto integrály sme dali do rovnosti, pretože ak na ne aplikujeme Greenovu vetu, dostaneme rovnaký výsledok. Je vidieť, že prvé dva krivkové integrály sa rovnajú výrazu $\iint_R dx dy$.

Preto chceme overiť, či aj tretí integrál dáva rovnaký výsledok ako prvé dva. Nech $F = -y$, $G = x$, potom $\partial G/\partial x = 1$ a $\partial F/\partial y = -1$. Potom platí

$$\frac{1}{2} \left[\oint_C -y dx + x dy \right] = \frac{1}{2} \iint_R [1 - (-1)] dx dy = \iint_R dx dy.$$

Tým sme dokázali, že sa všetky tri integrály rovnajú.

6.2 Formulácia PPM pre úlohu optimálneho riadenia

Pod úlohou optimálneho riadenia (ozn. ÚOR) budeme rozumieť autonómnu úlohu s pevným časom a pevným koncom, bez ohraničení na stavovú premennú, s Lagrangeovou účelovou funkciou popísanú nasledovne:

$$\begin{aligned} \max J(T, u(\cdot)) &= \int_0^T f^0(x(t), u(t)) dt; \text{ kde } f^0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}; \\ \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)); \text{ } t \in [0, T]; \text{ } T \text{ pevné; kde } f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n; \\ x(0) &= x_0; \\ x(T) &\in C = \{x \mid g(x) = 0\}; \text{ kde } g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l; \\ u(t) &\in U; \text{ } t \in [0, T]; \\ x(t) &\in \mathbb{R}^n; \text{ } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Budeme predpokladať, že $f, f^0, g \in C^1$. Ďalej budeme predpokladať, že $l \leq n$ a že vektory $\frac{\partial g^i(x)}{\partial x}(x)$ sú lineárne nezávislé pre každé $x \in C$.

Veta 6.2 (Pontrjaginov princíp maxima). [2] *Nech $\hat{u}(t)$, $t \in [0, \hat{T}]$ je optimálne riadenie pre ÚOR a nech $\hat{x}(t)$ je jeho odozva. Potom existuje $(\Psi^0, \Psi(t)) \neq 0, \Psi^0 \geq 0$, ktoré je spojitým riešením adjungovanej rovnice (AR) a podmienky transversality (PT) také, že sú splnené podmienka maxima (PM) a podmienka stacionarity (PS).*

Pod adjungovanou rovnicou (AR) rozumieme

$$\dot{\Psi}(t) = -\Psi^0 \left(\frac{\partial f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T - \left(\frac{\partial f(\hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^T \Psi(t). \quad (\text{AR})$$

Podmienka transversality (PT) je definovaná

$$\exists \chi \in \mathbb{R}^l : \Psi(T) = \left(\frac{\partial g(\hat{x}(\hat{T}))}{\partial x} \right)^T \chi. \quad (\text{PT})$$

Pod podmienkou maxima (PM) budeme rozumieť

$$\Psi^0 f^0(\hat{x}(t), u(t)) + \Psi(t)^T f(\hat{x}(t), u(t)) \rightarrow \max_{u(t) \in U}, \quad \forall t \in [0, \hat{T}] \quad (\text{PM})$$

a podmienkou stacionarity (PS)

$$\Psi^0 f^0(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) + \Psi(t)^T f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \equiv \text{konšt.}, \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (\text{PS})$$

Poznámka

ÚOR je úloha autonómna. Pri neautonómnosti sa znenie PPM mierne zmení. Podmienky (PM), (AR) a (PT) zostávajú rovnaké, zmení sa len podmienka (PS) a to tak, že (PS) v tomto prípade neexistuje.

Kapitola 7

Záver

Cieľom tejto práce bolo podrobne popísať postup riešenia spojitéch úloh optimálneho riadenia, pri ktorom sa používa Greenova veta.

Najskôr sme predstavili jednoduchý Model ekonomického rastu, na ktorom sme podrobne popísali jednotlivé kroky výpočtu. Pre porovnanie sme tento model riešili aj pomocou PPM. V oboch prípadoch vyšli rovnaké výsledky, ktoré sme zhrnuli do Vety 2.1. Potom sme naše vedomosti použili pri riešení všeobecnej úlohy na konečnom časovom horizonte s pevným koncom. Aj v tomto prípade sme dospeli k rovnakému záveru a to k Vete 3.1. Neobmedzili sme sa len na úlohy na konečnom časovom horizonte s pevným koncom. Všeobecnú úlohu z Kapitoly 3. sme rozšírili na nekonečný časový horizont. Opäť sme výpočty zhrnuli do Vety 4.1. a navyše sme zistili, že v tomto prípade musí byť splnená limitná podmienka vyjadrená vzťahom (4.11). Nakoniec sme daný postup riešenia ilustrovali na konkrétnych príkladoch z ekonómie, marketingu ale aj z oblasti prírodných zdrojov.

Napokon môžeme zhrnúť, že riešenie jednotlivých príkladov pomocou použitia Greenovej vety je oveľa jednoduchšie ako pomocou použitia PPM. Za zjednodušenie výpočtov môže fakt, že nie je potrebné rozoberať analýzu adjungovanej premennej. A tiež spomenieme ďalšiu výhodu použitia Greenovej vety. Pomocou Greenovej vety vieme jednoduchšie riešiť aj úlohy s ohraňeniami na stavové premenné, ako to môžeme vidieť na príkladoch 5.2 a 5.3 z Kapitoly 5. Zatiaľ čo pomocou použitia PPM by to bolo dosť komplikované a navyše by adjungované funkcie mohli vykazovať nespojitosti.

Tiež treba povedať, že nevýhodou riešenia úloh pomocou Greenovej vety je to, že sa týmto spôsobom nedajú vyriešiť všetky úlohy. Dajú sa riešiť len úlohy optimálneho riadenia, ktoré sú definované na konečnom časovom horizonte s pevným koncom alebo úlohy na nekonečnom časovom horizonte. Pomocou našich doterajších vedomostí nevieme riešiť úlohy na konečnom časovom horizonte s voľným koncom. Rovnako sa týmto spôsobom dajú riešiť len úlohy s účelovou funkciou a stavovou rovnicou, ktoré sú lineárne v riadení.

Literatúra

- [1] Brunovský P.: Matematická teória optimálneho riadenia, Alfa Bratislava, 1980.
- [2] Halická M.: Optimálne riadenie II. (Učebné texty), Bratislava, 2009.
- [3] Kamien M.I., Schwartz N.L.: Dynamic Optimization, The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management, North-Holland, 1991.
- [4] Seierstad A., Sydsaeter K.: Optimal Control Theory with Economic Applications, North-Holland, 1987.
- [5] Sethi S.P., Thompson G.L.: Optimal Control Theory, Applications to Management Science and Economics, Springer, 2000.